第 10 周讲稿

§4　Brown 运动的简单特性

性质 1： 定理：设随机过程$\{B_t : t \ge 0\}$满足$B_0 = 0$. 那么$\{B_t : t \ge 0\}$是 Brown 运动当且仅当它是 Gauss 过程,而且满足$EB_t \equiv 0, E(B_s B_t) = \min(s,t)$。

证明： 必要性：若$\{B_t : t \ge 0\}$是 Brown 运动（$B_0 = 0$），则$B_t \sim N(0,t)$，故$EB_t = 0$。当$s \le t$时，我们有

$$Cov(B_s, B_t) = Cov(B_s, B_s + B_t - B_s)$$

$$= Cov(B_s, B_s) + Cov(B_s, B_t - B_s) = s\ .$$

可见一般地我们有

$$Cov(B_s, B_t) = E（B_s B_t）= s \wedge t \qquad (\text{即}\min(s,t))\ .$$

充分性：若$\{B_t : t \ge 0\}$是 Gauss 过程,而且满足$EB_t \equiv 0, E(B_s B_t) = \min(s,t)$，

则$\forall s, t > 0$，有$E(B_t - B_s) = 0$

$$E(B_t - B_s)^2 = EB_t^2 + EB_s^2 - 2E(B_t B_s) = t + s - 2(s \wedge t) = |t - s|\ ,$$

而$\forall \quad 0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2$，有

$$\begin{aligned} &E[(B_{t_1} - B_{s_1})(B_{t_2} - B_{s_2})] = E(B_{t_1} B_{t_2}) - E(B_{t_1} B_{s_2}) - E(B_{s_1} B_{t_2}) + E(B_{s_1} B_{s_2}) \\ &= t_1 - t_1 - s_1 + s_1 = 0 \end{aligned}$$

即它们的协方差为 0. 由于 Gauss 分布中分量相互独立等价于协方差为对角阵，故可知$\{B_t : t \ge 0\}$为独立增量过程，且$B_t - B_s \sim N(0, |t-s|)$，故$\{B_t : t \ge 0\}$为 Brown 运动。

性质 2：设$\{B_t : t \ge 0\}$为 Brown 运动，则

（1）（**平移不变性**）$\{B_{t+a} - B_a, t \ge 0\}$（$a \ge 0$为常数）为 Brown 运动；

（2）（**尺度不变性**）$\{\frac{B_{ct}}{\sqrt{c}}, t \ge 0\}$（$c > 0$为常数）也是 Brown 运动；

（3）$\{tB_{\frac{1}{t}}, t \ge 0\}$（定义$\{tB_{\frac{1}{t}}\}|_{t=0} = 0$）为 Brown 运动。

证明：利用性质 1 证明。$\{B_t : t \ge 0\}$为 Brown 运动，从而为 Gauss 过程，因此$\{B_{t+a} - B_a, t \ge 0\}$仍为 Gauss 过程，且$B_{0+a} - B_a = 0;\quad E(B_{t+a} - B_a) = 0 \quad \forall t > 0$。而

$$\begin{aligned}&E[(B_{t+a}-B_a)(B_{s+a}-B_a)]=E(B_{t+a}B_{s+a})-a-a+a\\&=[(t+a)\wedge(s+a)]-a\\&=s\wedge t+a-a=s\wedge t\end{aligned}$$

故$\{B_{t+a}-B_a,t\geq 0\}$（$a\geq 0$为常数）为 Brown 运动。

Brown 运动的轨道性质：

性质 3： Brown 运动$\{B_t,t\geq 0\}$的轨道处处连续处处不可导。（不要求严格证明）

性质 4：（Brown 运动的镜面对称性）

$P(Brown\text{运动在}[0，t]\text{到达过}x, B_t\leq x)=P(Brown\text{运动在}[0，t]\text{到达过}x, B_t\geq x)$

性质 5： Brown 运动$\{B_t,t\geq 0\}$的首达 a 的首达时$T_a=\min\{t>0:B_t=a\}$的分布为

$$P(T_a\leq t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{|a|}{\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2(1-\Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}}))$$

从而，T_a几乎处处有限（即$P(T_a<\infty)=1$）且$ET_a=+\infty$。

性质 6： $\max\limits_{0\leq s\leq t}B_s$的密度函数为$f_{\max}(a)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{a^2}{2t}},\quad a\geq 0$.

性质 7*： 设$\{B_t^x,t\geq 0\}=\{B_t+x,t\geq 0\}$为始于 x 的 Brown，则B_t^x在$(0,t)$中至少有一个零点

的概率为$\dfrac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}du$。（有兴趣的同学自己证明一下）

（注意到 $P(B_t^x$ 在$(0,t)$中至少有一个零点$)=P(\max\limits_{0\leq s\leq t}B_s^x\geq 0)$ 即可）

性质 8*：（反正弦律）$P(B_t^x$ 在(a,b)中没有零点$)=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.（有兴趣的同学自己证一下）

第六章　极限定理

§1 大数定律与依概率收敛

1. 依概率收敛

定义　若随机变量序列$\{X_n\}$及随机变量X满足：:对任意$\varepsilon > 0$有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

则称X_n**依概率收敛**于X，并记为　$X_n \xrightarrow{P} X$

例　设独立同分布的随机变量序列$\{\xi_n\}$均服从$[0,a]$上的均匀分布．则

$$\max(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) \xrightarrow{P} a.$$

2. 性质

性质 1（比较微积分的结论）：若$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$，　$g(x)$是连续函数，则$g(\xi_n) \xrightarrow{P} g(\xi)$.

