MSK推导

2018年5月31日 14:03

$\mathrm{s(t)} = \mathrm{x(t)}\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$
通常又将前者称作同相分量（In-phase component），后者称为正交分量（Quadrature component）。

来自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%98%9F%E5%BA%A7%E5%9B%BE_(%E6%95%B0%E5%AD%97%E9%80%9A%E4%BF%A1)>

真正的信号频率是
$\mathrm{f} \pm \frac{1}{4\mathrm{T_s}}$
输入原码：$\mathrm{a_k}$
实际上一个原码的时间长度就是Ts，也就是baud rate
由于MSK信号是从2FSK信号发展而来的，意味：2进制的码元，每个码元含有1b的信息。
4FSK意味：4进制的码元，每个码元含有2b的信息。2FSK中fb=fs，4FSK中fb=2fs

$$\mathrm{s_k(t)} = \mathrm{Acos}\left(\omega_c t + \frac{a_k\pi}{2T_s}t + \varphi_k\right) \qquad kT_s < t \le (k+1)T_s$$

$$\varphi_\mathrm{k} = \varphi_\mathrm{k-1} + \frac{\mathrm{k\pi}}{2}(\mathrm{a_{k-1}} - \mathrm{a_k}) = \begin{cases}\varphi_{k-1} & \text{当}a_k{=}a_{k-1}\text{时} \\ \varphi_{k-1} \pm \mathrm{k\pi} & \text{当}a_k{\neq}a_{k-1}\text{时}\end{cases} \pmod{2\pi}$$

假设$\varphi_\mathrm{k-1}$的初始参考值为0，则$\varphi_\mathrm{k} = 0$或π

$$\mathrm{s_k(t)} = \mathrm{I_k}\cos\frac{\pi t}{2T_s}\cos\omega_c t - \mathrm{Q_k}\sin\frac{\pi t}{2T_s}\sin\omega_c t \qquad (k-1)T_s < t \le kT_s$$

$\mathrm{I_k(t)} = \cos\varphi_k\ \mathrm{Q_k(t)} = \mathrm{a_k}\cos\varphi_k = a_k I_k(t)$

解调

$$\mathrm{Q_k(t)} = \mathrm{s_k}\cdot\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{a_k\pi}{2T_s}t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A}{2}\sin\left(\frac{a_k\pi}{2T_s}t + \varphi_k\right)$$

$$\mathrm{I_k(t)} = \mathrm{s_k}\cdot\cos(\omega_c t) = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{a_k\pi}{2T_s}t + \varphi_k\right)$$

$$\mathrm{z_k(t)} = \mathrm{I_k(t)} + \mathrm{jQ_k(t)} = \frac{\mathrm{A}}{2}\mathrm{e}^{j\left(\frac{a_k\pi}{2T_s}t + \varphi_k\right)}$$

$$\mathrm{z_k^2(t)} = \frac{\mathrm{A^2}}{4}\mathrm{e}^{j\left(\frac{a_k\pi}{T_s}t + 2\varphi_k\right)}$$

- — 由于φ_k=0或π，则$2\varphi_\mathrm{k} = 0$或2π。

则有$\mathrm{z_k^2(t)} = \frac{\mathrm{A^2}}{4}\mathrm{e}^{j\frac{a_k\pi}{T_s}t}$

当$\mathrm{t} = 2\mathrm{nT_s}$时，$\mathrm{z_k^2} = \frac{\mathrm{A^2}}{4}\mathrm{e}^{j2na_k\pi}$

$\angle \mathrm{Z_k^2} = 0$

$\sqrt{\|\mathrm{Z_k^2}\|} = \frac{\mathrm{A}}{2}$

假设$\mathrm{z_k}$有一个附加相位φ，即

$$\mathrm{z_k(t)} = \frac{\mathrm{A}}{2}\mathrm{e}^{j\left(\frac{a_k\pi}{2T_s}t + \varphi_k + \varphi\right)}$$

$$\mathrm{z_k^2(t)} = \frac{\mathrm{A^2}}{4}\mathrm{e}^{j\left(\frac{a_k\pi}{T_s}t + 2\varphi\right)}$$

$\mathrm{F}(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$
$\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\omega_0 t}\right] = F(\omega-\omega_0)$
$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
如果对z_k^2进行傅里叶变换则有
另一种推导方法

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\left(\frac{a_k\pi}{T_s}t+2\varphi\right)}\right] = \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\frac{a_k\pi}{T_s}t}\cdot \mathrm{e}^{j2\varphi}\right] = \mathrm{e}^{j2\varphi}\cdot\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\frac{a_k\pi}{T_s}t}\right] = \mathrm{e}^{j2\varphi}\cdot 2\pi\delta\left(\omega-\frac{a_k\pi}{T_s}\right)$$

$$\mathcal{F}\left[z_k^2(t)\right] = 2\pi\cdot\frac{A^2}{4}\cdot e^{j2\varphi}\cdot\delta\left(\omega-\frac{a_k\pi}{T_s}\right)$$

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\left(\frac{a_k\pi}{T_s}t+2\varphi\right)}\right] = \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\frac{a_k\pi}{T_s}\left(t-\left(-2\varphi\cdot\frac{T_s}{a_k\pi}\right)\right)}\right] = 2\pi\delta\left(\omega-\frac{a_k\pi}{T_s}\right)\cdot\mathrm{e}^{-j\omega\left(-2\varphi\cdot\frac{T_s}{a_k\pi}\right)} = 2\pi\delta\left(\omega-\frac{a_k\pi}{T_s}\right)\cdot\mathrm{e}^{j2\varphi\cdot\omega\cdot\frac{T_s}{a_k\pi}}$$

$$\mathcal{F}\left[z_k^2(t)\right] = \frac{\pi}{2}A^2\cdot e^{j2\varphi}\cdot\delta\left(\omega-\frac{a_k\pi}{T_s}\right)$$

在离散频谱中，角频率$\omega=\frac{a_k\pi}{T_s}$处，复数值为$2\pi A^2 e^{j2\varphi}$。

它的模包含幅度，角度包含附加相位，由此即可求出所需变量。

T_s是baue rate, symbol rate。z_k^2的傅里叶变换中的频谱的峰值在角频率$\omega=\frac{a_k\pi}{T_s}$

，由于$\omega=2\pi f$，则$f=\frac{f_s}{2}$

由于$a_k=\pm1$，一般取一段时间Δt做傅里叶变换，这一段时间内，a_k有正有负，导致输出的频谱中含有正负频率。这两个频率处的复数的角度是相同的，但幅度可能不同。

fft的结果中，正负频率的值是共轭的。

zk2里面的码元的符号如果不是恒定的，就会引入很多杂波。只有提高fft变换的长度，才能增大fs/2处信号的信噪比。