第 9 周讲稿

应用举例： 唯一性定理和连续性定理的应用

例 1 对于依赖于参数λ的随机变量族$X_\lambda \sim P(\lambda)$，证明：其标准化随机变量

$$\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad \lambda\to\infty$$

证明：由于$\dfrac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$的特征函数为

$$\varphi_{\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(\theta)=e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot\theta}\varphi_{X_\lambda}(\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}})$$

$$=e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot\theta}\exp(\lambda(e^{i\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}}-1)$$

$$=e^{-i\sqrt{\lambda}\cdot\theta}\exp(\lambda(i\frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{\lambda}+o(\frac{1}{\lambda})) \qquad (\lambda\to\infty)$$

$$=\exp(-\frac{\theta^2}{2}+o(1))\to e^{-\frac{\theta^2}{2}}.$$

即: 当$\lambda\to\infty$时，其极限是$N(0,1)$的特征函数. 故由唯一性定理和连续性定理可知

$$P(\frac{X_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\le x)\to\Phi(x) \qquad (\lambda\to\infty),$$

其中$\Phi(x)$是标准正态随机变量的分布函数.

例 2 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $i=1,2,\cdots,n$，则

$$X=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b\sim N(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i+b,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$$

3. 随机向量的特征函数

（A）定义 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^T$ 是一个 m 维随机向量，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^T$ 表示$\mathbf{R}^m$中的实向量，则m元函数

$$\varphi(\boldsymbol{\theta})=\varphi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=Ee^{i\theta^T\mathbf{X}}$$

称为$\boldsymbol{X}$的特征函数，或称为$X_1,X_2,\cdots,X_m$的**联合特征函数（对应与分析中的多元 Fourier**

变换）

（B）性质（类似一维情形）

需要重点指出的是如下几点：

（1）（求混合矩的公式）　若 $E|X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_m^{k_m}|<\infty$，则

$$E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_m^{k_m})=(-i)^{k_1+\cdots+k_m}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_m}}{\partial^{k_1}x_1\cdots\partial^{k_m}x_m}\varphi(0,\cdots,0)$$

（2）(线性变换的特征函数公式)　设 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $l\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 l 维列向量，$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_l)^T$ 为 l 维列向量，那么 $\mathbf{BX}+\mathbf{b}$ 的特征函数（l 维）为 $\varphi_{\mathbf{BX+b}}(\theta)=e^{i\,\theta^{\mathbf{T}}\mathbf{b}}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\theta)$。

（3）（独立性判断定理）设 $\varphi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 为 m 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)^T$ 的特征函数，$\varphi_{X_i}(\theta_i)$ 为 X_i 的特征函数，$i=1,2,\cdots,m$. 那么 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立的充要条件为对一切 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，有 $\varphi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\varphi_{X_1}(\theta_1)\,\varphi_{X_2}(\theta_2)\cdots\varphi_{X_m}(\theta_m)$

注：推广到随机向量的独立性判断： 设 $\varphi_X(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 为 m 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)^T$ 的特征函数, $\varphi_Y(\theta_{m+1},\theta_{m+2},\cdots,\theta_{m+n})$ 为 n 维随机向量 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^T$ 的特征函数, $\varphi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{m+n})$ 为 $n+m$ 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots Y_n)^T$ 的特征函数. 那么随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与随机向量 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立的充要条件为对一切 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{m+n}$，有 $\varphi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{m+n})=\varphi_X(\theta_1,\cdots,\theta_m)\,\varphi_Y(\theta_{m+1},\cdots,\theta_{m+n})$

§2　多维 Gauss 分布, 多维正态分布及其特征函数

1. 多维 Gauss 分布的定义

定义　设 n 个相互独立的随机变量 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 均服从标准正态分布，如果存在常数 $a_{ij}\ (1\le i\le m,1\le j\le n)$ 与 $\mu_i\ (1\le i\le m)$ 使得

$$X_1=a_{11}Z_1+\cdots+a_{1n}Z_n+\mu_1$$

$$X_2=a_{21}Z_1+\cdots+a_{2n}Z_n+\mu_2$$

$$\vdots$$

$$X_i=a_{i1}Z_1+\cdots+a_{in}Z_n+\mu_i$$

$$\vdots$$

$$X_m = a_{m1}Z_1 + \cdots + a_{mn}Z_n + \mu_m$$

即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AZ}+\boldsymbol{\mu}$ （这里 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ）

称由 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 构成的 m 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_m)^T$ 服从 **m 维（或 m 元) Gauss 分布**。 特别地, 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m 时 (即 $m \le n$，且 $\boldsymbol{A}$ 为满秩的情形), 称 m 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_m)^T$ 服从 **m 维 (或 m 元) 联合正态分布**, 简称 **m 维正态分布.**

