

单元1.4 无向图的连通度

第14章 图的基本概念

14.3 图的连通性

参考书目：戴一奇等，《图论与代数结构》，清华大学出版社

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

1

网络鲁棒性量化分析



郑州车站 列车到达信息

车次	始发站	终到站	到点	开点	检票口	状态
G670	西安北	北京西	20:09	20:15	A4, B4	晚5分钟
G691	太原南	武汉	20:19	20:22	A12, B12	晚点未定
G525	北京西	汉口	20:32	20:35	A13, B13	晚点未定
G558	武汉	北京西	20:38	20:41	A9, B9	晚点未定
G561	北京西	郑州	20:38	20:41	A15, B15	晚点未定
G669	北京西	西安北	20:48	20:56	A5, B5	晚点未定
G527	北京西	武汉	21:31	21:34	A12, B12	候车

sina 新闻中心 综合

日本地震 震断全球供应链？

原标题：日本地震 震断全球供应链？

这是4月16日在日本熊本县益城拍摄的在地震中遭到破坏的房屋。新华社

【深圳商报讯】日前，多起余震在日本本州岛的九州岛不断扩散。此前，一场里氏7.3级的地震导致41人丧生，并让该地区的高科技制造业陷入停顿。

除了已确认的死亡情况外，还有逾1000人受伤，18.4万人被疏散至避难所。长206米、1970年通车的单孔大桥阿苏大桥坍塌，坠入了下方深达数百米的峡谷中，此次地震的破坏力可见一斑。

最近震中的熊本县拥有庞大的半导体工业，索尼和本田等制造商也在该地区建有工厂。地震令各企业忙忙确认工厂受到的损害，引发了全球供应链被打断的担忧。九州岛配件供应链短缺迫使丰田在全日本的汽车工厂启动了临时的停产措施。

上周四发生首次地震后，索尼暂停了熊本工厂的图像传感器生产，这种传感器被用于苹果和其他智能手机的摄像头。上周末，位于附近长崎和太分的另外两处索尼传感器工厂的生产线已恢复运行。对于是否能够通过把生产转移至其他工厂来弥补产能方面的损失，索尼拒绝置评。

2

内容提要

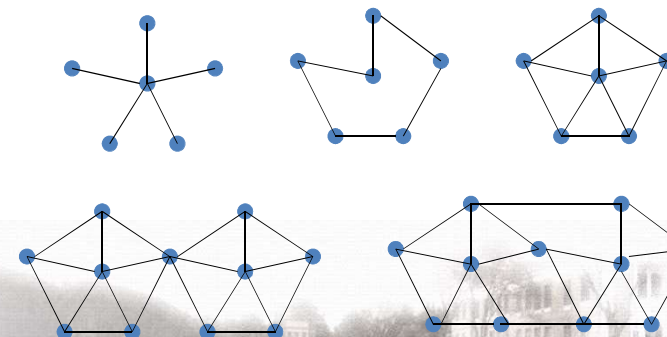
- 点割集、点连通度
- 边割集、边连通度



3

如何定量比较连通性？

- 如何定义一个图比另一个图的连通性更好？



4

点连通度、边连通度

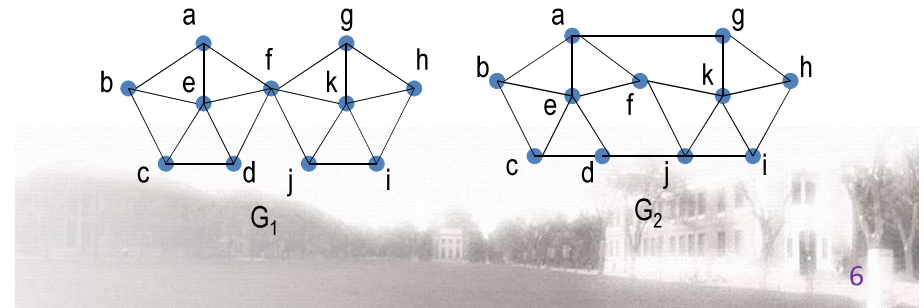
- 为了破坏连通性,至少需要删除多少个顶点?
- 为了破坏连通性,至少需要删除多少条边?
- “破坏”连通性:
 - $p(G-V') > p(G)$
 - $p(G-E') > p(G)$
 - 连通分支数增加



