第 12 周　充分统计量

二、充分统计量

2.1 定义（不损失任何关于参数θ的信息）

样本中包含的关于总体的信息可分为两部分：其一是关于总体结构的信息，即反映总体分布的结构；其二是关于总体中未知参数的信息。统计量具有压缩数据功能，一个好的统计量应该能将样本中包含未知参数的全部信息提取出来，这种不损失未知参数的信息的统计量就是我们要介绍的充分统计量。

★ 充分统计量的定义如下：设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体 **X** 的简单样本，总体分布函数为$F(x,\theta)$，称统计量$T=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为θ的充分统计量，如果在给定T的取值后，$X_1,X_2,\cdots,X_n$的条件分布与θ无关。

★ 定理 **A**：

若样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的联合分布密度（或 **p.m.f**）为$f(x_1,x_2,...,x_n\,|\,\theta)$，统计量$T=T(X_1,X_2,...,X_n)$的分布密度（或 **p.m.f**）为$q(t\,|\,\theta)$，则若

$\dfrac{f(x_1,x_2,...,x_n\,|\,\theta)}{q(T(x_1,x_2,...,x_n)\,|\,\theta)}$与$\theta$无关，则$T=T(X_1,X_2,...,X_n)$为充分统计量。

例（离散情形）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim B(1,\theta),0<\theta<1$（即 **Bernoulli** 分布）的一个样本，证明$T=\sum_{i=1}^{n}X_i$为θ的充分统计量

用定义证明：只需证明$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n\,|\,T=t)$与$\theta$无关，这里$x_i=0,1$，

$t=\sum_{i=1}^{n}x_i$（否则，概率为 **0**），由于$T=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,\theta)$

$$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n\,|\,T=t)=\frac{P(X_1=x_1,...,X_n=x_n,T=t)}{P(T=t)}$$

$$=\frac{P(X_1=x_1,...,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i)}{P(T=t)}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}[\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}]\bullet\theta^{t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i}(1-\theta)^{1-(t-\sum_{i=1}^{n-1}x_i)}}{C_n^t\theta^t(1-\theta)^{n-t}}=\frac{1}{C_n^t}$$

例（连续情形）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim N(\mu,1)$的一个样本，证明$T=\bar{X}$为μ的充分统计量

解：利用定理 A 证明（利用定义也可以证明，见教材）：

$X_1,X_2,\cdots,X_n$的联合分布密度为

$$f(x_1,x_2,...,x_n\mid\mu)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$T=\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$的分布密度为$q(t\mid\mu)=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\bullet\frac{1}{n}}}$，故

$$\frac{f(x_1,x_2,...,x_n\mid\mu)}{q(T(x_1,x_2,...,x_n)\mid\mu)}$$

$$=\frac{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\bullet\frac{1}{n}}}}$$

$$=n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2}}$$

与μ无关，故$T=\bar{X}$为μ的充分统计量。

例 设X_1,X_2是总体$X\sim P(\lambda)$的一个样本，证明$T_1=X_1+X_2$为λ的充分统计量，而$T_2=X_1+2X_2$不是λ的充分统计量。

解：

$P(X_1=x_1,X_2=x_2\,|\,T_1=t)$

$$=\begin{cases}\dfrac{P(X_1=x_1,X_2=t-x_1)}{P(T_1=t)}=\dfrac{\dfrac{\lambda^{x_1}e^{-\lambda}}{x_1!}\dfrac{\lambda^{t-x_1}e^{-\lambda}}{(t-x_1)!}}{\dfrac{(2\lambda)^t e^{-2\lambda}}{t!}}=\dfrac{C_t^{x_1}}{2^t}, & t=x_1+x_2,x_1,x_2=0,1,2,\cdots\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

与λ无关，故$T_1=X_1+X_2$为λ的充分统计量。

$$P(X_1=0,X_2=1\,|\,T_2=2)=P(X_1=0,X_2=1\,|\,X_1+2X_2=2)$$

$$=\frac{P(X_1=0,X_2=1)}{P(X_1+2X_2=2)}$$

$$=\frac{P(X_1=0,X_2=1)}{P(X_1=0,X_2=1)+P(X_1=2,X_2=0)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}\lambda e^{-\lambda}+\dfrac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}e^{-\lambda}}=\frac{2}{2+\lambda}$$

依赖于λ，故$T_2=X_1+2X_2$不是λ的充分统计量。

如何寻找充分统计量？

★ 定理 **B**:（因子分解定理）总体概率函数$f(x,\theta)$，样本$(X_1,...,X_n)$，统计量$T(X_1,...,X_n)$为未知参数θ的充分统计量的充要条件是样本在已发生情形$(X_1,...,X_n)\to(x_1,...,x_n)$处的联合概率函数可以分解为$T(x_1,...,x_n)=t$和$\theta$的函数$g(t,\theta)$与样本观察值的函数$h(x_1,...,x_n)$的乘积。

