第 8 周讲稿

§5. 条件分布与条件数学期望

设（X,Y）为二元连续型随机向量，其联合概率密度函数为 $f(x,y)$。

定义 1：对 $A\subset \boldsymbol{R}$，若 $P(X\in A)>0$，我们可以定义在已知 $X\in A$ 的条件下，Y 的条件概率

$$P(a<Y\le b\big|X\in A)=\frac{P(X\in A,a<Y\le b)}{P(X\in A)}.$$

如果对任意 $y\in\boldsymbol{R}$，存在非负函数 $f_{Y|X\in A}(y)$，满足

$$P(a<Y\le b\big|X\in A)=\int_a^b f_{Y|X\in A}(y)dy,$$

则称 $f_{Y|X\in A}(y)$ 为在给定 $X\in A$ 条件下，Y 的**条件概率密度函数**。而称 $F_{Y|X\in A}(y)\equiv P(Y\le y\big|X\in A)$ 为在给定 $X\in A$ 条件下，Y 的**条件分布函数**。

给定 $X\in A$ 条件下，Y 的**条件期望定义为**

$$E(Y\mid X\in A)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X\in A}(y)dy$$ （要求绝对收敛）

例：设 $X\sim N(0,1)$，求 $E(X\mid X>0)$。

显然，当 $x\le 0$ 时，有

$$F_{X|X>0}(x)=P(X\le x\big|X>0)=0.$$

而当 $x>0$ 时，我们有

$$F_{X|X>0}(x)=P(X\le x\big|X>0)=\frac{P(0<X\le x)}{P(X>0)}=2[\Phi(x)-\tfrac{1}{2}]$$

故

$$f_{X|X>0}(x)=\begin{cases}2\varphi(x) & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

从而，

$$E(X\mid X>0)=2\int_0^{+\infty} x\varphi(x)dx=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}$$

定义 2 对连续型随机向量 (X,Y)，若 $f_X(x)>0$，称 $\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为**在给定 $X=x$ 的条件下，Y**

的条件分布密度，记为 $f_{Y|X}(y|x)$。同理，若 $f_Y(y)>0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在**给定 *Y*=*y* 的条件下，*X* 的条件分布密度**。此时，**给定 *Y*=*y* 的条件下，*X* 的条件期望为**

$$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{X|Y}(x|y)dx \quad \text{（要求绝对收敛）}$$

例　设二维随机向量（*X*,*Y*）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{x} \qquad 0\le y\le x\le 1$$

则 *X* 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}I_{[0,x]}(y)dy=\int_0^x\frac{1}{x}dy=1 \qquad (0\le x\le 1)$$

而在 $x\notin[0,1]$ 时，则有 $f_X(x)=0$. 故当 $0\le x\le 1$ 时有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{x} \qquad (0\le y\le x)$$

即 *X* ～*U*[0,1]. 且在 *X*=*x*（$0<x\le 1$）的条件下，*Y* ～*U*[0, *x*]。从而

$$E(Y\mid X=x)=\frac{x}{2},\quad 0<x\le 1$$

§6 随机变量的函数的分布

Case 1：一维情形

设 *X* 为具有概率密度函数 *f*(*x*)的连续型随机变量，为计算 *X* 的函数 *Y*=*g*(*X*)的概率密度函数，一般地，我们先考虑 *Y*=*g*(*X*)的分布函数，即

$$\begin{aligned}P(Y\le y)&=P(g(X)\le y)=P(g(X)\in(-\infty,y])\\&=P(X\in g^{-1}(-\infty,y])=\int_{g^{-1}(-\infty,y]}f(x)dx\end{aligned}\ ,$$

然后，对上式关于 *y* 求导，便可得 Y 的密度函数。这里，$g^{-1}(-\infty,y]$ 是指集合 $(-\infty,y]$ 关于 g 的原象集。

例 1　设 $X\sim N(0,1)$，且 $g(x)=x^2$，则 $Y=g(X)=X^2$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}P(Y\le y)&=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})\\&=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1 \qquad \text{若}\, y\ge 0\end{aligned}$$

