清华大学 Tsinghua University

单元3.5 二元关系

第七章 二元关系

7.2 二元关系

7.3 关系的运算

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

关系

- 关系理论历史悠久，与集合论、数理逻辑、组合学、图论和布尔代数都有密切的联系。
- 关系是日常生活以及数学中的一个基本概念，如：兄弟关系，师生关系，位置关系，大于关系，全等关系，包含关系等等。
- 关系理论广泛应用于数学领域及计算机领域：数据输入输出关系、以关系为核心的关系数据库、信息检索等。

内容提要

- n元关系
- 二元关系
- A到B的二元关系
- A上的二元关系
- 一些特殊关系
- 定义域、值域、域
- 关系的表示方法

n元关系

- n元关系: 其元素全是有序n元组的集合.
- 例1: F_1={<a,b,c,d>,<1,2,3,4>,

  <物理,化学,生物,数学>},

  F_1是4元关系. #
- 例2: F_2={<a,b,c>,<α,β,γ>,

  <大李,小李,老李>}

  F_2是3元关系. #

二元关系

- **2元关系(关系)**: 元素全是有序对的集合.
- 例: $R_1=\{<1,2>,<\alpha,\beta>,<a,b>\}$
  R_1是2元关系. #
- 例: $R_2=\{<1,2>,<3,4>,<$白菜,小猫$>\}$
  R_2是2元关系. #
- 例: $A=\{<a,b>,<1,2>,a,\alpha,1\}$
  当$a,\alpha,1$ 不是有序对时, A不是关系. #

举例

(1) $R=\{<x,y> \mid x,y\in N, x+y<3\}$
$=\{<0,0>, <0,1>, <0,2>, <1,0>, <1,1>, <2,0>\}$

(2) $C=\{<x,y> \mid x,y\in R, x^2+y^2=1\}$，其中R代表实数集合，
*C*是直角坐标平面上点的横、纵坐标之间的关系，
*C*中的所有的点恰好构成坐标平面上的单位圆.

(3) $R=\{<x,y,z> \mid x,y,z\in R, x+2y+z=3\}$，
*R*代表了空间直角坐标系中的一个平面.

举例

员工号	姓名	年龄	性别	工资
301	张　林	50	男	1600
302	王晓云	43	女	1250
303	李鹏宇	47	男	1500
304	赵　辉	21	男	900
…	…	…	…	…

5元组:
<301,张林,50,男,$1600>$，<302,王晓云,43,女,$1250>$

二元关系的记号

- 设F是二元关系, 则
  $<x,y>\in F \Leftrightarrow$ x与y具有F关系 $\Leftrightarrow xFy$
- 对比: xFy (中缀(infix)记号)
  F(x,y), Fxy (前缀(prefix)记号)
  $<x,y>\in F$, xyF (后缀(suffix)记号)
- 例如: $2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow <2,15>\in <$.

A到B的二元关系

- A到B的二元关系：A×B的任意子集（含空集）.

R是A到B的二元关系

$\Leftrightarrow$ $R \subseteq A \times B$ $\Leftrightarrow$ $R \in P(A \times B)$

- 若|A|=m,|B|=n, 则|A×B|=mn, 故

$|P(A \times B)| = 2^{mn}$

即A到B不同的二元关系共有2^{mn}个

A到B的二元关系举例

- 设 $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$,

则A到B的二元关系共有4个:

$R_1=\varnothing$, $R_2=\{<a_1,b>\}$, $R_3=\{<a_2,b>\}$,

$R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$.

B到A的二元关系也有4个:

$R_5=\varnothing$, $R_6=\{<b,a_1>\}$, $R_7=\{<b,a_2>\}$,

$R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$. #

A上的二元关系

- A上的二元关系：是A×A的任意子集

R是A上的二元关系

$\Leftrightarrow$ $R \subseteq A \times A$ $\Leftrightarrow$ $R \in P(A \times A)$

- 若|A|=m, 则$|A \times A|=m^2$, 故

$|P(A \times A)| = 2^{m^2}$

即A上不同的二元关系共有 2^{m^2} 个

- m=3?

A上的二元关系(例1)

- 例1: 设 $A=\{a_1,a_2\}$,

则A上的二元关系共有16个:

$R_1 = \varnothing$,

$R_2 = \{<a_1,a_1>\}$,

$R_3 = \{<a_1,a_2>\}$,

$R_4 = \{<a_2,a_1>\}$,

$R_5 = \{<a_2,a_2>\}$,

A上的二元关系(例1)

$R_6 = \{ <a_1,a_1>, <a_1,a_2> \}$,

$R_7 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1> \}$,

$R_8 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_2> \}$,

$R_9 = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_1> \}$,

$R_{10} = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_2> \}$,

$R_{11} = \{ <a_2,a_1>, <a_2,a_2> \}$,

A上的二元关系(例1)

$R_{12} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1> \quad\quad \}$

$R_{13} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>, \quad\quad <a_2,a_2> \}$

$R_{14} = \{ <a_1,a_1>, \quad\quad <a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{15} = \{ \quad\quad <a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{16} = \{<a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2>\}$. #

