

## 单元1.1 图的基本概念

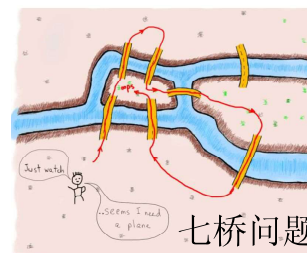
### 第14章 图的基本概念

#### 14.1 图

#### 14.5 图的运算

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

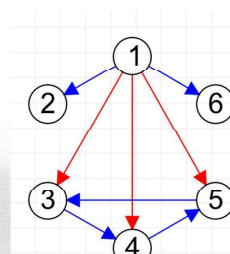
## 图论



七桥问题



四色猜想



拉姆齐定理

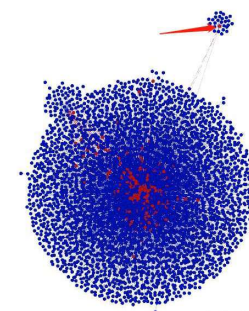
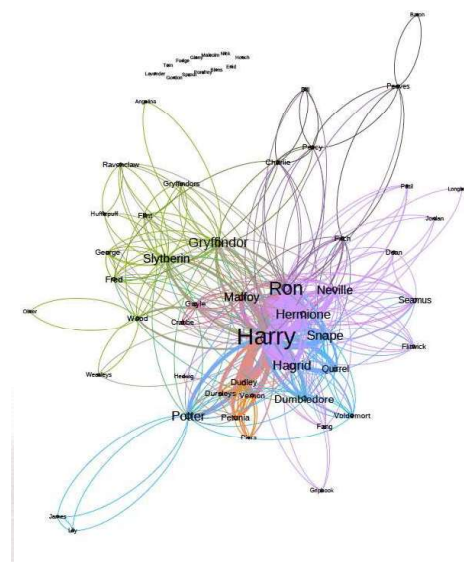


农夫过河

## 图论

- 图论是一门很有实用价值的学科，它在自然科学、社会科学等各领域均有很多应用。自上世纪中叶以来，它受计算机科学蓬勃发展的刺激，发展极其迅速，应用范围不断拓广，已渗透到诸如语言学、逻辑学、物理学、化学、电讯工程、计算机科学以及数学的其它分支中。

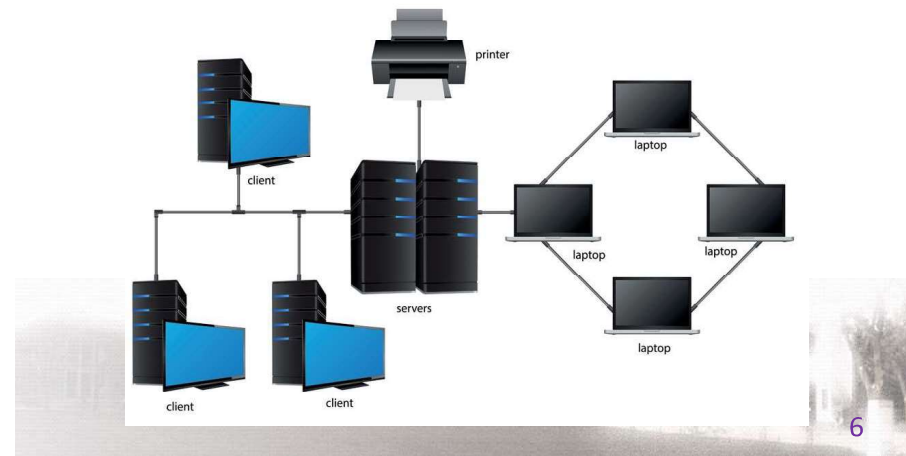
## 举例



## 举例



## 举例



## 图

- 我们所讨论的图(Graph) 与人们通常所熟悉的图, 例如圆、椭圆、函数图表等是很不相同的。图论中所谓的图是指某类具体离散事物集合和该集合中的每对事物间以某种方式相联系的数学模型。
- 如果我们用点表示具体事物, 用连线表示一对具体事物之间的联系。那么, 一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的一些线的集合所构成, 至于点的位置和连线的长短曲直是无关紧要的。