注：**（1） m 维 Gauss 分布的一维边缘分布为一维 Gauss 分布（或为一维正态，或为常数）.**

（2）设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_m)^T$ 为 Gauss 随机向量，则有

期望向量 $E\boldsymbol{X}=(EX_1, EX_2, \cdots, EX_m)^T = (\mu_1, \cdots, \mu_m)^T = \boldsymbol{\mu}$；

协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}=\left(Cov(X_i, X_j)\right)_{m\times m}$，其中

$$\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) &= Cov\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}Z_k + \mu_i, \sum_{l=1}^n a_{jl}Z_l + \mu_j\right) \\
&= Cov\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}Z_k, \sum_{l=1}^n a_{jl}Z_l\right) \\
&= \sum_{k,l} a_{ik}a_{jl}Cov(Z_k, Z_l) = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}
\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{\Sigma} = \left(Cov(X_i, X_j)\right)_{i,j} = \boldsymbol{AA}^T$。

记此 m 维 Gauss 分布为 $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$（对应于一维正态）。

（3） Gauss 分布 $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$是正态分布的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的行列式非 0, 即不退化（即 $\boldsymbol{\Sigma}$ 正定时）.

2. m 维 Gauss 随机变量 $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$的特征函数

定理 m 维 Gauss 分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的（m 维）特征函数为

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \exp\{i\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}\}.$$

反之也成立.

定义 (多维 Gauss 分布的等价定义) m 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_m)^T$ 称为服从 Gauss 分布，如果它的特征函数有如下形式

$$\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \varphi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = \exp\{i\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}\} \qquad (5.10)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}$ 为 m 维列向量，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为 $m\times m$ 的非负定矩阵. 特别, 当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵时，称它服从 m 维正态分布。

推论 多维 Gauss 随机向量经过线性变换仍然是 Gauss 随机向量, 即若 $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{B}$ 为

$n\times m$矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量, 那么

$$\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{b}\sim N(\boldsymbol{B\mu}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{B\Sigma B}^T)$$

3. m 维 Gauss 随机变量 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$的性质

定理 1（分量独立问题） 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^T$ 为 m 维 Gauss 随机向量，则 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 相互独立的充要条件为$Cov(X_i,X_j)=0\quad 1\le i\ne j\le m$，即协方差矩阵是对角型的.

定理 1' 若$(X_1,\cdots,X_{m+n})^T$服从 Gauss 分布，则$(X_1,\cdots,X_n)^T$与$(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})^T$相互独立的充要条件是

$$\sigma_{ij}=0\qquad (i\le n,j>n),$$

其中

$$\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{kl})\qquad (k,l=1,\cdots,n+m)$$

是$(X_1,\cdots,X_{m+n})^T$的协方差矩阵. 而以上条件的含义是说，协方差矩阵是准对角型的.

推论：设 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$， 则 $\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{BX}$ 独立当且仅当 $\boldsymbol{A}\Sigma\boldsymbol{B}^T$=0.（$\boldsymbol{A}$ 为$(m-p)\times m$，$\boldsymbol{B}$ 为 $p\times m$）（思考）

定理 2 m 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^T$ 为 Gauss 的，当且仅当对于任意一个 m 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^T$， $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$ 为一维 Gauss 随机变量.

证明 必要性显然. 充分性的证明如下：如果对任意的常数向量 $\boldsymbol{a}$，线性组合$Y=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$都服从一维正态分布. 那么我们有

$$EY=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\mu},\ DY=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}.$$

由假定 Y 是 Gauss 的，因此其特征函数为

$$Ee^{i\theta Y}=\exp\{i\theta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\theta^2\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}\}.$$

令θ=1 即得

$$E\exp\{i\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}\}=\exp\{i\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}\}.$$

这就是 m 维 Gauss 分布 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$的特征函数.

注：多维 Gauss 随机向量的研究可以转化为对一维 Gauss 随机变量的研究。

定义（多维 Gauss 分布的第 2 个等价定义） m 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_m)^T$ 称为 Gauss 的，如果对于任意一个 m 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^T$，一维随机变量$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$要么是正

态的，要么是常数.

定理 3 (多维正态分布的等价定义) 正态分布具有分布密度. 即若 $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 其行列式 $|\boldsymbol{\Sigma}|>0$，则对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{x})=f\ (x_1, x_2, \cdots, x_m)=(\frac{1}{2\pi})^{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\}$$

称为 m 维正态密度.

