

单元2.2 命题公式和真值表

第1章 命题逻辑的基本概念

1.2 命题公式及其赋值



内容提要

- 命题公式（命题形式，简称公式）
- 赋值（解释、指派）
- 真值表
- 重言式、可满足式、矛盾式



命题公式和真值表

- 上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$p q \rightarrow$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？

- 命题常量：一个特定的命题，真值确定
- 命题变量：一个任意的、没有赋予具体内容的命题，真值可变



命题公式的定义

命题公式（命题形式）是由命题变元和联结词按以下规则组成的符号串：

(1)任何命题变元都是命题公式；

---此时称为原子命题公式

(2) 如果 α 是命题公式, 则 $(\neg \alpha)$ 也是命题公式；

(3) 如果 α 、 β 是命题公式, 则 $(\alpha \vee \beta)$ 、 $(\alpha \wedge \beta)$ 、 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 都是命题公式；

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题公式。



命题公式的例子

$(\neg p)$

$(p \wedge (\neg q))$

$(p \vee (\neg p))$

$(p \leftrightarrow (\neg p))$

$(p \wedge (\neg p))$

$((p \wedge p) \rightarrow (\neg(p \vee r)))$

5

下列符号串是否为命题公式？

(1) $pq \rightarrow$

(2) $(p \neg q)$

(3) $(p \wedge (\neg q))$

(4) $p \wedge (\neg q)$

(5) $((\neg q))$

(6) $\neg p$

6

一些注记

1. 定义1.6是归纳定义，而不是循环定义。
(1)是奠基，(2)、(3)是归纳步骤。
2. 公式中可以出现0、1，可看成 $(p \wedge (\neg p))$ 与 $(p \vee (\neg p))$ 的缩写。

3. 如果在(2)和(3)中将括号去掉，结果如何？

$p \rightarrow q \rightarrow r$ 与 $p \rightarrow q \rightarrow r$ 、 $p \rightarrow q \rightarrow r$

3. 如仅去掉(2)和(3)中某类公式的括号呢？例如，仅去掉(2)中括号。

$(p \wedge \neg q)$ —— \neg 的优先级高于其它的。

4. 如果规定省略命题形式最外层括号，与3的差别。

7

约定

- 省略命题公式最外层括号。
- \neg 的优先级高于其它的联结词， \neg 只作用于紧随其后的命题变元。

$(\neg p) \vee q$ 可以写成 $\neg p \vee q$

- 相同联结词可以省略括号。
 $(p \vee q) \vee r$ 可以写成 $p \vee q \vee r$

- 优先级：否定、合取、析取、蕴含、等价

- $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$?

8

赋值（解释、指派）

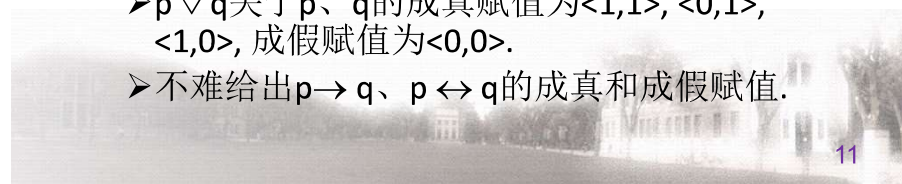
- 命题公式的值由它中命题变元的值完全确定.
- 设 α 为一个命题公式, α 中出现的所有命题变元都在 p_1, p_2, \dots, p_n 中, 对序列 p_1, p_2, \dots, p_n 指定的任一真假值序列 t_1, t_2, \dots, t_n , 称为 α 的关于 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个赋值 (assignment), 其中 $t_i = 0$ 或 $1, i \in N, 1 \leq i \leq n$.



10

成真赋值

- 若 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个赋值使 α 为真, 则称此赋值为 α 的一个成真赋值。
- 若 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个赋值使 α 为假, 则称此赋值为 α 的一个成假赋值。
- 由定义可知:
 - $\neg p$ 关于 p 的成真赋值为0, 成假赋值为1.
 - $p \wedge q$ 关于 p, q 的成真赋值为 $\langle 1, 1 \rangle$, 成假赋值为 $\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle$.
 - $p \vee q$ 关于 p, q 的成真赋值为 $\langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle$, 成假赋值为 $\langle 0, 0 \rangle$.
 - 不难给出 $p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ 的成真和成假赋值.