这里，我们用到了 $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$ 这一事实，再对上式关于 *y* 求导便可得 *Y* 的密度函数

$$f_Y(y)=2\frac{d}{dy}\Phi(\sqrt{y})=y^{-\frac{1}{2}}\Phi'(\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}\qquad (y\ge 0).$$

这是$[0,\infty)$上的分布密度，也可以写成在实数轴上的分布密度

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot I_{[0,\infty)}(y)$$

Case 2： 二维情形

单个函数：设(X,Y)为具有概率密度函数$f(x,y)$的连续型随机变量，为计算函数$Z=g(X,Y)$的概率密度函数，一般地，我们也先考虑$Z=g(X,Y)$的分布函数，即

$$P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy,$$

然后，对上式关于z求导，便可得Z 的密度函数。

两个函数：若随机变量X_1和X_2的联合概率密度函数$f(x_1,x_2)$．那么，随机变量$Y_1=y_1(X_1,X_2)$与$Y_2=y_2(X_1,X_2)$的联合概率密度函数又是什么呢？

让我们先来回顾一下积分中的变量替换公式，设$y_1=y_1(x_1,x_2)$，$y_2=y_2(x_1,x_2)$是如下的一个双射（一一映射）$T:(x_1,x_2)\to(y_1,y_2)$，其定义域为$D\subseteq \boldsymbol{R}^2$，值域为$R\subseteq R^2$．对此我们有如下的引理：

引理 设$g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$且光滑映射$T$将集合$A\subseteq D$映射到集合$B\subseteq R$，则

$$\iint\limits_A g(x_1,x_2)dx_1dx_2=\iint\limits_B g(x_1(y_1,y_2),x_2(y_1,y_2))\left|J(y_1,y_2)\right|dy_1dy_2$$

其中$J(y_1,y_2)$为 **Jacob 行列式**

$$J(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}-\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}.$$

从而，我们有

定理 若随机变量X_1和X_2的联合概率密度函数为$f(x_1,x_2)$，那么，有双射$(Y_1,Y_2)=T(X_1,X_2)$（记T的定义域为D，值域为R）给出的随机变量Y_1和Y_2的联合概率密度函数为

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f(x_1(y_1,y_2),x_2(y_1,y_2))\,|\,J(y_1,y_2)\,|\,I_R(y_1,y_2),$$

其中$(x_1(y_1,y_2),x_2(y_1,y_2))$是$T$ 的逆映射，$I_R(y_1,y_2)$是平面集合R的示性函数。

例：(X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$，求 $Z=aX+bY$ 的概率密度，这里 $a,b>0$ 。

解法一：（原理法）通过 $P(Z\le z)=P(aX+bY)\le z)=\iint\limits_{ax+by\le z} f(x,y)dxdy$

解法二：（变换公式法）做变换

$$\begin{cases} Z=aX+bY \\ W=Y(\text{辅助变换}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\frac{z-bW}{a} \\ Y=W \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{a}$$

$$f_{Z,W}(z,w)=\tfrac{1}{a}f(\tfrac{z-bw}{a},w)$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,W}(z,w)dw$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{a}f(\tfrac{z-by}{a},y)dy$$

注：1)　*r.v.*的和差积商公式　（不需死记硬背，要注意方法）

设 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$，则

$$f_{aX+bY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{|b|}f(x,\tfrac{z-ax}{b})dx=\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{|a|}f(\tfrac{z-by}{a},y)dy$$ （a,b **不同时为 0）；**

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{|x|}f(x,\tfrac{z}{x})dx;\quad f_{\frac{X}{Y}}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|f(zy,y)dx$$

