线性代数试题

(2013.11)

一、(每小题 3 分，共 24 分)选择填空：

1．设三阶非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-2\boldsymbol{A}^{*}$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\det\boldsymbol{A}=(\qquad)$.

2. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行和第 3 行得单位矩阵．记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=(\quad)$.

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

4．设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为(　　　　　　　).

5．已知向量空间

$$\mathrm{V}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,2x_1-2x_2+x_3=0,x_1-x_2+x_3=0,x_1-x_2+2x_3=0\}$$

则 V 的维数 $\dim\mathrm{V}=$ (　　　).

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为(　　　　).

7．与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是(　　　).

(A) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

8．设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则当 t 满足(　　　　　　)时，$\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E}$ 是负定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵.

二、(10 分)计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b & 1 & & & \\ ab & a+b & 1 & & \\ & ab & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & ab & a+b\end{vmatrix}\qquad (\text{其中 } a\neq b)$$

三、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}-4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

四、(15 分) 已知向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,-a,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,0,-1,-a)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,a,-1,0)$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,1,b)$ 问 a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？写出相应的表示式.

五、(10 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

1) 求由基 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 到基 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$；

2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 下的坐标.

六、(10 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 又设 b 为任意常数. 问向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，$b\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关还是线性无关？试证明之.

七、(15 分) 已知二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=5$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $v^2+4w^2=5$.

1) 求参数 a；

2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

八、(6 分)设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶方阵.

1) 计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$；

2) 证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵.