单元2.7 推理演算

第3章 命题逻辑的推理理论

3.2 自然推理系统P

推理演算

- 证明$A \Rightarrow B$：
  - 从真值的角度进行解释或论证
    直观、看不出前提到结论的推理过程、不适用于命题变元数量多时
  - 推理演算：引入推理规则，使用推理规则和基本推理公式，逐步由前提推出结论
    推演层次清晰，近似于数学推理，易于推广

内容提要

- 自然推理系统P
- 推理规则
- 推理演算

自然推理系统P定义

- 字母表：
  - 命题变元符号：p, q, r, …
  - 联结词符号：¬,∨,∧,→,↔
  - 括号与逗号：（），
- 命题公式：定义1.6
  (1)任何命题变元都是命题公式;
  (2) 如果α是命题公式, 则(¬ α)也是命题公式;
  (3) 如果α、β是命题公式, 则(α ∨ β)、(α ∧ β)、(α→ β)和(α ↔ β)都是命题公式;
  (4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题公式.

自然推理系统P定义

- 推理规则

1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提
2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提
3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式的子公式都可以用等值的公式（L2-3 常用等值式）置换
4) 由推理定律（L2-6 重要的推理定律）和结论引入规则所导出的推理规则

推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A\to B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\lor B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\land B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A\to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$A\to B \quad B\to C \quad \therefore A\to C$$

推理规则

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A\lor B \quad \neg B}{\therefore A}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad A\lor C}{\therefore B\lor D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad \neg B\lor\neg D}{\therefore \neg A\lor\neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A\land B}$$

直接证明法

例 构造下面推理的证明:

前提: $p\lor q, q\to r, p\to s, \neg s$

结论: $r\land(p\lor q)$

证明 ① $p\to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg p$	①②拒取式
④ $p\lor q$	前提引入
⑤ q	③④析取三段论
⑥ $q\to r$	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理
⑧ $r\land(p\lor q)$	⑦④合取引入

推理正确, $r\land(p\lor q)$是有效结论

直接证明法

例 构造推理的证明：若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必需备课. 我今天下午没备课. 所以，明天不是星期一和星期三.

解 设 p:明天是星期一，q:明天是星期三，

r:我有课，　　s:我备课

前提: $(p\vee q)\rightarrow r,\ r\rightarrow s,\ \neg s$

结论: $\neg p\wedge\neg q$

直接证明法

前提: $(p\vee q)\rightarrow r,\ r\rightarrow s,\ \neg s$

结论: $\neg p\wedge\neg q$

证明

① $r\rightarrow s$　　前提引入

② $\neg s$　　前提引入

③ $\neg r$　　①②拒取式

④ $(p\vee q)\rightarrow r$　　前提引入

⑤ $\neg(p\vee q)$　　③④拒取式

⑥ $\neg p\wedge\neg q$　　⑤德摩根率

结论有效, 即明天不是星期一和星期三

附加前提证明法

欲证明	等价地证明
前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$	前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k, C$
结论: $C\rightarrow B$	结论: B

理由: $(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow(C\rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\vee(\neg C\vee B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\vee B$

$\Leftrightarrow (A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\rightarrow B$

附加前提证明法

例 构造下面推理的证明:

前提: $\neg p\vee q,\ \neg q\vee r,\ r\rightarrow s$

结论: $p\rightarrow s$

证明 ① p　　附加前提引入

② $\neg p\vee q$　　前提引入

③ q　　①②析取三段论

④ $\neg q\vee r$　　前提引入

⑤ r　　③④析取三段论

⑥ $r\rightarrow s$　　前提引入

⑦ s　　⑤⑥假言推理

推理正确, $p\rightarrow s$是有效结论

归谬法（反证法）

欲证明
前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$
结论：B
将$\neg B$加入前提, 若推出矛盾, 则得证推理正确.

理由：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \rightarrow R \wedge \neg R$, R为任意命题公式

归谬法

例 构造下面推理的证明

前提: $\neg(p \wedge q) \vee r$, $r \rightarrow s$, $\neg s$, p

结论: $\neg q$

证明 用归缪法

① q 结论否定引入

② $r \rightarrow s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

归谬法

⑤ $\neg(p \wedge q) \vee r$ 前提引入

⑥ $\neg(p \wedge q)$ ④⑤析取三段论

⑦ $\neg p \vee \neg q$ ⑥置换

⑧ $\neg p$ ①⑦析取三段论

⑨ p 前提引入

⑩ $\neg p \wedge p$ ⑧⑨合取引入

推理正确, $\neg q$是有效结论

归谬法

例 用反证法证明$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$（二难推论）

前提: $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R$

结论: R

证明 用归缪法

① $\neg R$ 结论否定引入

② $P \rightarrow R$ 前提引入

③ $\neg P$ ①②拒取式

④ $Q \rightarrow R$ 前提引入

⑤ $\neg Q$ ①④拒取式

归谬法

⑥ $P \vee Q$　　　前提引入

⑦ P　　　⑤⑥析取三段论

⑧ $P \wedge \neg P$　　　③⑦合取引入

推理正确，R是有效结论

三种证明方法之间的关系

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow R \wedge \neg R$$ 反证法

$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow \neg B \rightarrow (R \wedge \neg R)$$ 附加前提证明法

