Tsinghua University

单元2.10 一阶逻辑的等值式与前束范式

第5章 一阶逻辑等值演算与推理

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

5.2 一阶逻辑前束范式

内容提要

- 一阶逻辑等值式
- 置换规则、换名规则
- 前述范式

等值式

- 命题“没有不犯错误的人”

$F(x)$: x是人；$G(x)$: x犯错误

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(2) $\forall x\left(F(x)\rightarrow G(x)\right)$

(1)与(2)是等值的。

定义 若***A*↔*B***是永真式，则称***A***与***B***是等值的，记作 ***A*⇔*B***，并称***A*⇔*B***为等值式

基本等值式

- **命题逻辑中基本等值式的代换实例**

如，$\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)\Leftrightarrow\neg(\forall xF(x))\vee(\exists yG(y))$

$\neg(\forall xF(x)\vee\exists yG(y))\Leftrightarrow\neg(\forall xF(x))\wedge\neg(\exists yG(y))$

$(\forall xF(x)\wedge Q(y))\vee\exists zG(z)\Leftrightarrow(\forall xF(x)\vee\exists zG(z))\wedge(Q(y)\vee\exists zG(z))$ 等

设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的p_i($1\le i\le n$)，所得公式A称为A_0的代换实例.

基本等值式

- **量词否定等值式**

设*A*(*x*)是含*x*自由出现的公式

$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$，$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$

- 并非所有的x都具有性质A⇔有一个x不具有性质A
- 考虑有限域{1,2}:

$$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg(A(1)\wedge A(2))$$
$$\Leftrightarrow \neg A(1)\vee\neg A(2) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$$

- 在任意解释I下，若$\neg\forall x A(x)$为真，则$\forall x A(x)$为假。即存在x0, *A*(*x0*)为假，故$\exists x\ \neg A(x)$为真。反之亦然。

基本等值式

例：命题“天下乌鸦一般黑”

设 F(x): x是乌鸦，G(x,y): x与y一样黑

$$(\forall x)(\forall y)\big(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x,y)\big)$$
$$\neg(\exists x)(\exists y)\big(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y)\big)$$

$$\begin{aligned}
&\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y)) \\
\Leftrightarrow&(\forall x)(\neg(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))) && \text{量词否定等值式}\\
\Leftrightarrow&(\forall x)(\forall y)\neg(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y)) && \text{量词否定等值式}\\
\Leftrightarrow&(\forall x)(\forall y)\neg(F(x)\wedge F(y))\vee G(x,y) && \text{德摩根律}\\
\Leftrightarrow&(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x,y)) && \text{蕴涵等值式}
\end{aligned}$$

基本等值式

- **量词辖域收缩与扩张等值式**

设*A*(*x*)是含*x*自由出现的公式，*B*中不含*x*的出现

1) $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

2) $\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

3) $\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

4) $\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

证明1）⇒:在任意一解释I下，任取$x\in D, A(x)\vee B$为真。若B为真，则$\forall x\ A(x)\vee B$为真。若B为假，则任取$x\in D, A(x)$为真，则$\forall x\ A(x)\vee B$为真。

⇐：证明方法相同。略。

基本等值式

- **量词辖域收缩与扩张等值式**

设*A*(*x*)是含*x*自由出现的公式，*B*中不含*x*的出现

5) $\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$

6) $\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

7) $\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

8) $\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(A(x)\rightarrow B) \\
\Leftrightarrow&(\forall x)(\neg A(x)\vee B) && \text{蕴涵等值式}\\
\Leftrightarrow&(\forall x)\neg A(x)\vee B && \text{量词辖域收缩}\\
\Leftrightarrow&\neg((\exists x)A(x))\vee B && \text{量词否定}\\
\Leftrightarrow&(\exists x)A(x)\rightarrow B && \text{蕴涵等值式}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(B\rightarrow A(x)) \\
\Leftrightarrow&(\forall x)(\neg B\vee A(x)) && \text{蕴涵等值式}\\
\Leftrightarrow&\neg B\vee(\forall x)A(x) && \text{量词辖域收缩}\\
\Leftrightarrow&B\rightarrow(\forall x)A(x) && \text{蕴涵等值式}
\end{aligned}$$

基本等值式

- **量词分配等值式（分配律）**

设***A(x)***, ***B(x)***是含***x***自由出现的公式

9) $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$　**(∀ 对 ∧)**

10) $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$　**(∃ 对 ∨)**

证明9)：⇒：在任一解释I下，任取$x\in D$，有$A(x)\wedge B(x)$为真。于是对任一$x\in D$，A(x)，B(x)均为真。从而$\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$为真。

