2015 级第二学期《高等数学》期中考试试卷 (A 类)

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ 是定义在 $D=\{(x,y)\,|\,xy>-1\}$ 上的二元函数，则 $f(x,y)$ 在其定义域 D 内的不连续点的集合为　　（　　　）

　（A）$\varnothing$（空集）；　　　　　　（B）$\{(0,0)\}$；

　（C）$\{(x,y)\,|\,x=0\}$；　　　　　（D）$\{(x,y)\,|\,x=0$ 或 $y=0\}$。

2. 下列二元函数中，在 $(0,0)$ 点可微的是　　（　　　）

　（A）$\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$；　（B）$\sqrt{|xy|}$；　（C）$x^2+|y|$；　（D）$x^2|y|$。

3. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $4x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是　　（　　　）

　（A）$(-2,1,-1)$；　（B）$(2,1,-1)$；　（C）$(-2,-1,-1)$；　（D）$(2,-1,-1)$。

4. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-4xy}{x^2+y^2}=1$，则（　　　）

　（A）$(0,0)$ 点是 $f(x,y)$ 的极小值点；

　（B）$(0,0)$ 点是 $f(x,y)$ 的极大值点；

　（C）$(0,0)$ 点不是 $f(x,y)$ 的极值点；

　（D）所给条件不足以判断 $(0,0)$ 点是否 $f(x,y)$ 的极值点。

5. 设 $B(r)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x^2+y^2\le r^2\}$，二元连续函数 $f(x,y)$ 满足 $0<f(x,y)<1$。记 $F(n,r)=\left(\iint_{B(r)}f^n(x,y)d\sigma\right)^{\frac{1}{n}}$，则下列选项正确的是　　（　　　）

　（A）$\lim\limits_{n\to\infty}F(n,\frac{1}{n})$ 一定不存在；　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}F(n,\frac{1}{n})$ 不一定存在；

　（C）$\lim\limits_{n\to\infty}F(n,\frac{1}{n})$ 一定存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n,\frac{1}{n})\in(0,1)$。

　（D）以上结论(A)，(B)，(C)都错误。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 若 $\mathbf{R}^2$ 上的可微函数 $F(x,y)$ 的梯度为 $\mathrm{grad}F=\left(\dfrac{y}{x^2y^2+1},\dfrac{x}{x^2y^2+1}\right)$，且 $F(0,0)=3$，则 $F(x,y)=$____________________。

7. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=1$ 的切平面与三个坐标平面围成的有限区域的体积的最小值＝________________。

8. 空间中曲面片 $z=xy$（$x^2+y^2\le 1$）的面积 $A=$________________。

9. 设二元函数 $f(x,y)=\int_0^{x+y}e^{t^2}\sin t\,dt$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}=$________________。

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,3)}(1+\frac{y}{x})^{\frac{x^2}{x+y^2}}=$__________。

三、求偏导数（本题 8 分）

11. 设方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=$ 在点 $(0,1,1$ 附近确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,1)}$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1,1)}$，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1,1)}$。

四、（每小题 10 分，共 20 分）

12. 设 $z=z(x,y)$ 满足方程 $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$。令 $w=xz-y$，在变换 $u=\frac{x}{y}$，$v=x$ 下，请将方程 $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$ 表示为 w 关于 u、v 的方程。

13. 设 $B(r)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\le r^2\}$。若函数 $F(r)=\iint_{B(r)}(e^{x^2+y^2}-ay^2)d\sigma$ 在 $r\in(0,+\infty)$ 内单调，其中 a 为常数，求 a 的最大取值范围。

五、积分计算（每小题 10 分，共 20 分）

14. 记 D 为平面曲线 $xy=1$，$xy=3$，$y^2=x$，$y^2=3x$ 所围的有界闭区域，计算二重积分 $\iint_D \frac{2x}{y^2+xy^3}d\sigma$。

15. 计算三次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 xe^{z^2}dz$。

六、应用题（第 16 题 6 分，第 17 题 8 分，共 14 分）

16. 设三角形 ΔABC 的一个顶点是 $A(2,1)$，而 B、C 分别在直线 $y=0$ 和 $y=x$ 上，求此类三角形周长的最小值。

17. 求区域 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2\le 1, y^2+z^2\le 1, x^2+z^2\le 1\}$ 的体积。

七、证明题（本题 8 分）

18. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上、$K(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上都是连续的正值函数，且满足 $\int_0^1 f(y)K(x,y)dy=g(x)$，$\int_0^1 g(y)K(x,y)dy=f(x)$，证明：

（1）若 $m=\min\limits_{0\le x\le 1}\frac{f(x)}{g(x)}$，$M=\max\limits_{0\le x\le 1}\frac{f(x)}{g(x)}$，则 $mM=1$；

（2）当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=g(x)$。