单元3.10 序关系

第七章 二元关系

7.7 偏序关系

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 偏序关系、偏序集、哈斯图；
- 全序关系、全序集
- 拟序关系、拟序集；
- 最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界
- 链、反链

偏序关系、偏序集

定义 设 $A\neq\varnothing$，$R\subseteq A\times A$，若R是自反、反对称、传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系。常用 $\preccurlyeq$ 表示偏序关系，读作“小于等于”

$$\langle x,y\rangle\in R \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x\preccurlyeq y$$

定义 设 $\preccurlyeq$ 是 A 上偏序关系，称 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集。

例

(1) $\varnothing\neq A\subseteq R$, $\langle A,\leq\rangle$, $\langle A,\geq\rangle$

$$\leq = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\leq y\}$$

$$\geq = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\geq y\}$$

(2) $\varnothing\neq A\subseteq Z_+=\{x\mid x\in Z\wedge x>0\}$, $\langle A,\mid\rangle$

$$\mid = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\mid y\}$$

例 $<\mathcal{A},\subseteq>$

(3) $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $\subseteq=\{<x,y>|x,y\in\mathcal{A}\wedge x\subseteq y\}$

$A=\{a,b\}$, $\mathcal{A}_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,

$\mathcal{A}_3=P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\subseteq_1=I_{\mathcal{A}1}\cup\{<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>\}$

$\subseteq_2=I_{\mathcal{A}2}\cup\{<\{a\},\{a,b\}>\}$

$\subseteq_3=I_{\mathcal{A}3}\cup\{<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,$

$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{a,b\}>\}$

可比, 严格小于, 覆盖

定义 设$<A,\preccurlyeq>$是偏序集，$x,y\in A$。

若 $x\preccurlyeq y\vee y\preccurlyeq x$，则称 x 与 y **可比**。

若 x 小于等于 y 且不相等，则说 x 严格小于 y，即

$$x\preccurlyeq y\wedge x\neq y\Leftrightarrow x\prec y$$

若 x 严格小于 y，且不存在 z，使得 x 严格小于 z、z 严格小于 y，则称 y **覆盖** x，即

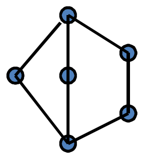
$$x\prec y\wedge\neg\exists z(z\in A\wedge x\prec z\prec y)$$

$\forall x,y\in A$，下述几种情况发生其一且仅发生其一.

$x\prec y$, $y\prec x$, $x=y$, x与y不是可比的

哈斯图

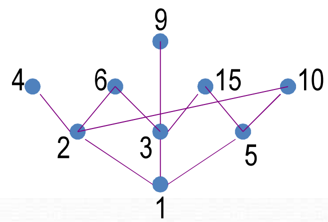
- 设$<A,\preccurlyeq>$是偏序集，$x,y\in A$。
- **哈斯图**：
  - (1) 用顶点表示A中元素
  - (2) 当且仅当y覆盖x时, y在x上方, 在x与y之间画无向边



偏序关系自反性：舍去自圈；
偏序关系反对称性：定义边的方向及定义，省去箭头
偏序关系传递性：传递可得的有向边不画

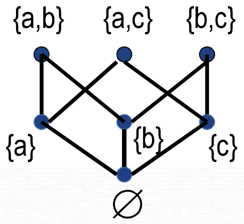
例

- $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$, $<A,|>$



例

- $A=\{a,b,c\}$, $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $<\mathcal{A},\subseteq>$
  $\mathcal{A}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$



全序关系(线序关系)

定义 设 $<A,\preccurlyeq>$ 是偏序集，若 A 中任意元素 x,y 都可比，则称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的**全序关系(线性关系)**，称$<A,\preccurlyeq>$ 为**全序集(线序集)**。

例：$\varnothing\neq A\subseteq R$ (实数) , $<A,\leq>$, $<A,\geq>$

充要条件：哈斯图是一条“直线”

拟序关系

定义 设$A\neq\varnothing$，$R\subseteq A\times A$。若 R 是反自反、传递的，则称 R 为 A 上的**拟序关系**，常用 $\prec$ 表示拟序关系，称 $<A,\prec>$ 为拟序集。

说明：反自反性 与 传递性 蕴涵 反对称性

(反证) $x\prec y \wedge y\prec x \Rightarrow x\prec x$, 矛盾!

