清華大學 Tsinghua University

单元2-5 联结词的完备集

第2章 命题逻辑等值演算

2.3 联结词的完备集

内容提要

- 真值函数
- 联结词与真值函数
- 联结词完全集
- 非联结词完全集的例子
- 极小完备的联结词集合

联结词的完全集

- 为什么只考虑五个联结词？即
  - 这五个联结词能否表示所有联结词？
  - 这五个联结词是否有多余的？
- 要回答这两个问题，必须回答：
  - 什么是联结词？
  - 什么是一些联结词表示了一个联结词？
  - 什么是联结词的“多余”？

什么是联结词？

- 联结词确定了复合命题构造方式。
- 复合命题建立了真假值对应方式。
- 例如：

$\neg p$建立了如下对应：

$$0 \longrightarrow 1,\quad 1 \longrightarrow 0$$

$p \vee q$建立了如下对应:

$$(0, 0) \longrightarrow 0,\ (1, 0) \longrightarrow 1\ ,$$
$$(0, 1) \longrightarrow 1,\ (1, 1) \longrightarrow 1\ .$$

……

真值函数

- {0, 1}上的n元函数
  - f: $\{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$

就称为一个n元真值函数（布尔函数）。

- 因此，每个联结词c确定了一个真值函数f_c。
- 每个真值函数也确定了一个联结词(如下)。

真值函数确定联结词

- 设f为如下二元真值函数:

$f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 1) = 1$.

- 则f确定了联结词C_f，$p\, C_f\, q$的真假值为：

p	q	$p\, C_f\, q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

即C_f 为$\wedge$

- 即: $p\, C_f\, q$在赋值$<t_1, t_2>$下的值为$f(t_1, t_2)$ 。

命题形式确定的真值函数

- 设命题公式α所含的命题变元都在$p_1, p_2, \ldots p_n$中。如下定义的n元真值函数称为α确定的真值函数，记为f_α:

  $f_\alpha(t_1, t_2, \ldots t_n)$ =

  α关于p_1, $p_2, \ldots p_n$在赋值$t_1, t_2, \ldots t_n$下的值。

- 例如，若α 为$p\vee(\neg q)$，则f_α为:

$f(0,0) = 1$, $f(0,1) = 0$, $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 1$

真值函数的个数

n元真值函数共有2^{2^n}个

- 每一个命题公式对应于一个真值函数
- 每一个真值函数对应无穷多个命题公式

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$F_0^{(1)} = 0 = p \wedge \neg p$

$F_1^{(1)} = p$

$F_2^{(1)} = \neg p$

$F_3^{(1)} = 1 = p \vee \neg p$

真值函数的个数

2元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

联结词的表示(I)

- 什么叫“用$\wedge$和$\to$表示$\leftrightarrow$”？
- 直观上：$p\leftrightarrow q$“可写为”只含$\wedge$和$\to$的命题形式$(p\to q)\wedge(q\to p)$
- “可写为”含义是两者真值表相同：

p	q	$p\leftrightarrow q$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

- 即：$(p\to q)\wedge(q\to p)$在赋值$<t_1, t_2>$下的值为 $f_{\leftrightarrow}(t_1, t_2)$

联结词的表示(II)

用$c_1, c_2, \ldots c_k$表示c (或f_c)

↓

仅用$c_1, c_2, \ldots c_k$可以构造一个命题α与由c (或f_c)构造的命题等价。

↓

存在一个由$c_1, c_2, \ldots c_k$构造的命题α，使α在任意赋值$<t_1, t_2, \ldots, t_n>$下的值恰为$f_c(t_1, t_2, \ldots t_n)$ ($f(t_1, t_2, \ldots t_n)$)

联结词的完备集

- 直观地，说联结词集合A是完备的，指的是A中联结词能表示任意联结词。
- 设A一个联结词集合，称A为联结词的一个完备集，如果任一个真值函数f都可用A中的联结词来表示，即：**对任真值函数f，都存在仅使用A中联结词所构造的命题α，使得α在任意赋值$<t_1, t_2, \ldots, t_k>$下的值即为$f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$。**

{¬，∨，∧，→}

- {¬，∨，∧，→}是联结词的一个完全集。
- 证：只要证：

对任k元真值函数f，存在仅使用{¬，∨，∧，→}中联结词构造的k元命题公式α，使得α在任意赋值$<t_1, t_2, \ldots t_k>$下的值即为$f(t_1, t_2, \ldots t_k)$。

对k归纳证明。

{¬，∨，∧，→}（续1）

k=1时，一元真值函数有四个f_1、f_2、f_3、f_4：

$$f_1:\ 0 \longrightarrow 0,\ 1 \longrightarrow 0$$
$$f_2:\ 0 \longrightarrow 1,\ 1 \longrightarrow 1$$
$$f_3:\ 0 \longrightarrow 0,\ 1 \longrightarrow 1$$
$$f_4:\ 0 \longrightarrow 1,\ 1 \longrightarrow 0$$

分别可以用p∧(¬p)、 p∨(¬p)、p和¬p表示。

此时命题成立

{¬，∨，∧，→}（续2）

•设k<n时命题成立， 下证k=n时命题也成立.

