

单元3.7 关系的性质

第七章 二元关系 7.4 关系的性质

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

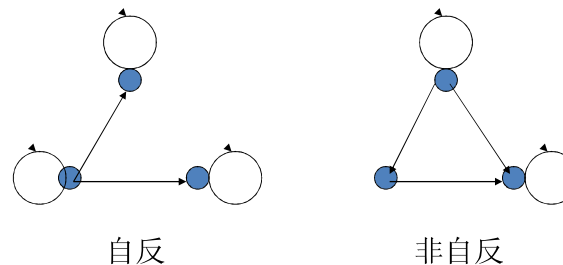
内容提要

- 关系的性质
 - 自反、反自反
 - 对称、反对称
 - 传递

自反性(reflexivity)

- $R \subseteq A \times A$
- R 是**自反的** $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A)xRx$
- 例：非空集合上的恒等关系、全域关系，正整数集合上的整除关系、小于等于关系，集合的幂集上的包含关系和相等关系等
- R 是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg xRx)$

自反性举例



定理

- 定理:

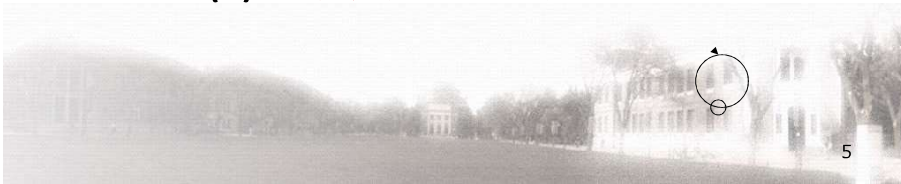
R 是自反的

$$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$$

$\Leftrightarrow R^{-1}$ 是自反的

$\Leftrightarrow M(R)$ 主对角线上的元素全为1

$\Leftrightarrow G(R)$ 的每个顶点处均有环. #



反自反性(irreflexivity)

- $R \subseteq A \times A$

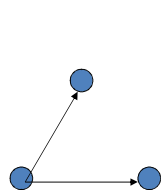
- R 是反自反的 $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A) \neg xRx$

- 例: 非空集合上的空关系, 自然数集合上的小于关系, 集合的幂集上的真包含关系

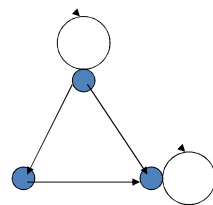
- R 是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xRx)$



反自反性举例



反自反



非反自反



定理

- 定理:

R 是反自反的

$$\Leftrightarrow I_A \cap R = \emptyset$$

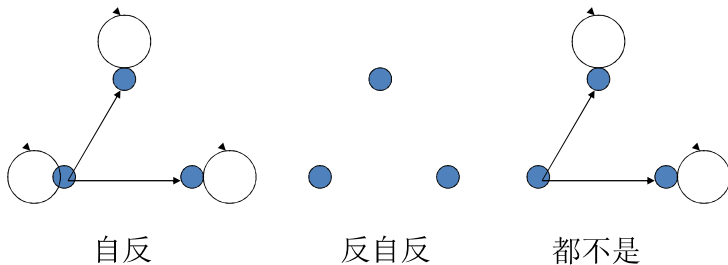
$\Leftrightarrow R^{-1}$ 是反自反的

$\Leftrightarrow M(R)$ 主对角线上的元素全为0

$\Leftrightarrow G(R)$ 的每个顶点处均无环. #



自反性与反自反性



(自反且反自反: \emptyset 上的空关系)

存在非自反且非反自反的关系: $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$

9

对称性(symmetry)

