# 第 14 周讲稿 区间估计

参数估计分为点估计和区间估计，前面我们已经对众多点估计方法有了比较详细的介绍。

点估计是用一个统计量来作为参数的估计，区间估计是找两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，其中对任何样本观测值都有 $\hat{\theta}_L \le \hat{\theta}_U$，并用区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 作为参数的区间估计（量）。（注意，闭区间不是必要的，可以是开区间也可以是左开右闭等等）

例　$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是取自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的一个样本，那么 $[\bar{X}-1, \bar{X}+1]$ 就是参数 $\mu$ 的一个区间估计，在点估计部分，我们用样本均值 $\bar{X}$ 作为 $\mu$ 的点估计量，在很多场合下，我们需要得到 $\mu$ 的一个（随机）区间估计。

$$
\begin{aligned}
&P(\mu \in [\bar{X}-1, \bar{X}+1]) = P(-1 \le \bar{X} - \mu \le 1) \\
&= P(-3 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{9}}} \le 3) \\
&= 2\Phi(3) - 1 \approx 0.997
\end{aligned}
$$

也就是说，随机区间 $[\bar{X}-1, \bar{X}+1]$ 涵盖参数真值的概率是 0.997.

## 区间估计（置信区间）

★　区间估计的概念与求法

随机区间涵盖参数真值的概率称为置信度，即下面这个概率

$$P_\theta(\theta \in [\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)])$$

这个概率一般来说与$\theta$有关，希望最小的置信度（置信水平或系数）也比较大，即

$\inf\limits_{\theta\in\Theta} P_\theta(\theta\in[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U])$比较大。

除了置信系数的要求，当然我们希望置信区间的平均长度$E_\theta(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L)$越小越好。即置信水平给定时，置信区间的平均长度越小越好，即置信度越高。

Neyman 准则：在保证置信水平的前提下，最求高的置信度。

**★ 概念的引出和理论依据.**

- **置信水平为$1-\alpha$（双侧）置信区间：**

$$P_\theta(\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n))\geq 1-\alpha,\forall\theta\in\Theta$$

同等置信区间：

$$P_\theta(\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n))=1-\alpha,\forall\theta\in\Theta$$

- **置信水平为$1-\alpha$单侧置信区间：**

**单侧置信上限：**$P_\theta(\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n))\geq 1-\alpha,\forall\theta\in\Theta$

**单侧置信下限：**$P_\theta(\theta>\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n))\geq 1-\alpha,\forall\theta\in\Theta$

同等单侧置信限区间：改为等号即可

**★ 置信区间的一般求法（枢轴变量法）：**

**（1）** 先找一个与要估计的参数$\theta$（或$g(\theta)$）有关的统计量 ***T*** ，一般是一良好的点估计（**MLE** 或充分统计量）；

**（2）** 寻找一样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的函数，即找出 ***T*** 和$\theta$（或$g(\theta)$）的某一函数：

$$Z=Z(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)\equiv Z(T,\theta)$$

它只含待估参数和样本，不含其它未知参数，并且 ***Z*** 的分布（或渐近分布）**G** 已知，且不依赖于任何未知参数（也不依赖于待估参数$\theta$）**(**称 ***Z*** 为枢轴变量**)**;

**（3）** 对于给定的置信度$1-\alpha$，定出两常数 ***a***，***b***，使得

$$P(a\leq Z(X_1,X_2,\cdots,X_n,\theta)\leq b)=1-\alpha$$

***a***，***b*** 选用原则：

*：$E_\theta(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L)$最小（最优置信区间）

*：一般 $a$，$b$ 选用分布（或渐近分布）G 的 $\frac{\alpha}{2}$ 和 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位点（等尾置信区间）；

（4） 若能从 $a \le Z(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta) \le b$，得到等价的不等式

$$\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$(\text{或}\tilde{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le g(\theta) \le \tilde{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n))$$

那么 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ (或 $[\tilde{\theta}_L, \tilde{\theta}_U]$) 就是 $\theta$（或 $g(\theta)$）的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

注：枢轴变量的分布为单峰对称分布时，最优置信区间=等尾置信区间

例：设样本 $X_1, \cdots, X_8$ 是来自 $U[0,\theta]$，求 $\theta$ 的置信度为 $(1-\alpha)\%$ 的等尾置信区间与最优置信区间。

