Tsinghua University

单元3.6 关系的运算

第七章 二元关系

7.3 关系的运算

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 逆关系、合成（复合）
- 限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算及其性质

关系的运算

关系是以有序对为元素的特殊集合，可对其进行集合的所有基本运算。

设R, S为集合A到B的两个关系，则：

$$R \cup S = \{<x,y> | xRy \vee xSy\};$$
$$R \cap S = \{<x,y> | xRy \wedge xSy\};$$
$$R - S = \{<x,y> | xRy \cap x\not{S}y\};$$
$$\sim R = A \times B - R;$$

（注：$A \times B$是相对于R的全集。）

逆运算

对任意集合F,G，可以定义:

- 逆(inverse)：

$$F^{-1} = \{ <x,y> \mid yFx \}$$

- 若F为集合A到集合B的一个关系，则F^{-1}及~F均为关系：

$$\sim F = A \times B - F \subseteq A \times B$$
$$F^{-1} \subseteq B \times A$$

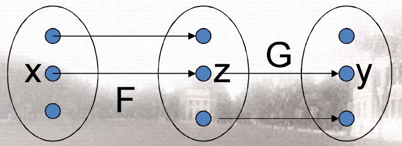
合成（复合）

- 合成(复合)(composite):

  $F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xFz \wedge zGy) \}$
- 顺序合成(右合成):

  $F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xFz \wedge zGy) \}$ 课本所使用定义
- 逆序合成(左合成):

  $F \circ G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$



例

例 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

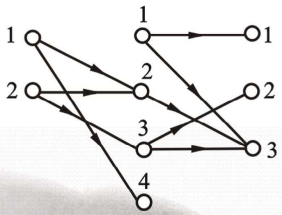
$R^{-1} = \{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

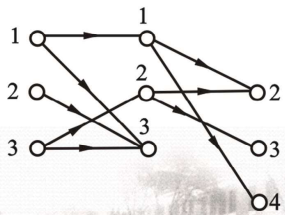
$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,3>, <3, 2>\}$

合成运算的图示法

- 利用图示（不是关系图）方法求合成
- $R \circ S =\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$
- $S \circ R =\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$



$R \circ S$



$S \circ R$

关系矩阵的性质

- 集合表达式与关系矩阵可唯一相互确定
- $M(R^{-1})=(M(R))^T$
  - ^{T}表示矩阵转置
- $M(R_1 o R_2)=M(R_1) \bullet M(R_2)$
  - •表示矩阵的“逻辑乘”，加法用$\vee$, 乘法用$\wedge$

例

- A={a,b,c}

 R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}

 R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>}

用M(R_1), M(R_2)确定M(R_1^{-1}), M(R_2^{-1}), M(R_1oR_1), M(R_1oR_2), M(R_2oR_1), 从而求出它们的集合表达式.

例

解: R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}

R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>}

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

R_1^{-1}={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>}

R_2^{-1} ={<b,a>,<c,a>,<c,b>}

例

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

R_1oR_1={<a,a>,<a,b>,<a,c>, <b,a>,<b,b>}.

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

R_1oR_2={<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>}

$$M(R_2\circ R_1)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

R_2oR_1={<a,a>,<a,c>}

限制、像

对二元关系F和集合A, 可以定义:

- 限制(restriction):

  F↾A = { <x,y> | xFy ∧ x∈A } ⊆ F

- 像(image):

  F[A] = ran(F↾A) ⊆ ran F

  F[A] = { y | ∃x(x∈A ∧ xFy) }

例

- 设 $B=\{\langle c,d\rangle\}$,

  $R=\{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$,

  $F=\{\langle a,b\rangle, \langle a,\{a\}\rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\}$,

  $G=\{\langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle\}$.

求: (1) B^{-1}, R^{-1}.

(2) $R^{-1}\circ B$, $B\circ G$, $R\circ G$, $G\circ R$.

(3) $F\upharpoonright\{a\}$, $F\upharpoonright\{\{a\}\}$, $F\upharpoonright\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

例(1)

- $B=\{\langle c,d\rangle\}$, $R=\{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$,

求: (1) B^{-1}, R^{-1}.

解: (1) $B^{-1} = \{\langle d,c\rangle\}$,

$R^{-1} = \{\langle b,a\rangle,\langle d,c\rangle\}$.

例(2)

- $B=\{\langle c,d\rangle\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$, $G=\{\langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle\}$.

