Tsinghua University

单元1.7 哈密顿图

第15章 欧拉图与哈密顿图

15.2 哈密顿图

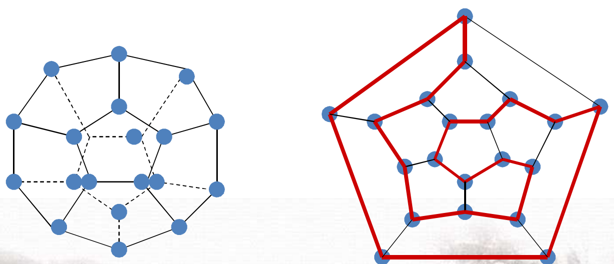
讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 哈密顿回路、哈密顿通路
- 哈密顿图、半哈密顿图
- 哈密顿图的必要条件
- 半哈密顿图的必要条件
- 哈密顿图的充分条件
- 半哈密顿图的充分条件

周游世界

- **Sir William Rowan Hamilton, 1857, Icosian game:**

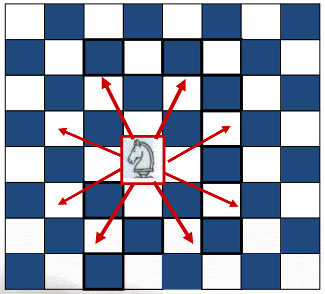


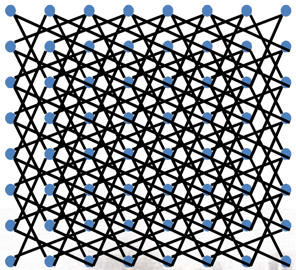
Willam Rowan Hamilton (1805~1865)

- 爱尔兰神童**(child prodigy)**
- 三一学院**(Trinity college)**
- 光学**(optics)**
- **1827, Astronomer Royal of Ireland.**
- **1837, 复数公理化, a+bi**
- 四元数**(quaternion): a+bi+cj+dk,**
  放弃乘法交换律**!**

马的周游路线(knight’s tour)

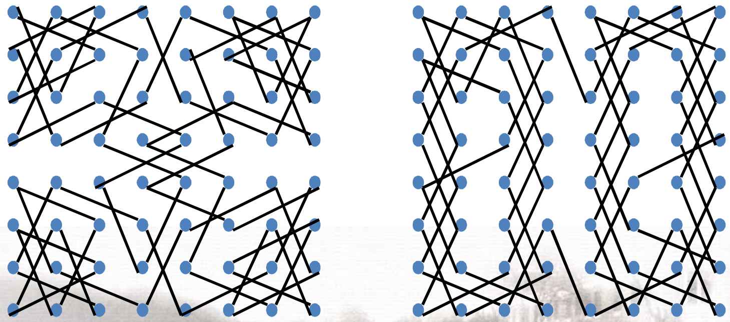
- Leohard Euler, 1759





马的周游路线(knight’s tour)