解：

Step 1：从充分统计量或点估计出发找枢轴量

$X_{(n)}$ 为 $\theta$ 的充分统计量（是 MLE）

枢轴量为 $Y = \frac{X_{(n)}}{\theta} \sim f_Y(y) = 8y^7 1_{\{0 \le y \le 1\}}$

Step 1：确定常数

等尾置信区间：

$$P(y_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{X_{(n)}}{\theta} \le y_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

其中 $\int_0^{y_{\frac{\alpha}{2}}} 8y^7 dy = \frac{\alpha}{2}$，$y_{\frac{\alpha}{2}} = (\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{8}}$，同理 $y_{1-\frac{\alpha}{2}} = (\frac{1-\alpha}{2})^{\frac{1}{8}}$

Step 3：不等式改写

等尾置信区间为 $[\frac{X_{(n)}}{(\frac{1-\alpha}{2})^{\frac{1}{8}}}, \frac{X_{(n)}}{(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{8}}}]$

同上述步骤：最优置信区间：

$$P(a \le \frac{X_{(n)}}{\theta} \le b) = 1-\alpha$$

$$b^8 - a^8 = 1-\alpha$$

$$\min\ (\frac{1}{a}-\frac{1}{b})EX_{(n)}$$
$$s.t.\quad b^8-a^8=1-\alpha$$
$$0\le a<b\le 1$$

求条件极值问题（可忽略$EX_{(n)}$），解得$b=1, a=\sqrt[n]{\alpha}\quad (n=8)$

即最优置信区间：$[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}]$。

例：设样本$X_1,\cdots,X_n$是来自$E(\frac{1}{\theta})$，求$\theta$的置信度为$(1-\alpha)\%$的等尾置信下限。

解：Step 1：从充分统计量或点估计出发找枢轴量

由于$T=\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\theta$的充分统计量，$T=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(n,\frac{1}{\theta})$

枢轴量为$\frac{2T}{\theta}\sim\Gamma(n,\frac{1}{2})=\chi^2(2n)$（非对称分布）

Step 1：确定常数

$$P(\frac{2T}{\theta}\le\chi^2_{1-\alpha}(2n))=1-\alpha$$

Step 3：不等式改写

$$P(\theta\ge\frac{2T}{\chi^2_{1-\alpha}(2n)})=1-\alpha$$

故$\theta$的置信度为$(1-\alpha)\%$的等尾置信下限为$\hat{\theta}_L=\frac{2T}{\chi^2_{1-\alpha}(2n)}$

★〖等尾双侧置信区间与单侧置信区间的对照〗 $\alpha\leftrightarrow\frac{\alpha}{2}$

例：设样本$X_1,\cdots,X_n$（大样本）是来自$B(1,p)$，求$p$的置信度为$(1-\alpha)\%$的等尾置信区间。

解：Step 1：从充分统计量或点估计出发找枢轴量

由于$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\theta$的充分统计量，

为简化问题，找枢轴量需要用到中心极限定理：$\dfrac{\bar{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim AN(0,1)$ （渐近正态）

枢轴量为$\dfrac{\bar{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim AN(0,1)$

Step 2：确定常数

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

Step 3：不等式改写

$$p \in \frac{1}{1+\frac{\lambda}{n}}[\bar{X}+\frac{\lambda}{2n} \pm \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}\lambda+(\frac{\lambda}{2n})^2}\,] \qquad (\lambda = u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2)$$

由于$n$很大，故$\theta$的置信度为$(1-\alpha)\%$的等尾置信区间为

$$[\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}]$$

★〖等尾双侧置信区间与单侧置信区间的对照〗 $\alpha \leftrightarrow \dfrac{\alpha}{2}$

## ★ 正态总体参数的置信区间

1)求$\mu$的置信度为1-$\alpha$的置信区间.

（a）设方差$\sigma^2$已知；(b) 设方差$\sigma^2$未知

2) 方差$\sigma^2$的置信度$1-\alpha$置信区间

(a) 设$\mu$已知　　(b) 设$\mu$未知

3） 两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间

(a) 设${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$均为已知

(b) 设${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \sigma^2$，但$\sigma^2$为未知.