## 内容提要

- 图、无向图、有向图、简单图
- 相邻、关联
- 度、度序列、握手定理
- 图族
- 图同构
- 图运算



## 无序积

$$A \times B = \{ (a,b) \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

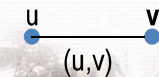
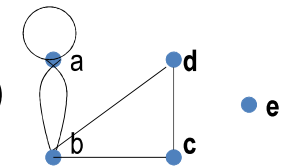
- 允许  $a=b$
- $(a,b) \neq (b,a)$



9

## 无向图

- 图  $G = \langle V, E \rangle$ 
  - $V \neq \emptyset$  顶点集  $V(G)$
  - $E \subseteq V \times V$  边集(多重集)  $E(G)$
- 例:  $G = \langle V, E \rangle$ 
  - $V = \{a, b, c, d, e\}$
  - $E = \{(a,a), (a,b), (a,b), (b,c), (c,d), (b,d)\}$
- 顶点、边



10

## 卡氏积

$$A \times B = \{ \langle a,b \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

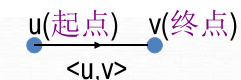
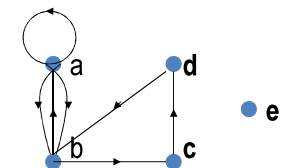
- $\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$
- 允许  $a=b$
- $A \times B \neq B \times A$ , 除非  $A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$



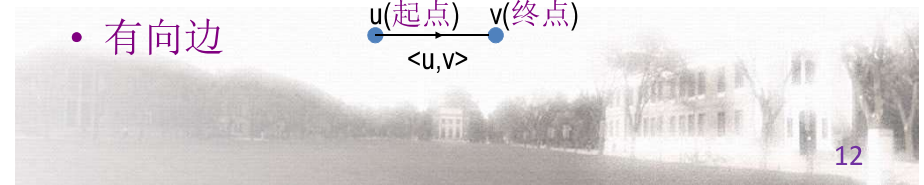
11

## 有向图

- 有向图  $D = \langle V, E \rangle$ 
  - $V \neq \emptyset$ , 顶点集  $V(D)$
  - $E \subseteq V \times V$ , 边集(多重集)  $E(D)$
- 例:  $D = \langle V, E \rangle$ 
  - $V = \{a, b, c, d, e\}$
  - $E = \{ \langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,d \rangle, \langle d,b \rangle \}$



- 有向边



12

## n阶图、有限图、零图、平凡图、空图

- n阶图:  $|V(G)|=n$



- 有限图:  $|V(G)| < \infty$

- 零图  $N_n$ :  $E = \emptyset$

- 平凡图: 1阶零图  $N_1$

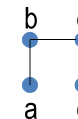
- 空图:  $V = E = \emptyset$



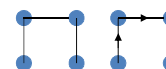
13

## 标定图、非标定图、底图

- 标定图: 顶点或边带标记的图



- 非标定图: 顶点和边不带标记的图



- 底图(基图): 有向图去掉边的方向后得到的无向图

14

## 相邻、关联

- 有边相连的两个顶点是相邻的



- 有公共顶点的两条边是相邻的



- $u$ 与 $v$ 相邻



- 一条边的端点与这条边是关联的



- 关联次数



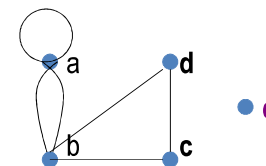
15

## 环、孤立点、平行边

- 环: 只与一个顶点关联的边

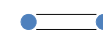


- 孤立点: 不与任何边关联的顶点



- 平行边

– 端点相同的两条无向边是平行边



– 起点与终点相同的两条有向边是平行边



非平行边

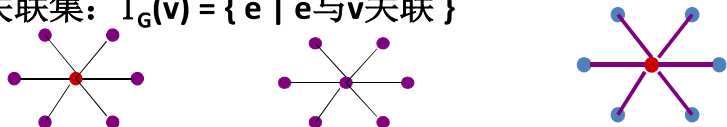


16



## 邻域、闭邻域、关联集

- 邻域:  $N_G(v) = \{ u \in V(G) \mid (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v \}$
- 闭邻域:  $N_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$
- 关联集:  $I_G(v) = \{ e \mid e \text{ 与 } v \text{ 关联} \}$