- Leohard Euler, 1759, 详细分析



哈密顿通(回)路、(半)哈密顿图

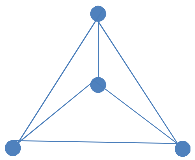
- 哈密顿通路：经过图中所有顶点的初级通路
- 半哈密顿图：有哈密顿通路的图

- 哈密顿回路：经过图中所有顶点的初级回路
- 哈密顿图：有哈密顿回路的图
  （定义平凡图为哈密顿图）

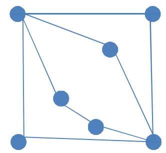
- 如果仅用点来描述，哈密顿通路就是图中所有结点的一种全排列

哈密顿通(回)路、(半)哈密顿图

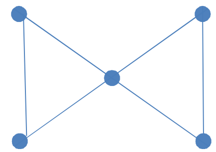
- 判断如下各图是否为（半）哈密顿图



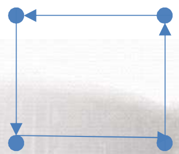
G1



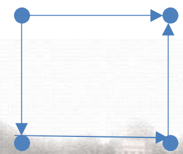
G2



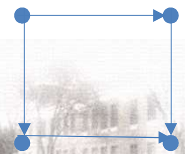
G3



G4



G5

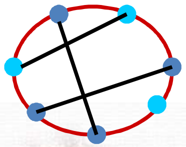


G6

无向哈密顿图的必要条件

- 定理15.6: 设G=<V,E>是无向哈密顿图, 则对V的任意非空真子集V_1有 $p(G-V_1) \le |V_1|$。
- 证明: 设C是G中任意哈密顿回路, 当V_1中顶点在C中都不相邻时, $p(C-V_1)=|V_1|$最大;

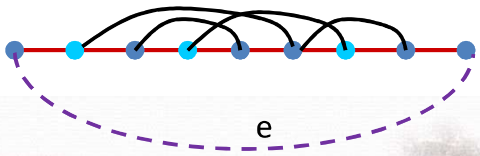
若V_1中顶点相邻, $p(C-V_1)<|V_1|$. C是G的生成子图, 所以$p(G-V_1)\le P(C-V_1)\le |V_1|$. #



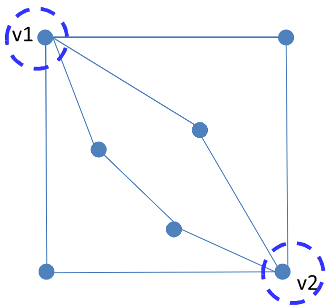
无向半哈密顿图的必要条件

- 推论: 设G=<V,E>是无向半哈密顿图,则对V的任意非空真子集V_1有

$$p(G-V_1)\le |V_1|+1 \quad \#$$

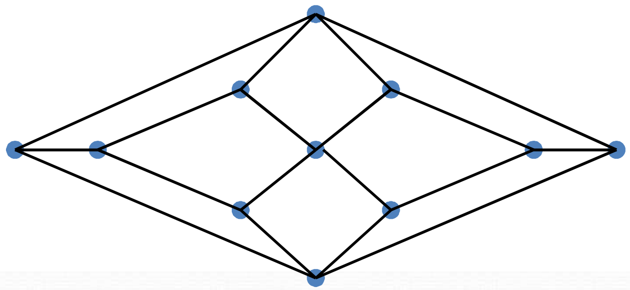


判断是否哈密顿图

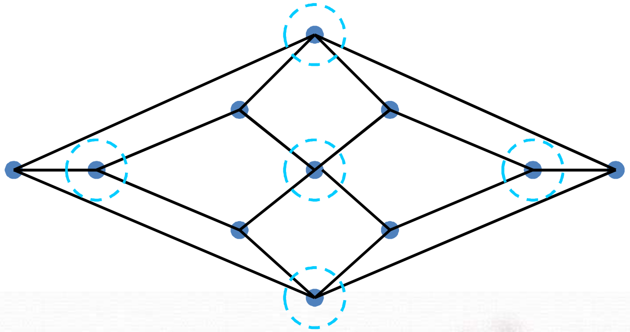


寻找子集V_1使得 $p(G-V_1) > |V_1|$

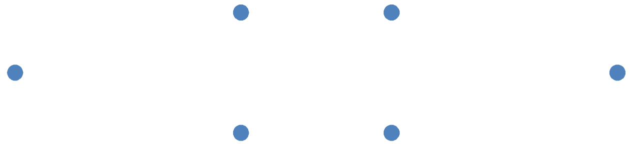
判断是否哈密顿图



选择V_1

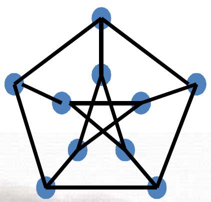


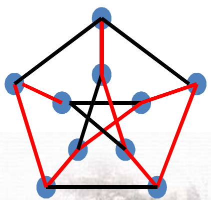
$p(G-V_1)=6 > 5=|V_1|$



非充分条件的反例

- **Petersen**图
  - $\forall V_1 \neq \varnothing$, $p(G-V_1) \leq |V_1|$
  - 不是哈密顿图, 是半哈密顿图





无向半哈密顿图的充分条件

- 定理**15.7**: 设**G**是**n(≥2)**阶无向简单图, 若对**G**中任意不相邻顶点**u**与**v**有

$$d(u)+d(v) \geq n-1$$

则**G**是半哈密顿图.

