单元1.3 图的连通性

第14章 图的基本概念

14.3 图的连通性

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

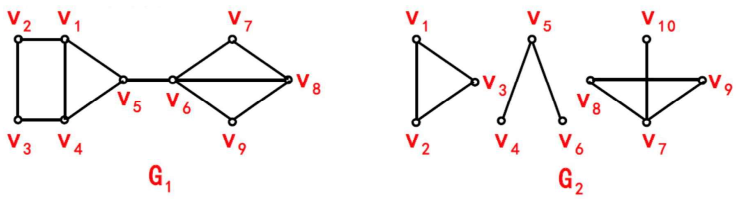
- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 ⇔ 无奇圈
- 强连通(双向),单向连通,弱连通

连通

- 无向图$G=<V,E>$, $u\sim v \Leftrightarrow$ u与v之间有通路, 规定$u\sim u$
- 连通关系~是等价关系
  - 自反: $u\sim u$
  - 对称: $u\sim v \Rightarrow v\sim u$
  - 传递: $u\sim v \wedge v\sim w \Rightarrow u\sim w$
- 连通分支: $G[V_i]$, $(i=1,\ldots,k)$
  - V_i: V关于顶点之间连通关系的一个等价类
  - 连通分支数: $p(G)$
- 连通图: $p(G)=1$; 非连通图(分离图): $p(G)>1$

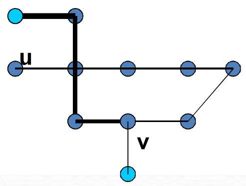
连通、连通分支举例

- 判断下图的连通性，并求其连通分支数

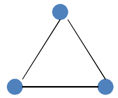


短程线(测地线)

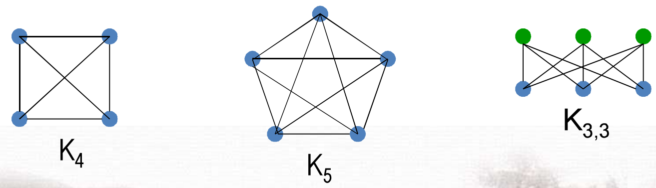
u,v之间长度最短的通路



距离、直径



- 距离：$d_G(u,v)$ = u,v之间短程线的长度(或∞)
- 直径：$d(G) = \max\{ d_G(u,v) \mid u,v \in V(G) \}$
- 例：$d(K_n)=1 (n\geq2)$, $d(N_1)=0$, $d(N_n)=\infty$ $(n\geq2)$



距离函数

- 非负性: $d(u,v)\geq0$,

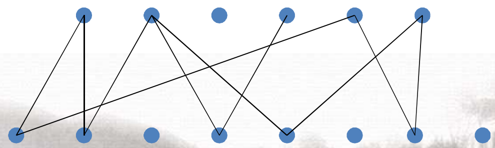
  $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$
- 对称性: $d(u,v) = d(v,u)$
- Δ不等式: $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
- 任何函数只要满足上述三条性质, 就可以当作距离函数使用

定理14.10

- 定理14.10 G是二部图 $\Leftrightarrow$ G中无奇圈
- 证明: ($\Rightarrow$) 设$G=(V_1,V_2;E)$,

  设$C=v_1v_2\ldots v_{l-1}v_lv_1$是G中的任意圈, 设$v_1\in V_1$, 则 $v_3,v_5,\ldots,v_{l-1}\in V_1$, $v_2,v_4,\ldots,v_l\in V_2$,

  于是$l=|C|$是偶数, C是偶圈.



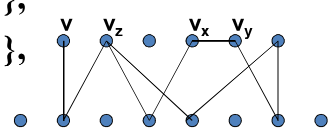
定理14.10

- 证: (⇐) 设G连通(否则对每个连通分支进行讨论), 设$v\in V(G)$, 令

  $V_1=\{\ u\in V(G)\ |\ d(u,v)$为偶数 $\}$,

  $V_2=\{\ u\in V(G)\ |\ d(u,v)$为奇数 $\}$,

  则 $V_1\cup V_2=V(G)$, $V_1\cap V_2=\varnothing$.



  下证 $E(G)\subseteq V_1\&V_2$.