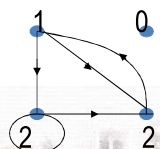
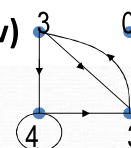
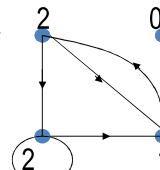
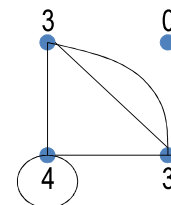
- 后继:  $\Gamma_D^+(v) = \{ u \in V(D) \mid \langle v, u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v \}$
- 前驱:  $\Gamma_D^-(v) = \{ u \in V(D) \mid \langle u, v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v \}$
- (闭)邻域:  $N_D(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v) \quad \overline{N_D(v)} = N_D(v) \cup \{v\}$



17

## 顶点的度

- 度:  $d_G(v)$  = 与  $v$  关联的边的次数之和
- 出度:  $d_D^+(v)$  = 与  $v$  关联的出边的次数之和
- 入度:  $d_D^-(v)$  = 与  $v$  关联的入边的次数之和
- 度:  $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$
- 度分布



18

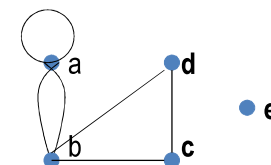
## 最大度、最小度

- 最大度  $\Delta(G) = \max\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最小度  $\delta(G) = \min\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最大出度  $\Delta^+(D) = \max\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小出度  $\delta^+(D) = \min\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最大入度  $\Delta^-(D) = \max\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小入度  $\delta^-(D) = \min\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$

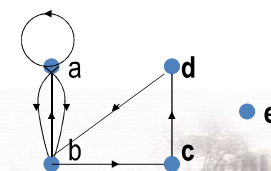
19

## 举例

- $\Delta=4, \delta=0$



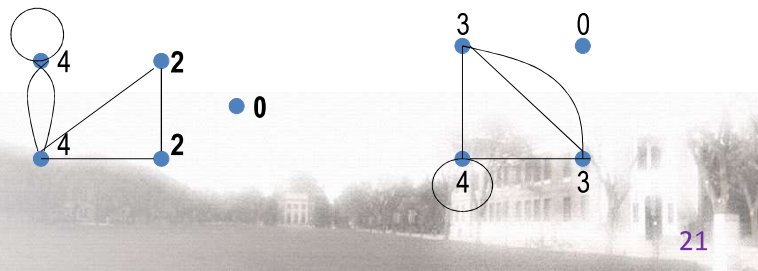
- $\Delta^+=3, \delta^+=0$
- $\Delta^-=3, \delta^-=0$



20

## 图论基本定理(握手定理)

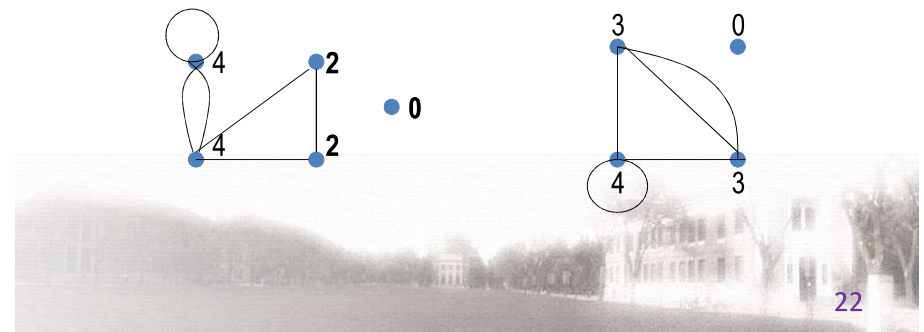
- 设  $G=\langle V,E \rangle$  是无向图,  
 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $|E|=m$ , 则  
 $d(v_1)+d(v_2)+\dots+d(v_n)=2m$ . #



21

## 握手定理推论

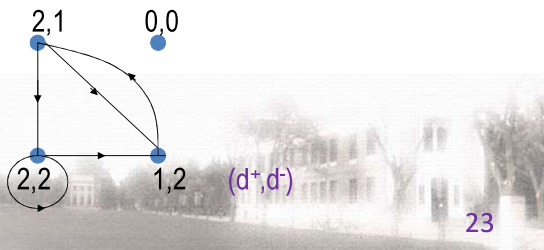
任何图中奇度顶点的个数是偶数. #



22

## 图论基本定理(握手定理)

- 设  $D=\langle V,E \rangle$  是有向图,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  
 $|E|=m$ , 则  
 $d^+(v_1)+d^+(v_2)+\dots+d^+(v_n)$   
 $= d^-(v_1)+d^-(v_2)+\dots+d^-(v_n) = m$ . #



23

Open Question Points: 10

Setting

已知无向图  $G$  中有 15 条边, 2 个度数为 4 的结点, 4 个度数为 3 的结点, 其余结点的度数均小于等于 2, 问  $G$  中至少有多少个结点? 为什么?