11

例

求 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \vee r))$ 的成真和成假赋值。

解: 令 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \vee r))$ 为 α 。

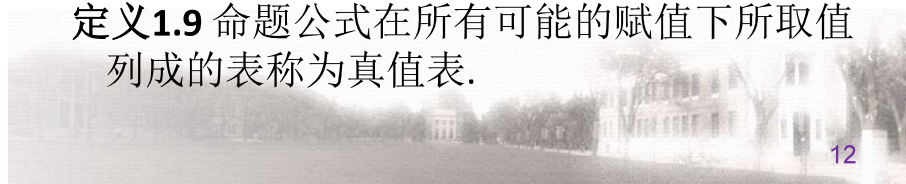
要使 α 为假, 必须 $p \wedge q$ 为真且 $\neg(q \vee r)$ 为假。

从而 $p \wedge q$ 必须为真, 且 $q \vee r$ 也必须为真。

故 α 的成假赋值为 $(1, 1, 1)$ 和 $(1, 1, 0)$ 。

α 的成真赋值为 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ 、 $(0, 1, 1)$ 、 $(1, 0, 1)$ 。

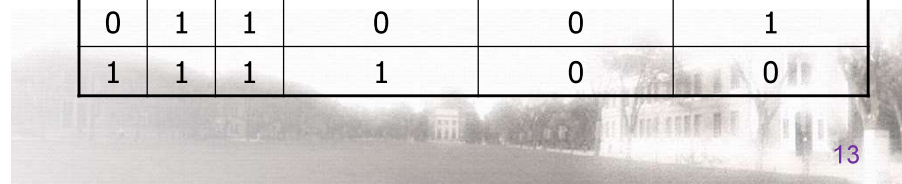
定义1.9 命题公式在所有可能的赋值下所取值列成的表称为真值表。



12

$(p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \vee r))$ 的真值表

P	q	r	$(p \wedge q)$	$\neg(q \vee r)$	α
0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0



13

$p \wedge (\neg p)$ 、 $p \vee (\neg p)$ 的真值表

解:

P	$p \wedge (\neg p)$	$p \vee (\neg p)$
0	0	1
1	0	1

14

$(\neg p) \vee q$ 、 $p \rightarrow q$ 的真值表

解:

p	q	$(\neg p) \vee q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

15

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 、 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的真值表

p	q	r	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
0	0	0	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

16

命题公式的类型

- 命题公式 α 称为**重言式 (或永真式)**, 如果 α 关于其中出现的命题变元的所有赋值均为成真赋值.
- 命题公式 α 称为**矛盾式 (永假式)**, 如果 α 对于其中出现的命题变元的所有赋值均为成假赋值.
- 一个命题公式 α 称为**可满足式**, 如果 α 对于其中出现的命题变元的某个赋值为成真赋值.
- 例如: $p \wedge (\neg p)$ 为矛盾式, $p \vee (\neg p)$ 为重言式.

$(\neg p) \vee q$ 为可满足式。

17

证明下列各式都是重言式

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

证明:

p	q	$p \wedge q$	$q \rightarrow (p \wedge q)$	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

18

证明下列各式都是重言式

(2) $((p \leftrightarrow p_1) \wedge (q \leftrightarrow q_1)) \rightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow (p_1 \wedge q_1))$

p	p ₁	q	q ₁	α
0	1	*	*	1
1	0	*	*	1
*	*	0	1	1
*	*	1	0	1
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

19

Open Question Points: 10

Setting

求出下列命题形式的所有成真指派。并判断哪些是重言式，哪些是矛盾式，哪些是可满足式？

1. $((P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q))$
2. $((\neg(P \rightarrow Q)) \wedge Q)$
3. $((P \rightarrow P) \rightarrow ((\neg Q) \rightarrow (\neg P)))$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

20

与哑元的无关性

定理 设命题公式 α 中出现的命题变元都在

p_1, p_2, \dots, p_n 中, p_{n+1}, \dots, p_{n+m} 是另外 m 个不在 α 中出现的命题变元. 对于 $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m}$ 的任意两个赋值:

α 取值只与其中出现变元取值有关 α 取值与哑元取值无关

其中: $u_i, v_i = 0$ 或 1 ($1 \leq i, j \leq n+m$).

若 $u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$, 则 α 在这两个赋值下的值相同.

21

1. 已知 $(p \rightarrow (p \vee q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow p)$ 为重言式, 试判断 $(p \rightarrow (p \vee q))$ 及 $((p \wedge q) \rightarrow p)$ 的类型。
2. 已知 $(\neg(p \rightarrow q) \wedge q) \vee (\neg(\neg q \vee p) \wedge p)$ 为矛盾式, 试判断 $(\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 及 $(\neg(\neg q \vee p) \wedge p)$ 的类型。
3. 由上述二题可得什么结论?

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

22

小结

- 命题公式（命题形式），简称公式
- 赋值（解释、指派）
- 真值表
- 重言式、可满足式、矛盾式

23