清華大学 Tsinghua University

单元2.11 一阶逻辑推理理论

第5章 一阶逻辑等值演算与推理

5.3 一阶逻辑的推理理论

内容提要

- 推理定律
- 自然推理系统
- 推理演算

谓词逻辑的推理

定义 在一阶逻辑中，从前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$推出结论B是正确的（有效的），若

$$A_1 \land A_2 \land \cdots A_k \to B$$

为永真式，记作$A_1 \land A_2 \land \cdots A_k \Rightarrow B$。否则称推理不正确。

例：所有的整数(P(x))都是有理数(Q(x))，所有的有理数都是实数(R(x))，所以所有的整数都是实数。

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \land (\forall x)(Q(x) \to R(x))$$
$$\Rightarrow (\forall x)(P(x) \to R(x))$$

推理定律

- **命题逻辑推理定律的代换实例**

如， $\forall xF(x) \land \forall yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$ 化简律

$\forall x\, F(x) \Rightarrow \forall x\, F(x) \lor \exists y\, G(y)$ 附加律

推理定律

- **常用的重要推理定律**

(1) $\forall xA(x) \Rightarrow \exists xA(x)$

(2) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

(3) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

见上节讲义

(4) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$

(5) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

(6) $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \leftrightarrow \forall xB(x)$

(7) $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \leftrightarrow \exists xB(x)$

说明：这些推理定律的逆一般不成立，需正确理解这些定律的前提和结论的不同。

推理定律

$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$

在解释I下，$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$为真，则任取个体域D中一x，$A(x) \rightarrow B(x)$为真。所以，要么A(x)为假，要么A(x),B(x)同为真，不存在A(x)为真B(x)为假的情况。所以，必能保证$\forall xA(x)$为真时$\forall xB(x)$为真，从而$\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$为真。

	$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$	$\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$
为真	每个个体：要么不满足A，要么既满足A又满足B	要么所有个体既满足A又满足B，要么有些个体不满足A
为假	有些个体满足A但是不满足B	所有个体都满足A，但是有些个体不满足B

逆命题不成立：有些x不满足A（$\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$为真），且有些x满足A但是不满足B（$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$为假）

推理定律

- **含有多个量词的公式**

8) $\exists x\forall y\ A(x,y) \Rightarrow \forall y\exists x\ A(x,y)$

9) $\forall y\forall x\ A(x,y) \Leftrightarrow \forall x\forall y\ A(x,y) \Rightarrow \exists y\forall x\ A(x,y)$

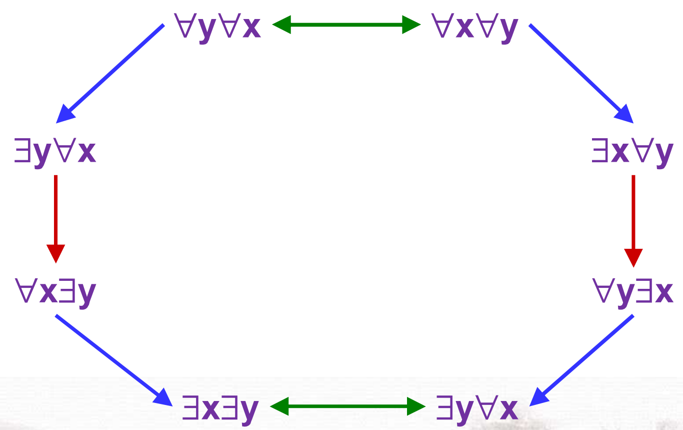
10) $\forall x\forall y\ A(x,y) \Leftrightarrow \forall y\forall x\ A(x,y) \Rightarrow \exists x\forall y\ A(x,y)$

11) $\exists y\forall x\ A(x,y) \Rightarrow \forall x\exists y\ A(x,y)$

12) $\forall x\exists y\ A(x,y) \Rightarrow \exists y\exists x\ A(x,y) \Leftrightarrow \exists x\exists y\ A(x,y)$

13) $\exists x\forall y\ A(x,y) \Rightarrow \exists x\exists y\ A(x,y) \Leftrightarrow \exists y\exists x\ A(x,y)$

推理定律



推理规则

- **量词的消去/引入规则**

设x，y为个体变元符号，c为个体常量符号，y不在A(x)中约束出现（A中x不出现在$\forall y, \exists y$的辖域内）

1) 全称量词消去规则：

$$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y), (\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$$

