单元3.8 关系的闭包

第七章 二元关系

7.5 关系的闭包

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 关系的自反闭包
- 关系的对称闭包
- 关系的传递闭包
- 闭包的性质和反例
- 闭包的求法

关系的闭包

关系闭包：增加最少元素使其具备所需性质

- 自反闭包**r(R)**
- 对称闭包**s(R)**
- 传递闭包**t(R)**

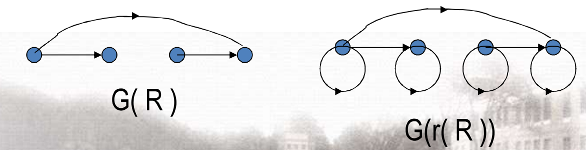
自反闭包

- 自反闭包**r(R)**

(1) $R \subseteq r(R)$

(2) $r(R)$是自反的

(3) $\forall S((R \subseteq S \land S\text{自反}) \rightarrow r(R) \subseteq S)$



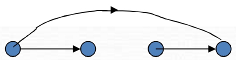
对称闭包

- 对称闭包**s(R)**

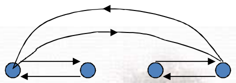
  (1) $R \subseteq s(R)$

  (2) s(R)是对称的

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$对称$) \rightarrow s(R) \subseteq S)$



G(R)



G(s(R))

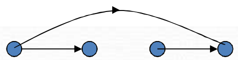
传递闭包

- 传递闭包**t(R)**

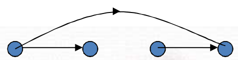
  (1) $R \subseteq t(R)$

  (2) t(R)是传递的

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S)$



G(R)



G(t(R))

例

设A={1,2,3}, R={<1,2>, <2,3>}是A上的关系。试判断下列关系是否是R的自反闭包、对称闭包、传递闭包。

R1={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,3>}

R2={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,3>,<1,3>}

R3={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>}

R4 ={<1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,2>, <2,1>, <2,3>, <3,2>, <1,3>, <3,1>}

定理

定理 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$, 则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R)=R$;　(2) R对称 $\Leftrightarrow s(R)=R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R)=R$.　#

定理 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;　(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.　#

(1)证: 由$R_1 \subseteq R_2$和$R_2 \subseteq r(R_2)$，有$R_1 \subseteq r(R_2)$。又$r(R_2)$）是自反的，根据定义，必有$r(R_1) \subseteq r(R_2)$。

定理

定理 设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$; (2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明: (1) $R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$. 由 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 自反, 所以 $r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

同时, $(R_1\subseteq R_1\cup R_2)\wedge(R_2\subseteq R_1\cup R_2)\Rightarrow r(R_1)\subseteq r(R_1\cup R_2)\wedge r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)\Rightarrow r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$. #

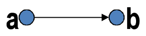
(2)可类似证明.

(3) $R_1\subseteq R_1\cup R_2\wedge R_2\subseteq R_1\cup R_2\Rightarrow t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2)\wedge t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)\Rightarrow t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$. #

注意: $t(R_1)\cup t(R_2)$不一定传递, 请同学们举反例

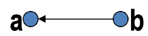
所以没有 $t(R_1\cup R_2)\subseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

反例



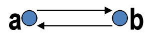
$G(R_1)=G(t(R_1))$

传递



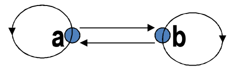
$G(R_2)=G(t(R_2))$

传递



$G(t(R_1)\cup t(R_2))$

非传递



$G(t(R_1\cup R_2))$

传递

闭包的求法

- 定理7.10 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

  $r(R)=R\cup I_A$

  $s(R)=R\cup R^{-1}$

  $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

- 对比: R自反 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$

  R对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$

  R传递 $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$

定理

定理 $r(R)=R\cup I_A$

证明 (1) $R\subseteq R\cup I_A$

(2) $I_A\subseteq R\cup I_A\Leftrightarrow R\cup I_A$ 自反 $\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$

(3) $(R\subseteq r(R))\wedge(r(R)$ 自反$)$

$\Rightarrow R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R)\Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$

$\therefore\ r(R)=R\cup I_A$ #

定理

定理 $s(R)=R\cup R^{-1}$　　引理：$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

证明 (1) $(R\cup R^{-1})^{-1}=R\cup R^{-1} \Leftrightarrow R\cup R^{-1}$对称

(2) $R\subseteq R\cup R^{-1} \Rightarrow s(R)\subseteq s(R\cup R^{-1}) \Rightarrow s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$

(3) $(R\subseteq s(R)) \wedge$ ($s(R)$对称)

$\Rightarrow R\subseteq s(R)\wedge R^{-1}\subseteq s(R) \Rightarrow R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$

$\therefore\ s(R)=R\cup R^{-1}$　　#

$R^{-1}\subseteq s(R)$: $\forall x,y\in A,\ <x,y>\in R^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R$

