单元2.2 命题公式和真值表

第1章 命题逻辑的基本概念

1.2 命题公式及其赋值

内容提要

- 命题公式（命题形式，简称公式）
- 赋值（解释、指派）
- 真值表
- 重言式、可满足式、矛盾式

命题公式和真值表

- 上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$$p\ q \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？

- 命题常量：一个特定的命题，真值确定
- 命题变量：一个任意的、没有赋予具体内容的命题，真值可变

命题公式的定义

命题公式（命题形式）是由命题变元和联结词按以下规则组成的符号串：

(1)任何命题变元都是命题公式;

---此时称为原子命题公式

(2) 如果α是命题公式, 则$(\neg \alpha)$也是命题公式;

(3) 如果α、β是命题公式, 则$(\alpha \vee \beta)$、$(\alpha \wedge \beta)$、$(\alpha \rightarrow \beta)$和$(\alpha \leftrightarrow \beta)$都是命题公式;

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题公式.

命题公式的例子

$(\neg p)$

$(p\wedge(\neg q))$

$(p \vee(\neg p))$

$(p \leftrightarrow(\neg p))$

$(p \wedge(\neg p))$

$((p \wedge p) \rightarrow(\neg(p \vee r)))$

下列符号串是否为命题公式？

（1） $pq \rightarrow$

（2） $(p\neg q)$

（3） $(p\wedge(\neg q))$

（4） $p\wedge(\neg q)$

（5） $((\neg q))$

（6） $\neg p$

一些注记

1. 定义1.6是归纳定义，而不是循环定义。

   (1)是奠基，(2)、(3)是归纳步骤。

2. 公式中可以出现0、1，可看成$(p\wedge(\neg p))$与$(p\vee(\neg p))$的缩写。

3. 如果在(2)和(3)中将括号去掉，结果如何？

   $p\rightarrow q\rightarrow r$ 与 $\underline{p\rightarrow q}\rightarrow r$、 $p\rightarrow \underline{q\rightarrow r}$

3. 如仅去掉(2)和(3)中某类公式的括号呢？例如，仅去掉(2)中括号。

   $(p\wedge\neg q)$ —— $\neg$的优先级高于其它的。

4. 如果规定省略命题形式最外层括号，与3的差别。

约定

- 省略命题公式最外层括号。
- $\neg$的优先级高于其它的联结词，$\neg$只作用于紧随其后的命题变元。

  $(\neg p)\vee q$ 可以写成 $\neg p \vee q$
- 相同联结词可以省略括号。

  $(p \vee q) \vee r$可以写成 $p \vee q \vee r$
- 优先级：否定、合取、析取、蕴含、等价

- $p\rightarrow q\wedge r\rightarrow s$ ？

赋值（解释、指派）

- 命题公式的值由它中命题变元的值完全确定.
- 设α为一个命题公式, α中出现的所有命题变元都在$p_1, p_2, \ldots, p_n$中, 对序列$p_1, p_2, \ldots, p_n$指定的的任一真假值序列$t_1, t_2, \ldots, t_n$，称为α的关于$p_1, p_2, \ldots, p_n$的一个赋值 (assignment)，其中$t_i = 0$或1, $i \in N$, $1 \le i \le n$.

成真赋值

- 若$p_1, p_2, \ldots, p_n$的一个赋值使α为真，则称此赋值为α的一个成真赋值。
- 若$p_1, p_2, \ldots, p_n$的一个赋值使α为假，则称此赋值为α的一个成假赋值。
- 由定义可知：
  - ➢ $\neg p$关于p的成真赋值为0, 成假赋值为1.
  - ➢ $p \wedge q$关于p、q的成真赋值为<1, 1>, 成假赋值为<1,0>, <0,1>, <0, 0>.
  - ➢ $p \vee q$关于p、q的成真赋值为<1,1>, <0,1>, <1,0>, 成假赋值为<0,0>.
  - ➢ 不难给出$p \rightarrow q$、$p \leftrightarrow q$的成真和成假赋值.

