

单元2.1 命题和联结词

第1章 命题逻辑的基本概念

1.1 命题与联结词

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

逻辑难题

- 一个岛上居住着两类人——骑士和流氓。骑士说的都是真话，而流氓总是说谎。现在碰到了两个人A和B，如果A说“B是骑士”，B说“我们两人不是一类人”。请判断A、B两人到底是骑士还是流氓。
- 假设A是骑士，那么他说的是真话，则B也是骑士，那么B也应当说真话，但B所说的并非如此，所以A不是骑士。
- 假设A是流氓，那么他说的是谎话，则B也是流氓，那么B也应当说谎话，与题目所给的条件一致，所以A和B都是流氓。

3

关于逻辑的故事

- 上帝真的是万能的吗？
- 让我们来提出一个问题：上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头？
- 如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头，那么上帝就不是万能的，因为有一块石头他举不起来。
- 如果上帝不能创造出一块连他自己都举不起来的石头，那么上帝也不是万能的，因为有一块石头他创造不出来。
- 所以无论上帝是否能创造出这么一块石头，他都不是万能的。

2

逻辑难题

- 假定在一个岛上住着三类人：骑士、流氓和普通人。骑士总是说真话，流氓总是说假话，普通人说话亦真亦假。侦探为了找出罪犯，询问了岛上的三个人Amy、Brenda和Claire。侦探知道三人中有一个是罪犯，但不知道是哪个人；同时他也知道罪犯是一个骑士，另两个不是骑士；此外，侦探还记录了如下供述。Amy说：“我是清白的”。Brenda说：“Amy说的是真的”。Claire说：“Brenda不是普通人”。经过分析，侦探找到了罪犯，他是谁呢？

<https://www.cnblogs.com/anderslly/archive/2011/03/04/discrete-math-part2.html>

4

数理逻辑

- 数理逻辑 (Mathematical Logic) 是研究演绎推理的一门学科; 它的主要研究内容是推理, 特别着重于**推理过程是否正确**; 它不是研究某个特定的语句是否正确, 而是**着重于语句之间的关系**。
- 它的主要研究方法是采用**数学的方法**来研究**数学推理、数学性质和数学基础**; 而所谓数学方法就是**引进一套符号体系**的方法, 所以数理逻辑又叫符号逻辑。



逻辑学的历史

- 古典形式逻辑: 亚里斯多德的直言三段论理论
Originally, logic dealt with arguments in the natural languages used by humans.

凡是经济学院的学生都应该学好经济理论。

大前提: 一个一般性的、囊括范围比较大的总原则
你是经济学院的学生。

小前提: 一个附属前面大前提的特殊化陈述
你应当学好经济理论。

结论: 由此引申出的特殊化陈述符合一般性原则的结论



逻辑学的历史

- 古典形式逻辑: 亚里斯多德的直言三段论理论
- 初始阶段(660s — 19 世纪末): 将数学应用于逻辑, 自然语言→符号语言
 - 莱布尼兹 (Leibniz): 现代逻辑的首席创始人
 - 布尔 (G. Boole): 奠基人, 逻辑的数学分析
- 过度阶段(19 世纪末— 1940 前后): 逻辑应用于数学
 - 康托尔(G. Cantor): 建立了朴素集合论
 - 罗素(Bertrand Russell): 《数学原理》
- 成熟阶段(1930s — 1970s): 成为数学的独立分支
- 成为计算机科学的理论基础
 - “Computer science started as Logic.”