A上的二元关系(例2)

- 例2: 设 B={b},

  则B上的二元关系共有2个:

  $R_1=\varnothing$,　$R_2=\{<b,b>\}$.　#

一些特殊关系

- 空关系
- 恒等关系
- 全域关系
- 整除关系
- 小于等于关系,…
- 包含关系,
- 真包含关系

特殊关系

设A是任意集合, 则可以定义A上的:

- 空关系: $\varnothing$
- 恒等关系: $I_A=\{<x,x>|x\in A\}$
- 全域关系:

$$E_A=A\times A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}$$

特殊关系

设$A\subseteq Z^+$, 则可以定义A上的:

- 整除关系:

$$D_A = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x|y \}$$

- 例: A={1,2,3,4,5,6}, 则

D_A={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,
<1,5>,<1,6>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,
<3,3>,<3,6>,<4,4>,<5,5>,<6,6>}.#

特殊关系

设$A\subseteq R$, 则可以定义A上的:

- 小于等于(less than or equal to)关系:

$$LE_A = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x\le y \}$$

- 小于(less than)关系,

$$L_A = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x<y \}$$

- 大于等于(greater than or equal to)关系
- 大于(great than)关系,...

特殊关系

设A为任意集合, 则可以定义P(A)上的:

- 包含关系:

$$\subseteq_A = \{ <x,y> \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subseteq y \}$$

- 真包含关系:

$$\subset_A = \{ <x,y> \mid x\subseteq A \wedge y\subseteq A \wedge x\subset y \}$$

举例

例如, $A=\{1,2\}$, 则

- $E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$
- $I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$

例如 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 则

- $LE_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$
- $D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$C=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则$C$上的包含关系是

- $R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
  $<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

定义域,值域,域

对任意集合A到集合B的一个关系R, 可以定义:

- 定义域(domain) :

  $\mathrm{dom}\ R = \{ x \mid \exists y(xRy) \}$

- 值域(range):

  $\mathrm{ran}\ R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$

- 域(field):

  $\mathrm{fld}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$

例

- $R=\{<a,\{b\}>,<c,d>,<\{a\},\{d\}>,<d,\{d\}>\}$, 则

  $\mathrm{dom}R = \{a, c, \{a\}, d\}$, $\mathrm{ran}R = \{ \{b\}, d, \{d\} \}$

  $\mathrm{fld}R = \{a, c, \{a\}, d, \{b\}, \{d\}\}$

- 求下列定义在整数集Z上的关系的定义域、值域和域。

(1) $R_1 = \{< x, y > |(x, y \in Z) \land (y = 2x)\}$

$\mathrm{dom}R_1=Z$, $\mathrm{ran}R_1=E$（偶数集）, $\mathrm{fld}R_1=Z$

(2) $R_2 = \{< x, y > |(x, y \in Z) \land (|x| = |y| = 7)\}$

$\mathrm{dom}R_2 = \{7, -7\}$, $\mathrm{ran}R_2 = \{7, -7\}$， $\mathrm{fld}R_2=\{7, -7\}$

例

- 设H={f, m, s, d}为一个家庭中父母子女四个人的集合，确定H上的一个长幼关系R，指出该关系的定义域、值域和域。

解：$R = \{< f, s >, < f, d >, < m, s >, < m, d >\}$

$\mathrm{dom}R = \{f, m\}$, $\mathrm{ran}R = \{s, d\}$, $\mathrm{fld}R = \{f, m, s, d\}$

关系的表示法

- 关系的表示
  - 集合
  - 关系矩阵
  - 关系图

关系矩阵

- A={a_1,a_2,...,a_n}, R⊆A×A
- R的关系矩阵

M(R)=(r_{ij})$_{n\times n}$

$$M(R)(i,\ j) = r_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

- 若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$， $B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$， R是从A到B的关系， R的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\,r_{ij}\,]_{m\times n}$, 其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j\rangle \in R$.

例

- A={a,b,c}

R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}

R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>}

$$M(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

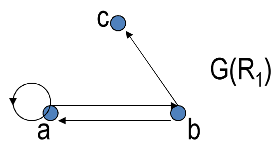
关系图

- A={a_1,a_2,...,a_n}, R⊆A×A
- R的关系图 **G(R)**
  - 以“o”表示A中元素(称为顶点), 以“→”表示R中元素(称为有向边)
  - 若$a_i R a_j$, 则从顶点a_i向顶点a_j引有向边<a_i,a_j>

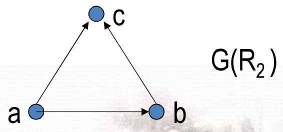
例

- A={a,b,c}

R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}



R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>}



讨论

- 当A中元素标定次序后, 对于R⊆A×A
  - G(R)与R的集合表达式可唯一互相确定
  - R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可唯一互相确定
- 对于R⊆A×B
  - |A|=n,|B|=m,关系矩阵M(R)是n×m阶
  - G(R)中边都是从A中元素指向B中元素

小结

- R⊆A×B, R⊆A×A; xRy
- ∅, I_A, E_A;
- dom(R), ran(R), fld(R);
- M(R), G(R)