〈1〉 设$f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$是一个n元真值函数，

定义如下两个n-1元真值函数f'、f''：

$$f'(x_2,x_3,\ldots,x_n) = f(0, x_2, x_3,\ldots,x_n)$$
$$f''(x_2,x_3,\ldots,x_n) = f(1, x_2, x_3,\ldots,x_n)$$

$$f(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases} f'(t_2,\cdots,t_n) & t_1=0, \\ f''(t_2,\cdots,t_n) & t_1=1. \end{cases}$$

由归纳假设，f'和f''都可由仅由{¬，∨，∧，→}中联结词所构造的n-1元命题公式α_1、α_2表示。设α_1、α_2中所含的命题变元设为p_2，p_3，…，p_n.

对任意赋值〈 t1， t2,…, tn 〉

〈2〉 f可由$(\neg p_1 \to \alpha_1) \wedge (p_1 \to \alpha_2)$表示。

当t_1=0时，

$(\neg p_1 \to \alpha_1) \wedge (p_1 \to \alpha_2)$在$< 0,t_2,\ldots,t_n >$下的值

$= \alpha_1$在$< 0,t_2,\ldots,t_n >$下的值

$= \alpha_1$在$<t_2,\ldots,t_n >$下的值

$= f'(t_2,t_3,\ldots,t_n)$

$= f(0, t_2,t_3,\ldots,t_n)$

$= f(t_1, t_2,t_3,\ldots,t_n)$

命题成立。

同理可证，当t_1=1时命题也成立。

推论

1. 任一个n元真值函数都可由一个仅含{¬，∨，∧，→} 中联结词的n元命题形式表示.

2. {¬，∨，∧，→， ↔}是联结词的完全集

3. ↔可由¬，∨，∧，→表示。

{¬，→}

证明：

$\alpha \vee \beta$可由（$\neg \alpha$）$\rightarrow \beta$表示。

$\alpha \wedge \beta$可由$\neg$（$\alpha \rightarrow$（$\neg \beta$））表示。

即这两对命题形式在任意赋值下的值相同。

{¬，∨}

证明：

$\alpha \rightarrow \beta$可由（$\neg \alpha$）$\vee \beta$表示。

$\alpha \wedge \beta$可由$\neg$（（$\neg \alpha$）$\vee$（$\neg \beta$））表示。

{¬，∧}

证明：

$\alpha \rightarrow \beta$可由$\neg$（$\alpha \wedge$（$\neg \beta$））表示。

$\alpha \vee \beta$可由$\neg$（（$\neg \alpha$）$\wedge$（$\neg \beta$））表示。

{∨，∧，→ ，↔}

{∨，∧，→ ，↔}不是联结词的完全集

证明：

总取0值的真值函数（矛盾式）不能由只含此集合中的联结词的命题形式来表示。

因为这样的命题形式在其中的命题变元都取1时也取值1, 而不为0.

{¬，∨，∧，→， ↔}的子集

- {¬，∨，∧，→， ↔}是联结词的完备集。
- 5个4元素子集中只有{∨，∧，→， ↔}不是联结词的完备集。
- 3元素子集中，只要含¬就完备。
  10个3元素子集，4个不完备，6个完备。
- 2元素子集中，{¬，→}、{¬， ∨}、{¬， ∧}是完备的。
- {¬， ↔}是否完备？
- {¬}是否完备？

真值函数的个数

2元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

$F_0 = p \wedge \neg p$ $\quad F_1 = p \wedge q$ $\quad F_2 = \neg(p \to q)$ $\quad F_3 = p$

$F_4 = \neg(q \to p)$ $\quad F_5 = q$ $\quad F_6 = \neg(p \leftrightarrow q)$ $\quad F_7 = p \vee q$

$F_8 = \neg(p \vee q)$ $\quad F_9 = p \leftrightarrow q$ $\quad F_{10} = \neg q$ $\quad F_{11} = q \to p$

$F_{12} = \neg p$ $\quad F_{13} = p \to q$ $\quad F_{14} = \neg(p \wedge q)$ $\quad F_{15} = p \vee \neg p$