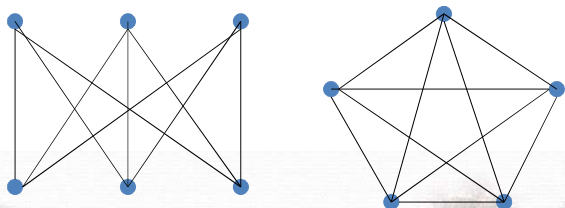
Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

24

## 简单图、k-正则图

- 简单图：既无环也无平行边的图  
 $\Rightarrow 0 \leq \Delta(G) \leq n-1$
- k-正则图：所有顶点的度都是k

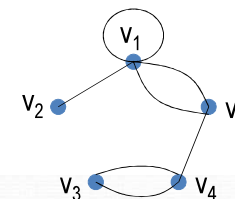


25

## 度数列

- 设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 称  
 $d = (d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$   
为G的度数列

- 例:  $d = (5, 1, 2, 3, 3)$



26

## (无向图) 可图化

- 设非负整数列  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 若存在图G, 使得G的度数列是d, 则称d为可图化的
- 可图化举例: 度数列  $d = (5, 3, 3, 2, 1)$



27

## 可图化充要条件

非负整数列  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  可图化  $\Leftrightarrow$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n \equiv 0 \pmod{2}.$$

- 证: ( $\Rightarrow$ ) 握手定理  
( $\Leftarrow$ ) 奇数度点两两之间连一边 (偶数个奇数度点), 剩余度用环来实现. #
- 可图化举例: 度数列  $d = (5, 3, 3, 2, 1)$

28

## 可简单图化

- 设非负整数列 $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 若存在简单图 $G$ , 使得 $G$ 的度数列为 $d$ , 则称 $d$ 为可简单图化的
- 例:  $d=(5, 3, 3, 2, 1)$  不可简单图化
  - $\Delta=n$  ( $\Delta \leq n-1$ )
- 例:  $d=(4, 4, 3, 2, 1)$  不可简单图化
  - $(n-1, n-1, \dots, 1)$

29

## 可简单图化充要条件(Havel定理)

- 设非负整数列 $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 满足:
$$d_1 + d_2 + \dots + d_n \equiv 0 \pmod{2},$$
$$n-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0,$$
则 $d$ 可简单图化  $\Leftrightarrow$ 
$$d'=(d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$$
可简单图化
- 例:  $d=(4, 4, 3, 3, 2, 2)$ ,  $d'=(3, 2, 2, 1, 2)$

30

## Havel定理举例

- 判断下列非负整数列是否可简单图化.  
(1)  $(5, 5, 4, 4, 2, 2)$     (2)  $(4, 4, 3, 3, 2, 2)$
- 解: (1)  $(5, 5, 4, 4, 2, 2)$ ,  $(4, 3, 3, 1, 1)$ ,  
 $(2, 2, 0, 0)$ , 不可简单图化.
- (2)  $(4, 4, 3, 3, 2, 2)$ ,  $(3, 2, 2, 1, 2)$ ,  $(3, 2, 2, 2, 1)$ ,  
 $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1)$ , 可简单图化. #

31

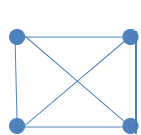
## 图同构

- 无向图  $G_1=\langle V_1, E_1 \rangle$ ,  $G_2=\langle V_2, E_2 \rangle$ , 若存在双射  $f: V_1 \rightarrow V_2$  满足  $\forall u, v \in V_1, (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$ , 则称 $G_1$ 与 $G_2$ 同构, 记作 $G_1 \cong G_2$
- 同构的图, 其图论性质完全一样
- NAUTY算法
- 有向图  $D_1=\langle V_1, E_1 \rangle$ ,  $D_2=\langle V_2, E_2 \rangle$ , 若存在双射  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , 满足  $\forall u, v \in V_1, \langle u, v \rangle \in E_1 \Leftrightarrow \langle f(u), f(v) \rangle \in E_2$ , 则称 $D_1$ 与 $D_2$ 同构, 记作 $D_1 \cong D_2$
- 图同构必要条件: 结点数相同; 边数相同; 度分布相同

