清華大學 Tsinghua University

单元2.9 一阶逻辑公式

第4章 一阶逻辑基本概念

4.2 一阶逻辑公式及其解释

内容提要

- 一阶语言
- 谓词公式、辖域、赋值、解释
- 永真式、矛盾式、可满足式

一阶语言$\mathscr{L}$

- 一阶谓词演算的符号化
  - ➢个体变元：x, y, z, …
  - ➢个体常元：a, b, c, …
  - ➢谓词：F，G，H，…
  - ➢函数：f, g, h, …
  - ➢量词：全称量词∀，存在量词∃
  - ➢联结词：¬, ∧, ∨, →, ↔
- 用这些符号可以更深入地描述命题的结构
- 怎么对这些符号进行推理？
- 需要建立推理的形式系统

一阶语言$\mathscr{L}$

- 一阶语言是将要介绍的谓词演算系统形式语言。一阶语言$\mathscr{L}$的字母表定义如下：

(1) 个体常元：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

非逻辑符号：所描述的特定对象中的符号

(4) 个体变元：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：∀, ∃

(6) 联结词符号：¬, ∧, ∨, →, ↔

(7) 括号与逗号：( ), ,

逻辑符号：逻辑系统中符号

函数符号

当个体域名称集合D 给出时， n 元函数符号 f(x1, x2, ..., xn) 可以是$D^n \to D$ 的任意一个函数

为什么需要函数符号？

例：符号化 “周红的父亲是教师”。

设：**P(x): x**是教师，**f(x)：x**的父亲， **c:**周红

则符号化为 **P(f(c))**

函数的使用给谓词逻辑中的个体词表示带来了很大的方便。

一阶语言$\mathscr{L}$

定义 $\mathscr{L}$的项的定义如下：

(1) 个体常元和个体变元是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1,t_2,...,t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, ..., t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 **(1), (2)** 得到的.

“项”相当于“复合个体”。

定义 设$R(x_1, x_2, ..., x_n)$是$\mathscr{L}$的任意n元谓词，$t_1,t_2,..., t_n$是$\mathscr{L}$的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, ..., t_n)$是原子公式

一阶语言$\mathscr{L}$

定义 $\mathscr{L}$的合式公式定义如下：

(1) 原子公式是合式公式

(2) 若A是合式公式, 则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式, 则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\to B)$, $(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式

(4) 若A是合式公式, 则$(\forall x)A$, $(\exists x)A$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用**(1)~(4)**形成的符号串才是合式公式.

合式公式又称谓词公式, 简称公式

公式的作用是描述命题

一些注记

注**1**：与命题演算的形式语言相比，一阶语言中没有命题符号，代之的是原子公式。

注**2**：所有一阶语言中都含有相同的逻辑符号，但所含的非逻辑符号不一定相同。

注**3**：在定义中没有要求个体**x**一定要在**A**中出现：$(\forall x_1)F(x_1,x_2), (\forall x_3)F(x_1,x_2)$都是公式

注**4**：总假设: **L**中至少有一个谓词符号。否则**L**生成的一阶语言中没有公式。

括号省略规则

(1) 省略公式最外层的括号

(2)联结词$\neg$的优先级高于其他联结词，可以去掉$(\neg\boldsymbol{\alpha})$中的外层括号

(3) $\forall x, \exists x$的优先级高于所有联结词，将$(\forall x)\boldsymbol{\alpha}, (\exists x)\boldsymbol{\alpha}$分别记作$\forall x\ \boldsymbol{\alpha}, \exists x\ \boldsymbol{\alpha}$。

$$\underline{\forall x\ \boldsymbol{\alpha}} \rightarrow \boldsymbol{\beta}\text{与}\underline{\forall x\ (\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\beta})}$$

(4) $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\boldsymbol{\alpha}$ 简记为 $\forall x_1 \cdots \forall x_n\ \boldsymbol{\alpha}$

$(\exists x_1) \cdots (\exists x_n)\boldsymbol{\alpha}$ 简记为 $\exists x_1 \cdots \exists x_n\ \boldsymbol{\alpha}$

项与公式

- 项的作用是描述“复合个体”，公式的作用是描述命题
- 项相当于词组，不表达完整的判断；公式代表完整的句子，表达判断

- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)$表示函数f作用到个体$\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$得到的复合个体
- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)$表示个体$\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$是否具有性质F

辖域

定义 在公式$\forall x A$和$\exists x A$中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域。