即：**T** 是θ的充分统计量

$$\Leftrightarrow L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=h(x_1,x_2,...,x_n)g(T(x_1,x_2,...,x_n);\theta)$$ 且 **h** 非负

定理证明：只就离散情况证明，必要性$\Rightarrow$

$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n\,|\,T=t)\overset{T(x_1,...,x_n)=t}{=}h(x_1,...,x_n)$与$\theta$无关，

由于$\{T=t\}\supset\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}$

因此$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)=P(X_1=x_1,...,X_n=x_n\,|\,T=t)P(T=t)$

$$=h(x_1,...,x_n)P(T=t)=g(t,\theta)h(x_1,...,x_n)$$

充分性$\Leftarrow$

现在已知$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)=g(t,\theta)h(x_1,...,x_n)$

$$P(T=t)=\sum_{T(x_1,\cdots,x_n)=t}P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)$$

$$=\sum_{T(x_1,\cdots,x_n)=t}g(t,\theta)h(x_1,...,x_n)=g(t,\theta)\sum_{T(x_1,\cdots,x_n)=t}h(x_1,...,x_n)$$

因此$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n\,|\,T=t)\overset{x_1+...+x_n=t}{=}\dfrac{P(X_1=x_1,...,X_n=x_n,T=t)}{P(T=t)}$

$$=\frac{P(X_1=x_1,...,X_n=x_n,T=t)}{g(t,\theta)\sum\limits_{T(x_1,...,x_n)=t}h(x_1,...,x_n)}=\frac{P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)}{g(t,\theta)\sum\limits_{T(x_1,...,x_n)=t}h(x_1,...,x_n)}$$

$$=\frac{P(X_1=x_1,...,X_n=x_n,T=t)}{g(t,\theta)\sum\limits_{T(x_1,...,x_n)=t}h(x_1,...,x_n)}=\frac{P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)}{g(t,\theta)\sum\limits_{T(x_1,...,x_n)=t}h(x_1,...,x_n)}$$

$$=\frac{g(t,\theta)h(x_1,...,x_n)}{g(t,\theta)\sum\limits_{T(x_1,...,x_n)=t}h(x_1,...,x_n)}=\frac{h(x_1,...,x_n)}{\sum\limits_{T(x_1,...,x_n)=t}h(x_1,...,x_n)}$$ 与θ无关

★推论：设统计量T为θ的充分统计量，统计量S与T一一对应，则S也为θ的充分统计量。

例 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim B(1,\theta),0<\theta<1$（即 **Bernoulli** 分布），证明$T=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$为$\theta$的充分统计量

解： 用因子分解证明：样本的分布为

$$P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}[\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}]=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取

$h(x_1,x_2,...,x_n)=1,$

$$g(T(x_1,x_2,...,x_n);\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

故$T=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$为$\theta$的充分统计量。

注：显然$T_1=(X_1,X_2+\cdots+X_n)$、$T_2=(X_1+X_2,X_3,X_4+\cdots+X_n)$也是$\theta$的充分统计

量（不唯一）。

例 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，μ,σ^2均未知，求(μ,σ^2)的充分统计量。

解：样本的分布密度为

$$f_{\mu,\sigma^2}(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu,\sigma^2)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\sigma^2}-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}$$

故$T=T(X_1,X_2,...,X_n)=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$为$(\mu,\sigma^2)$的充分统计量

注：显然$T_1=(\bar{X},S^2)$为(μ,σ^2)的充分统计量，这个一般更常用。若σ^2未知，$\bar{X}$不是μ的充分统计量；μ未知时，S^2也不是σ^2的充分统计量。但若σ^2已知，$\bar{X}$是μ的充分统计量，$\mu=\mu_0$已知，$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$是$\sigma^2$的充分统计量。

例 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X\sim U(-\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2})$的一个样本，，求参数$\theta$的充分统计量。

解：样本的分布密度为

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{\theta^n}1_{\{-\frac{\theta}{2}<x_1,\cdots,x_n<\frac{\theta}{2}\}}$$

$$=\frac{1}{\theta^n}1_{\{-\frac{\theta}{2}<x_{(1)}\le x_{(n)}<\frac{\theta}{2}\}}$$

故$(X_{(1)},X_{(n)})$为θ的充分统计量。当然全样本$(X_1,X_2,...,X_n)$记顺序统计量$(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$也是$\theta$的充分统计量。

三. 参数点估计

★ 问题的提出：参数估计的意义.