特别有：卷积公式：若随机变量 X 与 Y 相互独立，则

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy\,.$$

我们称 f_{X+Y} 为 f_X 和 f_Y 的**卷积**，并记为

$$f_{X+Y}=f_X * f_Y=f_Y * f_X\,.$$

2）最大值与最小值的分布　（注意方法）

$M=\max\limits_{1\le i\le n} X_i,\ N=\min\limits_{1\le i\le n} X_i$ **的分布的求法**

补充：混合随机变量的简单函数

例　设随机变量 X 和 Y 独立，其中 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$

【 $F_U(u)=P(U\le u)=P(X+Y\le u)$

$$=P(X+Y\le u\mid X=1)P(X=1)+P(X+Y\le u\mid X=2)P(X=2)$$

$$=0.3P(Y\le u-1\mid X=1)+0.7P(Y\le u-2\mid X=2)$$

由于 X 和 Y 独立，可见

$F_U(u)=0.3P(Y\le u-1)+0.7P(Y\le u-2)=0.3F(u-1)+0.7F(u-2)$

由此, 得 U 的概率密度为

$g(u)=F_U'(u)=0.3F'(u-1)+0.7F'(u-2)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$.】

第五章　Brown 运动与特征函数

§1 特征函数及其性质

1. 定义：随机变量的特征函数）对于一个任意的随机变量 X，称参数 θ 的函数

$$\varphi(\theta)=Ee^{i\theta X}=E(Cos\theta X)+iE(Sin\theta X)\qquad(-\infty<\theta<\infty)$$

为 X 的**特征函数,** 其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

注　（a）　若 X 为离散型随机变量，其分布为 $P(X=x_i)=p_i$，则 X 的特征函数为

$$\varphi(\theta)=Ee^{i\theta X}=\sum_k e^{i\theta x_k}p_k$$

（b）　若 X 为连续型随机变量，其分布密度为 $f(x)$，则 X 的特征函数为

$$\varphi(\theta)=Ee^{i\theta X}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}f(x)dx$$

例　**0-1 分布的特征函数为** $\varphi(\theta)=q+pe^{i\theta}$

Poisson 分布 $P(\lambda)$ **的特征函数**为 $\varphi(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{i\theta k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{i\theta}}=e^{\lambda(e^{i\theta}-1)}$

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ **的特征函数为** $\varphi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}dx=e^{i\mu\theta-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$

2. 特征函数的性质

简单性质：

定理 1　随机变量 X 的特征函数 $\varphi_X(\theta)$ 满足：

（1）$|\varphi_X(\theta)|\le 1,\quad \varphi_X(0)=1.$

（2）$\varphi_X(\theta)$ 为 **R** 上的一致连续函数.

（3）$\varphi_X(\theta)$ 的复共轭　$\overline{\varphi_X(\theta)}=\varphi_X(-\theta)$.

（4）设 a，b 为常数，则 $\varphi_{a+bX}(\theta)=e^{i\theta a}\varphi_X(b\theta)$ 从而常数 a 作为随机变量的特征函数

为 $e^{i\theta a}$.

重要性质：

定理 2 **（独立和）**设随机变量 X,Y 相互独立，则 $\varphi_{X+Y}(\theta)=\varphi_X(\theta)\varphi_Y(\theta)$。

定理 3 **（矩性质）**若 $E(|X^k|)<\infty$，则在 θ 很小时有

$$\varphi(\theta)=\sum_{j=0}^{k}\frac{(i\theta)^j}{j!}EX^j+o(\theta^k),\ (\theta\to 0),$$

且对 $j=0,1,2,\cdots,k$，有 $EX^j=i^{-j}\varphi^{(j)}(0)\qquad(j=0,1,2.\cdots,k)$ 成立。

定理 4 **（唯一性定理）** 随机变量的分布函数 $F(x)$ 由其特征函数 $\varphi(\theta)$ 唯一决定.

定理 5 (连续性定理) 设随机变量列 X_n 及随机变量 X 的分布函数分别为 $F_{X_n}(x),F_X(x)$，特征函数分别为 $\varphi_{X_n}(\theta),\varphi_X(\theta)$. 那么以下述两种说法彼此等价：

(1) 在函数 $F_X(x)$ 的一切连续点 x 上有 $F_{X_n}(x)\to F_X(x)$，称为随机变量序列 X_n **依分布收敛**到分布函数 F_X，记为 $X_n\xrightarrow{D}F_X$.

（也称为随机变量序列 X_n **依分布收敛**到随机变量 X，记为 $X_n\xrightarrow{D}X$).

(2) 对于任意 θ 有 $\varphi_{X_n}(\theta)\to\varphi_X(\theta)$.