又若$\eta_n \xrightarrow{P} \eta$，$a,b$为常数，则

$$\xi_n + a \xrightarrow{P} \xi + a, \qquad a\xi_n \pm b\eta_n \xrightarrow{P} a\xi \pm b\eta, \qquad \xi_n\eta_n \xrightarrow{P} \xi\eta.$$

进一步，如果还有$\eta_n, \eta > 0$，则 $\dfrac{\xi_n}{\eta_n} \xrightarrow{P} \dfrac{\xi}{\eta}$.

性质 2：如果$X_n \xrightarrow{P} X$，那么它也是依分布收敛的，即$X_n \xrightarrow{D} X$（证明不做要求）

性质 3：　$X_n \xrightarrow{P} a$（常数）当且仅当$X_n \xrightarrow{D} a$（或F_a）;

所以也当且仅当特征函数$\varphi_{X_n}(\theta) \to e^{ia\theta}$。

Slutsky 定理：

例 (Slutsky 定理)：$X_n \xrightarrow{L} X, Y_n \xrightarrow{P} a$,则$X_n + Y_n \xrightarrow{L} X + a$.

证明：只需证明$X_n \xrightarrow{L} X, Y_n \xrightarrow{P} 0$,则$X_n + Y_n \xrightarrow{L} X$.

法一（定义）$\forall x \in R$，$\forall \varepsilon > 0$，

$$\begin{aligned}
F_{X_n+Y_n}(x) &= P(X_n + Y_n \leq x) = P(X_n + Y_n \leq x, |Y_n| \leq \varepsilon) + P(X_n + Y_n \leq x, |Y_n| > \varepsilon) \\
&\leq P(X_n + Y_n \leq x, |Y_n| \leq \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon) \qquad (1) \\
&\leq P(X_n \leq x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
P(X_n \leq x - \varepsilon) &= P(X_n \leq x - \varepsilon, |Y_n| \leq \varepsilon) + P(X_n \leq x - \varepsilon, |Y_n| > \varepsilon) \\
&\leq P(X_n + Y_n \leq x) + P(|Y_n| > \varepsilon) \qquad (2)
\end{aligned}$$

由（1）式得，$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n+Y_n}(x) \le F_X(x+\varepsilon)$，

由（2）式得，$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n+Y_n}(x) \ge F_X(x-\varepsilon)$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，则对 F_X 的连续点 x，有 $F_{X_n+Y_n}(x) \to F_X(x)$，即 $X_n+Y_n \xrightarrow{L} X$ 。

法二（特征函数）由于 $Y_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow Y_n \xrightarrow{L} 0$，故 $Ee^{i\theta Y_n} \to 1$，从而

$|E[e^{i\theta X_n}(e^{i\theta Y_n}-1)]| \le E[|e^{i\theta Y_n}-1|] \to 0$

故 $\varphi_{X_n+Y_n}(\theta) = Ee^{i\theta(X_n+Y_n)} = Ee^{i\theta X_n} + E[e^{i\theta X_n}(e^{i\theta Y_n}-1)] \to Ee^{i\theta X} = \varphi_X(\theta)$

即 $X_n+Y_n \xrightarrow{L} X$ 。

3. 大数定律

何谓大数定律?

$\{X_n\}$ 满足**大数定律**：$\forall \varepsilon > 0$，有 $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i| < \varepsilon) = 1$

i.e. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i \xrightarrow{P} 0$

（A）Chebyshev 大数定律与 Chebyshev 不等式：

定理：（Chebyshev 大数定律）若 $\{X_n\}$ 满足两两不相关，且方差一致有界（*i.e.* $D(X_i) \le C < +\infty, \forall i$），则 $\{X_n\}$ 满足**大数定律**。

引理：（**Chebyshev 不等式**）对具有有限方差的随机变量 *X*，及任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$P(|X-EX| \ge \varepsilon) \le \frac{DX}{\varepsilon^2} 。$$

Chebyshev 不等式证明与应用

例. 设随机变量 *X* 和 *Y* 的数学期望分别为 –2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为–0.5, 则根据切比雪夫（Chebyshev）不等式 $P(|X+Y| \ge 6) \le$ ____ **.**

【解】因为 $E(X+Y) = 2-2 = 0$**，故由切比雪夫不等式知，**

$$P(|X+Y| \ge 6) = P(|(X+Y)-E(X+Y)| \ge 6) \le \frac{D(X+Y)}{6^2} = \frac{D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)}{6^2}$$

$$= \frac{D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}}{36} = \frac{1+4+2\times(-0.5)\sqrt{4}}{36} = \frac{1}{12}.$$

（B）Khintchine 大数定律及其应用

定理（Khintchine 大数定律） 设$\{X_n\}$是相互独立同分布的随机变量序列，且其数学期望为μ，则$\{X_n\}$**服从大数定律**，即 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{P}\mu \quad (n\to\infty)$.

