单元2.8 一阶逻辑命题符号化

第4章 一阶逻辑基本概念

4.1 一阶逻辑命题符号化

命题逻辑局限性

- 命题逻辑能够解决的问题是有局限性的。只能进行命题间关系的推理，无法解决与命题的结构和成分有关的推理问题。
- 例如(著名的苏格拉底三段论):

1) P：所有的人都是要死的；

2) Q：苏格拉底是人。

3) R: 苏格拉底是要死的。

- $P \land Q \rightarrow R$为非有效推理形式：P 、Q 、R 为不同的命题，无法体现三者相互之间的联系。

命题逻辑局限性

- 问题：命题之间的逻辑关系不是体现在原子命题之间，而体现在构成原子命题的内部成分之间。
- 需要进一步分解简单命题

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

个体词，谓词

内容提要

- 个体词、谓词、量词
- 命题符号化

个体

将可以独立存在的客体（具体事物或抽象概念）称为个体或个体词，并用a,b,c,...表示个体常元（表示具体事物的个体词），用x,y,z,...表示个体变元（表示抽象事物的个体词）。(个体的函数还是个体，例如，设a,b是数，f(a,b)可以表示a和b的运算结果，如a+b、a•b等。)

将个体变元的取值范围称为个体域，个体域可以是有穷或无穷集合。人们称由宇宙间一切事物组成的个体域为全总个体域。

谓词

将表示个体性质或彼此之间关系的词称为谓词，

常用F,G,H,...表示谓词常元（表示具体性质或关系）或谓词变元（表示抽象的或泛指的性质或关系）。

n元谓词$P(x_1, x_2,..., x_n)$: 含*n*个个体变项的谓词, 是定义在个体域上, 值域为{0,1}的*n*元函数。

- 一元谓词: 表示事物的性质
- 多元谓词($n \geq 2$): 表示事物之间的关系
- 0元谓词: 不含个体变项的谓词,即命题常项或命题变项

谓词

用F(x)表示“x具有性质F”，用F(x,y)表示“x和y具有关系F”。

例如，若F(x)表示“x是黑色的”，a表示黑板，

则F(a)表示“黑板是黑色的”；

若F(x,y)表示“x大于y”，则F(5,2)表示“5大于2”。

- 将n元谓词中的个体变元都用个体域中具体的个体取代后，就成为一个命题
- 谓词中个体词的顺序是十分重要的，不能随意变更。如命题F(5, 2) 为“真”，但命题F(2, 5) 为“假”

举例

(1) 4是偶数

4是个体常项，“是偶数”是谓词常元，符号化为: $F(4)$

(2) 小王和小李同岁

小王, 小李是个体常元, 同岁是谓词常元. 记*a*:小王, *b*: 小李, $G(x,y)$: *x*与*y*同岁, 符号化为: $G(a,b)$

(3) $x< y$

*x,y*是个体变元, < 是谓词常元, 符号化为: $L(x,y)$

(4) *x*具有某种性质*P*

*x*是个体变元, *P*是谓词变元, 符号化为: $P(x)$

0元谓词符号化

例 将下述命题用0元谓词符号化, 并讨论它们的真值

(1)$\sqrt{2}$是无理数, 而$\sqrt{3}$是有理数

(2) 如果2>3，则3<4

解 (1) 设$F(x)$: x是无理数, $G(x)$: x是有理数

符号化为$F(\sqrt{2}) \wedge G(\sqrt{3})$

真值为0

(2) 设 $F(x,y)$: $x>y$, $G(x,y)$: $x<y$,

符号化为 $F(2,3) \rightarrow G(3,4)$

真值为1

量词、全称量词

称表示数量的词为量词。

全称量词是自然语言中的“所有的”、“一切的”、“任意的”、“每一个”、“都”等的统称,

用符号“∀”表示。

用∀x表示个体域里的所有x;

用∀xF(x)表示个体域里所有x都有性质F。

存在量词

存在量词是自然语言中的“有一个”、“至少有一个”、“存在着”、“有的”等的统称,

用符号“∃”表示。

用∃x表示存在个体域里的x;

用∃xF(x)表示在个体域里存在x具有性质F。

有限域下的公式表示法

考虑有限个体域$D = \{1, 2, \ldots, k\}$

- $\forall x\, P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$:
  对任意x，P(x)均成立, 合取联结词的推广
- $\exists x\, P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(k)$:
  有一个x使得P(x)成立，析取联结词的推广

注意：在无穷集{1, 2, ..., k, ...}上，$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \wedge \cdots$, $P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(k) \vee \cdots$没有定义，不是合式公式。

一阶逻辑命题符号化

例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化:

(1) 人都爱美; (2) 有人用左手写字

个体域分别取(*a*) 人类集合, (*b*) 全总个体域 .