若所有个体都有性质A，则任一个体y必具备性质A

2) 全称量词引入规则：

$$A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$$

若任一个体y（自由变元）都有性质A，则所有个体必具备性质A

限制：x不在 $A(y)$中约束出现

推理规则

- **量词的消去/引入规则**

3) 存在量词消去规则：

$$(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$$

若有一个个体有性质A，则必有某个个体c有性质A

限制：$(\exists x)A(x)$中没有自由变元，且不含有c

4) 存在量词引入规则：

$$A(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$$

若有个个体常元c具有性质A，则$(\exists x)P(x)$为真

限制：x不出现在 $A(c)$中

例

- 判断下列推导的正确性，若错误，请改正。

推导1：

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ 前提引入

(2) $(\exists y)G(y,y)$ (1) 全称量词消去

错误：消去全称量词时，所替换的变元y在$(\exists y)G(x,y)$中约束出现。

“任取一实数x，存在另外一实数y满足x大于y” → “存在实数y满足y大于y”

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ 前提引入

(2) $(\exists y)G(z,y)$ (1) 全称量词消去

例

推导2：

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ 前提引入

(2) $(\exists y)G(z,y)$ (1) 全称量词消去

(3) $G(z,c)$ (2) 存在量词消去

错误：消去存在量词时，公式中有自由变元z。

“任取一实数x，存在另外一实数y满足x大于y” → “对某个常数c，任取一实数z都满足z>c” （c为最小实数）

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ 前提引入

(2) $(\exists y)G(z,y)$ (1) 全称量词消去

(3) $G(z,f(z))$ (2) 存在量词消去

例

推导3：

(1) $(\exists y)G(z,y)$ 前提引入

(2) $(\forall y)(\exists y)G(y,y)$ (1) 全称量词引入

错误：对公式中自由变元z引入全称量词时，所选变元y在公式中约束出现。

“任取一实数x，存在另外一实数y满足x大于y”→ “任取一实数y，存在y满足y大于y”

(1) $(\exists y)G(z,y)$ 前提引入

(2) $(\forall z)(\exists y)G(z,y)$ (1) 全称量词引入

例

推导4：

(1) $G(x,c)$ 前提引入

(2) $(\exists x)G(x,x)$ (1) 存在量词引入

错误：对公式中个体常量加入存在量词，公式中含自由变元x，所以不能以$(\exists x)$ 加入。

(1) $G(x,c)$ 前提引入

(2) $(\exists y)G(x,y)$ (1) 存在量词引入

例

判断：

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ 前提引入

(2) $(\exists y)G(z,y)$ (1) 全称量词消去

(3) $G(z,c)$ (2) 存在量词消去

(4) $(\forall x)G(x,c)$ (3) 全称量词引入

(5) $(\exists y)(\forall x)G(x,y)$ (4) 存在量词引入

“任取一实数x，存在另外一实数y满足x大于y”→ “存在一实数y，任取实数x，满足x大于y”

错误：(2)中y依赖于z，导致(3)中存在量词消去错误

自然推理系统N_L

一阶逻辑自然推理系统包括：

1. **字母表：同一阶语言字母表**
2. **合式（谓词）公式：同一阶语言的合式（谓词）公式定义**
3. **推理规则：**

(1) 12条命题逻辑推理规则

(2) 全称量词消去规则($\forall-$)

(3) 存在量词消去规则($\exists-$)

(4) 全称量词引入规则($\forall+$)

(5) 存在量词引入规则($\exists+$)

谓词演算的推理方法

1. 推导过程中可以引用命题演算中的前提引入规则和结论引入规则。
2. 如果结论是以蕴涵形式(或析取形式)给出，我们可以使用附加前提证明法。
3. 若需消去量词，可以引用全称量词消去规则和存在量词消去规则。
4. 当所要求的结论可能被定量时，此时可引用全称量词引入规则和存在量词引入规则将其量词加入。
5. 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式。
6. 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

例

例1 证明苏格拉底三段论：所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底式要死的。

解：H(x): x是人，M(x): x是要死的，s: 苏格拉底

前提：$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)), H(s)$

结论：M(s)

(1) $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$　　前提引入

(2) $H(y) \rightarrow M(y)$　　(1) 全称量词消去

(3) H(s)　　前提引入

(4) M(s)　　(2),(3) 假言推理

?

