第五部分　多元函数微分

一、填空题

1.（**2001j**）已知 $z=(1+xy)^y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________ .

2.（**2009j**）设二元函数 $z=x\mathrm{e}^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\ 1)}=$________________.

3.（**2005j**）设函数 f 和 g 都可微，令 $u=f(x,\ xy)$，$v=g(x+xy)$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=$________.

4．（**2008j**）设 $z=\int_0^{x^2y}f(t,\ \mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$，其中函数 f 具有连续的一阶偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______________________.

5.（**2004gj**）设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中函数 $f,\ \varphi$ 有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______________________.

6.（**2003gj**）设函数 $u=\mathrm{e}^z yz^2$，其中 $z=z(x,\ y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则当 $x=0$、$y=1$、$z=-1$ 时 $u'_y=$_______________.

7.（**2002j**）设 $u=x+\cos\dfrac{y}{2}+\mathrm{e}^{xz}$，则 $\mathrm{d}u\big|_{x=1,\ y=\pi,\ z=0}=$___________.

8.（**2008j**）设函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $z+\mathrm{e}^z+2xy=5$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2,0)}=$__________.

9.（**2004gj**）由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,\ y)$ 在点 $(1,\ 0,\ -1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)}=$___________________.

10．（**2006gj**）设函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $z-x-y+x\mathrm{e}^{z-x-y}=\sqrt{2}$ 所确定，则 $\mathrm{d}z=$__________________________.

11.（**2007j**）设函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $2y=z-\mathrm{e}^{2x-3z}$ 所确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

12．（**2002g**）函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(-1,\ 1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1)$ 的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(-1,1)}=$______________.

13.（**2005g**）函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处，沿从点A指向点$B(3,-2,2)$方向上的方向导数为____________________.

14.（**2008g**）函数$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$M(1,1,1)$处，沿曲面$2z=x^2+y^2$在该点的外法线方向$\vec{l}$上的方向导数$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=$____________.

15.（**2014g**）设可微函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿$\vec{l}_1=(1,-1)$的方向导数为$\sqrt{2}$，沿$\vec{l}_2=(0,-2)$的方向导数为3，则$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿$\vec{l}=(-2,3)$的方向导数为__________.

16.（**2003g**）曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}=1,\\ x-2y+z=0\end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线方程为___________________.

17.（**2006g**）由曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周所得的旋转面在点$M(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向外侧的单位法向量为___________________.

18.（**2007g**）曲线L：$\begin{cases}3x^2+2y^2-2z-1=0,\\ x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0\end{cases}$在点$M(1,1,2)$处的切线方程为___________________.

19.（**2011g**）椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面$x-y+2z=0$的切平面方程为____________________与____________________.

二、单项选择题

20.（**2008j**）若函数f，g均可微，设$z=f[xy,\ln x+g(xy)]$，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　　）.

（A）f_1'；　（B）f_2'；　（C）0；　（D）1.

21.（**2015gj**）设二元函数$z=f(x,y)$在点$(1,1)$的某个邻域内有连续偏导数，且满足$f(x,x^3)=c$（这里c为某一常数），若$f_y'(1,1)=-1$，则$f_x'(1,1)=$（　　　）.

（A）1　（B）-1　（C）3　（D）-3

22.（**2014gj**）设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$，其中函数$\varphi(u)$有二阶

导数、$\psi(t)$ 有一阶导数，则必有（　　）.

（A）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（B）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（C）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　（D）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

23.（**2002gj**）函数 $z(x，y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在点 $(0，0)$ 处（　　）.

（A） 连续且偏导数存在；　　（B） 连续但是不可微；

（C） 不连续且偏导数不存在；　　（D）不连续但是偏导数存在.

24.（**2004gj**）设函数 $f(x，y)=\sqrt{|xy|}$，则在点 $(0，0)$ 处函数 $f(x，y)$（　　）.

（A） 可微；　　（B） 偏导数存在，但不可微；

（C） 连续，但偏导数不存在；　　（D） 不连续且偏导数不存在.

25.（**2006g**）设 $f(x，y)$、$\varphi(x，y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x，y)\neq 0$．已知点 $P(x_0，y_0)$ 是函数 $f(x，y)$ 在约束条件 $\varphi(x，y)=0$ 下的一个极值点，下列选项中正确的是（　　）

（A） 若 $f'_x(x_0，y_0)=0$，则 $f'_y(x_0，y_0)=0$；

（B） 若 $f'_x(x_0，y_0)=0$，则 $f'_y(x_0，y_0)\neq 0$；

（C） 若 $f'_x(x_0，y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0，y_0)=0$；

（D） 若 $f'_x(x_0，y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0，y_0)\neq 0$.

