第 7 周讲稿

第四章 连续型随机变量

§1 概率密度函数

1. 定义 对于随机变量 X，如果存在非负可积函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$，使对任意实数 a,b $(a<b)$，都有

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

（或等价地：$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \quad \forall x \in R$ ）

则称 X 为**连续型随机变量**，并称 $f(x)$为 X 的**概率密度函数**（简称**概率密度**或**密度**）。

背景：

例 1：Poission 过程$\{N_t : t \ge 0\}$中，考虑第 1 位顾客到达的时刻记为$\tau(\omega) \sim E(\lambda)$（或者相继两位顾客到达的时间间隔 ）。

例 2：寝室到教室的时间分布的统计刻画。

2. 密度函数 $f(x)$ 的性质：

性质 1： $f(x)$ 是某一连续性随机变量的密度函数 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

性质 2：连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数，反之不成立。

性质 3：在 $f(x)$ 的连续点 x 处，$F'(x) = f(x)$

（为何可以只考虑分段求导来获得密度函数的理由？）

性质 4：$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$

注：（1） $f(x)$ 不唯一；

（2） $f(x)$ 的作用等价于一维离散型随机变量中的 p_i 的作用。

§2 数学期望

1. 定义 设 X 是一个连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < \infty$$

则称 X 的数学期望（或均值）存在，且 X 的**数学期望**（或**均值**）定义为

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (\approx \sum_i x_i P(x_i - \tfrac{\Delta x_i}{2} < X \le x_i + \tfrac{\Delta x_i}{2}))$$

2. 随机变量函数的数学期望

结论（不需要严格证明）：$Eh(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)f(x)dx$（后者绝对可积）

§3 几类重要的连续型随机变量的分布

（1）均匀分布及其背景

如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{b-a}I_{[a,b]}(x)\qquad (=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases})$$

则称 X 服从**区间[*a,b*]上的均匀分布**，记作 $X\sim U[a,b]$。

如果 $X\sim U[a,b]$，则对[*a,b*]中的任意子区间[*c,d*]，有

$$P(c<X\le d)=\int_c^d\frac{1}{b-a}I_{[a,b]}(x)dx=\frac{d-c}{b-a}.$$

这表明 X 取值于[*a,b*]中任一小区间的概率与该小区间的长度成正比

例 1　设 X 的分布函数 $F(x)$ 是严格单调的连续函数，则 $Y=F(X)$ 服从 $U(0,1)$

$$EX=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2};\qquad DX=\int_a^b(x-\tfrac{b+a}{2})^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

（2）指数分布的背景及无记忆性

★ 如果随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}I_{[0,+\infty)}(x)\qquad (=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases})\qquad （\lambda>0）$$

则称 X 服从**参数为 λ 的指数分布，记为** $X\sim E(\lambda)$。

★ 指数分布产生的背景与定义

性质：（1）$EX=\dfrac{1}{\lambda};DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$

（2） 若 X 为一取非负实数值的连续性随机变量，则下列命题等价

（a） $X\sim E(\lambda)$；

（b） $P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t),\forall s,t\ge 0$ **（即无记忆性）；**

（c）X 的失效率函数为常数 $\lambda>0$（即 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}P(x<X\le x+h\mid X>x)=\lambda$）。

例 2 一个工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，且已知这种设

备的平均寿命的为 4 年。工厂规定，出售的设备若在一年之内损坏可予以调换。工厂售出一台设备赢利 100 元，而调换一台设备需花费 300 元。 求厂方售出一台设备净赢利的数学期望。

例 3 假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布。

（a）求相继两次故障之间的时间间隔 T 的概率分布函数；

（b）求在设备已经无故障运行 8 小时的情况下，再无故障运行 8 小时的概率。

（3）正态分布与标准正态分布

★ 如果随机变量的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

其中参数 μ 可为任意实数，而参数 $\sigma>0$，则称 X 服从**参数为 μ,σ^2 的正态分布**，记为 X ～ $N(\mu,\sigma^2)$，若 $\mu=0$，$\sigma^2=1$，则称 X 服从**标准正态分布** $N(0,1)$。

★ **正态分布标准化：** $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 具有性质：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，$\Phi(0)=\frac{1}{2}$。

例 4 若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P(X<0)=$_______ . 【0.2】

例 5 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率是 $\dfrac{1}{2}$，则 $\mu=$_____ 。 【4】

注：指数分布和正态分布的计算中经常会遇到 Γ 函数：$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} u^{x-1}e^{-u}du \qquad (x>0)$

Γ 函数具有性质：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$（从而，$\Gamma(n+1)=n!$，$n\in N$）及 $\Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 。

§4. 二维连续型随机向量，连续型随机变量的独立性与相关性

1. 定义：(X,Y) 为二维连续型随机变量

$\Leftrightarrow$ **$\exists$ 非负可积函数 $f(x,y)$，使得 $\forall x,y\in R$ 有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$.**

（或等价地：$\exists$ 非负可积函数 $f(x,y)$，使得任意二维矩形

$C=\{(x,y): a<x\le b, c<y\le d\}$都有

$$P((x,y)\in C)=\iint_C f(x,y)dxdy\text{）}$$

称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合分布密度函数.