M.Y. Vardi, *A brief history of logic*. Technical report, Rice University, 2003



为什么要研究数理逻辑

数理逻辑的核心是把**逻辑推理符号化**, 即象数学演算一样进行逻辑演算。计算机是数理逻辑和电子学相结合的产物

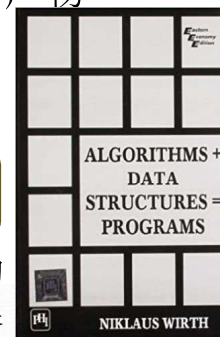
程序 = 算法 + 数据

算法 = 逻辑 + 控制

解决问题

用什么策略解决问题

学习逻辑, 可以帮助我们回应谬误, 培养逻辑思维能力和思辨能力, 优化表达。



Programming Languages
J. J. Horning
Editor
Algorithm = Logic + Control
Robert Kowalski
Imperial College, London

An algorithm can be regarded as consisting of a logic component, which specifies the knowledge to be used in solving problems, and a control component, which determines the problem solving strategies by means of which that knowledge is used. The logic component determines the meaning of the algorithm whereas the control component only affects its efficiency. The efficiency of an algorithm can often be improved by improving the control component without changing the logic of the algorithm. We argue that computer programs would be more often correct and more easily improved and modified if their logic and control aspects were identified and separated in the



数理逻辑的特点与方法

- 公理化与形式化方法.
- 特制的符号语言.



成功案例

- 在计算机软件的设计、测试及应用全周期过程中，采用形式化方法，用数学方式证明软件逻辑的严密性和可靠性
 - 巴黎地铁14号线自动驾驶系统，1998投入运行
 - 巴黎Roissy机场自动穿梭车，2006年投入运行
 - NASA的航天飞机设计
 - Air Bus A320、A380的设计
 - Intel奔腾芯片除法表错误的查找
 - AMD公司ABD K5 浮点除法运算的正确性证明
 - Windows 2000 的源代码中找出了大量的错误和漏洞



内容提要

- 命题逻辑主要内容
- 命题和联结词
 - 命题的描述
 - 简单命题及其符号化
 - 联结词和复合命题
 - 五个联结词
 - 命题符号化



命题逻辑主要内容

- 逻辑主要研究推理过程(“因为..., 所以...”)，而推理过程必须依靠命题来表达。
- 在命题逻辑中，“命题”被看作最小单位。
- 数理逻辑中最基本、最简单的部分。



命题和联结词

1. 什么是命题？

- 命题是陈述客观外界发生事情的陈述句。
- 命题是或为真或为假的陈述句。
- 命题特征：
 - ✓ 陈述句
 - ✓ 真假必居其一, **且只居其一**.
- 其它观点: 直觉主义逻辑, 多值逻辑等

13

下列句子都是命题

- 8小于10。
- 8大于10。
- 二十一世纪末, 人类将住在太空。
- 任一个 >5 的偶数可表成两个素数的和。
——哥德巴赫猜想
- $\sqrt{2}$ 的小数展开式中12345出现偶数多次。

14

下列句子不是命题

- 8大于10吗?
- 请勿吸烟!
- x 大于 y 。
- 我正在撒谎。 —— 悖论
- 理发师悖论: “我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸, 我也只给这些人刮脸。”
- 罗素悖论

15

命题的抽象

- 以 p 、 q 、 r 等表示命题。
- 以1表示真, 0表示假。

则命题就抽象为: 取值为0或1的 p 等符号。

- 若 p 取值1, 则表示 p 为真命题;
- 若 p 取值0, 则表示 p 为假命题;

16

复杂命题

由简单命题能构造更加复杂命题

1. 期中考试, 张三**没有**考及格.
2. 期中考试, 张三**和**李四都考及格了.
3. 期中考试, 张三和李四中**有人**考90分.
4. **如果**张三能考90分, **那么**李四也能考90分.
5. 张三能考90分**当且仅当**李四也能考90分.

17

联结词和复合命题

- 上述诸如“没有”、“如果...那么...”等连词称为联结词。
- 由联结词和命题连接而成的更加复杂命题称为复合命题；相对地，不能分解为更简单命题的命题称为简单命题。
- **复合命题的真假完全由构成它的简单命题的真假所决定。**
- 简单命题和复合命题的划分是相对的。

18

否定联结词

- 设 p 为一个命题, 复合命题“非 p ”称为 p 的否定式, 记为 $\neg p$, “ \neg ”称为否定联结词。
“ $\neg p$ ”为真当且仅当 p 为假。

