清華大学 Tsinghua University

单元2.6 推理形式

第3章 命题逻辑的推理理论

3.1 推理的形式结构

内容提要

- 推理形式
- 有效推理形式
- 推理形式是有效的充要条件
- 推理定律

推理形式

- 前面介绍了命题的“形式”。
- 本节介绍推理的“形式”。
- 推理是逻辑的研究对象：从前提出发推出结论的思维过程。

什么是推理形式？

- 一组前提，一个结论
- 前提、结论都是命题。
- 若前提为α_1，α_2，…，α_n，结论为β，则将这样的推理形式称为

由前提α_1，α_2，…，α_n推出结论β。

什么是正确的推理形式？

- 直观上，正确的推理应该保证：如果前提正确，则结论也应该正确。
- 设α_1，α_2，…，α_n, β都是命题公式，如果对α_1，α_2，…，α_n, β中出现的命题变元的任一赋值, 若$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$为假，或若$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$为真时$\beta$亦真，则称推理"$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$推出$\beta$"是有效的
- 否则，称"α_1，α_2，…，α_n推出β"是无效的或不合理的.

例

- $\alpha \to \beta$、α推出β是有效的。
- $\alpha \vee \beta$、$\neg\alpha$推出β是有效的

注记

- 推理形式是否有效与前提中命题形式的排列次序无关。即：
- 若"α_1，α_2，…，α_n推出β"是有效的，则对1，2，…，n的任一个排列$i_1, i_2, \ldots, i_n$，"$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_n}$推出$\beta$"也是有效的。
- 所以前提是一个集合$\Gamma=\{\alpha_1，\alpha_2，\ldots，\alpha_n\}$，而不是一个序列。

注记

- 对任意一组赋值，前提和结论的取值情况:

1) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$为0， β为0
2) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$为0， β为1
3) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$为1， β为0
4) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$为1， β为1

- 判断推理是否正确，就是判断是否会出现"前提为真结论为假"的情况。
- 前提不正确，无论结论正确与否，都说推理正确。

下列推理形式是否有效？

(1) $p \vee q$、$\neg q$、$(p \to q) \to r$推出r是无效的

P	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \to q) \to r$	r
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0 ←
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

下列推理形式是否有效？

(2) $(\neg p_1) \vee p_2$，$p_1 \to (p_3 \wedge p_4)$，$p_4 \to p_2$，$p_3 \to p_4$推出$p_2 \vee p_4$。

解：目的是看能否找到使前提为真、且结论为假的赋值。

- 使$p_2 \vee p_4$为假的赋值有（*，0，*，0），
  其中使 $(\neg p_1) \vee p_2$为真的赋值有(0，0，*，0)，
  其中使$p_3 \to p_4$为真的赋值有（0，0，0，0），
- 而（0，0，0，0）使$p_1 \to (p_3 \wedge p_4)$和$p_4 \to p_2$都为真。

从而这个推理是无效的。

下列推理形式是否有效？

(3) p1→(p2→p3)，p2推出p1 →p3

解：

- 使$p_1 \to p_3$ 为假的赋值有（1，*，0），
  - 其中使p_2为真的赋值只有（1，1，0），

而（1，1，0）使$p_1 \to (p_2 \to p_3)$ 为假。

故没有使前提为真而结论为假的赋值，从而此推理有效。

充要条件

- 推理形式“α_1，α_2，…，α_n推出β” 有效充要条件是命题形式$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$是重言式，或 $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \wedge \neg\beta$ 为矛盾式。

意义：

- 推理形式的有效性与命题公式的永真性可以互相化约。

逻辑蕴含⇒

- 前提:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 结论: β
  推理正确记为$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$
- →与⇒的不同:
- ➢→是蕴含联结词，A→B的结果仍然是一个命题公式
- ➢⇒ 表示两个命题公式之间的一种逻辑蕴含关系， A ⇒ B表示“前提A推出结论B”是有效的， A ⇒ B的结果不是命题公式。
- ➢计算机无法判断A ⇒ B，但是计算机可以计算A→B是否为永真式。