例

例2 前提：$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x)P(x)$

结论：$(\exists x)Q(x)$

推导：版本1

(1) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$　　前提引入

(2) $P(y) \rightarrow Q(y)$　　(1) 全称量词消去

(3) $(\exists x)P(x)$　　前提引入

(4) $P(a)$　　(3) 存在量词消去

(5) $Q(a)$　　(2), (4) 假言推理

(6) $(\exists x)Q(x)$　　(5) 存在量词引入

?

例

例2 前提：$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x)P(x)$

结论：$(\exists x)Q(x)$

推导修改为版本2

(1) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$　　前提引入

(2) $P(a) \rightarrow Q(a)$　　(1) 全称量词消去

(3) $(\exists x)P(x)$　　前提引入

(4) $P(a)$　　(3) 存在量词消去

(5) $Q(a)$　　(2), (4) 假言推理

(6) $(\exists x)Q(x)$　　(5) 存在量词引入

?

例

例2 前提：$(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\exists x)P(x)$

结论：$(\exists x)Q(x)$

推导修改为版本3

(1) $(\exists x)P(x)$	前提引入
(2) $P(a)$	(1) 存在量词消去
(3) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	前提引入
(4) $P(a) \to Q(a)$	(4) 全称量词消去
(5) $Q(a)$	(2), (4) 假言推理
(6) $(\exists x)Q(x)$	(5) 存在量词引入

例

例3 前提：$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

结论：$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

推导：

(1)$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	前提引入
(2) $P(c) \wedge Q(c)$	(1) 存在量词消去
(3) $P(c)$	(2) 化简规则
(4) $Q(c)$	(2) 化简规则
(5) $(\exists x)P(x)$	(3)存在量词引入
(6) $(\exists x)Q(x)$	(4)存在量词引入
(7) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	(5),(6) 合取引入

例

例3 前述证明的逆推导

(1) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	前提引入
(2) $(\exists x)P(x)$	(1) 化简规则
(3) $P(c)$	(2) 存在量词消去
(4) $(\exists x)Q(x)$	(1) 化简规则
(5) $Q(c)$	(4) 存在量词消去
(6) $P(c) \wedge Q(c)$	(3),(5) 合取引入
(7) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$	(6) 存在量词引入

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$?

?

例

例3 前述证明的逆推导

(1) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$	前提引入
(2) $(\exists x)P(x)$	(1) 化简规则
(3) $P(c)$	(2) 存在量词消去
(4) $(\exists x)Q(x)$	(1) 化简规则
(5) $Q(d)$	(4) 存在量词消去
(6) $P(c) \wedge Q(d)$	(3),(5) 合取引入
(7) $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$	(6) 存在量词引入

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Leftarrow (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x))$

$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x))$

例

例4 证明$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \boxed{(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)}$

采用附加前提证明法，亦可用反证法（自己练习）

$(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

(1) $\neg(\forall x)P(x)$	附加前提引入
(2) $(\exists x)\neg P(x)$	(1)量词否定等值式
(3) $\neg P(c)$	(2)存在量词消去
(4) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	前提引入
(5) $P(c) \vee Q(c)$	(4)全称量词消去
(6) $Q(c)$	(3), (5)析取三段论
(7) $(\exists x)Q(x)$	(6)存在量词引入

Open Question Points: 10 Setting

前提：$(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$,
$(\exists x)P(x)$

结论：$(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y))$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

注记

1. 在推导过程中，如公式中既要消去存在量词又要消去全称量词，且所选用的个体是同一个符号，则必须先先消去存在量词再消去全称量词。然后再使用命题演算中的推理规则，最后引入量词，得到所要的结论。

2. 如一个变量是用存在量词规则消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用存在量词引入规则，而不能使用全称量词引入规则；如使用全称量词消去规则消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用全称量词引入规则（当使用$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$时）和存在量词引入规则（当使用$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$时）。

注记

3. 如有两个含有存在量词的公式，当消去存在量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。

4. 在用全称量词消去规则和存在量词消去规则消去量词、用全称量词引入规则和存在量词引入规则添加量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式。

例

例 每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车；有的人不喜欢骑自行车。因而有的人不喜欢步行。

分析：个体域可以为全总个体域，也可为所有人的集合。以个体域D={所有人}为例，自行练习个体域为全总个体域的证明。

证明：设D={所有人}，P(x): x喜欢坐汽车，

Q(x): x喜欢骑自行车，R(x): x喜欢步行。

前提：$(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg P(x)), (\forall x)(P(x) \vee Q(x)), (\exists x)(\neg Q(x))$