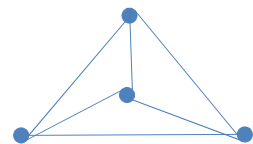
43



## 图同构(举例)

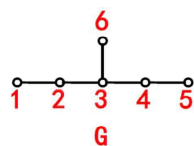


$G_1$

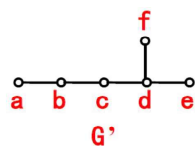


$G_2$

$$G_1 \cong G_2$$



$G$

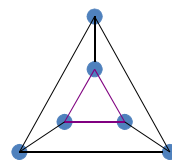


$G'$

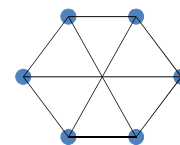
$$G \not\cong G'$$

44

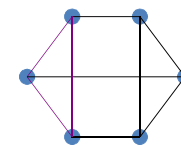
## 图同构(举例)



$G_1$

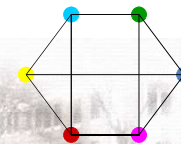
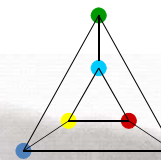


$G_2$



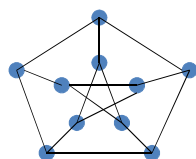
$G_3$

$$G_1 \cong G_3, \quad G_1 \not\cong G_2$$

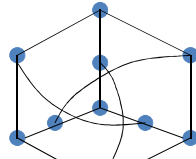


45

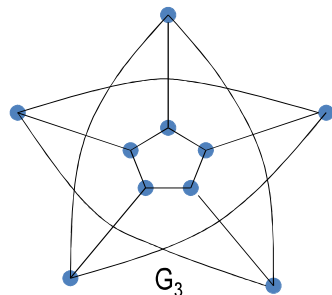
## 图同构(举例)



$G_1$



$G_2$

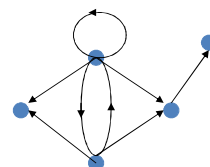


$G_3$

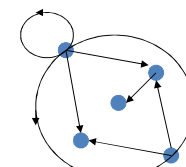
$$G_1 \cong G_2 \cong G_3$$

46

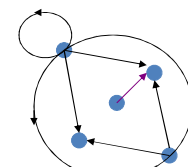
## 图同构(举例)



$D_1$



$D_2$



$D_3$

$$D_1 \cong D_2, \quad D_2 \not\cong D_3$$

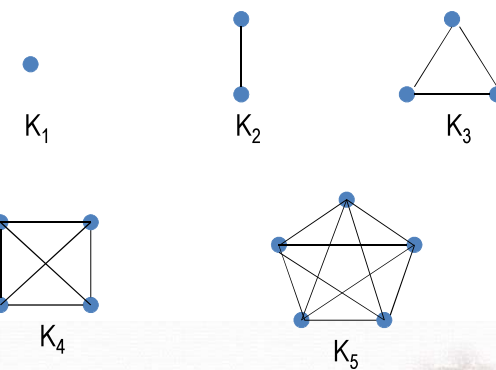
47

## 图族(graph class)

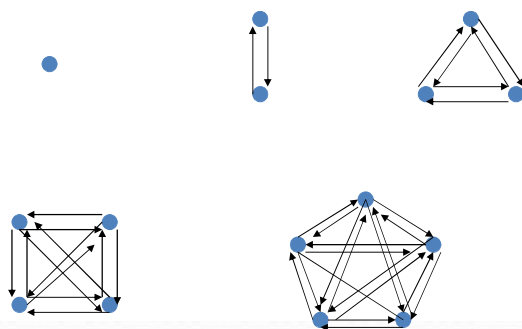
- 完全图,有向完全图,竞赛图
- 柏拉图图,彼得森图,库拉图斯基图
- $r$ 部图,二部图(偶图),完全 $r$ 部图
- 路径,圈,轮,超立方体



