

线性代数（工科类）期中考试

2019 年 11 月 2 日

题 1. (5 分) 把矩阵 A 的第一行的 2 倍加到第二行, 之后互换第一列和第二列, 得到的矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. 那么, 矩阵 A 是什么?

解答 1. 倒回去 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$.

题 2. (5 分) 试给出一个 2 阶上三角矩阵 U , 使得 U 不是对角阵, 且 $U^{-1} = U$.

解答 2. $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. 注: 满足这样条件的 U 只可能是 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($a \neq 0$).

题 3. (5 分) 假设 A_1, A_2, \dots, A_4 是同阶可逆方阵, $C = A_1 A_2 A_3 A_4$ 是它们的乘积, 试用 C^{-1} 和 A_1, A_2, A_4 表示 A_3^{-1} .

解答 3. $C^{-1} = A_4^{-1} A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1}$, 故 $A_3^{-1} = A_4 C^{-1} A_1 A_2$.

题 4. (8 分) 试写下两个非零的 2 阶方阵 A, B 使得 $A^2 = B^2 = 0$. 所有满足 $A^2 = 0$ 的 2 阶方阵的全体是否是 $M_2(\mathbb{R})$ 的线性子空间? 若是请证明, 若不是请说明原因.

解答 4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 记 $Nil = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^2 = 0\}$. 因为 $A, B \in Nil$ 而 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是一个 2 阶置换阵 P , 其平方是 I_2 , 所以 $P \notin Nil$, 由此可见, Nil 在加法运算下不封闭, 故它不是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间. 注: 满足 $A^2 = 0$ 的 2 阶方阵都形如 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, 其中 $a^2 + bc = 0$.

题 5. (8分) 设 $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, 且线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有三组解 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, 试证明 $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \end{bmatrix}$ 也是该方程组的解。

解答 5. 因为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 都是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解, 所以 $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 是齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解。方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解集 $N(A)$ 是 \mathbb{R}^2 的线性子空间。既然 $N(A)$ 包含 $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$, 那么 $N(A)$ 必然包含这两个向量的所有线性组合。又因 $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 不共线, 故它们的所有线性组合是 \mathbb{R}^2 , 也就是说 $N(A) = \mathbb{R}^2$ 。所以 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集是 $\mathbf{x}_1 + N(A) = \mathbf{x}_1 + \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$, 特别的 \mathbf{x}_4 是该方程组的解。

其他方法: 设 $A = (a_{ij})$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, 则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 等价于 $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ 且 $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ 。这两个方程都是平面中的直线方程, 除非系数 $(a_{11}, a_{12}) = (0, 0)$ 或 $(a_{21}, a_{22}) = (0, 0)$ 。因为 $3 = \frac{2+4}{2}$, 而 $4 \neq \frac{7+8}{2}$, 所以题设中给出的三点不共线, 也就是说没有一条直线会同时包含这三点。这说明 $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, 即 $A = 0$; 原方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 又有解, 所以必有 $\mathbf{b} = 0$, 所以任意向量都是 $0\mathbf{x} = 0$ 的解。

题 6. (8分) 设 A 是 3×4 阶矩阵, A 的零空间 $N(A)$ 是 $\{c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ 。

求 $\text{rref}(A)$ 。

解答 6. 记 $R = \text{rref}(A) = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \gamma_4]$, 其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \mathbb{R}^3$ 。从 $N(A) = N(R)$ 的表达形式可以看出, γ_2, γ_4 是 R 的自由列, γ_1, γ_3 是 R 的主元列, 并且 $3\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_1 + 4\gamma_3 + \gamma_4 = 0$ 。所以 $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_2 = -3\gamma_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_4 = -\gamma_1 - 4\gamma_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

合起来有 $R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

题 7. (10 分) 求下面线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

解答 7. 对增广矩阵作初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & | & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}, \text{ 从行简化后的增广矩阵可以算出方程组的通解是}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

题 8. (20 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

1. (6 分) 证明: A 可逆的充分必要条件是 a, b, c 两两不同.

2. (6 分) 当 A 可逆时, 求 A 的 LU 分解.

3. (8 分) 当 $a = 1, b = 2, c = 3$ 时, 求 A^{-1} .

解答 8. 1. 对 A 作两次行倍加变换得到 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$, 再作一次行倍加变换得到

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{bmatrix},$$

其中右下角的元素通过计算 $c^2 - a^2 - (c-a)(b+a) = (c-a)(c+a) - (c-a)(b+a) = (c-a)(c-b)$ 得来。因为初等行变换不影响矩阵是否可逆, 所以 A 可逆当且仅当 U 可逆, 而上三角阵 U 可逆当且仅当它的对角线元素 $b-a, (c-a)(c-b)$ 都非零, 也就是 a, b, c 两两不同。

2. 把上面消元过程中用到的乘子放在合适的位置上就得到了 LU 分解中的 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 \end{bmatrix}$,

U 如上。

3. 当 $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ 时, 可以用 Gauss-Jordan 方法计算 A 的逆矩阵如下

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

题 9. (6 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$.

1. (2 分) 把 A 写成 $\alpha\beta^T$ 的形式, 其中 α, β 均是列向量。

2. (4 分) 计算 A^{2019} .

解答 9. 1. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. 记 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $A = \alpha\beta^T$. 又因为 $\beta^T\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 12 = 17$, 所以 $A^{2019} = \alpha\beta^T\alpha\beta^T \cdots \alpha\beta^T = (\beta^T\alpha)^{2018}\alpha\beta^T = 17^{2018}A$.