# 单元1.5 图的矩阵表示

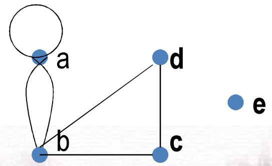
第14章 图的基本概念

14.4 图的矩阵表示

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

# 图的表示方法

- 集合：精确简练，但抽象不易理解
  G=<V,E>
  - V={a,b,c,d,e}
  - E={(a,a),(a,b),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)}
- 图形：形象直观，顶点数、边数较大时不方便，甚至不可行
- 矩阵：利于计算机处理
  需先标定顶点（边）






# 内容提要

- 关联矩阵
- 邻接矩阵
- 可达矩阵

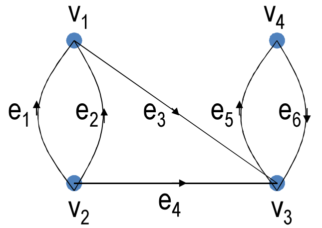


# 有向图关联矩阵

- 设D=<V,E>是无环有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 关联矩阵(incidence matrix): $M(D)=[m_{ij}]_{n\times m}$,

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

# 有向图关联矩阵举例




$$M(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



# 有向图关联矩阵性质

- 每列和为零：$\Sigma^n_{i=1}m_{ij}=0$
- 每行绝对值和为d(v)：$d(v_i)=\Sigma^m_{j=1}|m_{ij}|$，
  其中 1的个数为$d^+(v)$，
  -1的个数为$d^-(v)$
- 握手定理：$\Sigma^n_{i=1}\Sigma^m_{j=1}m_{ij}=0$
- 平行边：相同两列



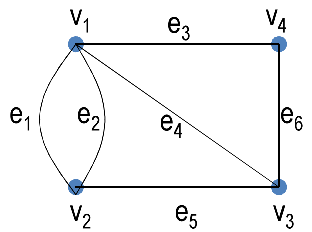
# 无向图关联矩阵

- 设G=<V,E>是无环无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 关联矩阵(incidence matrix)：$M(G)=[m_{ij}]_{n\times m}$，

$$m_{ij}=\begin{cases} 1, & v_i\text{与}e_j\text{关联} \\ 0, & v_i\text{不与}e_j\text{关联} \end{cases}$$



# 无向图关联矩阵举例




$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

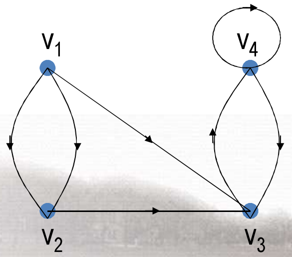
# 无向图关联矩阵性质

- 每列和为2: $\Sigma^n_{i=1}m_{ij}=2$ ( $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^m_{j=1}m_{ij}=2m$ )
- 每行和为d(v): $d(v_i)=\Sigma^m_{j=1}m_{ij}$
- $\Sigma^m_{j=1}m_{ij}=0$ 当且仅当$v_i$为孤立点
- 第i行所有1对应的边构成$v_i$的关联集
- 平行边: 相同两列



# 有向图邻接矩阵

- 设$D=\langle V,E\rangle$是有向图,$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$
- 邻接矩阵(adjacency matrix): $A(D)=[a_{ij}]_{n\times n}$,
  $a_{ij}$ = 从$v_i$到$v_j$的长度为1的边数/通路

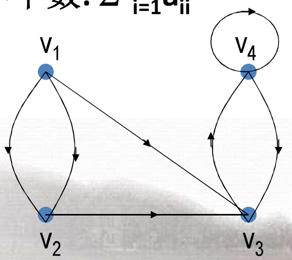



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



# 有向图邻接矩阵(性质)

- 每行和为出度: $\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=d^+(v_i)$
- 每列和为入度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d^-(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d^-(v_j)=\Sigma^n_{i=1}d^+(v_j)=m$
- 环个数: $\Sigma^n_{i=1}a_{ii}$




$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



# 邻接矩阵与通路数

- 设$A(D)=A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\ge 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$,
  $B_r=A+A^2+\dots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理14.11: $a^{(r)}_{ij}$=从$v_i$到$v_j$长度为r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a^{(r)}_{ij}$=长度为r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数
- 推论: $b^{(r)}_{ij}$=从$v_i$到$v_j$长度≤r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}b^{(r)}_{ij}$=长度≤r的通路总数
  且 $\Sigma^n_{i=1}b^{(r)}_{ii}$=长度≤r的回路总数. #

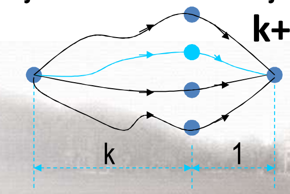
# 定理14.11证明

• 证明: (归纳法) (1)r=1: $a^{(1)}_{ij}=a_{ij}$, 结论显然.