- 证: 只需证明

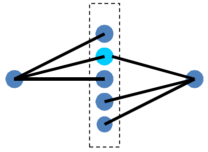
(1) G连通

(2) 由极大路径可得圈

(3) 由圈可得更长路径

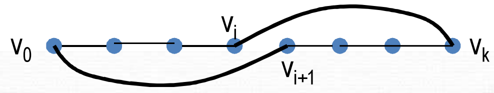
定理15.7证明(1)

- **(1) G连通: ∀u∀v((u,v)∉E→ ∃w((u,w)∈E∧(w,v)∈E)**



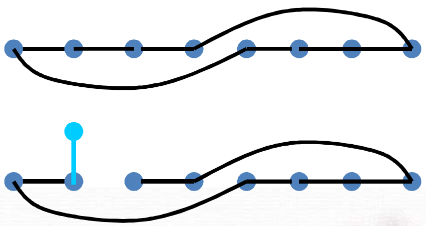
定理15.7证明(2)

- 设极大路径 **Γ=$v_0v_1\ldots v_k$, k≤n-2.** 若**(v_0,v_k)∉E,** 则
∃i(1≤i≤k-1∧(v_i,v_k)∈E∧(v_0,v_{i+1})∈E),
否则**, d(v_0)+d(v_k)**
≤d(v_0)+k-1-(d(v_0)-1)=k≤n-2(矛盾**).**
于是得圈**C=$v_0\ldots v_iv_kv_{k-1}\ldots v_{i+1}v_0$.**



定理15.7证明(3)

- **(3)** 由圈得更长路径**:** 连通**. #**



无向哈密顿图的充分条件一

- **推论1:** 设**G**是**n(≥3)**阶无向简单图**,**若对**G**中任意不相邻顶点**u**与**v**有

  d(u)+d(v)≥n

  则**G**是哈密顿图**.**
- 证**:** 由定理**15.7，G**连通且有哈密顿通路 **Γ=$v_0v_1\ldots v_{n-1}$.**
  若**(v_0,v_{n-1})∈E,** 则得哈密顿回路
  C=$v_0v_1\ldots v_{n-1}v_0$.
  若**(v_0,v_k)∉E,** 则与定理**15.7**证明**(2)**类似**,**
  也存在哈密顿回路**. #**

无向哈密顿图的充分条件二

- 推论2: 设G是n(≥3)阶无向简单图,若对G中任意顶点u有

$$d(u)\geq n/2$$

则G是哈密顿图. #

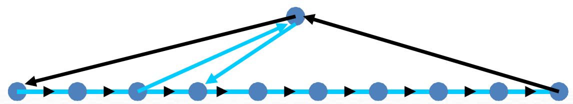
- 定理15.8: 设u,v是无向n阶简单图G中两个不相邻顶点,且d(u)+d(v)≥n, 则

G是哈密顿图 $\Leftrightarrow$

$G\cup(u,v)$是哈密顿图. #

有向半哈密顿图的充分条件

- 定理15.9: 设D是n(≥2)阶竞赛图, 则D是半哈密顿图. #
- 推论:设D是n阶有向图, 若D含n阶竞赛图作为子图, 则D是半哈密顿图. #



有向哈密顿图的充分条件

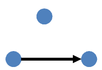
- 定理: 强连通的竞赛图是哈密顿图.
- 证: n=1时,平凡图是哈密顿图.

  n=2时,不可能强连通.