  (反证)若存在$e=(v_x,v_y)$, $v_x,v_y\in V_1$, 设Γ_{vx}和Γ_{vy}是v到v_x和v_y的短程线. $|\Gamma_{vx}|$和$|\Gamma_{vy}|$都是偶数.设v_z是Γ_{vx}与Γ_{vy}的最后一个公共点，若$v_z\in V_1$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是偶数;若$v_z\in V_2$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是奇数. 于是$\Gamma_{zx}\cup(v_x,v_y)\cup\Gamma_{zy}$是G中奇圈, 矛盾!

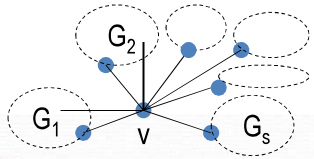
定理

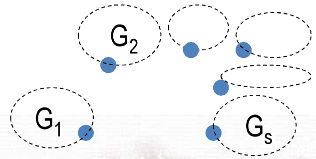
定理　若无向图G是连通的, 则G的边数$m\geq n-1$

证明: (对n归纳) 不妨设G是简单图.

(1) $G=N_1$: $n=1$, $m=0$.

(2) 设$n\leq k$时命题成立,下证$n=k+1$时也成立.





定理证明

- $\forall v\in V(G)$, 设$p(G-v)=s$, 则$d_G(v)\geq s$.

  对G-v的连通分支$G_1,G_2,\ldots,G_s$使用归纳假设,设 $|V(G_i)|=n_i$, $|E(G_i)|=m_i$,则

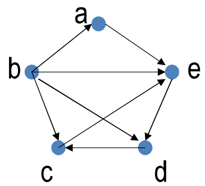
  $m = m_1+m_2+\ldots+m_s+d_G(v)$

  $\geq (n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)+s$

  $= n_1+n_2+\ldots+n_s = n-1$.　#

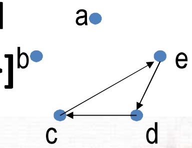
(双向)可达

- 有向图D=<V,E>,　$u\rightarrow v \Leftrightarrow$ 从u到v有(有向)通路
  - 规定$u\rightarrow u$，可达关系是自反, 传递的
- 有向图D=<V,E>,　$u\leftrightarrow v \Leftrightarrow u\rightarrow v \wedge v\rightarrow u$
  - 双向可达关系是等价关系
  - 其等价类的导出子图称为强连通分支



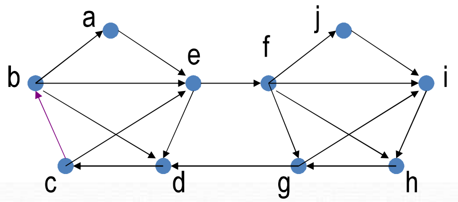
- 例: $b\rightarrow a\rightarrow e\rightarrow d\rightarrow c$, $c\rightarrow e\rightarrow d$, $c\leftrightarrow e\leftrightarrow d$

  强连通分支: G[{a}],G[{b}],G[{c,e,d}]



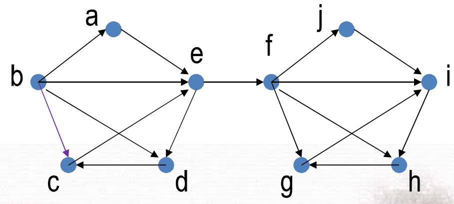
强连通

- 强连通(双向连通): 有向图的任何一对顶点之间都双向可达



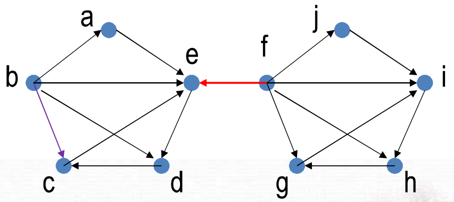
单向连通

- 有向图的任何一对顶点之间至少单向可达
- 单项连通关系满足自反性及传递性



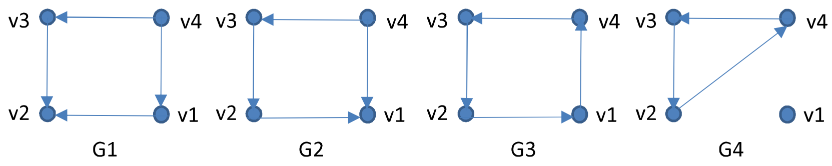
弱连通

- 有向图的基图是连通图
- 弱连通关系是等价关系



Open Question Points: 10 Setting

判断下图连通性。

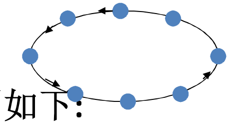


Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

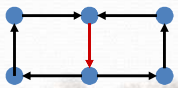
Answer

定理14.8

- 有向图D强连通 ⇔ D中有回路过每个顶点至少一次.