逻辑蕴含⇒

- 若$A \Rightarrow B$，A为重言式，则B也是重言式。
- 若$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$同时成立，必有$A \Leftrightarrow B$。
- 若$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$。
- 若$A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B \wedge C$。
- 若$A \Rightarrow C, B \Rightarrow C$，则$A \vee B \Rightarrow C$。

证明推理公式$A \Rightarrow B$的方法

- 真值表法
- 解释法：以$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$为例

若$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$为真，则$(P \to Q)$为真，且$(Q \to R)$为真。

若P为真，则Q及R必为真，因而$P \to R$必为真。

若P为假，则右端必为假。

假言三段论推理式得证。

- 证明$A \to B$为永真式，或$A \wedge \neg B$为矛盾式
  - 主析取/合取范式法，等值演算法
- 若$\neg B \Rightarrow \neg A$，则必有$A \Rightarrow B$

下列推理形式是否有效?

例 判断下面推理是否正确:

(1) 若今天是1号, 则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

解 设 p: 今天是1号, q: 明天是5号

证明 用等值演算法

$$(p\to q)\wedge p\to q$$
$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$
$$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee q$$
$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

下列推理形式是否有效？

例 判断下面推理是否正确:

(2) 若今天是1号, 则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设p: 今天是1号, q: 明天是5号.

证明 用主析取范式法

$(p\to q)\wedge q\to p$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\to p$

$\Leftrightarrow \neg ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$

$\Leftrightarrow \neg q\vee p$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$

01是成假赋值, 所以推理不正确.

Open Question Points: 10 Setting

判断下列推理式是否有效

1. $(P\to(Q\to R))\Rightarrow(P\to Q)\to(P\to R)$
2. $(P\vee Q)\to(P\vee\neg Q)\Rightarrow\neg P\vee Q$
3. $((P\wedge Q)\to R)\wedge(P\vee Q)\to\neg R)\Rightarrow P\wedge Q\wedge R$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

重要的推理定律

① 附加律	$A\Rightarrow(A\vee B)$
② 化简律	$(A\wedge B)\Rightarrow A$，$(A\wedge B)\Rightarrow B$
③ 假言推理	$(A\to B)\wedge A\Rightarrow B$
④ 拒取式	$(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$
⑤ 析取三段论	$(A\vee B)\wedge\neg A\Rightarrow B$
	$(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$

重要的推理定律

⑥ 假言三段论	$(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow(A\to C)$
⑦ 等价三段论	$(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$
⑧ 构造性两难	$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$
构造性两难(特殊形式)	$(A\to B)\wedge(\neg A\to B)\Rightarrow B$
⑨破坏性二难	$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D)$ $\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$

二难推理举例

- 父亲对他那喜欢到处游说的儿子说，“你不要到处游说。如果你说真话，那么富人恨你；如果你说假话，那么穷人恨你。既然游说只会招致大家恨你，你又何苦为之呢?”
- 父亲劝儿子就使用了一个二难推理：
  如果你说真话，那么富人恨你；
  如果你说假话，那么穷人恨你；
  或者你说真话，或者你说假话；
  总之，有人恨你。

重要的推理定律

⑩ $\neg A \Rightarrow (A \to B)$, $B \Rightarrow (A \to B)$

$\neg(A \to B) \Rightarrow A$, $\neg(A \to B) \Rightarrow \neg B$

⑪ $(B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to (A \to C)$

$(B \to C) \Rightarrow (A \vee B) \to (A \vee C)$

举例

- 某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出。
- 根据上述案情可得前提：

1) 凶手为王某或陈某 $P \vee Q$
2) 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出 $P \to R$
3) 王某当晚没有外出 $\neg R$

- 结论：陈某为凶手 Q
- 推理过程描述为：
  $(P \to R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$　　拒取式
  $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$　　析取三段论

小结

- 推理形式
- 有效推理形式
- 推理形式是有效的充要条件
- 推理定律