  下面设n≥3. 只需证明:

(1) D中存在长度为3的圈.

(2) D中存在长度为k的圈 $\Rightarrow$ D中存在长度为k+1的圈.



定理证明(1)

- 证: $\forall v\in V(D)$,

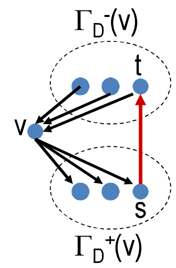
D竞赛图$\Rightarrow\Gamma_D^-(v)\cup\Gamma_D^+(v)=V(D)-\{v\}$

D强连通 $\Rightarrow\Gamma_D^-(v)\neq\varnothing,\ \Gamma_D^+(v)\neq\varnothing$.

D强连通 $\Rightarrow\exists s\in\Gamma_D^+(v),\ \exists t\in\Gamma_D^-(v)$,

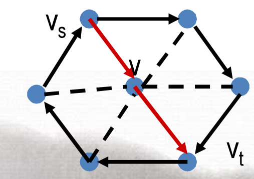
$\langle s,t\rangle\in E(D)$.

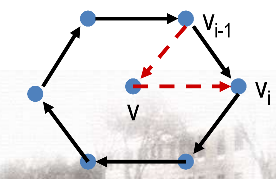
于是C=vstv是长度为3的圈.



定理证明(2)

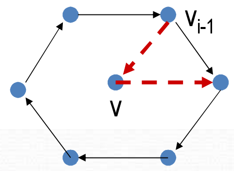
- 设D中有圈$C=v_1v_2…v_kv_1$, $(3\le k\le n)$
  若$\exists v\in V(D-C)$, $\exists v_s,v_t\in V(C)$,
  使得 $<v_s,v>\in E(D)$, $<v,v_t>\in E(D)$,
  则 $\exists v_{i-1},v_j\in V(C)$,
  使得$<v_{i-1},v>\in E(D)$,$<v,v_j>\in E(D)$.

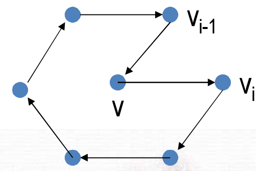




定理证明(2)

- 则 $C'=v_1v_2…v_{i-1}vv_i…v_kv_1$ 是长度为k+1的圈.





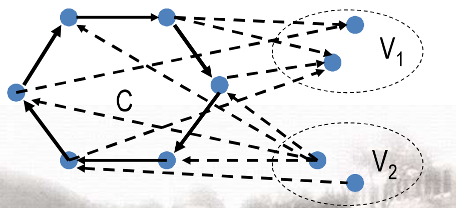
定理证明(2)

- 否则, 令

$V_1=\{v\in V(D-C)\mid \forall u\in V(C), <u,v>\in E(D)\}$

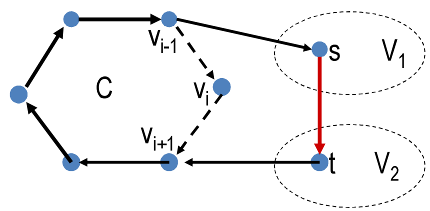
$V_2=\{v\in V(D-C)\mid \forall u\in V(C), <v,u>\in E(D)\}$

则 $V_1\ne\varnothing, V_2\ne\varnothing, V_1\cap V_2=\varnothing$.



定理证明(2)

- 于是$\exists s\in V_1$, $\exists t\in V_2$, $<s,t>\in E(D)$. 在C上任取相邻3点v_{i-1},v_i,v_{i+1}, 则$C'=v_1v_2…v_{i-1}stv_{i+1}…v_kv_1$ 是长度为k+1的圈.
  #



- 推论：设D是n阶有向图, 若D含n阶强连通竞赛图作为子图, 则D是哈密顿图. #

小结

- 欧拉图 **Easy**
  - 充要条件
- 哈密顿图 **Hard**
  - 必要条件
  - 充分条件