单元3.11 函数

第八章 函数

8.1 函数的定义与性质

8.2 函数的复合与反函数

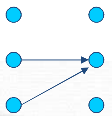
讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

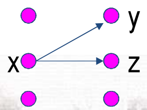
内容提要

- 函数的基本概念
- 函数性质：单射、满射、双射
- 函数合成
- 反函数

函数(映射)

- 函数(function), 映射(mapping):
  单值的二元关系
- 单值：$\forall x \in domF, \forall y,z \in ranF,$
  $xFy \wedge xFz \rightarrow y=z$


单值



非单值

函数的记号

- $F(x)=y \Leftrightarrow <x,y> \in F \Leftrightarrow xFy$
- $\varnothing$是空函数
- 常用F,G,H,...,f,g,h,...表示函数.

偏函数（部分函数）

- 设F是函数
- A到B的偏函数(partial function)

  $$\mathrm{dom}F \subseteq A \wedge \mathrm{ran}F \subseteq B$$

- A称为F的前域，B称为F的后域

偏函数的记号

- 从A到B的偏函数F记作

  $$F:A \nrightarrow B$$

- A到B的全体偏函数记为

  $$A \nrightarrow B = \{ F \mid F:A \nrightarrow B \}$$

- 显然 $A \nrightarrow B \subseteq P(A \times B)$

例

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$.
- $|P(A\times B)|=2^4=16$. $f_0=\varnothing$,

  $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

  $f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

  $f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

  $A \nrightarrow B = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$. #
- 非函数: $\{<a,1>,<a,2>\}$, $\{<a,1>,<a,2>,<b,1>\}$

全函数

- 全函数(total function) : domF=A
- 全函数记作 $F:A \to B$
- A到B的全体全函数记为

  $$B^A = A \to B = \{ F \mid F:A \to B \}$$

思考：全函数的关系矩阵、关系图具有什么特性？

关于B^A的说明

- $|B^A| = |B|^{|A|}$
- 当$A=\varnothing$时，$B^A=\{\varnothing\}$
  (A到B的全函数只有空函数)
- 当 $A\neq\varnothing \wedge B=\varnothing$ 时，
  $B^A=A\to B=\varnothing$. (A到B无全函数)

例

例 $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $B=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$，$f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,
$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$，$f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,
$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$，$f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,
$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$，$f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

例

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$,
  $f_0=\varnothing$,
  $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,
  $f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,
  $f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A\to B = \{f_5,f_6,f_7,f_8\}$

以下只讨论全函数

全函数性质

- 设 $F:A\to B$
- 单射(injection): F是单根的（任取$y\in ranF$，存在唯一的$x\in domF$满足$f(x)=y$）
- 满射(surjection, onto): $ranF=B$
- 双射(bijection), 一一对应(1-1 mapping) :
  F既是单射又是满射

例

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$
- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$
- $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$

- 求$A_1\to B_1$, $A_2\to B_2$, $A_3\to B_3$中的单射,满射,双射.

例 (1)

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$

- $A_1\to B_1$中无满射, 无双射, 单射6个:
  $f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$,
  $f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$,
  $f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.

例 (2)

- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$

- $A_2\to B_2$中无单射, 无双射, 满射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$,
$f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$, $f_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$,
$f_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$.

例 (3)

- $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,

- $A_2\to B_2$中双射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$
$f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,3>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>,<c,1>\}$
$f_5=\{<a,3>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>,<c,1>\}$

#

有多少个单射,满射,双射?

- 设|A|=n, |B|=m
- n<m时, A→B中无满射, 无双射, 单射个数为 m(m-1)…(m-n+1)
- n>m时, A→B中无单射, 无双射, 满射个数为 $m!\left\{ {n \atop m} \right\}$.
- n=m时，A→B中双射个数为 n!

例

- 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

（1）f : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)= -x^2+2x-1$

（2）f : $\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$, $\mathbf{Z}^+$为正整数集

（3）f : $\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$（向下取整）

（4）f : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$

（5）f : $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathbf{R}^+$为正实数集.

例

解 (1) f : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)= -x^2+2x-1$

在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的.

(2) f : $\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射的. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) f : $\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) f : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran$f$=R.

(5) f : $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的.

构造A到B的双射函数

有穷集之间的构造

例 $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0,f_1,\dots,f_7\}$, 其中

$f_0=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_1=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_2=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_3=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_6=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_7=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$.