• $R \subseteq A \times A$

• R 是对称的 \Leftrightarrow

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \rightarrow yRx]$$

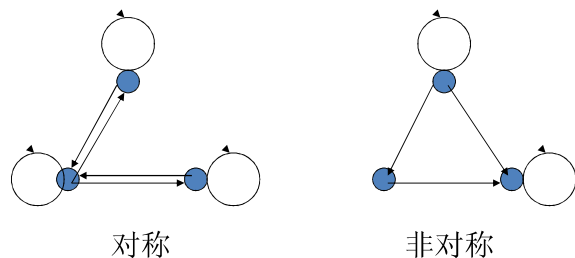
• 例: 非空集合上的全域关系 (对称、非反对称)、恒等关系

• R 是非对称的 \Leftrightarrow

$$\exists x \exists y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$$

10

对称性举例



11

定理

• 定理:

R 是对称的

$$\Leftrightarrow R^{-1} = R$$

$\Leftrightarrow R^{-1}$ 是对称的

$\Leftrightarrow M(R)$ 是对称的

$\Leftrightarrow G(R)$ 的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边. #

12

反对称性(anti-symmetry)

- $R \subseteq A \times A$
- R 是反对称的 \Leftrightarrow

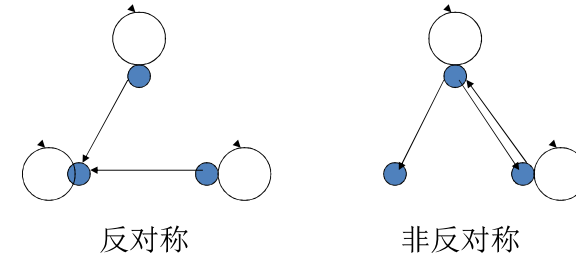
$$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \wedge yRx \rightarrow x=y]$$
- 例：非空集合上的恒等关系、空关系，正整数集合上的整除关系小于等于关系、小于关系（反对称，但非对称）
- R 非反对称 \Leftrightarrow

$$\exists x \exists y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$$

13

反对称性举例



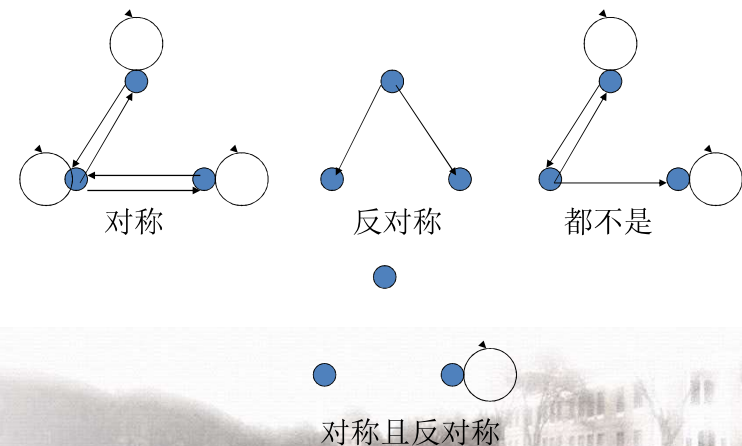
14

定理

- 定理：
 R 是反对称的
 $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$
 $\Leftrightarrow R^{-1}$ 是反对称的
 \Leftrightarrow 在 $M(R)$ 中, $\forall i \forall j (i \neq j \wedge r_{ij} = 1 \rightarrow r_{ji} = 0)$
 \Leftrightarrow 在 $G(R)$ 中, $\forall a_i \forall a_j (i \neq j)$, 若有有向边 $\langle a_i, a_j \rangle$, 则必没有 $\langle a_j, a_i \rangle$. #

15

对称性与反对称性



16

传递性(transitivity)