⇐：证明方法相同。略。

基本等值式

- **量词分配等值式（分配律）**

注意 ∀对∨，∃对∧不具有分配律！以{1，2}域为例：

$$(\forall x)(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(A(1)\vee B(1))\wedge(A(2)\vee B(2))$$
$$\Leftrightarrow(A(1)\wedge A(2))\vee(A(1)\wedge B(2))\vee(A(2)\wedge B(1))\vee(B(1)\wedge B(2))$$
$$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Leftrightarrow(A(1)\wedge A(2))\vee(B(1)\wedge B(2))$$ 涉及∧和∨
$$(\forall x)(A(x)\vee B(x))\not\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$$
$$\boxed{(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))}$$

$$(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow(A(1)\wedge B(1))\wedge(A(2)\wedge B(2))$$ 只涉及∧和交换律
$$\Leftrightarrow(A(1)\wedge A(2))\wedge(B(1)\wedge B(2))\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$$

基本等值式

- **量词分配等值式（分配律）**

注意 ∀对∨，∃对∧不具有分配律！以{1，2}域为例：

$$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow(A(1)\wedge B(1))\vee(A(2)\wedge B(2))$$
$$\Leftrightarrow(A(1)\vee A(2))\wedge(A(1)\vee B(2))\wedge(B(1)\vee A(2))\wedge(B(1)\vee B(2))$$
$$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)\Leftrightarrow(A(1)\vee A(2))\wedge(B(1)\vee B(2))$$ 涉及∧和∨
$$\boxed{(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)}$$

$$(\exists x)(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(A(1)\vee B(1))\vee(A(2)\vee B(2))$$ 只涉及∨和交换律
$$\Leftrightarrow(A(1)\vee A(2))\vee(B(1)\vee B(2))\Leftrightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$$

置换规则、换名规则

置换规则　设**Φ(A)**是含公式**A**的公式, **Φ(B)**是用公式**B**取代**Φ(A)**中的所有**A**得到的公式, 若**A⇔B**，则**Φ(A)⇔Φ(B)**

换名规则　将公式**A**中某量词的指导变元及其在辖域内的所有约束出现改成该量词辖域内未曾出现的某个个体变项, 其余部分不变, 记所得公式为**A′**, 则**A′⇔A**

置换规则、换名规则

例 消去公式中既约束出现、又自由出现的个体变项

(1) $\forall xF(x,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall uF(u,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall uF(u,y,z) \rightarrow \exists vG(x,v,z)$ 换名规则

(2) $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y) \rightarrow \exists tG(x,t,z))$ 换名规则

基本等值式

- 变元易名后的分配律

11) $\forall x\forall y(A(x)\vee B(y))\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

12) $\exists x\exists y(A(x)\wedge B(y))\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

证明11)：

$$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\vee(\forall y)B(y)\Leftrightarrow$$
$$(\forall x)\big(A(x)\vee(\forall y)B(y)\big)\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)\big(A(x)\vee B(y)\big)$$

以{1，2}域为例：

$$\boxed{\begin{aligned}(\forall x)(\forall y)(A(x)\vee B(y)) &\Leftrightarrow (A(1)\vee B(1))\wedge(A(1)\vee B(2))\\ &\quad\wedge(A(2)\vee B(1))\wedge(A(2)\vee B(2))\\ (\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x) &\Leftrightarrow (A(1)\wedge A(2))\vee(B(1)\wedge B(2))\\ (\forall x)(A(x)\vee B(x)) &\Leftrightarrow (A(1)\vee B(1))\wedge(A(2)\vee B(2))\end{aligned}}$$

Open Question Points: 10 Setting

设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下面公式中的量词:

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

(3) $\exists x\forall yF(x,y)$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

例

例 给定解释I: (a) $D=\{2,3\}$, (b) $\bar{f}$: $\bar{f}(2)=3, \bar{f}(3)=2$

(c) $\bar{F}(x)$:x是奇数, $\bar{G}(x,y)$: $x=2 \vee y=2$, $\bar{L}(x,y)$: $x=y$.