令 $f: A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造A到B的双射函数

实数区间之间构造双射

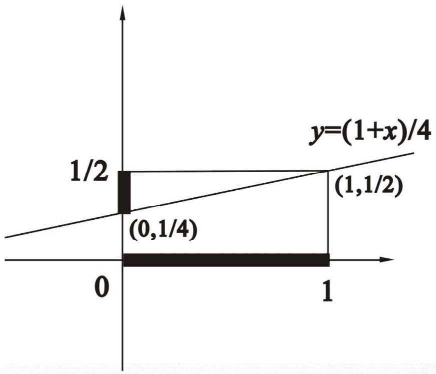
例 $A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f: A\to B$

解 令 $f: [0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$



构造A到B的双射函数

A与自然数集合之间构造双射

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始按照次序与自然数对应

例 A=Z, B=N，构造双射 $f: A\to B$

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$\begin{array}{lccccccc} Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots \end{array}$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathrm{Z}\to\mathrm{N},\ f(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

特殊函数

- 常数函数:

  f:A→B, ∃b∈B, ∀x∈A, f(x)=b

- 恒等函数:

  I_A:A→A, I_A(x)=x

- 特征函数:

  χ_A:E→{0,1}, χ_A(x)=1⇔x∈A

- 当 ∅⊂A⊂E时，χ_A是满射

单调函数

- 设f:A→B, <A,$\leq_A$>, <B,$\leq_B$>是偏序集
- 单调增:

  ∀x,y∈A, $x\leq_A y \Rightarrow f(x)\leq_B f(y)$

- 单调减:

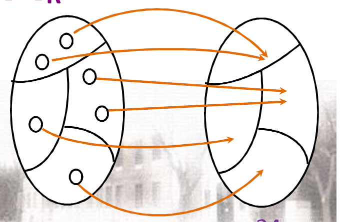
  ∀x,y∈A, $x\leq_A y \Rightarrow f(y)\leq_B f(x)$

- 严格单调：把≤换成<，是单射

自然映射

- 设R为A上等价关系
- 自然映射, 典型映射:

  $f:A\to A/R$, $f(x)=[x]_R$



- 当$R=I_A$时, f是单射.

自然映射(举例)

- $A=\{a,b,c,d\}$, $A/R=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$
- $F:A\to A/R$, $F(x)=[x]$

  $F(a)=\{a,b\}$,

  $F(b)=\{a,b\}$,

  $F(c)=\{c\}$,

  $F(d)=\{d\}$

定理8.1

定理8. 1 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则

$$f\circ g:A\to C,\quad f\circ g(x)=g(f(x))$$

证明思路

(1) fog单值 (即fog是函数)

(2) dom fog = A, ran fog $\subseteq$ C

(3) $f\circ g(x)=g(f(x))$

定理8.1证明(1)

- fog是单值的, 即fog是函数.
- $\forall x\in dom(fog)$, 若$\exists z_1,z_2\in ran(fog)$, 使得 $x(fog)z_1\wedge x(fog)z_2$, 则

$x(fog)z_1\wedge x(fog)z_2$

$\Leftrightarrow \exists y_1(y_1\in B\wedge xfy_1\wedge y_1gz_1)\wedge\exists y_2(y_2\in B\wedge xfy_2\wedge y_2gz_2)$

$\Leftrightarrow \exists y_1\exists y_2(y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge xfy_1\wedge xfy_2\wedge y_1gz_1\wedge y_2gz_2)$

$\Rightarrow \exists y(y\in B\wedge ygz_1\wedge ygz_2) \Rightarrow z_1=z_2$

定理8.1证明(2)

- dom(fog) = A, ran(fog)⊆C.
- 显然dom(fog)⊆A, ran(fog)⊆C.

 下证A⊆dom(fog), ∀x,

x∈A ⇒ ∃!y(y∈B∧xfy)

⇒ ∃!y∃!z(y∈B∧z∈C∧xfy∧ygz)

⇒ ∃!z(z∈C∧x(fog)z)

⇒ x∈dom(fog).

∃!: “存在唯一的”

定理8.1证明(3)

- fog(x)=g(f(x)).
- ∀x,

x∈A

⇒ ∃!z(z∈C∧z=fog(x))

⇔ ∃!z∃!y(z∈C∧y∈B∧xfy∧ygz)

⇔ ∃!z∃!y(z∈C∧y∈B∧y=f(x)∧z=g(y))

⇔ ∃!z(z∈C∧z=g(f(x)))

所以对任意x∈A, 有fog(x)=g(f(x)). #

定理8.2

定理8.2 设 f:A→B, g:B→C, fog:A→C,则

(1) 若 f,g 均为满射, 则 fog 也是满射.

(2) 若 f,g 均为单射, 则 fog 也是单射.

(3) 若 f,g 均为双射, 则 fog 也是双射. #

推论 设 f:A→B, g:B→C, 则

(1) 若 fog 为满射, 则 g 是满射.