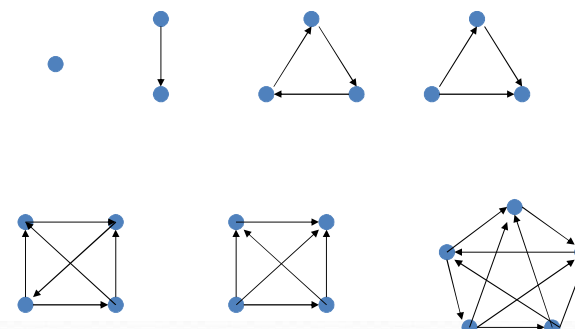
## 完全图



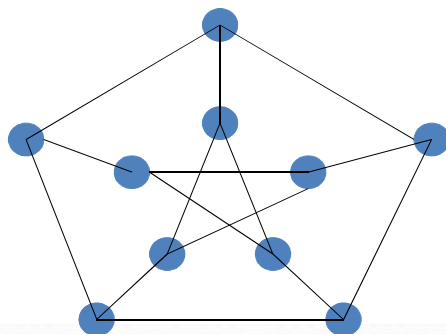
## 有向完全图



## 竞赛图



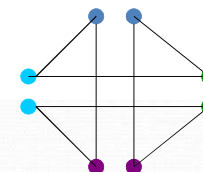
## 彼得森图



53

## r部图

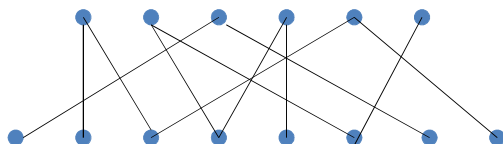
- **r部图**:  $G = \langle V, E \rangle, V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$ ,  
 $V_i \cap V_j = \emptyset \ (i \neq j), E \subseteq \bigcup_{i \neq j} (V_i \times V_j)$ ,  
 • 也记作  $G = \langle V_1, V_2, \dots, V_r; E \rangle$ .



54

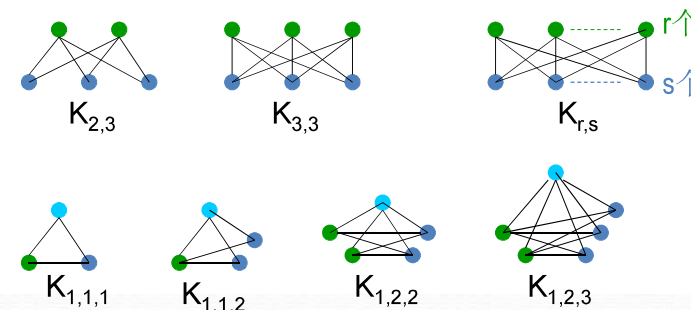
## 二部图(偶图)

- **二部图**:  $G = \langle V_1, V_2; E \rangle$ , 也称为偶图



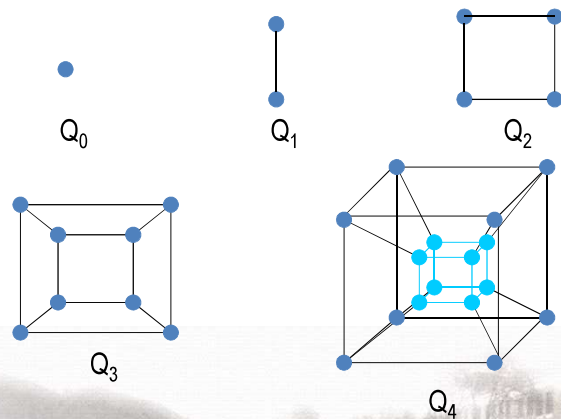
55

## 完全r部图



56

## 超立方体



57

## 子图,生成子图

- 子图(subgraph):  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $G' = \langle V', E' \rangle$ ,  
 $G' \subseteq G \Leftrightarrow V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$
- 真子图(proper subgraph):  
 $G' \subset G \Leftrightarrow G' \subseteq G \wedge (V' \subset V \vee E' \subset E)$
- 生成子图(spanning subgraph):  
 $G'$  是  $G$  的生成子图  $\Leftrightarrow G' \subseteq G \wedge V' = V$

