线性代数试题参考解答

(2014.11)

一、1．-5；　2．$\dfrac{1}{11}(2\boldsymbol{A}+14\boldsymbol{E})$；　3．$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

4．(C)；　5．(A)；　6．3；7．(D)；　8．$y_1^2+y_2^2-y_3^2$．

二、$D_n=\begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&n\\0&1+a_1&2&\cdots&n\\0&1&2+a_2&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&2&\cdots&n+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&n\\-1&a_1&0&\cdots&0\\-1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}&1&\cdots&n\\&a_1&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{vmatrix}=(1+\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n})a_1a_2\cdots a_n$$

三、$\det\boldsymbol{A}=4$，于是 $\boldsymbol{A}^*=4\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*)^*=(2\boldsymbol{A}^{-1})^*=\det(2\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(2\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$，代入矩阵方程得

$$2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{E}$$

上式左乘 $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{X}+2\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{A}$．由于 $\det(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=0$，故矩阵方程无解.

四、$\det\boldsymbol{A}=\lambda(\lambda+1)(1-\lambda)$．

(1) $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\pm 1$ 时，线性方程组有唯一解.

(2) $\lambda=0$ 和 $\lambda=1$ 时，$\operatorname{rank}\hat{\boldsymbol{A}}=3$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$，线性方程组无解.

(3) $\lambda=-1$ 时，$\operatorname{rank}\hat{\boldsymbol{A}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2<3$，线性方程组有无穷多解．同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=1-\frac{3}{5}x_3\\x_2=-1-\frac{3}{5}x_3\end{cases}，通解为\begin{cases}x_1=1-\frac{3}{5}t\\x_2=-1-\frac{3}{5}t\\x_3=\quad t\end{cases}\ 或\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\-\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}\ (t\ 任意)$$

五、1) 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}$$

得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$$

故由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$.

2) $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

故向量$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标为$(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

六、设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0} \tag{*}$$

上式左乘$\boldsymbol{A}$，并利用$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+2k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$$

(*)式乘 2 减去上式得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关(属于不同特征值的特征向量线性无关)得$k_1=k_3=0$，代入(*)式得$k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$．再由$\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$得$k_2=0$．故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

七、1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & t\\ -1 & 5 & 2\\ t & 2 & 1\end{pmatrix}$. 由

$$\Delta_1=1>0\text{，}\quad \Delta_2=4>0\text{，}\quad \Delta_2=\det\boldsymbol{A}=-t(5t+4)>0$$

解得 $-\frac{4}{5}<t<0$，即当 $-\frac{4}{5}<t<0$ 时，二次型正定.

2) $t=0$ 时二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 可求得

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-6)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$. 对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,-1,2)^{\mathrm{T}}\text{，}\quad \boldsymbol{p}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}\text{，}\quad \boldsymbol{p}_3=(-1,5,2)^{\mathrm{T}}$$

正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，化二次型为 $f=0y_1^2+y_2^2+6y_3^2$.

3) $t=0$ 时 $f=1$ 表示椭圆柱面.

八、若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$. 反之，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$，即 $(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$. 这表明，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解，故它们的基础解系所含的线性无关解向量的个数相同，即

$$n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.