(2) 若 fog 为单射, 则 f 是单射.

(3) 若 fog 为双射, 则 f 是单射, g 是满射. #

定理8.2证明

(1) 任取 $c\in C$, 由$g : B\to C$的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$.对于这个b, 由 $f : A\to B$ 的满射性, $\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$.由定理8.1, $f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.从而证明了$f\circ g : A\to C$是满射的.

(2) 假设存在 $x_1, x_2\in A$使得$f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$,由合成定理有 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$.因为 $g : B\to C$是单射的, 故 $f(x_1) = f(x_2)$. 又由于 $f : A\to B$也是单射的, 所以 $x_1=x_2$. 从而证明$f\circ g : A\to C$是单射的.

定理8.2推论证明

(1) 对于任意的z，

$$
\begin{aligned}
& z \in C \\
\Rightarrow & \exists x(x \in A \wedge x(f \circ g)z) \\
\Rightarrow & \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in \operatorname{ran} f \wedge xfy \wedge ygz) \\
\Rightarrow & \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in B \wedge y = f(x) \wedge z = g(y)) \\
\Rightarrow & \exists y(y \in B \wedge z = g(y))
\end{aligned}
$$

(2) 若$\exists\, y \in ran\, f \subseteq B, \exists x_1, x_2 \in A$使得

$$
\begin{aligned}
& x_1 f y \wedge x_2 f y \\
\Rightarrow & \exists z(z \in \operatorname{ran} g \subseteq C \wedge ygz \wedge x_1 f y \wedge x_2 f y) \\
\Rightarrow & \exists z(z \in C \wedge x_1(f \circ g)z \wedge x_2(f \circ g)z) \\
\Rightarrow & x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

(3) 由(1) (2)可得(3)

定理8.3

定理8. 3 设 **f:A→B,** 则 **f=fo**I_A=I_B**of. #**

定理 设 **f:R→R, g:R→R,** 且**f,g**按≤都是单调增的, 则**fog**也是单调增的.

证明 **x≤y ⇒ f(x)≤f(y) ⇒g(f(x))≤g(f(y)). #**

- 若**f,g**都是单调减的, 则**fog**也是单调增的

反函数

定理8. 4 设 **f:A→B**，且**f**为双射，则 f^{-1} :B→A，且f^{-1}也为双射． #

定义 若 **f: A→B** 为双射，则 f^{-1}: B→A 称为 **f** 的**反函数**。

定理8.4证明

证 因为 f 是函数, 所以 f^{-1}是关系, 且 dom f^{-1}= ran$f$ =B , ran f^{-1}= dom$f$ =A, 对于任意的 x∈B, 假设有 y_1, y_2∈A 使得 $<x,y_1>\in f^{-1} \wedge <x,y_2>\in f^{-1}$ 成立, 则由逆的定义有$<y_1,x>\in f \wedge <y_2,x>\in f$. 根据 f 的单射性可得 $y_1=y_2$, 从而证明了f^{-1}是函数，且是满射的.

若存在 $x_1, x_2 \in B$使得 $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)=y$, 从而有 $<x_1,y>\in f^{-1} \wedge <x_2,y>\in f^{-1} \Rightarrow <y,x_1>\in f \wedge <y,x_2>\in f \Rightarrow x_1=x_2$ 因为 f 是函数), 从而证明了f^{-1}的单射性.

例

例 设 $\cdot f: \mathrm{R}\to\mathrm{R},\ g: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 3 \\ -2 & x<3 \end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g, g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求f, g的反函数.

解 $f\circ g: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$ $\qquad g\circ f: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\ge 3 \\ 0 & x<3 \end{cases} \qquad g\circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x\ge 1 \\ -2 & x<1 \end{cases}$$

$f: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$不存在反函数; $g: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$的反函数是 $g^{-1}: \mathrm{R}\to\mathrm{R},\ g^{-1}(x)=x-2$

定理8.5

定理8. 5 设 f:A→B，且f为双射，则

$$f^{-1}\circ f = I_B,\quad f\circ f^{-1} = I_A$$

证 根据定理**8.4**可知 f^{-1}: $B\to A$也是双射的.
由定理**8.1** 可知 $f^{-1}\circ f: B\to B,\ f\circ f^{-1}: A\to A$，且它们都是恒等函数.

对于双射函数 **f : A→A**, 根据上述定理有

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A.$$

小结

- 函数,偏函数,全函数
- 单射, 满射, 双射, 计数
- 常值函数,恒等函数,特征函数,单调函数,自然映射
- 合成函数,构造双射
- 反函数