P	$\neg p$
0	1
1	0

- 上例中, 若 p 代表“张三考及格了”, 则(1)可表示为 $\neg p$ 。

19

合取联结词

- 设 p 、 q 为两个命题, 复合命题“ p 而且 q ”称为 p 、 q 的合取式, 记为 $p \wedge q$, “ \wedge ”称作合取联结词。 $p \wedge q$ 真当且仅当 p 与 q 同时真。

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 上例的(2)可记为 $p \wedge q$, 其中 p 代表“张三考及格”, q 代表“李四考及格”。

20

析取联结词

- 设 p 、 q 为两个命题, 复合命题“ p 或者 q ”称为 p 、 q 的析取式, 记为 $p \vee q$, “ \vee ”称作析取联结词。 $p \vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 中至少有一个为真。

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 上例的(3)可记为 $p \vee q$, 其中 p 代表“张三考90分”, q 代表“李四考90分”。

21

蕴涵联结词

- 设 p 、 q 为命题, 复合命题“如果 p , 则 q ”称为 p 对 q 的蕴涵式, 记作 $p \rightarrow q$, 其中又称 p 为此蕴涵式的前件, 称 q 为此蕴涵式的后件, “ \rightarrow ”称为蕴涵联结词。“ $p \rightarrow q$ ”假当且仅当 p 真而 q 假。

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 上例的(4)可表示为 $p \rightarrow q$
- $p \rightarrow q$ 这样的真值规定有其合理性, 但也有人为因素。

22

蕴涵联结词

- 表示 p 蕴含 q ($p \rightarrow q$)的术语:

p 为 q 的充分条件

q 为 p 的必要条件

如果 p 则 q

因为 p , 所以 q

q (每)当 p

p 仅当 q

只有 q 才 p

除非 q 才 p

除非 q , 否则非 p : $\neg q \rightarrow \neg p \Leftrightarrow p \rightarrow q$

当 $x > 3$ 时, $x > 2$

仅当 $x > 2$ 时, (才有可能) $x > 3$

仅当你交够赎金后, 我才会放人。

只有你交够赎金后, 我才会放人。

除非你交够赎金, 否则我不放人。

23

等价联结词

- 设 p 、 q 为命题, 复合命题“ p 当且仅当 q ”称作 p 、 q 的等值式, 记作 $p \leftrightarrow q$, “ \leftrightarrow ”称作等价联结词。 $p \leftrightarrow q$ 真当且仅当 p 、 q 同时为真或同时为假。

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 上例的(5)可表示为: $p \leftrightarrow q$ 。

24

命题符号化

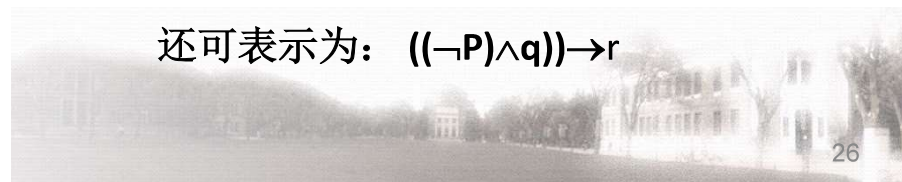
例4 将下列命题符号化:

- (1) 铁和氧化合, 但铁和氮不化合.
- (2) 如果我下班早, 就去商店看看, 除非我很累.
- (3) 李四是计算机系的学生, 他住在312室或313室.



例4的解

- (1) $p \wedge (\neg q)$, 其中:
 p 代表“铁和氧化合”,
 q 代表“铁和氮化合”。
- (2) $(\neg P) \rightarrow (q \rightarrow r)$, 其中:
 p 代表“我很累”,
 q 代表“我下班早”,
 r 代表“我去商店看看”
还可表示为: $((\neg P) \wedge q) \rightarrow r$