拟序关系举例

- 设$\varnothing\neq A\subseteq R$ (实数集), $<A,<>$,$<A,>>$
- $\varnothing\neq B\subseteq Z_+$ (正整数集), $<B,|'>$,
  $|' = \{ <x,y> \mid x,y\in B \wedge x|y \wedge x\neq y\}$
- $<\mathcal{A},\subset>$

定理

定理 设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 A 上偏序关系， $\prec$ 是 A 上拟序关系，则

(1) $\prec$ 是反对称的；

(2) $\preccurlyeq - I_A$ 是A上拟序关系；

(3) $\prec \cup I_A$ 是A上偏序关系。 #

定理

定理 设 $\prec$ 是非空集合A上拟序关系, 则

(1) $x \prec y$, $x=y$, $y \prec x$ 中**至多**有一式成立

(2) $(x \prec y \vee x=y) \wedge (y \prec x \vee x=y) \Rightarrow x=y$

证明 (1) (反证) 两式以上成立导致 $x \prec x$, 矛盾!

(2) (反证) 由左端已知条件,

$x \neq y \Rightarrow (x \prec y) \wedge (y \prec x)$, 与(1)矛盾! #

偏序关系中的特殊元素

- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)

最大元, 最小元

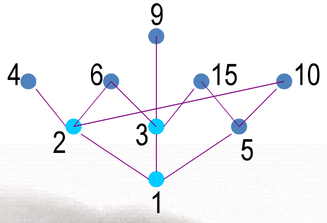
- 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$
- y是B的最大元(maximum/greatest element) $\Leftrightarrow$ $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$
- y是B的最小元(minimum/least element) $\Leftrightarrow$ $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$

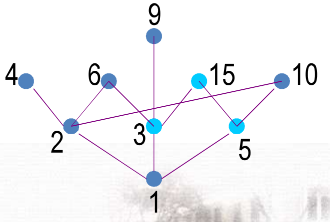
最大元, 最小元举例

- $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{3,5,15\}$, $B_3=A$

  最大元: B_1 无， B_2 15, B_3 无

  最小元: B_1 1, B_2 无, B_3 1





极大元, 极小元

- 设<A,≼>为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- y是B的极大元(maximal element) $\Leftrightarrow$

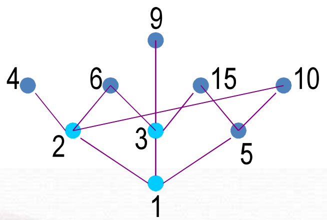
  $\forall x(\ x\in B \wedge y\preccurlyeq x \rightarrow x=y\ )$
- y是B的极小元(minimal element) $\Leftrightarrow$

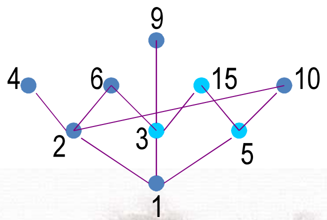
  $\forall x(\ x\in B \wedge x\preccurlyeq y \rightarrow x=y\ )$

极大元, 极小元举例

- 极大元: B_1 2,3, B_2 15, B_3 4,6,9,15,10,

  极小元: B_1 1, B_2 3,5, B_3 1





最大/最小与极大/极小

- 最小元：子集B中最小的元素，与B中其他元素都可比 $\forall x(\ x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x\ )$
- 极小元：不一定与B中所有其他元素可比，只要没有比它小的，它就是极小元。