26.（**2007gj**）考虑二元函数 $f(x，y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的下面四条性质：

①连续；②可微；③ $f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 存在；④ $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 连续.

若用“P$\Rightarrow$Q”表示由性质 P 可以推出性质 Q，则对本题有（　　）.

（A） ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①；　　（B） ④$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①；

（C） ②$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①；　　（D） ④$\Rightarrow$③$\Rightarrow$②.

27.（**2008g**）设函数 $z=f(x，y)$ 在点 $(x_0，y_0)$ 处有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0，y_0)}=a$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0，y_0)}=b$，则下列结论正确的是（　　）.

（A） 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，但函数 $f(x，y)$ 在点 $(x_0，y_0)$ 处不连续；

（B） 函数 $f(x，y)$ 在点 $(x_0，y_0)$ 处连续；

（C） 在点 $(x_0，y_0)$ 处 $\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)}=a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y$；

（D） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x，y_0)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0，y)$ 都存在，且相等.

28．（**2012g**）螺旋线 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \\ z=\theta \end{cases}$（ $0\le\theta\le 2\pi$ ）上与平面 $x+y+z=0$ 平行的切线有（　　）.

（A）1 条；　（B）2 条；　（C）3 条；　（D）4 条.

29.（**2001gj**）设函数 $u(x，y)$ 在有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}>0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（　　）.

（A） 函数 $u(x，y)$ 的最大值点与最小值点都在区域 D 的内部；

（B） 函数 $u(x，y)$ 的最大值点与最小值点都在区域 D 的边界上；

（C） 函数 $u(x，y)$ 的最大值点在区域 D 的内部，最小值点在区域 D 的边界上；

（D） 函数 $u(x，y)$ 的最小值点在区域 D 的内部，最大值点在区域 D 的边界上.

30.（**2009gj**）设二元函数 $F(x，y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $F(x_0，y_0)=0$，$F_x'(x_0，y_0)=0$，$F_y'(x_0，y_0)>0$. 若一元函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x，y)=0$ 所确定的在点 $(x_0，y_0)$ 附近的隐函数，则 x_0 是函数 $y=y(x)$ 的极小值点的一个充分条件是（　　）.

（A）$F_{xx}''(x_0，y_0)>0$；　（B）$F_{xx}''(x_0，y_0)<0$；

（C）$F_{yy}''(x_0，y_0)>0$；　（D）$F_{yy}''(x_0，y_0)<0$.

31.（**2014j**）若函数 $f(x，y)=ax^2+bxy-y^2$ 有一个唯一极大值 $f(0，0)$，则常数 a、b 应满足（　　）.

（A）$a>-\dfrac{b^2}{4}$　（B）$a<\dfrac{b^4}{4}$　（C）$a<-\dfrac{b^2}{4}$　（D）上述结论都不正确

32.（**2015j**）若可微函数 $z=f(x，y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，则（　　）.

（A） $f(0, 0)$ 为极大值　　　　　　　（B） $f(0, 0)$ 为极小值

（C） $f(0, 0)$ 不是极值　　　　　　　（D）不能判断 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否取极值

三、计算题

33．（**2005j**）（本题 7 分）设函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微，且 $f(1, 1)=1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1, 1)}=2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1, 1)}=3$，设函数 $\varphi(x)=f\left(x, f(x, x)\right)$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$．

34．（**2005g**）（本题 6 分）设函数 $z=f(xy, \frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

35．（**2001g**）（本题 6 分）设二元函数 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$u(x, 2x)=x$，$u_1'(x, 2x)=x^2$，求 $u_{11}''(x, 2x)$．

36．（**2014gj**）（本题 7 分）设函数 $z=f[x^2-y, \varphi(xy)]$，其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(u)$ 有二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

37．（**2002gj**）（本题 7 分）设函数 $u=f(x, y, z)$，而 x，y，z 满足 $\varphi(x^2, y, z)=0$ 及 $y=\sin x$，其中函数 f，φ 都具有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$．

38．（**2001j**）（本题 7 分）已知方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 定义了函数 $z=z(x, y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．

39．（**2010gj**）（本题 7 分）设函数 $z=z(x, y)$ 是由方程 $z+\mathrm{e}^z=xy$ 确定的二元函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

40．（**2003gj**）（本题 7 分）设变量代换 $\begin{cases} u=x+a\sqrt{y}, \\ v=x+2\sqrt{y} \end{cases}$ 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，试确定 a 值．

41．（**2005g**）（本题 6 分）设二元函数$u(x, y)$在有界闭区域D上可微，在D的边界曲线上$u(x, y)=0$，并满足关系式$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u(x, y)$，求$u(x, y)$的表达式.