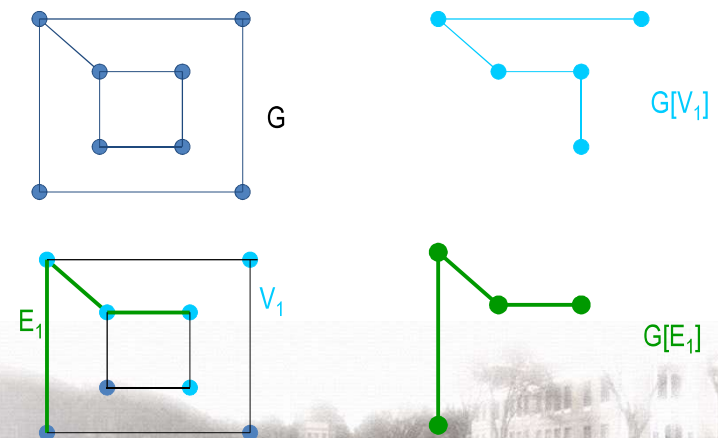
58

## 导出子图

- 导出子图:  $G = \langle V, E \rangle$ ,
- 若  $V_1 \subset V$ ,  $E_1 = E \cap V_1 \times V_1$ , 则称  
 $G[V_1] = \langle V_1, E_1 \rangle$   
 为由  $V_1$  导出的子图
- 若  $\emptyset \neq E_1 \subset E$ ,  $V_1 = \{v \mid v \text{ 与 } E_1 \text{ 中的边关联}\}$ ,  
 则称  $G[E_1] = \langle V_1, E_1 \rangle$   
 为由  $E_1$  导出的子图

59

## 导出子图(举例)

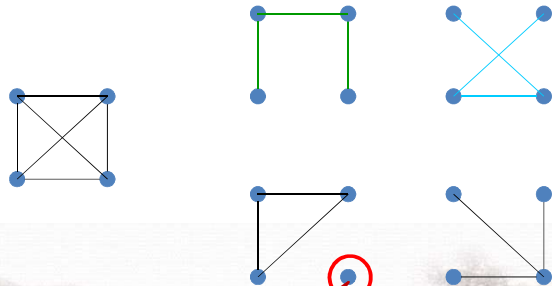


60



## 补图

- 补图:  $G = \langle V, E \rangle, \bar{G} = \langle V, E(K_n) - E \rangle$
- 自补图(self-complement graph):  $G \cong \bar{G}$



注意别忘了孤立点，  
否则顶点集不同

61

## 拉姆齐定理

- 在随意凑齐的六个人中，一定能找到彼此认识或者彼此不认识的三个人。

62

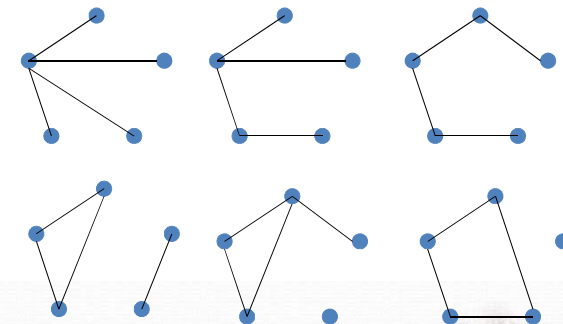
## 例

- (1) 画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图; (2) 画出4阶2条边的所有非同构的有向简单图.
- (1)  $\sum d(v) = 2m = 8, \Delta \leq n-1 = 4,$   
 $(4,1,1,1,1), (3,2,1,1,1), (2,2,2,1,1),$   
 $(3,2,2,1,0), (2,2,2,2,0)$
- (2)  $\sum d^+(v) = \sum d^-(v) = m = 2, \sum d(v) = 2m = 4,$   
 $(2,1,1,0), (1,1,1,1), (2,2,0,0)$

63

## 例(1)

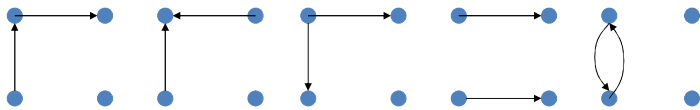
- 5阶4条边的所有非同构无向简单图



64

## 例(2)

- 4阶2条边的所有非同构有向简单图.



65

## 图的运算

- 删除,收缩,加新边,不交
- 并图,交图,差图,环和
- 联图,积图

66

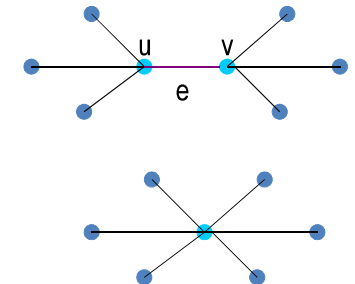
## 删除(delete)

- $G - e = \langle V, E - \{e\} \rangle$ , 删除边  $e$
- $G - E' = \langle V, E - E' \rangle$ , 删除边集  $E'$
- $G - v = \langle V - \{v\}, E - I_G(v) \rangle$ , 删除顶点  $v$  以及  $v$  所关联的所有边
- $G - V' = \langle V - V', E - I_G(V') \rangle$ , 删除顶点集  $V'$  以及  $V'$  所关联的所有边