在I下求下列各式的真值:

(1) $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$

解 $(F(f(2))\wedge G(2,f(2)))\vee(F(f(3))\wedge G(3,f(3)))$

$\Leftrightarrow(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\Leftrightarrow 1$

(2) $\exists x\forall yL(x,y)$

解 $\forall yL(2,y)\vee\forall yL(3,y)\Leftrightarrow$

$(L(2,2)\wedge L(2,3))\vee(L(3,2)\wedge L(3,3))$

$\Leftrightarrow(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\Leftrightarrow 0$

例

例 证明下列等值式:

$\neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \to \neg F(x))$

证　左边　$\Leftrightarrow \forall x \neg(M(x) \wedge F(x))$　　量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \to \neg F(x))$

公式的标准型－范式

- 在命题逻辑里，每一公式都有与之等值的范式，范式是一种统一的表达形式，当研究一个公式的特点(如永真、永假) 时，范式起着重要作用。
- 对谓词逻辑的公式来说，也有范式，其中前束范式与原公式是等值的，而其它范式与原公式只有较弱的关系。

前束范式

定义3.11 设A为一个一阶逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_k B$$

则称A为前束范式，其中Q_i为$\forall$或$\exists$，$1 \le i \le k$，B称为公式A的母式(基式)，B中不再含量词.

例如　$\forall x \exists y(F(x) \to (G(y) \wedge H(x,y)))$

$\forall x \neg(F(x) \wedge G(x))$

是前束范式

$\forall x(F(x) \to \exists y(G(y) \wedge H(x,y)))$

$\neg \exists x(F(x) \wedge G(x))$

不是前束范式

前束范式的转换方法

定理(前束范式存在定理) 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

设G 是任一公式，通过下述步骤可将其转化为与之等价的前束范式：

1) 消去公式中包含的联结词$\to$, $\leftrightarrow$
2) 反复使用德摩根率将$\neg$内移
3) 使用分配等值式将量词左移
4) 使用变元易名分配等值式将变元易名

例

例求公式的前束范式

(1) $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$

解1 $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x))$ 量词分配等值式

解2 $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \forall y \neg G(y))$ 量词辖域扩张

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y))$ 量词辖域扩张

前束范式不唯一

例

求下述公式的前束范式

$\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \to (\exists x)(\neg (\forall y)Q(y,b) \to R(x)))$

(1)消去联结词→:

$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x))$

(2) 否定联结词消去/内移

$(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x))$

(3) 量词左移

$(\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x))$

(4) 变元易名

$(\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)$

$(\Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x))$

例

求下列各式的前束范式

1) $\forall x F(x) \to \exists x G(x)$

2) $\exists x F(x) \to \forall x F(x)$

3) $\forall x\, F(x,y) \to \exists y\, G(x,y)$

4) $(\forall x_1 F(x_1,x_2) \to \exists x_2 G(x_2)) \to \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$

例

1) $\forall x F(x) \to \exists x G(x)$

$(\forall x)F(x) \to (\exists x)G(x)$

$\Leftrightarrow (\forall y)F(y) \to (\exists x)G(x)$ 换名规则

$\Leftrightarrow (\exists y)(F(y) \to (\exists x)G(x))$ 量词辖域扩张

$\Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(F(y) \to G(x))$ 量词辖域扩张

2) $\exists x F(x) \to \forall x F(x)$

$(\exists x)F(x) \to (\forall x)G(x)$

$\Leftrightarrow (\exists y)F(y) \to (\forall x)G(x)$ 换名规则

$\Leftrightarrow (\forall y)(F(y) \to (\forall x)G(x))$ 量词辖域扩张

$\Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(F(y) \to G(x))$ 量词辖域扩张

例

3) $\forall x\, F(x,y) \rightarrow \exists y\, G(x,y)$

注意区分个体变元的自由出现与约束出现

$$
\begin{aligned}
&\forall x F(x,y) \rightarrow \exists y G(x,y) && \\
\Leftrightarrow &\forall t F(t,y) \rightarrow \exists w G(x,w) && \text{换名规则} \\
\Leftrightarrow &\exists t (F(t,y) \rightarrow \exists w G(x,w)) && \text{量词辖域扩张} \\
\Leftrightarrow &\exists t \exists w (F(t,y) \rightarrow G(x,w)) && \text{量词辖域扩张}
\end{aligned}
$$

Open Question Points: 10 Setting

求下列公式前束范式：

$(\forall x_1 F(x_1,x_2) \rightarrow \exists x_2 G(x_2)) \rightarrow \forall x_1 H(x_1,x_2,x_3)$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

小结

- 一阶逻辑等值式
- 置换规则、换名规则
- 前述范式