1 点估计

$\theta = \theta(X_1, X_2, ..., X_n)$ 点估计量

$\theta = \theta(x_1, x_2, ..., x_n)$ 点估计值

1.2. 矩估计与极大似然估计

★ 矩估计：用样本矩作为总体矩估计

★ 极大似然估计：使得似然函数达到极大，$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta}) = \max\limits_{\theta\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$.

★ 矩估计法：

1）出发点；

★ $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mathrm{E}X^k = \mu_k,\ k \geq 1$

2）方法与步骤

① 求出总体的 **k** 阶原点矩: $a_k = EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x;\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$

② 解方程组 $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ **(k=1,2,...,m)**，得 $\theta_k = \theta_k(X_1, X_2, ..., X_n)$ 即为所求

★ 极大似然估计法：

1）出发点； 实际推断原则（似然函数达到极大）

★ 似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i), \\ \prod_{i=1}^{n} f(x,\theta) \end{cases}$

2）方法与步骤

① 写出似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$，求出 **lnL** 及似然方程 $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}\right|_{\theta=\theta} = 0$

i=1,2,...,m

② 解似然方程得到 $\theta_i(x_1, x_2, ..., x_n)$，即极大似然估计 $\theta_i(X_1, X_2, ..., X_n)$

i=1,2,...,m

注：似然方程无解时，求出 θ 的定义域中使得似然函数最大的值，即为最大似然

估计。

例 设 ***X*** ～**B(1,** ***p*****)**. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自 ***X*** 的一个样本，试求参数 ***p*** 的矩估计量 $\hat{p}_M$

例 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{\theta^3}(\theta - x) & 0 < x < \theta \\ 0 & else \end{cases}$，

求 **1）.**θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$，**2）.**求 $\hat{\theta}$ 的方差。 【$2\overline{X}$; $\dfrac{\theta^2}{5n}$】

例

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x \ge \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases}$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 ***X*** 的简单随机样本，求未知参数 θ 的矩估计量 【$\overline{X} - 1$】

例 设总体 ***X*** 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta \end{pmatrix}$$

其中 $\theta (0 < \theta < \dfrac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 **X** 的如下样本值

3，1，3，0，3，1，2，3，

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值. 【**1/4;** $\frac{7-\sqrt{13}}{12}$】

例 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1-\theta, & 1 \le x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0 < \theta < 1)$，$X_1, X_2 ..., X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1, x_2 ..., x_n$ 中小于 **1** 的个数，求 θ 的最大似然估计. 【$\hat{\theta} = \dfrac{N}{n}$】

例 设总体 ***X*** 的二阶矩存在，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为其样本. 求 **X** 的期望 μ 和方差 σ^2 的矩估计量 $\hat{\mu}_M$ 和 $\hat{\sigma}^2_M$；又若 ***X*** 为正态，求最大似然估计量 $\hat{\mu}_L$ 和 $\hat{\sigma}^2_L$ **.**

例 设总体 ***X*** ~$U[0, \theta]$，$\theta (>0)$ 未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一个样本，试求 $\boldsymbol{\theta}$ 的矩估计

量$\hat{\theta}_M$和最大似然估计量$\hat{\theta}_L$.　　　　　　　　　　　　【$\hat{\theta}_M=2\overline{X}$，$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$】

【矩估计法：易知$E(X)=\frac{\theta}{2}$，建立方程$\frac{\theta}{2}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}_M=2\overline{X}$。

最大似然估计法：$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\theta^{-n}, & 0\le x_i\le\theta,\quad i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$；由似然函数可以看出，要使$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$最大，就要使$\theta$尽可能地小，但$\theta$又不能小于$x_{(n)}=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$，所以，$\theta$取$x_{(n)}=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$时就使$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$达到最大，故$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$】

例　设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\mu)} & \text{当}x>\mu\\ 0 & \text{当}x\le\mu\end{cases}$，这里$\mu$和λ(>0)都是参数. 又设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为该总体的简单样本，而$x_1,x_2,\cdots,x_n$为其样本观察值.