量词辖域的确定方法：

- 若量词后有括号，则括号内的子公式就是该量词的辖域；
- 若量词后无括号，则与量词邻接的子公式为该量词的辖域。

例：在$\forall x_1 \forall x_2 (\forall x_3 \boldsymbol{F}(x_1, x_3) \rightarrow \boldsymbol{F}(x_1, x_2))$中

$(\forall x_1)$的辖域为$\forall x_2 (\forall x_3 \boldsymbol{F}(x_1, x_3) \rightarrow \boldsymbol{F}(x_1, x_2))$

$(\forall x_2)$的辖域为 $(\forall x_3 \boldsymbol{F}(x_1, x_3) \rightarrow \boldsymbol{F}(x_1, x_2))$

$(\forall x_3)$的辖域为$\boldsymbol{F}(x_1, x_3)$

约束出现与自由出现

- 定义 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现称为约束出现，A中不是约束出现的其他变元称为自由出现

例 公式 $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$

$\forall x$的辖域:$(F(x,y) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$， 指导变元为$x$

$\exists y$的辖域:$G(x,y,z)$， 指导变元为y

x的两次出现均为约束出现

y的第一次出现为自由出现, 第二次出现为约束出现

z为自由出现.

约束出现与自由出现

例 公式 $\forall x(F(x)\rightarrow\exists xG(x))$

$\forall x$的辖域:$(F(x)\rightarrow\exists xG(x))$， 指导变元为$x$

$\exists x$的辖域:$G(x)$， 指导变元为x

x的两次出现均为约束出现. 但是, 第一次出现的x是$\forall x$中的x, 第二次出现的x是$\exists x$中的x.

约束变元与自由变元

定义 设个体变元x在公式α中出现

- 若x在α中所有的出现均为约束出现，则称x为α的约束变元
- 若x不是α的约束变元，则称x为α的自由变元

易知：x是α的自由变元$\leftrightarrow$ x在α中有某处出现是自由出现

举例

例

1) $\forall x_1\forall x_2\big(F(x_1,x_2)\rightarrow F(x_1,x_3)\big)$

   x_1,x_2为约束变元， x_3为自由变元

2) $\forall x_1F(x_1)\rightarrow F(x_1)$

   x_1为自由变元

3) $\forall x_1F(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_1F(x_2)$

   x_1为约束变元，x_2为自由变元

约束变元与自由变元的差别

约束变元与自由变元的变元差别很大。

例 令E代表二元谓词“…=…”，c为常量

$\forall x_1E(x_1,c)$ 与 $\forall x_2E(x_1,c)$

$\forall x_1E(x_1,c)$：任取个体域中一元素都等于c。为真当且仅当个体域中只有一个元素c，真假值与x_1代表的个体无关。

$\forall x_2E(x_1,c)$：无论x_2代表什么样的个体， x_1代表的个体与c相同。真假值与自由变元x_1代表的个体有关，与约束变元x_2代表的个体无关。

约束变元与自由变元的关系类似于程序设计语言中的局部变量与全局变量之间的关系。

变元混淆

- 公式 $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

自由出现　　约束出现

- 在一个公式中，某一个变元的出现即可以是自由的，又可以是约束的。为了研究方便而不致引起混淆，对于表示不同意思的个体变元，我们总是以不同的变量符号来表示之。

换名

考察将公式$\exists y\ (y > x)$中的x换为其他变元名前后的真假值：

- $\exists y\ (y > x)$是可以为真的。
- 将公式中x替换为y后，$\exists y\ (y > y)$不能为真。
- 将公式中x替换为z后，$\exists y\ (y > z)$可以为真。

y对x在$\exists \boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{y} > \boldsymbol{x})$不可代入（替换）；

z对x在$\exists \boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{y} > \boldsymbol{x})$可代入（替换）。

思考：若将上述公式中约束变元y换名呢？

换名规则

- 约束变元的换名规则
  - 将量词中出现的指导变元及其辖域中此变元的所有约束出现都用新的个体变元替代；
  - 新变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变元。
- 自由变元的换名规则
  - 将公式中出现该自由变元的每一处自由出现都用新的个体变元替换；
  - 新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。

例

例 将公式$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x,y)\big)\wedge R(x,y)$中的约束变元x进行换名。

$(\forall z)\big(P(z)\rightarrow Q(z,y)\big)\wedge R(x,y)$ ？

$(\forall z)\big(P(z)\rightarrow Q(x,y)\big)\wedge R(x,y)$ ？

$(\forall y)\big(P(y)\rightarrow Q(y,y)\big)\wedge R(x,y)$ ？

例 将公式$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x,y)\big)\wedge R(x,y)$中的自由变元y进行换名。