例

求$(p\wedge q) \rightarrow (\neg(q\vee r))$的成真和成假赋值。

解：令$(p\wedge q) \rightarrow (\neg(q\vee r))$为α。

要使α为假，必须$p\wedge q$为真且$\neg(q\vee r)$为假。

从而$p\wedge q$必须为真，且$q\vee r$也必须为真。

故α的成假赋值为(1，1，1)和(1，1，0).

α的成真赋值为(0，0，0)、(1，0，0)、(0，1，0)、(0，0，1)、(0，1，1)、(1，0，1)。

定义1.9 命题公式在所有可能的赋值下所取值列成的表称为真值表.

$(p\wedge q)\rightarrow(\neg(q\vee r))$的真值表

P	q	r	$(p\wedge q)$	$\neg(q\vee r)$	α
0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

$p\wedge(\neg p)$、$p\vee(\neg p)$的真值表

解：

P	$p \wedge (\neg p)$	$p \vee (\neg p)$
0	0	1
1	0	1

$(\neg p)\vee q$、$p\to q$的真值表

解：

p	q	$(\neg p) \vee q$	$p\to q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$p\to(q\to r)$、$(p\to q)\to r$的真值表

p	q	r	$p\to(q\to r)$	$(p\to q)\to r$
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

命题公式的类型

- 命题公式α称为重言式 (或永真式)，如果α关于其中出现的命题变元的所有赋值均为成真赋值.
- 命题公式α称为矛盾式 (永假式)，如果α对于其中出现的命题变元的所有赋值均为成假赋值.
- 一个命题公式α称为可满足式, 如果α对于其中出现的命题变元的某个赋值为成真赋值.
- 例如： $p \wedge (\neg p)$为矛盾式，$p \vee (\neg p)$为重言式。

  $(\neg p) \vee q$为可满足式。

证明下列各式都是重言式

(1) $p\to(q\to(p\wedge q))$

证明：

p	q	$p\wedge q$	$q\to(p\wedge q)$	$p\to(q\to(p\wedge q))$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

证明下列各式都是重言式

(2) $((p\leftrightarrow p_1)\wedge(q\leftrightarrow q_1))\to((p\wedge q)\leftrightarrow(p_1\wedge q_1))$

p	p_1	q	q_1	α
0	1	*	*	1
1	0	*	*	1
*	*	0	1	1
*	*	1	0	1
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Open Question Points: 10 Setting

求出下列命题形式的所有成真指派。并判断哪些是重言式，哪些是矛盾式，哪些是可满足式?

1. $((P\wedge Q)\to(P\vee Q))$
2. $((\neg(P\to Q))\wedge Q)$
3. $((P\to P)\to((\neg Q)\to(\neg P))$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

与哑元的无关性

定理 设命题公式α中出现的命题变元都在 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中，$p_{n+1}, \dots, p_{n+m}$ 是另外m个不在α中出现的命题变元. 对于 $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m}$ 的任意两个赋值：

α取值与哑元取值无关

α取值只与其中出现变元取值有关

$<u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m}>$ 和

$<v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}>$，

其中：$u_i, v_j = 0$或1 $(1\le i, j\le n+m)$.

若 $u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$, 则α在这两个赋值下的值相同.

Open Question Points: 10

Setting

1. 已知$(p \to (p \lor q)) \land ((p \land q) \to p)$为重言式，试判断$(p \to (p \lor q))$及$((p \land q) \to p)$的类型。
2. 已知$(\neg(p \to q) \land q) \lor (\neg(\neg q \lor p) \land p)$为矛盾式，试判断$(\neg(p \to q) \land q)$及$(\neg(\neg q \lor p) \land p)$的类型。
3. 由上述二题可得什么结论?

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

小结

- 命题公式（命题形式），简称公式
- 赋值（解释、指派）
- 真值表
- 重言式、可满足式、矛盾式