- $R \subseteq A \times A$
- R 是传递的 \Leftrightarrow

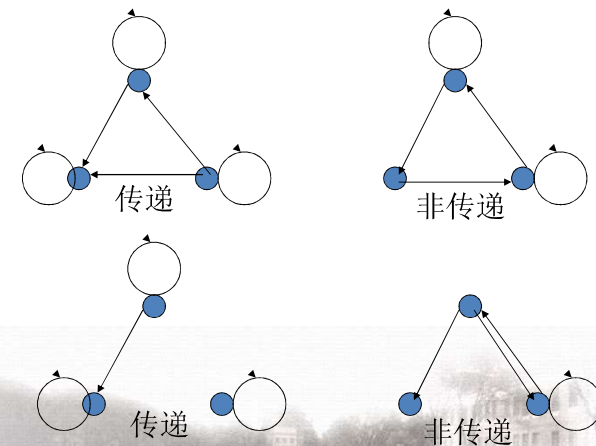
$$\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$$
- R 非传递 \Leftrightarrow

$$\exists x \exists y \exists z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$$

17

传递性举例



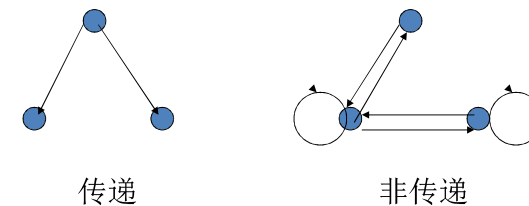
18

定理

- 定理:
 R 是传递的
 $\Leftrightarrow RoR \subseteq R \Leftrightarrow R^{-1}$ 是传递的
 $\Leftrightarrow \forall i \forall j, M(RoR)(i,j) \leq M(R)(i,j)$
 \Leftrightarrow 在 $G(R)$ 中, $\forall a_i \forall a_j \forall a_k$, 若有有向边 $\langle a_i, a_j \rangle$ 和 $\langle a_j, a_k \rangle$, 则必有有向边 $\langle a_i, a_k \rangle$.
 #

19

传递性



20

在 $N=\{0,1,2,\dots\}$ 上

- $\leq = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x \leq y \}$ 自反, 反对称, 传递
- $\geq = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x \geq y \}$ 自反, 反对称, 传递
- $< = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x < y \}$ 反自反, 反对称, 传递
- $> = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x > y \}$ 反自反, 反对称, 传递
- $D = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x \neq y \}$ 反对称, 传递 ($\neg 0 \mid 0$)
- $I_N = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x = y \}$ 自反, 对称, 反对称, 传递
- $E_N = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \} = N \times N$ 自反, 对称, 传递.

#

21

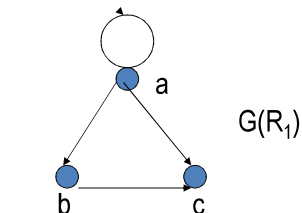
例

- $A = \{a, b, c\}$
- $R_1 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$,
- $R_2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle \}$,
- $R_3 = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle \}$,
- $R_4 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle \}$,
- $R_5 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$,
- $R_6 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, a \rangle \}$,

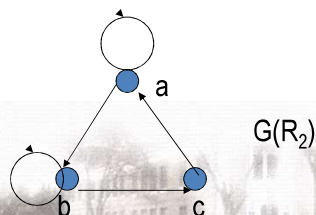
22

例

- $R_1 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$
反对称, 传递



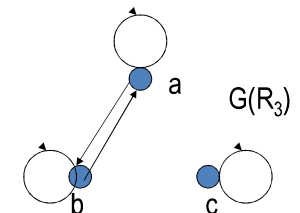
- $R_2 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle \}$
反对称



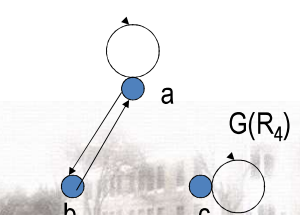
23

例

- $R_3 = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle \}$
自反, 对称, 传递



- $R_4 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle \}$
对称



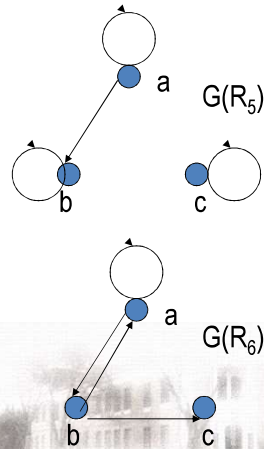
24

例

$R_5 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$
自反, 反对称, 传递

$R_6 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, a \rangle \}$
无任何性质

#



25

关系性质判别

.	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji} = 0$	对 M^2 中1所在位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则从 x_i 到 x_k 也有边

26

关系性质与关系运算

- 定理: $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ 具有某些共同性质。经过运算后是否能保持原性质?

