清華大學
Tsinghua University

单元2.4 范式

第2章 命题逻辑等值演算

2.2 析取范式与合取范式

为什么需要范式?

- 为什么需要范式?

例: 如果我下班早, 就去商店看看, 除非我很累.

$(\neg P) \rightarrow (q \rightarrow r)$, 其中:

p代表“我很累”,

q代表“我下班早”,

r代表“我去商店看看”

还可表示为: $((\neg P) \wedge q)) \rightarrow r$

➢ 多个命题公式等值而形式不同.

如何定义范式?

- 是否存在一个统一的标准形式帮助我们分析?

➢ 判断不同命题是否等值

➢ 判断任一命题是否为重言式或矛盾式

- 五个联结词，使用哪些联结词定义范式?

➢ 完备性：假设C是联结词集合，如果对任意一命题公式都有由C中的联结词表示的公式与之等值，则称C是联结词的完备集。

定理2.6：$\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合

➢ $\{\neg, \vee, \wedge\}$具有较多很好的性质（交换律、结合律、分配律等）

内容提要

- 析取范式与合取范式
- 极小项与极大项
- 主析取范式与主合取范式

文字、简单析取式、简单合取式

- 文字:命题变元及其否定的统称
- 简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

- 简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

一个文字(p, ¬q)即是简单析取式，也是简单合取式。

定理

- 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变元和它的否定。（排中律、零律）

- 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变元和它的否定。（矛盾律、零律）

析取范式与合取范式

- 析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单合取式, 例如：$(p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg r)\vee\neg p$

- 合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单析取式, 例如：$(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge r$

- 范式:析取范式与合取范式的统称

析取范式与合取范式

- 简单合（析）取式既是析取范式又是合取范式
  - $\neg p\wedge q\wedge r$：一个简单合取式构成的析取范式，又是三个简单析取式构成的合取范式
  - $\neg p\vee q\vee r$：一个简单析取式构成的合取范式，又是三个简单合取式构成的析取范式
  - $\neg p\vee q\vee(p\wedge r)$是析取范式，但是不是合取范式
  - $\neg\neg p$既不是合取范式也不是析取范式

析取范式与合取范式的定理

- 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每一个简单合取式都是矛盾式
  析取范式的成真赋值集是所有简单合取式成真赋值集的并集
  析取范式的成假赋值集是所有简单合取式成假赋值集的交集
- 一个合取范式是重言式当且仅当它的每一个简单析取式都是重言式
  合取范式的成真赋值集是所有简单析取式成真赋值集的交集
  合取范式的成假赋值集是所有简单析取式成假赋值集的并集

范式存在定理

- 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

转换方法:

(1) 利用蕴含等值式和等价等值式消去→, ↔

$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ (多用于求合取范式)

$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (多用于求析取范式)

(2) 利用双重否定式和德摩根率将¬消去或内移

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

范式存在定理

(3) 重复使用分配律将公式化为合取式的析取或者析取式的合取

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 求合取范式

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 求析取范式

例：求$\neg(p \to q) \vee \neg r$ 的析取范式与合取范式

解 $\neg(p \to q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$ 析取范式

$\Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$ 合取范式

求解析取范式与合取范式

例：求$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$的合取、析取范式

$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$ 等价等值式

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$ 德摩根率、双重否定

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$ 交换律、分配律

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 矛盾律、同一律

$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q)$ 分配律

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ 排中律、同一律

求解析取范式与合取范式

例：求$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$的合取范式

$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg\neg(P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \wedge Q))$　　等价等值式

$\Leftrightarrow((P \vee Q) \vee (P \wedge Q))$　　德摩根率、双重否定

$\wedge((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$　　吸收律

注意: 公式的析取范式与合取范式不惟一。

$\Rightarrow$ 主范式：使范式具有唯一性

极小项与极大项

对n个命题变元$P_1, P_2, \cdots, P_n$，所组成的合取公式

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$$

其中$Q_i = P_i$或$Q_i = \neg P_i$，则称$Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n$为极小项。极小项必须包含$Q_1, \cdots, Q_n$全部n个文字，每个极小项对应唯一一个成真赋值。

p, q可构成四个极小项（$\boxed{\text{p对应1，}\neg p\text{对应0}}$）：

$\neg p \wedge \neg q$:　对应00，简记m_0

$\neg p \wedge q$:　对应01，简记m_1

$p \wedge \neg q$:　对应10，简记m_2

$p \wedge q$:　对应11，简记m_3

成真赋值

按下标升序排列

按字典顺序排列

极小项与极大项

对n个命题变元$P_1, P_2, \cdots, P_n$，所组成的析取公式

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$$

其中$Q_i = P_i$或$Q_i = \neg P_i$，则称$Q_1 \vee \cdots \vee Q_n$为极大项。极大项必须包含$Q_1, \cdots, Q_n$全部n个文字，每个极大项对应唯一一个成假赋值。

p, q可构成四个极大项（$\boxed{\text{p对应0，}\neg p\text{对应1}}$）：

$p \vee q$:　对应00，简记M_0

$p \vee \neg q$:　对应01，简记M_1

$\neg p \vee q$:　对应10，简记M_2

$\neg p \vee \neg q$:　对应11，简记M_4

成假赋值

按下标升序排列

按字典顺序排列

极小项与极大项

***p,q*形成的极小项与极大项**

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

定理2.4 设m_i与M_i是由同一组命题变元形成的极小项和极大项，则$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$。且$\forall i \neq j, m_i \wedge m_j = 0, M_i \vee M_j = 1$