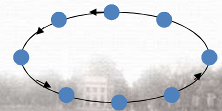
- 说明: 不一定有简单回路,反例如下:



定理14.8证明

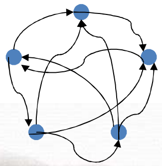
- 证明: (⇐) 显然

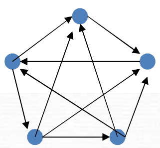
(⇒) 设$V(D)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 设$\Gamma_{i,j}$是从$v_i$到$v_j$的有向通路, 则$\Gamma_{1,2}+\Gamma_{2,3}+\ldots+\Gamma_{n-1,n}+\Gamma_{n,1}$是过每个顶点至少一次的回路. #

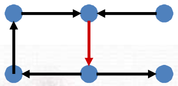


定理14.9

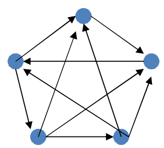
- 有向图D单向连通 ⇔ D中有通路过每个顶点至少一次. #
- 说明: 不一定有简单通路,反例如下:



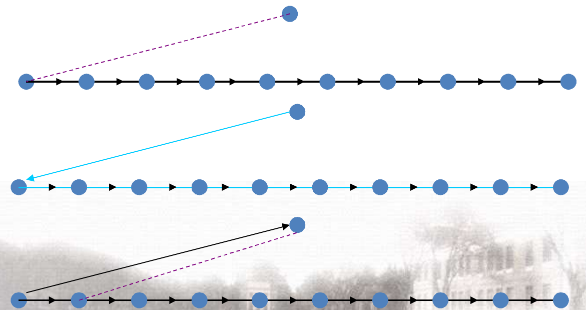




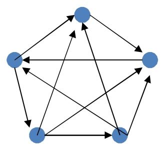
命题



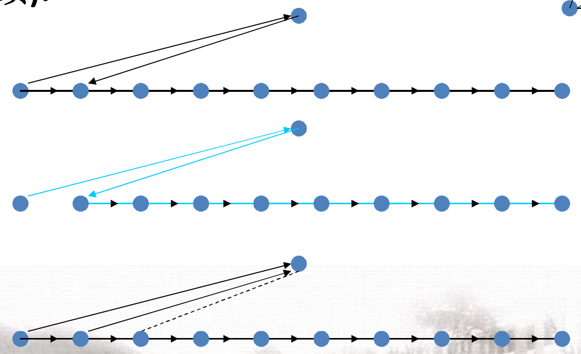
- 竞赛图一定有初级通路(路径)过每个顶点恰好一次 （单项连通）
- 证明:



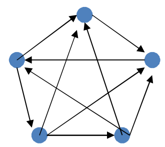
命题证明



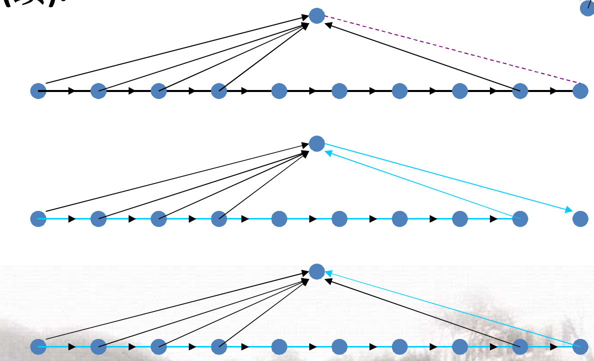
- 证明(续):



命题证明



- 证明(续):