解: (*a*) (1) 设$F(x)$: x爱美, 符号化为 $\forall x\, F(x)$

(2) 设$G(x)$: x用左手写字, 符号化为 $\exists x\, G(x)$

(*b*) 设$M(x)$: x为人, $F(x)$, $G(x)$同(*a*)中

(1) $\forall x\, (M(x) \rightarrow F(x))$

(2) $\exists x\, (M(x) \wedge G(x))$

$M(x)$称作特性谓词, 用于将个体变元局限在满足该谓词代表的性质或关系的范围之内

同一命题在不同个体域中符号化形式可能不同。

一阶逻辑命题符号化

- 下列符号代表什么意思?

1. $\forall x\, (M(x) \rightarrow F(x))$
2. $\forall x\, (M(x) \wedge F(x))$
3. $\forall x\, (M(x) \vee F(x))$
4. $\exists x\, (M(x) \wedge G(x))$
5. $\exists x\, (M(x) \rightarrow G(x))$
6. $\exists x\, (M(x) \vee G(x))$

- 其中: $M(x)$: x为人, $F(x)$: x爱美, $G(x)$: x用左手写字

一阶逻辑命题符号化

一阶逻辑中命题符号化的两个基本公式:

个体域中所有有性质M的个体都有性质G，应符号化为 $\forall x\, (M(x) \rightarrow G(x))$，其中

$M(x)$: x具有性质M，$G(x)$: x具有性质G。

个体域中存在有性质M同时有性质G的个体，应符号化为 $\exists x\, (M(x) \wedge G(x))$，其中

$M(x)$: x具有性质M，$G(x)$: x具有性质G。

举例

将下面命题符号化

① 人都吃饭；

② 有人喜欢吃糖；

③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）。

使用全总个体域。

举例

① 人都吃饭；

令F(x): x是人，G(x): x吃饭。

命题符号化为 $\forall x(F(x)\to G(x))$。

② 有人喜欢吃糖；

令F(x): x是人，G(x): x喜欢吃糖。

命题符号化为 $\exists x(F(x)\wedge G(x))$ 。

举例

③ 男人都比女人跑得快（这是假命题）。

令 F(x): x是男人，G(y): y是女人，

H(x,y): x比y跑得快。

命题符号化为

$$\forall x\,(\,F(x)\to\forall y\,(\,G(y)\to H(x,y)\,)\,)$$

等值形式为

$$\forall x\,\forall y\,(\,F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)\,)$$

举例

例 将下列命题符号化, 并讨论其真值:

(1) 对任意的x, 均有x^2-3x+2=(x-1)(x-2)

(2) 存在x, 使得x+5=3

分别取(a) 个体域D_1=N, (b) 个体域D_2=R

解 记$F(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $G(x)$: $x+5=3$

(a) (1) $\forall x\ F(x)$　　真值为1

(2) $\exists x\ G(x)$　　真值为0

(b) (1) $\forall x\ F(x)$　　真值为1

(2) $\exists x\ G(x)$　　真值为1

同一命题在不同个体域中真值可能不同。

Open Question　Points: 10　Setting

求下列各式真值。

1) $(\forall x)\big(P(x)\vee Q(x)\big).D=\{1,2\},P(x):x=1,Q(x):x=2.$

2) $(\exists x)\big(P(x)\to Q(x)\big).D=\{0,1,2\},P(x):x>2,Q(x):x=0.$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

例

例 将下列命题符号化。

(1)每个实数都存在比它大的另外的实数。

(2)函数极限定义：对于任意给定的$\epsilon > 0$，必存在着$\delta > 0$，使得对任意的x，只要$|x - a| < \delta$，就有$|f(x) - f(a)| < \epsilon$。

(3) 兔子比乌龟跑得快。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(6) 不存在跑得一样快的兔子和乌龟。

例

(1)每个实数都存在比它大的另外的实数。

设个体域为实数集。$L(x,y)$:x小于y

$\forall x(\exists y(L(x,y)))$ $\boxed{\exists y\ \forall x\ L(x,y)}$ ？

设个体域为全总个体域。

$R(x)$：x是实数，$L(x,y)$:x小于y

$\forall x(R(x) \to \exists y(R(y) \land L(x,y)))$

多个量词出现时，不能随意交换顺序.