求: (2) $R^{-1}\circ B$, $B\circ G$, $R\circ G$, $G\circ R$.

解: (2) $R^{-1}\circ B =\{\langle d,d\rangle\}$,

$B\circ G =\{\langle c,c\rangle\}$,

$R\circ G =\{\langle a,e\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$G\circ R =\{\langle d,d\rangle\}$.

例(3)

- $F=\{\langle a,b\rangle,\langle a,\{a\}\rangle,\langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\}$,

求: (3) $F\upharpoonright\{a\}$, $F\upharpoonright\{\{a\}\}$, $F\upharpoonright\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}$.

解: (3) $F\upharpoonright\{a\}=\{\langle a,b\rangle,\langle a,\{a\}\rangle\}$,

$F\upharpoonright\{\{a\}\}=\{\langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\}$,

$F\upharpoonright\{a,\{a\}\} = F$,

$F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}=\{\langle \{a\},a\rangle\}$.

例(4)

- F={<a,b>,<a,{a}>,<{a},{a,{a}}> },

求: (4) F[{a}], F[{a,{a}}], F^{-1}[{a}],

F^{-1}[{{a}}].

解: (4) F[{a}] = { b, {a} },

F[{a,{a}}] = { b, {a}, {a,{a}} },

F^{-1}[{a}] = ∅,

F^{-1}[{{a}}] = { a }. #

例

例 A={ a, {a}, {{a}} }, R={<a,{a}>, <{a}, {{a}}>}

$$
\begin{aligned}
R^{-1} &= \{<\{a\}, a>, <\{\{a\}\}, \{a\}>\} \\
R \circ R &= \{<a, \{\{a\}\}>\} \\
R \upharpoonright \{a\} &= \{<a, \{a\}>\} \\
R \upharpoonright \{\{a\}\} &= \{<\{a\}, \{\{a\}\}>\} \\
R^{-1} \upharpoonright \{a\} &= \emptyset \\
R[\{a\}] &= \{\{a\}\} \\
R[\{\{a\}\}] &= \{\{\{a\}\}\}.
\end{aligned}
$$

关系运算的顺序

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算（逆、合成、限制、像）优先于集合运算（交并补、相对补、对称差等）
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

基本运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

- (1) $(F^{-1})^{-1}=F$
- (2) domF^{-1}=ran$F$, ranF^{-1}=dom$F$

证 (1) 任取$<x, y>$, 由逆的定义有

- $<x, y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y, x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x, y>\in F$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x, $x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y(<y, x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$

所以有domF^{-1}= ran$F$. 同理可证 ranF^{-1} = dom$F$.

定理7.2(合成运算结合律)

定理 设F, G, H是任意的关系, 则

$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

$$x \xrightarrow{F} s \xrightarrow{G} t \xrightarrow{H} y$$

证明:任取$<x,y>$,

$\because <x, y>\in(F\circ G)\circ H$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\circ G \land <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x, s>\in F \land <s, t>\in G) \land <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x, s>\in F \land <s, t>\in G \land <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \land \exists t\,(<s, t>\in G \land <t, y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \land <s, y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ(G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

定理7.2

定理 设F,G为任意关系, 则 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明: 任取$<x, y>$,

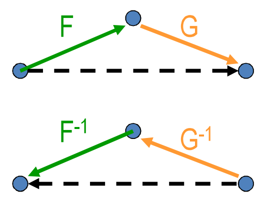
$\because <x, y>\in(F\circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x>\in F\circ G$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<y, t>\in F \land (t, x)\in G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in G^{-1} \land (t, y)\in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x, y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$



所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

定理7.3

定理7.3 设 R 为 A上的关系, I_A为A上恒等关系，

则 $\because R\circ I_A= I_A\circ R = R$

证明 $\because$ 任取$<x, y>$

$\because <x, y>\in R\circ I_A$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R \land <t, y>\in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R \land t=y \land y\in A)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R$

从而有 $\because R\circ I_A=R$.

同理可证 $I_A\circ R=R$.

