单元3.4 有序对与卡氏积

第七章 二元关系

7.1 有序对与笛卡尔积

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 有序对(有序二元组)
- 有序三元组, 有序n元组
- 卡氏积（笛卡尔积）
- 卡氏积性质

有序对

- 有序对：由两个元素a和b（允许a=b）按照一定顺序排列成得二元组称为一个有序对。

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

- a是第一元素, b是第二元素
- 例：x-y坐标，<中国, 北京>

引理1

引理1 $\{x,a\}=\{x,b\} \Leftrightarrow a=b$

证明 ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 分两种情况.

(1) $x=a$. $\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow \{a,a\}=\{a,b\}$

$\Rightarrow \{a\}=\{a,b\} \Rightarrow a=b.$

(2) $x\neq a$. $a\in\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow a=b.$ #

引理2

引理2 设A、B为集族（集合的集合），若$\mathcal{A}=\mathcal{B}\neq\varnothing$, 则

(1) $\cup\mathcal{A}=\cup\mathcal{B}$

(2) $\cap\mathcal{A}=\cap\mathcal{B}$

证明 (1) $\forall x,\ x\in\cup\mathcal{A} \Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{A}\wedge x\in z)$

$\Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{B}\wedge x\in z) \Leftrightarrow x\in\cup\mathcal{B}$.

(2) $\forall x,\ x\in\cap\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall z(\ z\in\mathcal{A}\rightarrow x\in z\ )$

$\Leftrightarrow \forall z(\ z\in\mathcal{B}\rightarrow x\in z\ ) \Leftrightarrow x\in\cap\mathcal{B}$. #

定理

定理 $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

证明 ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 由引理2, $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \cap\{\{a\},\{a,b\}\}=\cap\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a\}=\{c\} \Leftrightarrow a=c$.

又 $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow\cup\{\{a\},\{a,b\}\}=\cup\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a,b\}=\{c,d\}$.

再由引理1, 得b=d. #

推论

推论 $a\neq b \Rightarrow \langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$

证明 (反证)

$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle \Leftrightarrow a=b$,

与 $a\neq b$ 矛盾. #

有序三元组

- 有序三元组:

$$\langle a,b,c\rangle = \langle\langle a,b\rangle,c\rangle$$

- 有序n(n≥2)元组:

$$\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle = \langle\langle a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle$$

- **定理2** $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle = \langle b_1,b_2,\ldots,b_n\rangle$

$\Leftrightarrow a_i= b_i,\ i=1,2,\ldots,n$. #

例：n维空间坐标，n维向量

例

- 用有序n元组描述下列语句

（1）中国北京清华大学自动化系

（2）2021年11月30日10点30分0 秒

解：

（1）<中国，北京，清华大学，自动化系>

（2）<2021，11，30，10，30，0>

卡氏积（笛卡尔积）

- 卡氏积: 设A、B为集合，

$$A\times B = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \},$$

是与原集合层次不同的集合。

例

设 $A=\{\varnothing,a\}$, $B=\{1,2,3\}$.

则 $A\times B = \{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\varnothing,3>,<a,1>, <a,2>,<a,3>\}$.

$B\times A = \{<1,\varnothing>,<1,a>,<2,\varnothing>,<2,a>, <3,\varnothing>,<3,a>\}$.

$A\times A = \{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,a>,<a,\varnothing>,<a,a>\}$.

$B\times B = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,$

$<3,1>,<3,2>,<3,3> \}$.

卡氏积的性质

- 非交换: $A\times B \neq B\times A$

(除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)

- 非结合: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

(除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)

- 分配律: $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ 等
- 其他: $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$ 等

A、B有限集： $|A\times B|=|B\times A|=|B|x|A|$,

（|A|:集合A元素个数）

卡氏积非交换性

- 非交换: $A\times B \neq B\times A$

  (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)
- 反例: $A=\{1\}$, $B=\{2\}$.

  $A\times B = \{<1,2>\}$,

  $B\times A = \{<2,1>\}$.

卡氏积非结合性

- 非结合: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

  (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)
- 反例: $A=B=C=\{1\}$.

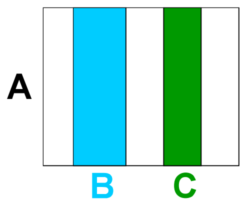
  $(A\times B)\times C = \{<<1,1>,1>\}$,

  $A\times(B\times C) = \{<1,<1,1>>\}$.

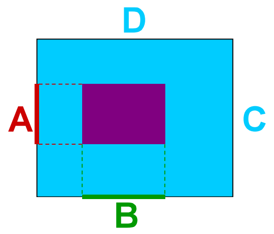
卡氏积分配律

- 1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
- 2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
- 3. $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$
- 4. $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

卡氏积图示



$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$



$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

卡氏积分配律的证明

- $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

证明: $\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (\langle x,y\rangle\in A\times B)\vee(\langle x,y\rangle\in A\times C)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\therefore$ $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$. #

例

例 设 A, B, C, D 是任意集合,

(1) $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$

(2) 若$A\neq\varnothing$, 则 $A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

(3) $A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$,

并且当$(A=B=\varnothing)\vee(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing)$时,

$A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq D$.

例(2)证明

(2) 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

证明 ($\Rightarrow$) 若 $B=\varnothing$, 则 $B\subseteq C$.

设 $B\neq\varnothing$, 由$A\neq\varnothing$, 设$x\in A$.

$\forall y$, $y\in B \Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow y\in C$.

$\therefore$ $B\subseteq C$.

例(2)证明

(2) 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C\Leftrightarrow B\subseteq C$.

证明 ($\Leftarrow$) 若$B=\varnothing$, 则$A\times B=\varnothing\subseteq A\times C$.

设$B\neq\varnothing$. $\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\therefore$ $A\times B\subseteq A\times C$. #

讨论: 在($\Leftarrow$)中不需要条件 $A\neq\varnothing$.

n维卡氏积

- n维卡氏积:

  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ <x_1,x_2,\ldots,x_n> \mid$

  $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$
- $A^n = A \times A \times \ldots \times A$
- $|A_i| = n_i, i=1,2,\ldots,n \Rightarrow$

  $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n$.
- n维卡氏积性质与2维卡氏积类似.

n维卡氏积的性质

- 非交换: $A \times B \times C \neq B \times C \times A$

  (要求A,B,C均非空,且互不相等)
- 非结合: (非2元运算)
- 分配律: 例如

  $A \times B \times (C \cup D) = (A \times B \times C) \cup (A \times B \times D)$
- 其他: 如 $A \times B \times C = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee C = \varnothing$.

小结

- 有序对(有序二元组) $<a,b> = \{\{a\},\{a,b\}\}$
- 有序三元组, 有序n元组
- 卡氏积 $A \times B = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in B \}$
- 卡氏积性质：非结合、非交换、分配律等