(c) 设${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$均为未知，且不知它们是否相等

4） 两个总体方差比${\sigma_1}^2 / {\sigma_2}^2$的置信区间

| 总体均值的区间估计 | 条件 | 枢轴量 | 双侧等尾置信区间 |
| --- | --- | --- | --- |
| | 1、正态总体，方差已知 | $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ | $\left(\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ |
| | 2、正态总体，方差未知 | $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ | $\left(\bar{X}-t_{1-\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{1-\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$ |
| | 3、双正态总体均值差，$\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 均已知 | $Z=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$ | $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| | 4、双正态总体均值差，$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知 | $T=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $\sim t(n_1+n_2-2)$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ | $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ |
| | 5、双正态总体均值差，$\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 均未知（大样本） | $Z=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ $\sim AN(0,1)$ | $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}$ |
| | 6、、双正态总体均值差。小样本，$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ | $T=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\dot{\sim}t(f)$ $f=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$ | $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm t_{1-\alpha/2}(f)\cdot\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7、总体服从 Bernoulli 分布，大样本 | $Z=\dfrac{\bar{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\sim AN(0,1)$ | $\bar{X}\pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$ |
| | 8、两个总体独立，分别服从 Bernoulli 分布，大样本 | $Z=\dfrac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)-\left(p_1-p_2\right)}{\tilde{\sigma}}$ $\sim AN(0,1)$ $\tilde{\sigma}\triangleq\sqrt{\dfrac{\bar{X}_1(1-\bar{X}_1)}{n_1}+\dfrac{\bar{X}_2(1-\bar{X}_2)}{n_2}}$ | $\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)\pm u_{1-\alpha/2}\cdot\tilde{\sigma}$ |
| 总体方差的区间估计 | 9、总体服从正态分布，$\mu$ 未知 | $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ | $\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\ ,\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right]$ |
| | 10、两个正态总体方差比的区间估计 | $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ | $\left[\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right]$ |

**例 1**　设某糖厂用自动包装机包装糖果，包装好的糖果的重量服从正态分布，且由以往经验知标准差为 0.015（kg）. 某日开工后在生产线上抽测 9 袋，得数据 0.497，0.506，0.518，0.524，0.488，0.511，0.510，0.515，0.512（kg），请估计生产线上包装机装箱糖果的期望重量（取$\alpha=0.1$）.

【$\bar{x}\pm u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}=0.509\pm1.645\times0.015/\sqrt{9}$】

**例 2** 已知一批零件的长度 $X$（单位： cm）服从正态分布 $N(\mu,1)$， 从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40（cm），则 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间是__________________ .

（注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$）

**例 3**　假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 $X$ 的简单样本值. 已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(1) 求 $X$ 的数学期望 E$X$ (记 E$X$ 为 $b$); [ $e^{\mu+1/2}$ ]

(2) 求$\mu$的置信度为 0.95 的置信区间; [-0.98, 0.98]

(3) 利用上面结果求 $b$ 的置信度为 0.95 的置信区间. [$e^{-0.48}, e^{1.48}$]

**例 4** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\ 0.9^2)$ 的大小为 $n$ 的简单样本. 为使μ的 0.95 的双侧置信区间长度不超过 1.0, 则样本容量 $n$ 至少应该取多少? 请说明道理.

**例 5** 为提高某一化学生产过程的得率, 试图采用一种新的催化剂. 为慎重起见, 在实验工厂先进行试验. 设采用原来的催化剂进行了 $n_1 = 8$ 次试验, 得到得率的平均值 $\bar{x}_1 = 91.73$, 样本方差 $s_1^2 = 3.89$. 又采用新的催化剂进行了 $n_2 = 8$ 次试验, 得到得率的均值 $\bar{x}_2 = 93.75$, 样本方差 $s_2^2 = 4.02$. 假设两总体都可认为服从正态分布, 且方差相等, 试求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 0.95 的单侧置信下限.

**例 6** 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径. 随机抽取机器 A 生产的管子 18 只, 测得样本方差 $s_1^2 = 0.34(mm^2)$; 抽取机器 B 生产的管子 13 只, 测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(mm^2)$. 设两样本相互独立, 且设由机器A、机器B生产的管子的内径分别服 $N(\mu_1, \sigma_2^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这里 $\mu_i, \sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 均未知. 试求方差比 $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$ 的置信度为 0.90 的置信区间.