# 线性代数试题参考解答

(2014.5.9)

一、(1)-2；(2)$\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$；　(3)-1；（4）$\eta_1+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$ (或其它的不同形式)；　（5）$A+4E$；　（6）-8；（7）57，$t<-6$。

二、$D_n \xlongequal{\text{每列减第一列}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$

$$\xlongequal{\text{按最后一行展开}} (-1)^{1+n}\left|E_{n-1}\right| = (-1)^{1+n}$$

三、由矩阵方程得

$$(A-2E)BA^* = E$$

可求得 $\det A = 3$，于是 $A^* = 3A^{-1}$，代入方程得

$$B = \frac{1}{3}(A-2E)^{-1}A$$

从而

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

四、

$$|A| = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

当 $\lambda \neq -2,1$ 时，线性方程组有唯一解

当 $\lambda = 1$ 时，增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

线性方程组无解；

当 $\lambda = -2$ 时，增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通解为

$$x_1 = 1 + k,\quad x_2 = k,\quad x_3 = k,\quad k\text{ 任意。}$$

五、1) 因为

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

所以

$$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

故由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$的过渡矩阵为$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

$$2)\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$$

故向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$下的坐标为$(-2,0,3)^{\mathrm{T}}$.

六、设$rankA=r$，则$Ax=0$的解空间的维数为$n-r$，

设$B=(b_1,b_2\cdots b_n)$，$b_i(i=1,2,\cdots n)$为列向量

由$AB=0\Rightarrow(Ab_1,Ab_2\cdots Ab_n)=0$知$b_i(i=1,2,\cdots n)$为$Ax=0$的解，

所以，$rankB=rank(b_1,b_2\cdots b_n)\le n-r$，

即 $rankA+rankB\le r+n-r=n$。

七、二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$的矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda&2&2\\2&\lambda&2\\2&2&\lambda\end{pmatrix}$$

由正交变换$x=Py$化为$f=6y_1^2$知$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=0$，

$$\lambda+\lambda+\lambda=6+0+0=6,$$

$$\lambda=2,$$

所以得 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=0$ 可求得对应的特征向量分别为

$$\mathbf{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}，\ \mathbf{p}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}，\ \mathbf{p}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$$

单位化得正交矩阵 $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

八、证明：$\Rightarrow$ 由矩阵 $A,B$ 相似知，存在可逆矩阵 $C$ 使得矩阵 $A=C^{-1}BC$，则

$$\left|A-\lambda E\right|=\left|C^{-1}BC-\lambda E\right|=\left|B-\lambda E\right|$$

所以，矩阵 $A,B$ 的特征多项式相等。

$\Leftarrow$ 设矩阵 $A,B$ 的特征多项式相等，则矩阵 $A,B$ 有相同的特征值，不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$，由 $A,B$ 为同阶实对称矩阵知，矩阵 $A,B$ 可由正交变换化为对角阵，不妨设对应的正交矩阵分别为 $P,Q$，即有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

所以，$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ$，即

$$(PQ^{-1})^{-1}APQ^{-1}=B$$

即得矩阵 $A,B$ 相似。