新的联结词

联结词	记号	复合命题	读法	记法	备注
异或（相异或）	$\bar{\vee}$	P与Q的相异或	P异或Q	$P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$	异或门
蕴含否定	$\nrightarrow$	P与Q的蕴含否定	P蕴含否定Q	$P \nrightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \to Q)$	
与非	$\uparrow$	P与Q的与非	P与非Q	$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$	与非门
或非	$\downarrow$	P与Q的或非	P或非Q	$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$	或非门

$\boxed{F_0 = p \wedge \neg p}$ $\quad F_1 = p \wedge q$ $\quad \boxed{F_2 = \neg(p \to q)}$ $\quad F_3 = p$

$\boxed{F_4 = \neg(q \to p)}$ $\quad F_5 = q$ $\quad \boxed{F_6 = \neg(p \leftrightarrow q)}$ $\quad F_7 = p \vee q$

$\boxed{F_8 = \neg(p \vee q)}$ $\quad F_9 = p \leftrightarrow q$ $\quad F_{10} = \neg q$ $\quad F_{11} = q \to p$

$F_{12} = \neg p$ $\quad F_{13} = p \to q$ $\quad \boxed{F_{14} = \neg(p \wedge q)}$ $\quad \boxed{F_{15} = p \vee \neg p}$

与非联结词、或非联结词

与非式：$p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称作与非联结词

或非式：$p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, $\downarrow$称作或非联结词

$p\uparrow q$为假当且仅当p,q同时为真

$p\downarrow q$为真当且仅当p,q同时为假

定理2.2 $\{\uparrow\},\{\downarrow\}$是联结词完备集

证 $\neg p \Leftrightarrow \neg(p\wedge p) \Leftrightarrow p\uparrow p$

$p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\uparrow q) \Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

得证$\{\uparrow\}$是联结词完备集. 对于$\{\downarrow\}$可类似证明.

https://blog.csdn.net/Deam_swan_goose/article/details/98095652

极小完备的联结词集合

- 对于一个完备的联结词集合A，从A中任意删去一个联结词后，得到一个新的联结词集合A1 。若至少有一个公式不等价于仅包含A1 中联结词所表示的任一公式，则称A为极小完备的联结词集合。
- $\{\neg,\wedge\},\{\neg,\vee\},\{\neg,\rightarrow\},\{\neg,\nrightarrow\},\{\uparrow\},\{\downarrow\}$均为极小完备的联结词集合。
- 实际应用中常使用$\{\neg,\wedge,\vee\}$

Open Question Points: 10 Setting

1. 试将$p\wedge(q\leftrightarrow r)$用仅含$\{\neg,\wedge\}$联结词的等价公式形式表示。
2. 试将$(p\rightarrow(q\vee\neg r))\wedge(\neg p\wedge q)$用仅含$\{\neg,\vee\}$联结词的等价公式表示。
3. 试将$(p\rightarrow q)$转化为仅含$\{\uparrow\}$ 联结词的公式表示。
4. 试将$(p\rightarrow q)$转化为仅含 $\{\downarrow\}$ 联结词的公式表示。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

例

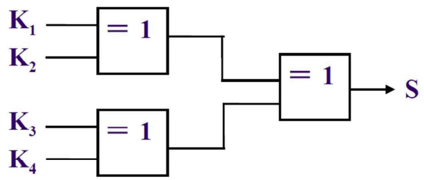
有一会议室，四周都有出入门，门旁有开关（双态开关）。为了控制全是的照明，设计一个线路，使得改变任意一个开关的状态就能改变全室的明暗。假设室中无人时灯暗，有人时灯亮。写出逻辑控制的表达式。

例

- 会议室四扇门旁的开关表示为K1， K2， K3， K4。“0”表示开关断开， “1”表示开关接通。S 表示会议室的照明状态， “1”表示全室灯亮， “0”表示全室灯暗。
- 假设开始时室内无人，灯暗，四只开关都处于“0”状态。有人进入室内时，随手改变门旁的开关状态，则会议室灯亮， S 为“1”。此时四只开关中有三只（奇数）处于“0”状态。最后一个人离开会议室时，随手改变门旁的开关状态，会议室灯暗， S 为“0”。如果该门恰是首次进入的门，则四只（偶数）开关都处于“0”状态。如果该门是另一扇门，则有两只（偶数）处于“0”状态。
- 以此类推，总之，当有偶数只开关处于“0”状态时， S 为“0”。有奇数只开关处于“0”状态时，则S为“1”。
- 为此，可以用开关K1， K2， K3， K4以及联结词表示会议室的照明状态。

例

- $S = (K_1 \bar{\nabla} K_2) \bar{\nabla} (K_3 \bar{\nabla} K_4)$



内容提要

- 真值函数
- 联结词与真值函数
- 联结词完全集
- 非联结词完全集的例子
- 极小完备的联结词集合