对量词顺序的分析

- 设$P(x,y)$为二元谓词，
  - $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall x)((\forall y)P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$
    对一切x和对一切y都有关系P
  - $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$, $(\forall x)(\exists y)$不可交换
    对一切x，都存在一个y具有关系P
  - $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$
    存在一个x，对于任意y都有关系P
  - $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$
    有一个x，有一个y有关系P

对量词顺序的分析

- 在{1, 2}个体域上讨论多次量化公式：

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)P(1,y) \land (\forall y)P(2,y)$$
$$\Leftrightarrow P(1,1) \land P(1,2) \land P(2,1) \land P(2,2)$$
$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)P(1,y) \lor (\forall y)P(2,y)$$
$$\Leftrightarrow (P(1,1) \land P(1,2)) \lor (P(2,1) \land P(2,2))$$
$$(\forall y)(\exists x)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)P(x,1) \land (\exists x)P(x,2)$$
$$\Leftrightarrow (P(1,1) \lor P(2,1)) \land (P(1,2) \lor P(2,2))$$
$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)P(1,y) \lor (\exists y)P(2,y)$$
$$\Leftrightarrow P(1,1) \lor P(1,2) \lor P(2,1) \lor P(2,2)$$

$$(\forall y)(\exists x)P(x,y) \Leftrightarrow [P(1,1) \land P(1,2)] \lor [P(2,1) \land P(2,2)]$$
$$\lor [P(1,1) \land P(2,2)] \lor [P(2,1) \land P(1,2)]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y) \lor [P(1,1) \land P(2,2)] \lor [P(2,1) \land P(1,2)]$$

$$\boxed{\therefore (\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)}$$

Open Question Points: 10 Setting

设个体域为{a,b,c}。试将下列公式写成命题逻辑公式。

1) $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

2) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(x,y))$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

例

(2) 对于任意给定的$\boldsymbol{\epsilon > 0}$，必存在着$\boldsymbol{\delta > 0}$，使得对任意的x，只要$|\boldsymbol{x - a}| < \boldsymbol{\delta}$，就有$|\boldsymbol{f(x) - f(a)}| < \boldsymbol{\epsilon}$。

设个体域为实数集。

$$\forall\epsilon(\,(\epsilon > 0)$$
$$\to \exists\delta\Big((\delta > 0)$$
$$\wedge \forall x\,\big((|x - a| < \delta) \to (|f(x) - f(a)| < \epsilon)\big)\Big)$$

例

(3) 兔子比乌龟跑得快。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(6) 不存在跑得一样快的兔子和乌龟。

用全总个体域，令$F(x)$: x是兔子, $G(y)$: y是乌龟,

$H(x,y)$: x比y跑得快，$L(x,y)$: x和y跑得一样快

(1) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$ $\boxed{\forall x\ (F(x)\to\forall y(G(y)\to H(x,y)))}$

(2) $\exists x(F(x)\wedge(\forall y\ (G(y)\to H(x,y)))$

(3) $\neg\ \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$ $\boxed{\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))}$

(4) $\neg\ \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

二阶谓词逻辑

例：Leibniz Law: “对于任意个体x和y, 只要x和y相等, 那么x,y具有相同的性质”

P(z):z具有性质P。

E(u,v):u和v相等。

那么翻译为：$\forall x\forall y[E(x,y)\to\forall P(P(x)\leftrightarrow P(y)]$

此时，量词符号作用在谓词符号上∀P. 之前我们在一阶谓词中只允许量词作用在个体上，例如∀xP(x)。这就是一阶逻辑和二阶逻辑的区别。

本课程只关注一阶谓词逻辑。

注意“一阶”与“一元”的区别。

小结

- 个体词、谓词、量词
- 命题符号化