1) 设λ已知，求μ的极大似然估计$\hat{\mu}_L$.　　　　　　　　【$\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$】

2) 设μ已知，求λ的矩估计$\hat{\lambda}_M$.　　　　　　　　　　【$(\bar{x}-\mu)^{-1}$】

例　设总体的分布函数为

$$F(x;\lambda,\theta)=\begin{cases}0, & \text{当}x\le\theta,\\ 1-(\theta/x)^{\lambda}, & \text{当}\theta<x.\end{cases},$$

其中$\theta>0,\lambda>0$都是未知参数.　设$X_1,\cdots,X_n$为简单样本，求θ和λ的极大似然估计。

2. 点估计的评价标准

点估计与优良性：概念、无偏估计、均方误差准则、相合估计(一致估计)、渐近正态估计

★ 无偏性：θ的估计量$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$满足$E\hat{\theta}<+\infty$，且$\forall\theta\in\Theta$，有$E\hat{\theta}=\theta$，称$\hat{\theta}$为$\theta$的无偏估计量。

★ θ的均方误差：$MSE(\theta,\theta)=E(\theta-\theta)^2=D\theta+(E\theta-\theta)^2=D(\hat{\theta})+(Bias(\hat{\theta}))^2$

若θ是无偏估计，则$MSE(\theta,\theta)=D\theta$

★ 有效性：对于θ的无偏估计量θ_1,θ_2，若对于任意的$\theta\in\Theta$有

$D(\theta_1)\le D(\theta_2)$，

且至少有一个$\theta\in\Theta$使得上述不等式严格成立，则称θ_1比θ_2有效。

★ 性质

☆ 设总体 X 的 k 阶矩$\mu_k=\mathrm{E}X^k$, $k\ge 1$存在. 又设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是 X 的一个样本.

试证明不论总体服从什么分布, k 阶样本矩$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$一定是 k 阶总体矩μ_k的

无偏估计. 样本方差S^2一定是总体方差的无偏估计。

☆ 对正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，若 μ 和σ^2均为未知，则

（1） μ 的矩估计量和最大似然估计量$\overline{X}$是无偏的;

（2）σ^2的矩估计量和最大似然估计量$\hat{\sigma}^2=S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是有偏的;

（3）$S^2=\frac{n}{n-1}S_n^2$，即 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，是$\sigma^2$的无偏估计量.

例 设 $X\sim U[0,\theta]$，参数θ 未知， $X_1,X_2,\ldots,X_n$是其大小为 n 的样本. 则

1) 矩估计量 $\hat{\theta}_M=2\overline{X}$是无偏的；

2) 似然估计$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，不是参数$\theta$ 的无偏估计. 但

$\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$是比$\hat{\theta}_M=2\overline{X}$有效的估计量.

3）求$n(\theta-\hat{\theta}_L)$的极限分布. 【参数为$1/\theta$的指数分布】

例 设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体 $N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，

记$Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n.$

求：（I） Y_i的方差$DY_i,i=1,2,\cdots,n$； 【$\frac{n-1}{n}$】

（II）Y_1与Y_n的协方差$Cov(Y_1,Y_n)$. 【$-\frac{1}{n}$】

（**III**）若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量，求参数 ***c***. 【 $\frac{n}{2(n-2)}$ 】

例 设总体 ***X*** 服从 **Ex (**λ**)**，未知参数 $\lambda=1/\theta$ **> 0，*pdf*** 为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta},x>0,\\ 0,\text{其它},\end{cases}$$

又设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自 **X** 的样本，试证

1) $\overline{X}$ 和 $nX_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计量，其中 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2) 当 ***n*** **>1** 时，对于 θ 的估计，$\overline{X}$ 较 ***n*** $X_{(1)}$ 有效.

★ 相合性：$\forall\theta\in\Theta$，$\hat{\theta}_n(x_1,\cdots,x_n)\xrightarrow{P}\theta$，则称 θ_n 为 θ 的相合估计（一致估计）

注：相合性要求是最基本的要求，不满足相合性的估计一般不予考虑。

★ 理论依据和方法：大数定律、依概率收敛的性质

进一步的判断依据

定理 **A**：若 $\lim\limits_{n\to\infty}E\theta_n=\theta$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}D\theta_n=0$，则 θ_n 为 θ 的相合估计。

定理 **B:** 若 $\hat{\theta}_n^1,\hat{\theta}_n^2,\cdots,\hat{\theta}_n^k$ 分别为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的相合估计，$\eta=g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的连续函数，则 $g(\hat{\theta}_n^1,\hat{\theta}_n^2,\cdots,\hat{\theta}_n^k)$ 为 $g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 的相合估计。

例 设 ***X*** ~$U[0,\theta]$，参数 $\boldsymbol{\theta}$ 未知，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是其容量为 ***n*** 的样本. 则其最大似然估计 $\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的相合估计。

解：$E(\hat{\theta}_L)=E[\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}]=\dfrac{n}{n+1}\theta\to\theta$

$$D(\hat{\theta}_L)=\frac{n}{n+2}\theta^2-[\frac{n}{n+1}\theta]^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2\to 0$$

故 $\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的相合估计。