主析取范式、主合取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变元为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

定理2.5 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

求取主析取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 j=1,2, … ,s

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求主析取范式举例

例 求$\neg(p\to q)\vee\neg r$ 的主析取范式

解 $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg r$

$p\wedge\neg q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge 1$ 同一律

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge(\neg r\vee r)$ 排中律

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$ 分配律

$\Leftrightarrow m_4\vee m_5$

$\neg r \Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge\neg r$ 同一律, 排中律

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_6$ 分配律

得 $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6$

求取主合取范式步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 j=1,2, … ,s

(2) 若某个B_j既不含p_i又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

求主合取范式举例

例 求$\neg(p\to q)\vee\neg r$ 的主合取范式

解 $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow (p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$

$p\vee\neg r \Leftrightarrow p\vee 0\vee\neg r$ 同一律

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee\neg r$ 矛盾律

对应001 $\Leftrightarrow \boxed{(p\vee q\vee\neg r)}\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$ 分配律

$\Leftrightarrow M_1\wedge M_3$

$\neg q\vee\neg r \Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee\neg q\vee\neg r$ 同一律, 矛盾律

$\Leftrightarrow (p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$ 分配律

$\Leftrightarrow M_3\wedge M_7$

得 $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow M_1\wedge M_3\wedge M_7$

$\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6$

快速求法

设公式含有n个命题变项, 则

长度为k的简单合取式可展开成2^{n-k}个极小项的析取

例如 公式含p,q,r

$q \Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow m_2\vee m_3\vee m_6\vee m_7$

长度为k的简单析取式可展开成2^{n-k}个极大项的合取

例如 $p\vee\neg r \Leftrightarrow (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow M_1\wedge M_3$

Open Question Points: 10 Setting

下述命题公式中含变元p, q, r

(1) 求 $A \Leftrightarrow (\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee r$的主析取范式

(2) 求 $B\Leftrightarrow \neg p\wedge(p\vee q\vee\neg r)$的主合取范式

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

主范式性质（应用）

- 主析取/合取范式与真值表的对应

析取范式的成真赋值集是所有简单合取式成真赋值集的并集

合取范式的成假赋值集是所有简单析取式成假赋值集的并集

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假

设公式A含n个命题变项, A的主合取范式有s个极大项, 则A有s个成假赋值, 其余2^n-s个赋值都是成真赋值

如何利用真值表得到主范式

- 列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为真的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个赋值所对应的极小项，将这些极小项进行析取即可得到相应的主析取范式。
- 列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为假的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个赋值所对应的极大项，将这些极大项进行合取即可得到相应的主合取范式。

举例

$\alpha = (p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \vee r))$ 真值表

P	q	r	$(p \wedge q)$	$\neg(q \vee r)$	α
0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

利用真值表得到主范式

此真值表的成真赋值为：

000，100，010，001，101，011，所对应极小项：

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r, p \wedge \neg q \wedge \neg r, \neg p \wedge q \wedge \neg r,$$
$$p \wedge \neg q \wedge r, \neg p \wedge q \wedge r$$ **1对应p，0对应$\neg p$**

该命题公式的主析取范式为上述极小项的析取。

此真值表的成假赋值为110，111，所对应极大项为

$\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r$, 该命题公式的主合取范式为上述极大项的合取。**0对应p，1对应$\neg p$**

主范式性质（应用）

- 主析取范式与主合取范式的转换

设A含n个命题变项，若$A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots m_{i_s}$，

没有出现的极小项是$m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_t}$，其中$t = 2^n - s$。

这t项没有出现的极小项对应$\neg A$的成真赋值。

于是$\neg A \Leftrightarrow m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots m_{j_t}$

$$A \Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_t})$$
$$\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg_{j_t}$$
$$\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_t}$$

已知主合取范式，求主析取范式方法类似。

举例

求$A=(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$的主合取范式

解 $A \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_7 \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

B中含三个命题变元，求

$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$的主析取范式

$$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_3$$

主范式性质（应用）

- 主范式与永真式/永假式的关系

设A含n个命题变项，则

A为重言式当且仅当A的主析取范式含所有2^n个极小项

A为矛盾式当且仅当 A的主析取范式不含任何极小项, 记作0

A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项

A为重言式当且仅当A的主合取范式不含任何极大项, 记作1

A为矛盾式当且仅当 A的主合取范式含所有2^n个极大项

A为可满足式当且仅当A的主合取范式中至少不含一个极大项

举例

用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A\Leftrightarrow \neg(p\rightarrow q)\wedge q$ (2) $B\Leftrightarrow p\rightarrow(p\vee q)$

(3) $C\Leftrightarrow (p\vee q)\rightarrow r$

解 (1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p\vee(p\vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ 可满足式

主范式性质（应用）

- 利用主范式判断两个命题公式是否等值

两个命题公式是相等的当且仅当它们对应的主析取范式之间相等，或者(可兼或) 它们对应的主合取范式之间相等

例：判断p与$(\neg p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)$是否等值

解 $p \Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee q) \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow m_2\vee m_3$

$(\neg p\vee q)\rightarrow(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow m_2\vee m_3$

故 $p \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)$。

实例

某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察，需满足下述条件:

(1) 若A去，则C必须去;

(2) 若B去，则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记p:派A去，q:派B去，r:派C去

(1) $p\to r$, (2) $q\to\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

实例

求A的主析取范式

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r)) \wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q)) \vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q)) \vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去，方案2 派B去

小结

- 析取范式与合取范式
- 极小项与极大项
- 主析取范式与主合取范式