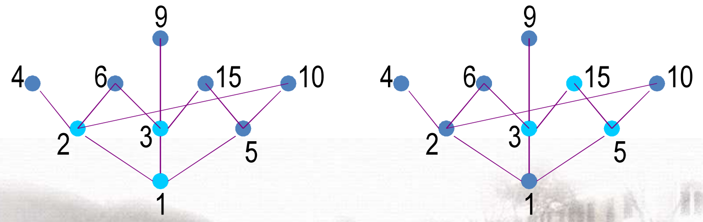
  $\forall x(\ x\in B \wedge x\preccurlyeq y \rightarrow x=y\ )$
- 有穷集B:
  - 最小元不一定存在，若存在一定唯一
  - 极小元一定存在，可能有多个。若唯一，则为最小元

上界, 下界

- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A, y∈A
- y是B的上界(upper bound) ⇔
  $\forall x(\ x \in B \to x \preccurlyeq y\ )$
- y是B的下界(lower bound) ⇔
  $\forall x(\ x \in B \to y \preccurlyeq x\ )$

上界, 下界举例

- 上界: B_1 6, B_2 15, B_3 无
- 下界: B_1 1, B_2 1, B_3 1

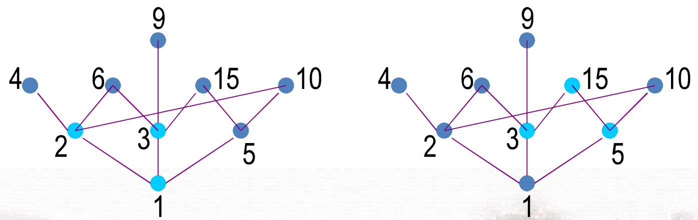


最小上界, 最大下界

- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A
- C={y|y是B的上界}, C的最小元称为B的最小上界(least upper bound), 或上确界
- D={y|y是B的下界}, D的最大元称为B的最大下界(greatest lower bound), 或下确界

最小上界,最大下界举例

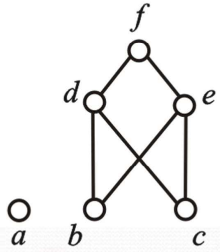
- 最小上界: B_1 6, B_2 15, B_3 无
- 最大下界: B_1 1, B_2 1, B_3 1



例

- 设偏序集<*A*,≼>如下图所示，求*A* 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设*B*={ *b*, *c*, *d* }, 求*B* 的下界、上界、下确界、上确界.

解：极小元：*a*, *b*, *c*;
极大元：*a*, *f*;
没有最小元与最大元.
*B*的下界和最大下界不存在,
上界有*d* 和 *f*, 最小上界为 *d*.



哈斯图中孤立点一定既是极小元也是极大元。

(最小)上界/(最大)下界的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界若存在不一定唯一
- 下确界、上确界如果存在，则唯一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

链, 反链

- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A,
- B是A中的链(chain) ⇔

  ∀x∀y(x∈B∧y∈B → x与y可比)

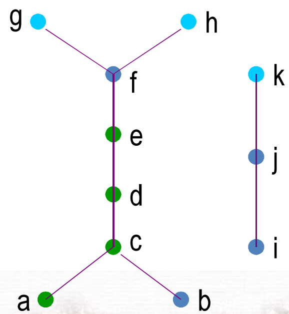
- B是A中的反链(antichain) ⇔

  ∀x∀y(x∈B∧y∈B∧x≠y → x与y不可比)

- |B|称为(反)链的长度

链, 反链举例

- A={a,b,…,k}.
- 链: {a,c,d,e}, {a,e,h}, {b,g}
- 反链: {g,h,k}, {e,j}, {a,k}
- {a}既是链, 也是反链
- {a,b,g,h}既非链, 亦非反链



小结

- $\preccurlyeq$ 偏序关系(自反、反对称、传递)
  - 哈斯图
  - 特殊元素
  - 链, 反链
  - 线序
- $\prec$拟序(反自反、反对称、传递)