定理7.4

定理7.4 设 F, G, H为任意的关系，则

1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$

2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

注意各关系的定义域与值域。

证明：见课本，略。

上述结论对于有限个关系的并和交也成立。

定理7.4

试证明下列包含关系不一定成立

(5) $F \circ G \cap F \circ H \subseteq F \circ (G \cap H)$

(6) $G \circ F \cap H \circ F \subseteq (G \cap H) \circ F$

证：反证法。

(5): A={1,2,3}, B={1,2}, C={2,3}, A到B的关系 F={<2,2>,<2,1>}, B到C的关系G={<1,2>,<2,3>}, H={<2,2>,<1,3>}

$$F \circ G \cap F \circ H = \{<2,3>, <2,2>\}$$

$$F \circ (G \cap H) = F \circ \emptyset = \emptyset$$

$\therefore F \circ G \cap F \circ H \nsubseteq F \circ (G \cap H)$

定理7.5

定理7.5 设 F为任意的关系，A，B为集合，则

1) $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$

2) $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$

3) $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$

4) $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

5) $F[A] - F[B] \subseteq F[A - B]$

注意各关系的定义域与值域。

证明：**1)-4)**证明见课本，略。

例

例 设**A={0,1,2}, B={0,-1,-2},**

$$F = \{<x, y> | x, y \in Z \land y = |x|\}$$

$F[A \cap B] = F[\{0\}] = \{0\}$

$F[A] \cap F[B] = \{0,1,2\} \cap \{0,1,2\} = \{0,1,2\}$

$F[A \cap B] \subset F[A] \cap F[B]$

$F[A - B] = F[\{1,2\}] = \{1,2\}$

$F[A] - F[B] = \{0,1,2\} - \{0,1,2\} = \emptyset$

$F[A] - F[B] \subset F[A - B]$

幂运算

定义 设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂是

(1) $R^0 = \{<x,x> | x \in A\} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意：对于A上的任何关系R_1和R_2都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$，对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

对于集合表示的关系R，计算R^n 就是 n 个 R 合成 .

例

设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,

求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

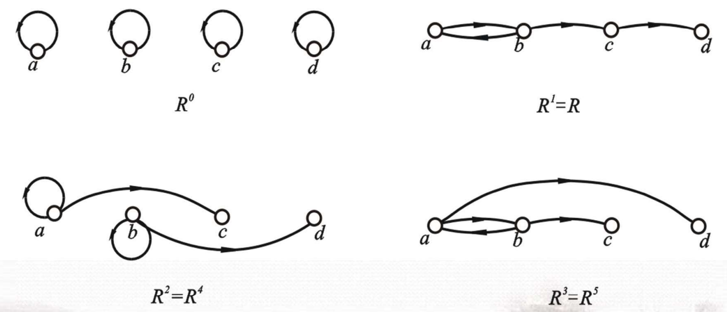
$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

注意到$M^4 = M^2$, 即$R^4 = R^2$. 因此可以得到

$\therefore R^2 = R^4 = R^6 = \ldots,\quad R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$

例

$R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots$的关系图如下图所示



幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系, 由于$|A| = n$, A上的不同关系只有2^{n^2}个. 列出 R 的各次幂

$R^0, R^1, R^2, \ldots, , \ldots,$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$.

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A 上的关系, $m, n\in$N, 则

(1) $R^m\circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

· (1) 对于任意给定的 $m\in$N, 施归纳于 n.

若n=0, 则有 $R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A = R^m = R^{m+0}$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$\therefore R^m\circ R^{n+1} = R^m\circ(R^n\circ R) = (R^m\circ R^n)\circ R = R^{m+n+1}$,

所以对一切 $m, n\in$N 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质

(2) 对于任意给定的 $m\in N$，施归纳于 n.

若 $n = 0$, 则有

∵ $(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$，则有

∴ $(R^m)^{n+1} = (R^m)^n\circ R^m = (R^{mn})\circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$

所以对一切 $m, n\in N$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设 R 是 A 上的关系, 若存在自然数 $s, t\ (s<t)$ 使得 $R^s = R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in N$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$

(3) 令 $S=\{R^0,R^1, \ldots, R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有 $R^q\in S$

证明 (1) $R^{s+k} = R^s\circ R^k = R^t\circ R^k = R^{t+k}$

（2）对 k 归纳. 若 $k=0$, 则有

∵ $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$, 则

∴ $R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i}\circ R^p$

$= R^{s+i}\circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$

由归纳法命题得证.

幂运算的性质

(3) 任取 $q\in N$, 若 $q<t$, 显然有 $R^q\in S$.

若 $q\ge t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$q = s+kp+i$，其中 $0\le i\le p-1$.

于是

∴ $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$

而 ∵ $s+i \le s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$

这就证明了 $R^q\in S$.

小结

- 逆关系、合成（复合）
- 限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算及其性质