42．（**2008gj**）（本题 8 分）求λ的值，使曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内相切，并求出在切点处两曲面的公共切平面方程． **（注： 经管类此题超纲）**

43．（**2004j**）（本题 7 分）求过直线L:$\begin{cases}3x-2y-z=5,\\ x+y+z=0\end{cases}$与曲面$2x^2-2y^2+2z=\dfrac{5}{8}$相切的切平面方程．**（注：经管类此题超纲）**

44．（**2015j**）（本题 7 分）设l是曲面$z=y^2+x^3y$上的一条曲线在点 处的切线，若l在xOy面上的投影平行于直线$y=x$，求该切线l的方程．**（注： 经管类此题超纲）**

45．（**2009gj**）（本题 7 分）在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上求一个切平面，使它在各个坐标轴的正半轴上截取相等的线段．**（注： 经管类此题超纲）**

46．（**2012g**）（本题 7 分）已知曲面$4x^2+y^2-z^2=1$上的点P处的切平面π平行于平面$2x-y+z=1$，求切平面π的方程.

47．（**2004gj**）（本题 8 分）在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$的方向导数最大.

（注： 经管类此题超纲）

48．（**2002j**）（本题 7 分）设某工厂生产A、B两种产品，当这两种产品的产量分别为x和y（单位为吨）时总收益函数为

$$R(x, y)=15x+34y-x^2-2xy-4y^2-36 \text{（万元）}.$$

已知生产产品A时，每吨需支付排污费 1 万元；生产产品B时，每吨需支付排污费 2 万元。若要限制排污费为 14 万元，试问这两种产品的产量各为多少时，工厂的总利润最大？最大总利润为多少？

49．（**2001j**）（本题 8 分）某工厂计划投资 144（百万元）用于购进A、B两种生产线，A生产线每套售价 4（百万元），B生产线每套售价 3（百万元）．若购进x套A生产线和y套B

生产线，可使该厂新增年产值

$$L(x,y)=\frac{2\sqrt{6}}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}\text{（百万元）.}$$

问该厂应当分别购进 A、B 两种生产线个多少套，能使该厂新增年产值最大，并求此最大值.

50．（**2001g**）（本题 7 分）问在所有周长为 $2p$ 的三角形中，怎样的三角形的面积最大？

51．（**2002g**）本题 7 分）求函数 $f(x，y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在 $S=\{(x，y)\big|x^2+y^2=1\}$ 上的最大值与最小值.

52．（**2005j**）（本题 7 分）求函数 $z=x^2+y^2$ 在闭区域 D：$x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y\le 5$ 上的最大值与最小值.

53．（**2006j**）（本题 8 分）已知曲面方程为 $xyz=1$（$x>0，y>0，z>0$），

（1）在曲面上求一点，使其到原点的距离最小；

（2）写出该点处的切平面方程．（ **注：第二问经管类超纲** ）

54．（**2007g**）（本题 8 分）求过第一卦限中的点 $(a，b，c)$ 的平面，使之与三个坐标面所围成的四面体的体积最小.

55．（**2011gj**）（本题 8 分）设圆 $x^2+y^2=2y$ 含于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的内部，且圆与椭圆相切于两点（即在这两点处圆与椭圆有公切线）.

（1）求 a 与 b 满足的关系式；（2）求 a 与 b 的值，使椭圆的面积最小.

56.（**2015gj**）（本题 7 分）设曲面 S：$(x-y)^2-z^2=1$，

（1）求曲面 S 在点 $M(1，0，0)$ 处的切平面 π 的方程；

（2）证明原点到曲面 S 上的点的最小距离等于原点到切平面 π 的距离.

（注：经管类超纲）

四、证明题

57.（**2006g**）（本题 7 分）若函数 $f(u，v)$ 具有一阶连续偏导数，设 $z=f(x^2-y^2，\cos(xy))$，又 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，证明：$\dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial\theta}\sin\theta=2x\dfrac{\partial z}{\partial u}-y\dfrac{\partial z}{\partial v}\sin(xy)$.

58．（**2007gj**）（本题 8 分）设函数 $f(x，y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中函数 $\varphi(x,y)$ 在点 $O(0，0)$

的一个邻域内连续，证明函数 $f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0, 0)=0$.