(2) 设r≤k时结论成立, 当r=k+1时,

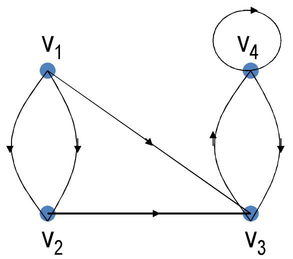
$a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$最后经过$v_t$的长度为k+1的通路总数,

$a^{(k+1)}_{ij}=\sum^{n}_{t=1}a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$的长度为k+1的通路总数. #






# 用邻接矩阵求通路数举例




$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&4\\0&0&4&7\\0&0&7&11\end{bmatrix}$$



# 用邻接矩阵求通路数举例

- $v_2$到$v_4$长度为3和4的通路数: 1, 2
- $v_2$到$v_4$长度≤4的通路数: 4
- $v_4$到$v_4$长度为4的回路数: 5
- $v_4$到$v_4$长度≤4的回路数: 11

$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&\boxed{1}\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&\boxed{2}\\0&0&2&3\\0&0&3&\boxed{5}\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&\boxed{4}\\0&0&4&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}$$



# 用邻接矩阵求通路数举例

- 长度=4的通路(不含回路)数: 16
- 长度≤4的通路和回路数: 53, 15

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&\boxed{0}&\boxed{3}&\boxed{4}\\\boxed{0}&0&\boxed{1}&\boxed{2}\\\boxed{0}&\boxed{0}&2&\boxed{3}\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{3}&5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}\boxed{0}&2&7&8\\0&\boxed{0}&3&4\\0&0&\boxed{4}&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}$$

# 可达矩阵

- 设D=<V,E>是有向图,V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$},
- 可达矩阵: $P(D)=[p_{ij}]_{n\times n}$,

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从}v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{从}v_i\text{不可达}v_j\end{cases}$$



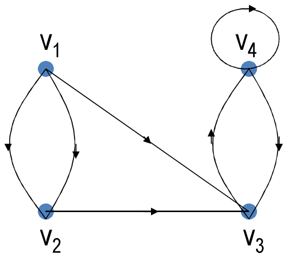
# 可达矩阵性质

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i\in V$, 从$v_i$可达$v_i$
- 强连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的可达矩阵
- $\forall i\neq j$, $p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij}>0$

$$P(D)=\begin{bmatrix}P(D_1) & & & \\ & P(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(D_k)\end{bmatrix}$$



# 可达矩阵举例




$$A(D)=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4\\ \hline v_1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}$$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&4\\0&0&4&7\\0&0&7&11\end{bmatrix}$$

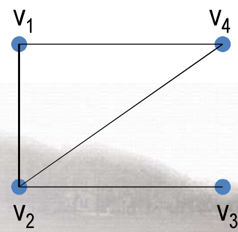


# 无向图邻接矩阵

- 设G=<V,E>是无向简单图,V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$}
- 邻接矩阵(adjacency matrix): $A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}$,

$a_{ii}=0$,

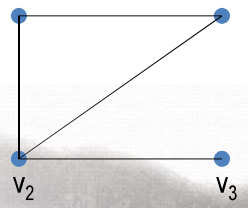
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{相邻}, i\neq j\\ 0, & v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$




$$A(G)=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4\\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1\\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ v_4 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}$$

# 无向图邻接矩阵性质

- A(G)对称: $a_{ij}=a_{ji}$
- 每行(列)和为顶点度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d(v_j)=2m$




$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

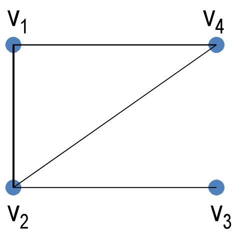


# 邻接矩阵与通路数

- 设$A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$,
  $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理: $a^{(r)}_{ij}$=从$v_i$到$v_j$长度为r的通路总数且
  $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数. #
- 推论1: $a^{(2)}_{ii}=d(v_i)$. #
- 推论2: G连通⇒距离$d(v_i,v_j)=\min\{r|a^{(r)}_{ij}\neq 0\}$. #



# 用邻接矩阵求通路数举例



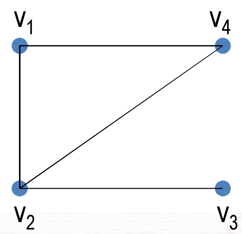

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$



# 用邻接矩阵求通路数举例

- $v_1$到$v_2$长度为4的通路数: 6
  14142,14242,14232,12412,14212,12142
- $v_1$到$v_3$长度为4的通路数: 4
  12423,12323,14123,12123
- $v_1$到$v_1$长度为4的回路数: 7
  14141,14241,14121,12121,
  12421,12321,12141,




$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} \boxed{7} & 6 & 4 & 6 \\ \boxed{6} & 11 & 2 & 6 \\ \boxed{4} & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

# 可达矩阵

- 设G=<V,E>是无向**简单**图，
  $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，
- 可达矩阵： $P(G)=[p_{ij}]_{n\times n}$，

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{连通} \\ 0, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{不连通} \end{cases}$$



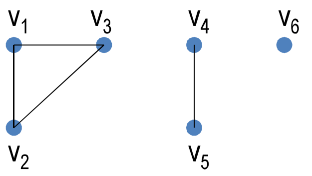
# 可达矩阵性质

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i \in V$, $v_i$与$v_i$连通
- 连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的连通矩阵
- 设$B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$，则$\forall i\neq j$，$p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij}>0$

$$P(G)=\begin{bmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(G_k) \end{bmatrix}$$



# 可达矩阵举例




$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# A与P的关系

- G为n阶无向简单图，设A、P为G的邻接矩阵及可达矩阵，则

$$P = A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^{n-1} \vee I$$

这里，$A^i$表示做矩阵布尔乘法的i次幂，I为单位阵。

# 思考题

- 有向简单图的单向连通性与弱连通性如何通过**A**、**P**矩阵进行判断？



# 小结

- **1.** 关联矩阵**M(D), M(G)**
- **2.** 邻接矩阵**A(D), A(G)**
- **3.** 用**A**的幂求不同长度通路**(**回路**)**总数
- **4.** 可达矩阵**P(D), P(G)**