$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x,z)\big)\wedge R(x,z)$ ？

$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x,z)\big)\wedge R(x,y)$ ？

$(\forall x)\big(P(x)\rightarrow Q(x,x)\big)\wedge R(x,x)$ ？

闭式

定义 设A是任意的公式，若A中不含自由出现的个体变元，则称A为封闭的公式，简称闭式。

例 $\forall x\,(F(x) \to (\exists y)P(x,y))$为闭式。

$\forall x\,(F(x) \to P(x,y))$ 不是闭式。

要将含r个自由出现的个体变元的公式变成闭式，至少需要加上r个量词。

解释与赋值

例 公式$\forall x(F(x)\to G(x))$

指定1 个体域:全总个体域, $F(x)$: x是人, $G(x)$: x是黄种人

假命题

指定2 个体域:实数集, $F(x)$: $x>10$, $G(x)$: $x>0$

真命题

例 $\exists xF(x,y)$

指定 个体域:自然数集, $F(x,y)$: $x=y$, $y=0$

真命题

解释与赋值

定义 设一阶语言$\mathscr{L}$的个体常元集$\{a_i | i\geq1\}$, 函数符号集$\{f_i | i\geq1\}$, 谓词符号集$\{F_i | i\geq1\}$, $\mathscr{L}$的解释I由下面4部分组成:

(1) 非空个体域D_I

(2) 对每一个个体常元a_i, $\bar{a}_i \in D_I$, 称作a_i在I中的解释

(3) 对每一个函数符号f_i, 设其为m元的, $\bar{f}_i$是D_I上的m元函数, 称作f_i在I中的解释

(4) 对每一个谓词符号F_i, 设其为n元的, $\bar{F}_i$是一个n元谓词, 称作F_i在I中的解释

(5) 对每一个自由出现的个体变元x指定个体域中的一个值$\sigma(x)$, 称作赋值σ.

任何公式在给定的解释和赋值下都是命题.

例

例 给定解释I 如下:

(*a*) 个体域 D=N

(*b*) $\bar{a} = 2$

(*c*) $\bar{f}(x,y) = x+y, \bar{g}(x,y) = xy$

(*d*) 谓词 $\bar{F}(x,y): x = y$

及赋值σ: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 及σ下的含义, 并讨论其真值

(1) $\forall xF(g(x,a),y)$

$\forall x\,(2x = 1)$ 假命题

例

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

$\forall x\forall y(x+2=y\rightarrow y+2=x)$　　假命题

(3) $\forall x\forall y\exists z F(f(x,y),z)$

$\forall x\forall y\exists z\ (x+y=z)$　　真命题

(4) $\exists x F(f(x,y),g(x,z))$

$\exists x(x+1=2x)$　　真命题

(5) $F(f(x,a), g(y,a))$

$0+2=1\times 2$　　真命题

(6) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists y F(f(x,a), g(y,a)))$

$\forall x\ (x=1\rightarrow\exists y(x+2=2y))$　　假命题

例

例 设有公式$\forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))\leftrightarrow((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$。

在个体域D={a，b}上，构造两个解释使公式分别为真和为假。

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\leftrightarrow((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))\leftrightarrow(\neg((\exists x)P(x))\vee(\forall x)Q(x))$$
$$\Leftrightarrow[(\neg P(a)\vee Q(a))\wedge(\neg P(b)\vee Q(b)]\leftrightarrow[\neg(P(a)\vee P(b))\vee(Q(a)\wedge Q(b))]$$
$$\Leftrightarrow\underbrace{[(\neg P(a)\vee Q(a))\wedge(\neg P(b)\vee Q(b)]}_{\alpha}\leftrightarrow\underbrace{[(\neg P(a)\wedge\neg P(b))\vee(Q(a)\wedge Q(b))]}_{\beta}$$

解释I1：取$\boldsymbol{Q(a)=Q(b)=1, P(a)P(b)}$值任意取，则$\boldsymbol{\alpha=1,\beta=1}$, 上述公式为真。

解释I2：构造P、Q值使得$\boldsymbol{\alpha=1,\beta=0}$，则公式为假。令：$\boldsymbol{\neg P(a)=1,\neg P(b)=0,Q(a)=0,Q(b)=1}$满足上述要求。

