线性代数 I 试题

(2016.05)

一、(每空 3 分共 24 分)填空：

1．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-19\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ (　　　　　).

2．已知方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{2016}=$ (　　　　　).

3. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\det\boldsymbol{B}=$(　).

4．设方程组 $\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的基础解系所含向量个数为 2，则 a 的值为(　　　).

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量为(　　　).

6．设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$(　　).

7．设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，如 $1,-3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{B}$ 的对角元之和为 3，则 $\boldsymbol{B}$ 的三个特征值为(　　　　　).

8．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为(　　　　　).

二、(10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1-1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2-\frac{1}{2}&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n-\frac{1}{n}\end{vmatrix}$$

三、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$，求 $\boldsymbol{B}$.

四、(15 分) 设

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\2&2+\lambda&2\\3&3&3+\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，当 λ 满足什么条件时，线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求通解.

五、(10 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

1) 证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基；

2) 求由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{C}$；

3) 求向量$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

六、(8 分) 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{A}$的分别属于特征值$-1,1$的特征向量，向量$\boldsymbol{\alpha}_3$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

1) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

2) 令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

七、(8 分)

1) 设$\boldsymbol{B}$是一秩为n的$m\times n$矩阵，证明$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$为正定矩阵；

2) 如果n阶对称矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，证明存在n阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

八、(15 分) 已知二次型$f=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$经正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$化为$y_2^2+4y_3^2$，求$a$及正交矩阵$\boldsymbol{P}$.