结论：$(\exists x)(\neg R(x))$

例

(1) $(\exists x)(\neg Q(x))$	前提引入
(2) $\neg Q(c)$	(1)存在量词消去
(3) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$	前提引入
(4) $P(c) \vee Q(c)$	(3)全称量词消去
(5) $P(c)$	(2),(4)析取三段论
(6) $(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg P(x))$	前提引入
(7) $R(c) \rightarrow \neg P(c)$	(6)全称量词消去
(8) $\neg R(c)$	(5),(7)拒取式
(9) $(\exists x)(\neg R(x))$	(8)存在量词引入

例

例 所有的哺乳动物都是脊椎动物，并非所有的哺乳动物都是胎生动物。故有些脊椎动物不是胎生的。

分析：个体域为全总个体域。

证明：设P(x): x是哺乳动物，

Q(x): x是脊椎动物，R(x): x是胎生动物。

前提：$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$,

结论：$(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$

例

先看下面的证明

(1) $\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$	前提引入
(2) $\neg(\neg P(x) \vee R(x))$	(1) 全称量词消去，置换
(3) $P(x) \wedge \neg R(x)$	(2) 德摩根率
(4) $P(x)$	(3) 化简规则
(5) $\neg R(x)$	(3) 化简规则
(6) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$	前提引入
(7) $P(x) \rightarrow Q(x)$	(6)全称量词消去
(8) $Q(x)$	(4),(7) 假言推理
(9) $Q(x) \wedge \neg R(x)$	(5),(8)合取引入
(10) $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$	(9) 存在量词引入
或：**(11)** $(\forall x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$	(9) 全称量词引入 ？

例

(1) $\neg(\forall x)(P(x) \to R(x))$ 前提引入
(2) $(\exists x)\neg(\neg P(x) \vee R(x))$ (1)量词否定等值式
(3) $\neg(\neg P(c) \vee R(c))$ (2) 全称量词消去，置换
(4) $P(c) \wedge \neg R(c)$ (3) 德摩根率
(5) $P(c)$ (4) 化简规则
(6) $\neg R(c)$ (4) 化简规则
(7) $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ 前提引入
(8) $P(c) \to Q(c)$ (7)全称量词消去
(9) $Q(c)$ (5),(8) 假言推理
(10) $Q(c) \wedge \neg R(c)$ (6),(9)合取引入
(11) $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$ (10) 存在量词引入

例

例 证明下列论断的正确性。

有些学生相信所有的教师；任何一个学生都不相信骗子。所以教师都不是骗子。

分析：个体域考虑全总个体域。

证明：设S(x): x是学生，T(x): x是教师， P(x):x是骗子 L(x,y): x相信y

前提：$(\exists x)\left(S(x) \wedge (\forall y)(T(y) \to L(x,y))\right)$

$(\forall x)(\forall y)(S(x) \wedge P(y) \to \neg L(x,y))$

结论：$(\forall x)(T(x) \to \neg P(x))$

例

(1)$(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(T(y) \to L(x,y)))$ 前提引入
(2) $S(c) \wedge (\forall y)(T(y) \to L(c,y))$ (1)存在量词消去
(3) $S(c)$ (2)化简规则
(4)$(\forall y)(T(y) \to L(c,y))$ (2)化间规则
(5)$T(y) \to L(c,y)$ (4) 全称量词消去
(6)$(\forall x)(\forall y)(S(x) \wedge P(y) \to \neg L(x,y))$ 前提引入
(7)$(\forall y)(S(c) \wedge P(y) \to \neg L(c,y))$ (6)全称量词消去
(8)$S(c) \wedge P(y) \to \neg L(c,y)$ (7)全称量词消去
(9)$S(c) \to (P(y) \to \neg L(c,y))$ (8)蕴涵分配律
(10)$P(y) \to \neg L(c,y)$ (3),(9)假言推理
(11)$L(c,y) \to \neg P(y)$ (10) 假言易位
(12)$T(y) \to \neg P(y)$ (5),(11) 假言三段论
(13) $(\forall x)(T(x) \to \neg P(x))$ (12)全称量词引入

小结

- 推理定律
- 自然推理系统
- 推理演算