Open Question　Points: 10　Setting

设$G=(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)P(x)$

1) 若解释I的非空个体域D只有一个元素，则G在解释I下取值为?
2) 设D={a,b}，试找出D上的一个解释I使得G在解释I下值为假。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

一阶逻辑公式的分类

- 给定解释I和I下的赋值σ，所有的公式都被解释为命题。
- 闭式在任何解释下都变成命题.（无需赋值）

永真式(逻辑有效式)：无成假解释和赋值

矛盾式(永假式)：无成真解释和赋值

可满足式：至少有一个成真解释和赋值

一阶逻辑公式的分类

在一阶逻辑中，公式的可满足性(永真性, 永假性)是不可判定的, 即不存在算法能在有限步内判断任给的公式是否是可满足式(永真式, 矛盾式)

定义 设A_0是含命题变项p_1，p_2，…,p_n的命题公式，$A_1,A_2,\ldots$，A_n是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的$p_i(1\le i\le n)$, 所得公式A称为A_0的代换实例.

例如 $F(x)\to G(x)$, $\forall xF(x)\to\exists yG(y)$ 等都是$p\to q$的代换实例

定理 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

一阶逻辑公式的分类

例 判断下列公式的类型:

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

取解释I_1, D_1=R, $\bar{F}(x)$:x是整数, $\bar{G}(x)$:x是有理数, 真命题

取解释I_2, D_1=R, $\bar{F}(x)$:x是整数, $\bar{G}(x)$:x是自然数, 假命题

非永真式的可满足式

(2) $\forall xF(x,y)$

解释I_1, D_1=N, $\bar{F}(x,y)$:$x\ge y$; 赋值$\sigma(y)$=0, 真命题

解释I_2, D_1=N, $\bar{F}(x,y)$:$x\ge y$; 赋值$\sigma(y)$=2, 假命题

非永真式的可满足式

一阶逻辑公式的分类

例 判断下列公式的类型:

(3) $\neg(\forall xF(x,y))\vee(\forall xF(x,y))$

这是 $\neg p\vee p$ 的代换实例, $\neg p\vee p$是重言式

永真式

(3) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

这是$\neg(p\to q)\wedge q$的代换实例, $\neg(p\to q)\wedge q$是矛盾式

矛盾式

一阶逻辑公式的分类

例 判断下列公式的类型:

(5) $\forall x\, F(x)\to\exists x\, F(x)$

这是闭式，只需考虑解释。设I为任意一解释，D为个体域。若在I下，$\exists x\, F(x)$为假，则$\forall x\, F(x)$为假。从而公式为真，由于I的任意性，公式为永真式。

(6) $\forall xF(x)\to F(y)$

设I为任意一解释，σ为I下任意一赋值，D为个体域。若$\forall xF(x)$，即对所有的$x\in D$， $F(x)$均为真，则$F(\sigma(y))$均为真。从而公式为真。永真式。

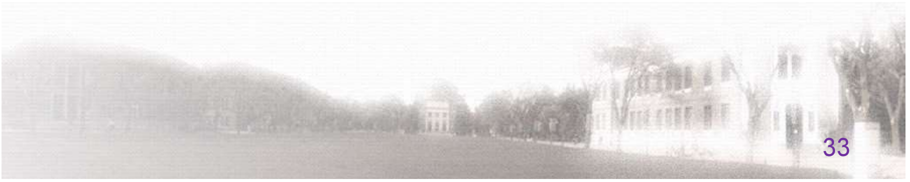
一阶逻辑公式的分类

例 判断下列公式的类型:

(7) $\forall x\, F(x) \rightarrow F(c)$, c为个体常元

(8) $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$

(9) $F(c) \rightarrow \exists x F(x)$

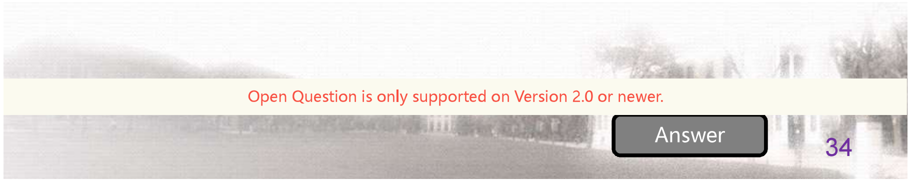


Open Question Points: 10 Setting

判断下列公式的类型:

1) $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$

2) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$



Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

小结

- 一阶语言
- 谓词公式、辖域、赋值、解释
- 永真式、矛盾式、可满足式