67

## 收缩、加新边

- $G \setminus e: e=(u,v)$ , 删除  $e$ , 合并  $u$  与  $v$
- $G \cup (u,v) = \langle V, E \cup \{(u,v)\} \rangle$   
– 在  $u$  与  $v$  之间加新边  
也写成  $G + (u,v)$



68

## 不交

- $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle,$
- $G_1$  与  $G_2$  不交  $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $G_1$  与  $G_2$  边不交(边不重)  $\Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \emptyset$



69

## 并图,交图,差图,环和

- $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle,$  都无孤立点
- 并图:  $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$
- 交图:  $G_1 \cap G_2 = \langle V(E_1 \cap E_2), E_1 \cap E_2 \rangle$
- 差图:  $G_1 - G_2 = \langle V(E_1 - E_2), E_1 - E_2 \rangle$
- 环和:  $G_1 \oplus G_2 = \langle V(E_1 \oplus E_2), E_1 \oplus E_2 \rangle$

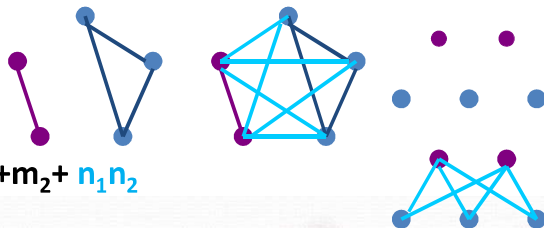


70

## 联图

- $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle,$  不交无向图
- $G_1 + G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup (V_1 \times V_2) \rangle$

- $K_r + K_s = K_{r+s}$
- $N_r + N_s = K_{r,s}$
- $n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 + n_1 n_2$



71

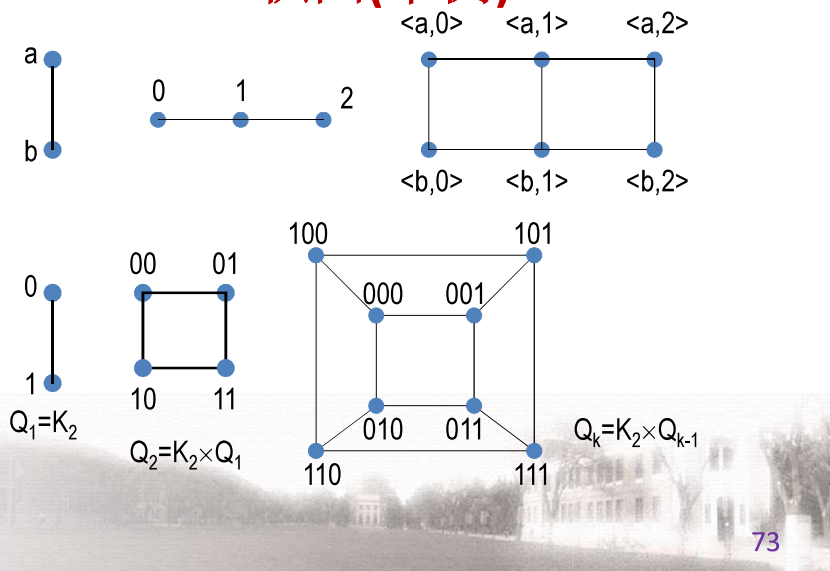
## 积图

- $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle,$  无向简单图
- $G_1 \times G_2 = \langle V_1 \times V_2, E \rangle,$  其中  
 $E = \{ \langle u_i, u_j \rangle, \langle u_k, u_s \rangle \mid$   
 $\langle u_i, u_j \rangle, \langle u_k, u_s \rangle \in V_1 \times V_2 \wedge$   
 $((u_i = u_k \wedge u_j \text{ 与 } u_s \text{ 相邻}) \vee (u_j = u_s \wedge u_i \text{ 与 } u_k \text{ 相邻})) \}$
- $n = n_1 n_2, m = n_1 m_2 + n_2 m_1$



72

## 积图(举例)



73

## 小结

- 无向图,有向图,简单图,相邻,关联
- 度,握手定理
- 图同构
- 图族(完全图, 零图, ...)
- 图运算(并图, 联图, 积图, ...)

74