$\Rightarrow <y,x>\in s(R) \Rightarrow <x,y>\in s(R),$

$\therefore R^{-1}\subseteq s(R).$

定理

定理 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明 (1) $R\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(2) $(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^2=R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$\Leftrightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$传递 $\Rightarrow t(R)\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

(3) $R\subseteq t(R)\wedge t(R)$传递

$\Rightarrow R\subseteq t(R)\wedge R^2\subseteq t(R)\wedge R^3\subseteq t(R)\wedge\ldots$

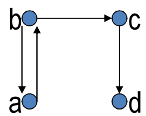
$\Rightarrow R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\subseteq t(R)$　　$\therefore\ t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$　　#

推论 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则$\exists \ell\in N$, 使得

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^{\ell}$.　　#

引理：$(A\cup B)^2=A^2\cup(A\circ B)\cup(B\circ A)\cup B^2$

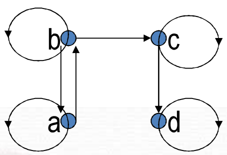
例

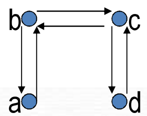


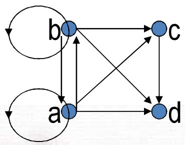
- **A={a,b,c,d},**

R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}.

求 r(R), s(R), t(R).







例

- **R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}**

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\qquad M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

例

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\quad M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

例

$$M(t(R))=M(R)\vee M(R^2)\vee M(R^3)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\quad \#$$

闭包运算与关系性质

- 定理**7.13** 若**R**具有某种性质，则其闭包是否满足该性质？

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√ **(定义)**	√**(2)**	√**(3)**
s(R)	√**(1)**	√**(定义)**	×**(反例)**
t(R)	√**(1)**	√**(2)**	√**(定义)**

定理7.13(1)

定理7. 13 （1）**R自反⇒ s(R)和t(R)自反**

证明 $I_A \subseteq R\cup R^{-1}=s(R)$

∴ **s(R)**自反.

$I_A \subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots=t(R)$

∴ **t(R)**自反.

定理7.13(2)

定理7. 13 R对称 ⇒ r(R)和t(R)对称;

证明 $r(R)^{-1}=(I_A\cup R)^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}=I_A\cup R^{-1}=I_A\cup R=r(R)$

∴ r(R)对称.

$t(R)^{-1}=(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^{-1}$

$=R^{-1}\cup(R^2)^{-1}\cup(R^3)^{-1}\cup\ldots$

$=R^{-1}\cup(R^{-1})^2\cup(R^{-1})^3\cup\ldots$ ($(FoG)^{-1}=G^{-1}oF^{-1}$)

$=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

=t(R) ∴ t(R)对称.

定理7.13(3)

定理7. 13 (3) R传递 ⇒ r(R)传递

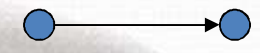
证明: $r(R)\ o\ r(R)=(I_A\cup R)o(I_A\cup R)$

$=(I_A o I_A)\cup(I_A oR)\cup(Ro I_A)\cup(RoR)$

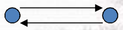
$\subseteq I_A\cup R\cup R\cup R=I_A\cup R=r(R)$

∴ r(R)传递. #

反例 R传递, 但是s(R)非传递

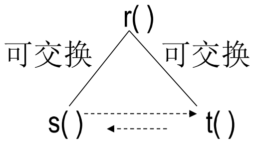


G(R)



G(s(R))

定理



定理 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) rs(R) = sr(R) (2) rt(R) = tr(R) (3) st(R) $\subseteq$ ts(R)

说明: rs(R)=r(s(R))

证明 (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R\cup R^{-1}) = I_A\cup(R\cup R^{-1})$

$=(I_A\cup R)\cup(I_A^{-1}\cup R^{-1}) = (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^{-1}$

$=r(R)\cup r(R)^{-1} = s(r(R)) = sr(R)$.

(2) $rt(R)=r(t(R)) = r(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots) = I_A\cup(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)$

$=(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R\cup R^2)\cup(I_A\cup R\cup R^2\cup R^3)\cup\ldots$

$=(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^2\cup(I_A\cup R)^3\cup\ldots$

$=r(R)\cup r(R)^2\cup r(R)^3\cup\ldots=t(r(R))$

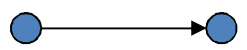
引理: $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$,
$(R\cup I_A)^n=I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n(n\geq 1)$

定理

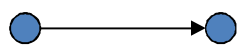
证明 (3) $R\subseteq s(R) \Rightarrow st(R)\subseteq st(s(R)) = sts(R) = s(ts(R)) = ts(R)$

(ts(R)对称, 定理7.13(2)). #

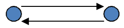
反例 $st(R)\subset ts(R)$



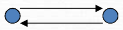
G(R)



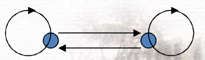
G(t(R))



G(s(t(R)))



G(s(R))



G(t(s(R)))

小结

- **r(R), s(R), t(R)**
- 反例