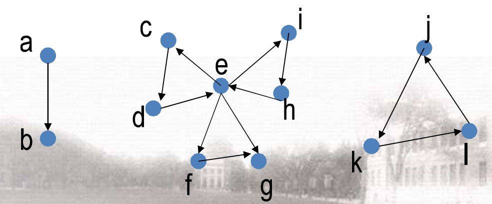
#

有向图的连通分支

- 强连通分支: 极大强连通子图
- 单向连通分支: 极大单向连通子图
- 弱连通分支: 极大弱连通子图

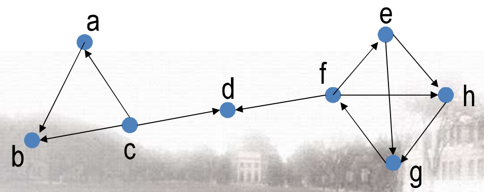
有向图的连通分支

- 强连通分支: G[{a}], G[{b}], G[{c,d,e,h,i}], G[{f}],G[{g}],G[{j,k,l}]
- 单向连通分支: G[{a,b}],G[{c,d,e,h,i,f,g}], G[{j,k,l}]
- (弱)连通分支: 与单向连通分支相同



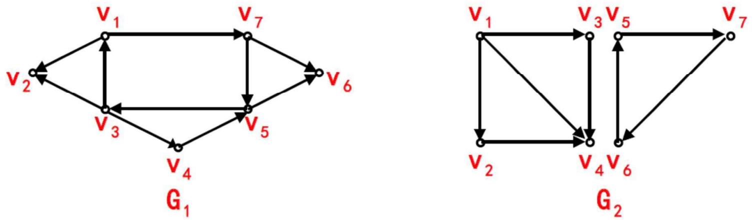
有向图的连通分支

- **强连通分支: G[{a}], G[{b}], G[{c}], G[{d}], G[{e,f,g,h}]**
- **单向连通分支: G[{a,b,c}], G[{c,d}], G[{d,e,f,g,h}]**
- **(弱)连通分支: G**



Open Question Points: 10 Setting

求下面两个图所有的强、单项、弱连通分支



Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

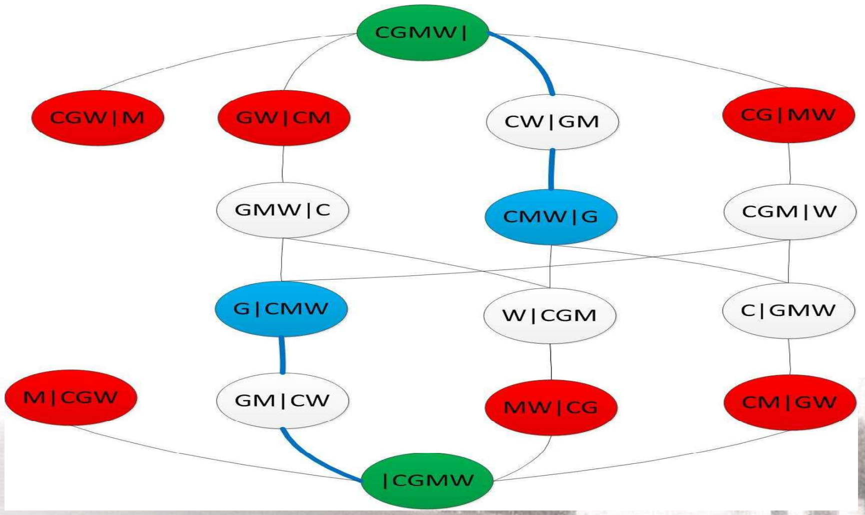
连通分支

- 在有向图**G = <V, E>** 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中。
- 在有向图**G = <V, E>** 中，它的每一个结点至少位于一个单向连通分支中。
- 在有向图**G = <V, E>** 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

应用：过河问题

- 一个人带着一只狼、一只羊、一棵白菜要过河，小船一次只能容下一个人和一样动植物。人不在场的时候，狼要吃掉羊、羊要吃掉白菜。问应当如何渡河？
- 狼=W，羊=G，白菜=C，人=M
- 共16中状态: (CGMW|) , (CGM|W) , (CGW|M), (CMW|G), (GMW|C) ,(CG|MW), (CM|GW), (CW|GM), (GM|CW), (GW|CM), (MW|CG)，(C|GMW), (G|CMW), (M|CGW), (W|CGM), (|CGMW)

用图来表示问题



应用：均分问题

- 作业题：有3 个没有刻度的桶a 、b 和c， 其容积分别为8 升、5 升和3 升。假定桶a 装满了酒，现要把酒均分成两份。除3 个桶之外，没有任何其它测量工具，试问怎样均分？

小结

- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 ⇔ 无奇圈
- 强连通(双向),单向连通,弱连通