59.（**2008gj**）（本题 6 分）设二元函数 $z=z(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，证明方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 可经过变量替换 $u=x+y$，$v=x-y$，$w=xy-z$ 化为方程 $2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-1=0$.

60.（**2009gj**）（本题 8 分）设二元函数 $u(x, y)$ 具有二阶偏导数，且 $u(x, y)\neq 0$，证明 $u(x, y)=f(x)g(y)$ 的充分必要条件是 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$.

61．**(2013j)**（本题 7 分）设函数 $f(x, y)=(y-x^2)(y-2x^2)$，试证明：

（1）对任意的常数 k， $f(0, 0)$ 是函数 $f(x, y)$ 在约束条件 $y=kx$ 下的极小值；

（2） $f(0, 0)$ 不是函数 $f(x, y)$ 的极小值.

答案:

一、填空题

1. ($(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}]$ **)**　　**2.**（ $(\mathrm{e}+\ln 2)\mathrm{d}x+\dfrac{\mathrm{d}y}{2}$ ）

3.（ $(1+y)(f_1'+yf_2')g'$ ）

4. ($2xf(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})+2x^3y[f_1'(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})+\mathrm{e}^{x^2y}f_2'(x^2y,\ \mathrm{e}^{x^2y})]$ **)**

5. ($yf''(xy)+\phi'(x+y)+y\phi''(x+y)$ **)**　　**6. (** $\dfrac{2}{e}$ **)**

7. ($\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$ **)**　　**8. (** $-2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ **)**　　**9. (** $\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$ **)**

10. ($\dfrac{1+(x-1)\mathrm{e}^{z-y-x}}{1+x\mathrm{e}^{z-y-x}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ **)**　　**11. (** 2 **)**　　**12. (** $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ **)**

13. ($\dfrac{1}{2}$ **)**　　**14. (** $\dfrac{1}{3}$ **)**　　**15. (** $-\dfrac{7}{\sqrt{13}}$ **)**　　**16. (** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$ **)**

17. ($\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ **)**　　**18. (** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-2}{-5}$ **)**　　**19. (** $x-y+2z=\pm\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ **)**

二、单项选择题

20. 选（**B**）　**21.** 选（**C**）　**22.** 选（**B**）　**23.** 选（**D**）　**24.** 选（**B**）
25. 选（**D**）　**26.** 选（**B**）　**27.** 选（**D**）　**28.** 选（**B**）　**29.** 选（**B**）
30. 选（**B**）　**31.** 选（**C**）　**32.** 选（**C**）

三、　计算与解答题

33.（ 51 ）

34.（ $y^2f_{11}''+2f_{12}''+\dfrac{1}{y^2}f_{22}''+\dfrac{2y}{x^3}g'+\dfrac{y^2}{x^4}g''$，$f_1'-\dfrac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''-\dfrac{1}{x^2}g'-\dfrac{y}{x^3}g''$ ）

35.（ $-\dfrac{4x}{3}$ ）

36. ($2xf_1'+y\phi'f_2'$，$-f_1'+x\phi'f_2'$，$(\phi'+xy\phi'')f_2'-2xf_{11}''+(2x^2-y)\phi'f_{12}''+xy\phi'^2f_{22}''$ **)**

37. ($f_1'+f_2'\cdot\cos x-\dfrac{2x\varphi_1'+\varphi_2'\cdot\cos x}{\varphi_3'}f_3'$ **)**　　**38.**（ $-\dfrac{z^2}{(z+x)^3}$ ）

39.（ $\dfrac{-y^2\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^3}$，$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^z}-\dfrac{xy\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^3}$ ）　　**40.**（ -2 ）　　**41. (** $u(x,\ y)\equiv 0$ **)**

42. ($\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\sqrt{3}$)

43. （ $6x+y+2z=5$ 或 $10x+5y+6z=5$ ）

44. （$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-9}{22}$）

45. （$x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ）

46. ($2x-y+z=\pm 1$)

47. ($(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0)$)

48. （6, 4, 28）

49. （**12**, 27, 36）

50. （等边三角形）

51. (最大值为 $M=1+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，最小值为 $m=1-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$)

52. (最大值为 25 、最小值为 0)

53. （$(1, 1, 1)$，$x+y+z-3=0$）

54. （$\dfrac{x}{3a}+\dfrac{y}{3b}+\dfrac{z}{3c}=1$）

55. （ $a^2b^2-a^4-b^2=0$，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ）

56. ($x-y-1=0$)

四、 证明题

57-61. 略