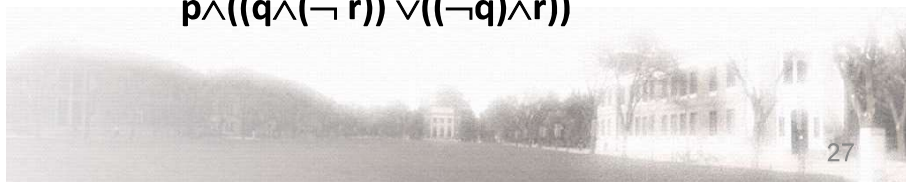


例4的解 (续)

- (3) $p \wedge ((q \vee r) \wedge (\neg (q \wedge r)))$,
其中:
 p 代表“李四是计算机系学生”,
 q 代表“李四住312室”,
 r 代表“李四住313室”。

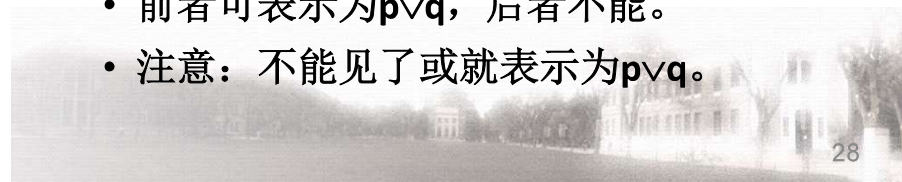
还可表示为:

$$p \wedge ((q \wedge (\neg r)) \vee ((\neg q) \wedge r))$$



相容或与相异或

- 日常语言中“或”有两种用法, 例如:
 - (1) 张三或者李四考了90分。
 - (2) 第一节课上数学课或者上英语课。
- 差异在于: 当构成它们的简单命题都真时, 前者为真, 后者却为假。
- 称前者为相容或(\vee), 后者为相异或(∇)。
- 前者可表示为 $p \vee q$, 后者不能。
- 注意: 不能见了或就表示为 $p \vee q$ 。



注意

联结词与自然语言之间的对应并非一一对应:

- 合取联结词“ \wedge ”对应了“既...又...”、“不仅...而且...”、“虽然...,但是...”、“并且”、“和”、“与”等;
- 蕴涵联结词“ \rightarrow ”, “ $P \rightarrow Q$ ”对应了“如P则Q”、“只要P就Q”、“P仅当Q”、“只有Q才P”、“除非Q否则非P”等;
- 等价联结词“ \leftrightarrow ”对应了“等价”、“当且仅当”、“充分必要”等;
- 析取连接词“ \vee ”对应了“相容(可兼容的)或”。

29

注意

- 上述五个联结词来源于日常使用的相应词汇,但并不完全一致,在使用时要注意:
 - 以上联结词组成的复合命题的真假值一定要根据它们的定义去理解,而不能据日常语言的含义去理解。
 - 不能“对号入座”,如见到“或”就表示为“ \vee ”。
 - 有些词也可表示为这五个联结词,如“但是”也可表示为“ \wedge ”。
- 在今后我们主要关心的是命题间的真假值的关系,而不讨论命题的内容。

30

注意

- 张三与李四是表兄弟
 - P: 张三是表兄弟。Q: 李四是表兄弟。
 $P \wedge Q$?
- 张三或李四都能做这件事。
 - P: 张三能做这件事。Q: 李四能做这件事。
 $\Rightarrow P \vee Q$?
- 今晚我在家看电视或者去体育场看球赛。

31

Open Question Points: 10

Setting

将下列命题符号化:

1. 我见的既不是小张也不是小李。
2. 他生于1973年或1974年。
3. 只要下雨我就带伞。
4. 只有下雨我才带伞。
5. 两个数的和是偶数当且仅当这两个数都是偶数或者这两个都是奇数。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

32

将下列命题符号化并指出其真值。
只有 a 能被4整除， a 才能被2整除。

1. 当 $a=8$ 时
2. 当 $a=6$ 时
3. 当 $a=9$ 时

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

33

小结

- 命题及其符号 p 、 q 、 r 、...。
- 构成复合命题的联结词 \neg 、 \wedge 、 \vee 、 \rightarrow 和 \leftrightarrow ，以及由联结词构成的复合命题及其真假值。

34