$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow \neg\neg B \vee (R \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$$ 直接法

对于命题逻辑推理而言，任何一个问题的推理，都可以采取三种推理方法中的任何一种来证明，针对不同的问题选用不同的推理方法。

一般而言，对于结论是蕴涵式或析取式的，大多可以采取带附加前提的证明方法

消解证明法

归结规则

$$\begin{array}{r} A \vee B \\ \neg A \vee C \\ \hline \therefore B \vee C \end{array}$$

$$(A \rightarrow C) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (A \vee \neg A) \rightarrow (B \vee C)$$

理由 $(A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)\rightarrow(B\vee C)$

$\Leftrightarrow \neg((A\vee B)\wedge(\neg A\vee C))\vee(B\vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge\neg C)\vee B\vee C$

$\Leftrightarrow ((\neg A\wedge\neg B)\vee B)\vee((A\wedge\neg C)\vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee B)\vee(A\vee C)$

$\Leftrightarrow 1$

消解证明法

1. 将每一个前提化成等值的合取范式，设所有合取范式的全部简单析取式为$A_1, A_2, \ldots, A_t$

2. 将结论的否定化成等值的合取范式$B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_s$，其中每个$B_j$是简单析取式

3. 以$A_1,A_2,\ldots,A_t$和$B_1,B_2,\ldots,B_s$为前提，使用归结规则推出0

除前提引入规则外，只使用归结规则

消解证明法

例 用消解证明法构造下面推理的证明:

前提: $(p\to q)\to r, r\to s, \neg s$

结论: $p\wedge\neg q$

解 $(p\to q)\to r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$

$r\to s \Leftrightarrow \neg r\vee s$

$\neg(p\wedge\neg q) \Leftrightarrow \neg p\vee q$

把推理的前提改写成

前提: $p\vee r, \neg q\vee r, \neg r\vee s, \neg s, \neg p\vee q$

(结论均为0, 不必写出)

消解证明法

前提: $p\vee r, \neg q\vee r, \neg r\vee s, \neg s , \neg p\vee q$

证明 ① $p\vee r$ 前提引入

② $\neg p\vee q$ 前提引入

③ $q\vee r$ ①②归结

④ $\neg q\vee r$ 前提引入

⑤ r ③④归结

⑥ $\neg r\vee s$ 前提引入

⑦ s ⑤⑥归结

⑧ $\neg s$ 前提引入

⑨ 0 ⑦⑧合取引入

命题逻辑推理的应用

- 举例：符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。
- 或者下午是天晴，或者是下雨；如果下午是天晴，则我将去看电影；如果下午我去看电影，我就不看书。所以：如果我下午看书，则下午天在下雨。

设：P：下午天晴；Q：下午下雨；R：下午去看电影；S：下午看书

前提：$P\,\bar{\vee}\,Q, P\to R, R\to\neg S$

结论：$S\to Q$

命题逻辑推理的应用

前提：$P\,\bar{\vee}\,Q, P\to R, R\to\neg S$

结论：$S\to Q$

证明 ① S 附加前提引入

② $R\to\neg S$ 前提引入

③ $\neg R$ ①②拒取式

④ $P\to R$ 前提引入

⑤ $\neg P$ ③④拒取式

⑥ $P\,\bar{\vee}\,Q$ 前提引入

⑦ Q ⑤⑥析取三段论

推理正确, $S\to Q$是有效结论

命题逻辑推理的应用

- 例：符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下

A 或B 盗窃了x；若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；若B 证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；若B 证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时屋里灯光灭了。

所以：B盗窃了x。

- 设：P:A盗窃了x；Q:B盗窃了x；R:作案时间在午夜前；S:B证词正确；T:午夜时灯光灭了。

前提：$P \vee Q, P \rightarrow \neg R; S \rightarrow \neg T, \neg S \rightarrow R, T$

结论：Q

命题逻辑推理的应用

前提：$P \vee Q, P \rightarrow \neg R; S \rightarrow \neg T, \neg S \rightarrow R, T$

结论：Q

证明：直接法（反证法请同学们自行完成）：

① T	**前提引入**
② $S \rightarrow \neg T$	**前提引入**
③ $\neg S$	**①②拒取式**
④ $\neg S \rightarrow R$	**前提引入**
⑤ R	**③④假言推理**
⑥ $P \rightarrow \neg R$	**前提引入**
⑦ $\neg P$	**⑤⑥拒取式**
⑧ $P \vee Q$	**前提引入**
⑨ **Q**	**⑦⑧析取三段论**

推理正确，Q是有效结论

Open Question Points: 10 Setting

符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

如果马会飞或者羊吃草，则母鸡是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子就会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以：羊不吃草。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

小结

- 自然推理系统P
- 推理规则
- 推理演算