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√ ₍₄₎	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√		
$R_1 \cap R_2$	√	√ ₍₂₎	√	√	√ ₍₅₎
$R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1$	√ ₍₁₎				
$R_1 - R_2, R_2 - R_1$		√	√ ₍₃₎	√	
$\sim R_1, \sim R_2$			√ _(3')		

27

定理(1)证明

- R_1, R_2 自反 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ 自反

- 证明: $\forall x,$

$$x \in A$$

$$\Rightarrow x R_1 x \wedge x R_2 x$$

$$\Rightarrow x R_1 \circ R_2 x$$

$$\therefore R_1, R_2 \text{ 自反} \Rightarrow R_1 \circ R_2 \text{ 自反.}$$

28

定理(2)证明

- R_1, R_2 反自反 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$ 反自反
- 证明: (反证) 若 $R_1 \cap R_2$ 非反自反, 则
 $\exists x \in A,$

$$x(R_1 \cap R_2)x$$

$$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$$

与 R_1, R_2 反自反矛盾!

$\therefore R_1, R_2$ 反自反 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$ 反自反. #

29

定理(3)证明

- R_1, R_2 对称 $\Rightarrow R_1 - R_2$ 对称

- 证明: $\forall x, y \in A,$

$$x(R_1 - R_2)y$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg xR_2y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge \neg yR_2x \quad (R_1, R_2 \text{对称})$$

$$\Leftrightarrow y(R_1 - R_2)x$$

$\therefore R_1, R_2$ 对称 $\Rightarrow R_1 - R_2$ 对称. #

30

定理(3')证明

- R_1 对称 $\Rightarrow \sim R_1$ 对称

- 证明: $\forall x, y \in A,$

$$x(\sim R_1)y$$

$$\Leftrightarrow x(E_A - R_1)y \Leftrightarrow xE_Ay \wedge \neg xR_1y$$

$$\Leftrightarrow yE_Ax \wedge \neg yR_1x \Leftrightarrow y(E_A - R_1)x \quad (E_A, R_1 \text{对称})$$

$$\Leftrightarrow y(\sim R_1)x$$

$\therefore R_1$ 对称 $\Rightarrow \sim R_1$ 对称. #

31

定理(4)证明

- R_1 反对称 $\Rightarrow R_1^{-1}$ 反对称

- 证明: (反证) 若 R_1^{-1} 非反对称, 则 $\exists x, y \in A,$

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x \neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x \neq y$$

与 R_1 反对称矛盾!

$\therefore R_1$ 反对称 $\Rightarrow R_1^{-1}$ 反对称. #

32

定理(5)证明

- R_1, R_2 传递 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$ 传递

- 证明: $\forall x, y, z \in A,$

$$x(R_1 \cap R_2)y \wedge y(R_1 \cap R_2)z$$

$$\Leftrightarrow (xR_1y \wedge xR_2y) \wedge (yR_1z \wedge yR_2z)$$

$$\Leftrightarrow (xR_1y \wedge yR_1z) \wedge (xR_2y \wedge yR_2z)$$

$$\Rightarrow xR_1z \wedge xR_2z \Leftrightarrow x(R_1 \cap R_2)z$$

$\therefore R_1, R_2$ 传递 $\Rightarrow R_1 \cap R_2$ 传递. #

33

小结

- 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递

34