证明 由于 $\boldsymbol{\Sigma}$ 非退化，即它是正定的，由线性代数知道必存在一个对称的可逆矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{\Sigma} = \Lambda\Lambda^T$. 作变量替换

$$\boldsymbol{y}(=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}),$$

其 Jacobian 是 $\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$，故其行列式的绝对值为 $|\boldsymbol{\Lambda}^{-1}|=\dfrac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}}$.

而随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的线性变换 $\boldsymbol{Y}=\Lambda^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})$, 则

$$\boldsymbol{Y}\sim N(\boldsymbol{0},\ \Lambda^{-1}\Sigma(\Lambda^{-1})^T)=N(0,\boldsymbol{I}),$$

即它的分量是相互独立的标准正态随机变量，故它有分布密度

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_m^2}{2}}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T}.$$

所以 $\boldsymbol{X}$ 有分布密度 (直观地: $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))|\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}|$)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\}.$$

注：对照二维情形。

§3 Brown 运动以及它的分布

1. Einstein 的模型

作随机运动的粒子在时间[0,t]上的位移为$\{B_s: 0\le s\le t\}$（初始位置 $B_0=0$）

假设：（1）粒子位移的各分量都相互独立。（ *i.e.* 各分量为独立增量过程）；

（2）运动的统计规律对空间是对称的，*i.e.* $EB_t=0$；

（3）增量 $B_{t+h}-B_h$ 的分布与 h 无关（*i.e.* 时齐），且 $\sigma(t)\equiv E(B_{t+h}-B_h)^2$ 存在，而且是 t 的连续函数.（$\Rightarrow\sigma(t+s)=\sigma(t)+\sigma(s)\Rightarrow\sigma(t)=Dt$）

结论：$\{B_t : t \ge 0\}$ 为时齐的独立增量过程，其的一维分布为 $N(0,Dt)$。

理由：如记 B_t 的特征函数为 $\varphi(t,\theta) = Ee^{i\theta B_t}\ (-\infty < \theta < \infty)$，则

$$\varphi(t+s,\theta) - \varphi(t,\theta) = Ee^{i\theta B_{t+s}} - Ee^{i\theta B_t}$$

$$= E\ [e^{i\theta B_t}(e^{i\theta(B_{t+s}-B_t)} - 1)] = E\ [e^{i\theta(B_t - B_0)}(e^{i\theta(B_{t+s}-B_t)} - 1)]$$
$$= E(e^{i\theta(B_t - B_0)})E(e^{i\theta(B_{t+s}-B_t)} - 1) = E(e^{i\theta B_t})E(e^{i\theta(B_s - B_0)} - 1)$$

$$= \varphi(t,\theta)E(e^{i\theta B_s} - 1).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,\theta) = -\frac{1}{2}D\theta^2\varphi(t,\theta)$$

$$\varphi(0,\theta) = 1$$

解得 $\varphi(t,\theta) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 tD}$。

2. Brown 的定义

定义：Brown 运动定义为满足以下条件的一个随机过程 ***B***$=\{B_t, t \ge 0\}$：

（1）***B*** 是独立增量过程，即对任意互不相交的区间 $(s_1,t_1],(s_2,t_2],\cdots,(s_n,t_n]$，其上的增量 $B_{t_1} - B_{s_1}$, $B_{t_2} - B_{s_2}, \cdots,$ $B_{t_n} - B_{s_n}$ 都相互独立；

（2）对于任意 $s \ge 0, t > 0$，增量 $B_{s+t} - B_s \sim N(0, Dt)$（不依赖 s）；

(3) 对每一个固定的 ω， $B_t(\omega)$ 是 t 的连续函数（此条件不是必需的）.

特别，当 *D*=1 时，我们称之为**标准 Brown 运动**。以下研究的 Brown 运动均为**标准 Brown 运动。**

注:（1）**Markov 性：**已知现在 B_s 的条件下，过去 $B_u\ (0 \le u < s)$ 与将来 B_{t+s} 是相互独立的；

（2）***B*** 的任意有限维分布为

$$P(\omega : B_{t_1} \le x_1, \cdots, B_{t_n} \le x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,u_2,\cdots,u_n)du_1\cdots du_n$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\frac{\exp\{-(\frac{u_1^2}{2t_1} + \frac{(u_2-u_1)^2}{2(t_2-t_1)} + \cdots + \frac{(u_n-u_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}\}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}}du_1\cdots du_n$$

（3）Brown 运动是一个 Gauss 过程

Gauss 过程的定义：一个实值连续时间过程 *X* 称为 **Gauss 过程**，如果每一有限维向量 $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))^T$ 均服从 Gauss 分布 *N*($\boldsymbol{\mu}$(***t***), ***R***(***t***))，其中的均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵 ***R*** 均依赖于 ***t***$=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$。