证明 利用独立同分布性质，对于特征函数我们有

$$\varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}(\theta)=\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(\frac{\theta}{n})=[\varphi_{X_1}(\frac{\theta}{n})]^n$$

$$=[1+i\mu\frac{\theta}{n}+o(\frac{\theta}{n})]^n\to e^{i\mu\theta}.$$

应用举例（在统计中）。

（B）Bernoulli 大数定律

推论（**Bernoulli 大数定律**） 在事件 A 发生的概率为 p 的 n 次重复独立试验的 Bernoulli 概型中，令μ_n为 n 次重复中试验 A 发生的次数．我们有：$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$.

§2 中心极限定理

何谓中心极限定理？

$\{X_n\}$满足**中心极限定理**：$\lim\limits_{n\to\infty}P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n EX_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}}<x)=\Phi(x) \quad \forall x\in R$

$$i.e.\quad S_n^*=\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n EX_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}}\xrightarrow{D}N(0,1)$$

$\sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从正态分布。

（A）Levy- Lindeberg 中心极限定理

定理（**Levy- Lindeberg 中心极限定理**） 设独立同分布随机变量序列$\{X_n\}$具有有限的数学期望$EX_i=\mu$和方差$DX_i=\sigma^2\neq 0$，则$\{X_n\}$满足中心极限定理，即当$n\to\infty$时有$S_n^*\xrightarrow{D}N(0,1)$。

（应用于独立和的近似计算）

注：**1（Polya 定理）** 设随机变量 X 分布函数 $F_X(x)$ 是连续函数，又随机变量序列 $X_n\xrightarrow{D}F_X$. 那么分布函数$F_{X_n}(x)$一致收敛到$F_X(x)$.（不需要证明）

2. 若随机变量序列 X_n 为独立同分布, $EX_n=\mu$ 且 $DX_n=\sigma^2(n=1,2,\cdots)$，则

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|P(X_1+\cdots+X_n\le x)-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\cdot n}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-n\mu)^2}{2n\sigma^2}}du|\overset{n\to\infty}{\rightarrow}0\ .$$

（B）De Moivre-Laplace 定理

推论（**De Moivre-Laplace**）设 n 次独立的重复试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率 p（$0<p<1$），随机变量 μ_A 为此 n 次试验中事件 A 出现的次数（即 $\mu_A\sim B(n,p)$）. 那么，对于任意 $x\in\boldsymbol{R}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{\mu_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\ ,$$

而且对于 x 是一致收敛.

应用于二项分布的近似计算（注意与 Poisson 定理的区别）。

例：已知 n 重贝努利试验中参数 p =0.75, 问至少应该做多少次试验，才能使试验成功的频率在 0.74 和 0.76 之间的概率不低于 0.95 ?

【解】 由题设,求 n 使

$$P(0.74<\frac{\mu_n}{n}<0.76)=P(|\frac{\mu_n}{n}-0.75|<0.01)\ge 0.95$$

注意 μ_n~B（n， p）**, 故由 De Moivre-Laplace 定理得**

$$P(|\frac{\mu_n}{n}-0.75|<0.01)\approx 2\Phi(0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}})-1\ge 0.95$$

即求 n **使**

$$2\Phi(0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}})\ge 0.975$$

即至少应该取 n **使**

$$0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}}\approx 1.96$$

解得 $n=1.96^2\times 0.1875\approx 7203.$

（C）Liapunov 定理

定理（**Liapunov 定理**） 设独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 的数学期望和方差分别为 $EX_i=\mu_i$ 和

$DX_i = \sigma_i^2$（$i = 1,2,\cdots$），记 $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$，如果满足以下的 Liapunov 条件：存在 $\delta > 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E(|X_i - \mu_i|)^{2+\delta} = 0,$$

则对任意的 $x \in \boldsymbol{R}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

注：实际上有更一般的结果

定理（**Lindeberg 中心极限定理**）设独立随机变量序列 $\{X_n\}, X_n \sim f_{X_n}(x)$ 的数学期望和方差分别为 $EX_i = \mu_i$ 和 $DX_i = \sigma_i^2$（$i = 1,2,\cdots$），记 $B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$，如果 $\{X_n\}$ 满足以下的 Lindeberg 条件：$\forall \tau > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau^2 B_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-\mu_i|>\tau B_n} (x-\mu_i)^2 f_{X_i}(x) dx = 0,$$

则对任意的 $x \in \boldsymbol{R}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

（应用说明正态分布的广泛存在性）

例　(随机模拟算法（Monte Carlo 方法）见教材。