2. 性质

★ $f(x,y)$ **为联合分布密度** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)\ge 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1 \end{cases}$

★ **若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则** $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$**；**

★ **二维连续型随机变量的概率计算公式**

$$P((X,Y)\in A)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

例 1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6x & 0\le x\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases},$$

则 $P(X+Y\le 1)=$ ___ . 【$\iint_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\iint_{\{x+y\le1\}\bigcap\{0\le x<y\le 1\}} 6xdxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy=\dfrac{1}{4}$】

★ **重点：**

（a）边缘分布密度的求法

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

注意积分限的确定.

（b） 数学期望的求法

$$Eg(X,Y)=\iint_{\boldsymbol{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy \text{（后者绝对收敛）}$$

特别：$EX=\iint_{\boldsymbol{R}^2} xf(x,y)dxdy$；$EX^2=\iint_{\boldsymbol{R}^2} x^2 f(x,y)dxdy$，从而可以计算 DX。

$EXY=\iint_{\boldsymbol{R}^2} xyf(x,y)dxdy$；从而可以计算 $Cov(X,Y), r_{X,Y}$。

(c) 独立性, 联合分布函数, 边缘分布函数

X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\quad \forall x,y$

$\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}\quad \forall i,j$ **（离散型）**

$\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\quad \forall x,y\ a.e.$

$\Leftrightarrow f_{X|Y}(x\,|\,y)=f_X(x)\quad \forall x\ a.e.$ **（连续型）**

（d）条件密度

在$\{Y=y\}$的条件下，X的条件密度函数定义为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad (f_Y(y)>0)$$

（为何如此定义？）

从而$P(X\in A\,|\,Y=y)=\int_A f_{X|Y}(x|y)dx$

例 2 设

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}Axy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

问（1）$A=?$，（2）X 与 Y 是否独立？（3）相关系数$r_{X,Y}$（4）条件密度 $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})$ ，（5）

$P(0<X<\frac{1}{4}\,|\,Y=\frac{1}{2})$

【（1）$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1\Rightarrow A=8$，

（2）$f_X(x)=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，故 X 与 Y 不独立

（3）$EX=\frac{8}{15},EY=\frac{4}{5}$； $DX=\frac{1}{3}-(\frac{8}{15})^2=\frac{11}{75},DY=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75}$

$E[XY]=8\int_0^1dy\int_0^y 8x^2y^2dx=\frac{4}{9}$； $r_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\frac{\frac{4}{9}-\frac{8}{15}\frac{4}{5}}{\sqrt{\frac{11}{75}\frac{2}{75}}}=\frac{2\sqrt{22}}{33}$

（4）在$0\le y\le 1$时， $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2x}{y^2}, & 0\le x\le y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\Rightarrow f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}8x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

（5）$P(0<X<\frac{1}{4}\,|\,Y=\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{4}}f_{X|Y}(x\,|\,\frac{1}{2})dx=\frac{1}{4}$】

3. 两个常见的二维分布

（a）二维均匀分布$U(D)$

定义： 称随机向量$(X,Y)\sim U(D)$，若其联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|D|}, & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

注意矩形上二维均匀分布与几何概型的联系。

显然， $P((X,Y)\in A)=\dfrac{|A\bigcap D|}{|D|}$，　$A\subset R^2$

（2）二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$

定义： 称随机向量（X,Y）服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 的二元正态分布（记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$），若其联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2}Q(x,y)\}$$

其中 $\sigma_1,\sigma_2>0$，$Q(x,y)$ 是二次型

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\quad(|\rho|<1)$$

特别，称 $N(0,0,\rho,1,1)$ 为二元 $\rho-$ 标准正态分布。

标准化：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，令 $X^*=\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1},Y^*=\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$，

则 $(X^*,Y^*)\sim N(0,0,\rho,1,1)$

初步性质：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，则有

（1）$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$，$Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$。

（2）相关系数 $r_{X,Y}=\dfrac{Cov(\sigma_1X^*+\mu_1,\sigma_2Y^*+\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$.

（3）X,Y 相互独立 $\Leftrightarrow X^*,Y^*$ 相互独立 $\Leftrightarrow\rho=0$。

更进一步的问题的讨论，放到第 5 章进行。