5

点割集

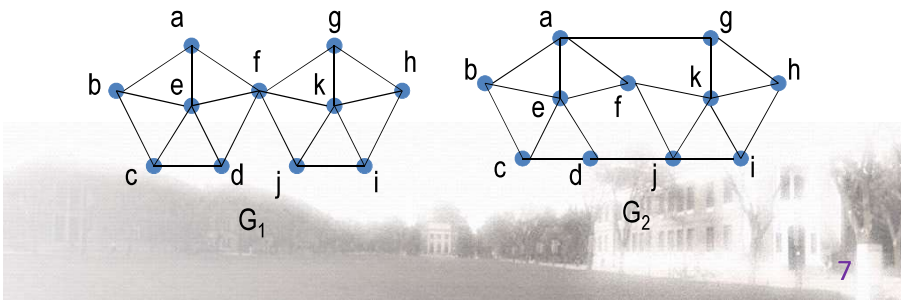
- 点割集: $G=\langle V,E \rangle$, $\emptyset \neq V' \subset V$, (1) $p(G-V') > p(G)$;
(2) $\forall V'' \subset V', p(G-V'') = p(G)$ (极小性条件)
- 例 $G_1: \{f\}, \{a,e,c\}, \{g,k,j\}, \{b,e,f,k,h\}$ 不是
 $G_2: \{f\}$ 不是, $\{a,e,c\}, \{g,k,j\}, \{b,e,f,k,h\}$



6

割点

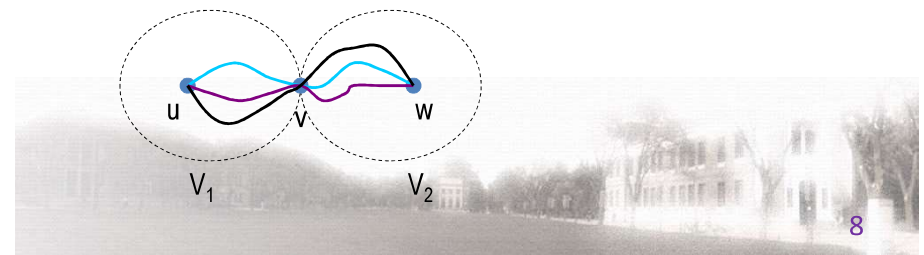
- v 是割点 $\Leftrightarrow \{v\}$ 是割集
- 例: G_1 中 f 是割点, G_2 中无割点



7

割点的充分必要条件

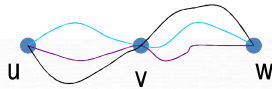
- 定理:
无向连通图 G 中顶点 v 是割点
 \Leftrightarrow 可把 $V(G)-\{v\}$ 划分成 V_1 与 V_2 , 使得从 V_1 中任意顶点 u 到 V_2 中任意顶点 w 的路径都要经过 v . #



8

割点的充分必要条件

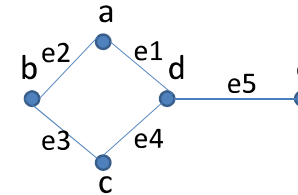
- 推论: 无向连通图 G 中顶点 v 是割点
 \Leftrightarrow 存在与 v 不同的顶点 u 和 w ,使得从顶点 u 到 w 的路径都要经过 v . #



9

举例

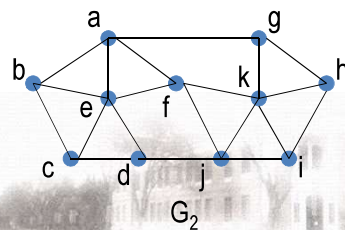
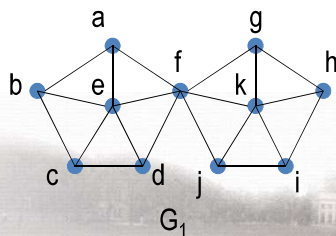
- 求下图的全部点割集,并指出其中的割点。



10

边割集

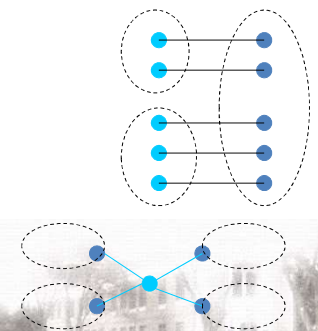
- 边割集: $G = \langle V, E \rangle$, $\emptyset \neq E' \subseteq E$, (1) $p(G - E') > p(G)$;
 (2) $\forall E'' \subset E', p(G - E'') = p(G)$ (极小性条件)
- 例: $G_1: \{(a,f), (e,f), (d,f)\}, \{(f,g), (f,k), (j,k), (j,i)\}, \{(c,d)\}$ 不是, $\{(a,f), (e,f), (d,f), (f,g), (f,k), (f,j)\}$ 不是
 $G_2: \{(b,a), (b,e), (b,c)\}$



11

引理1

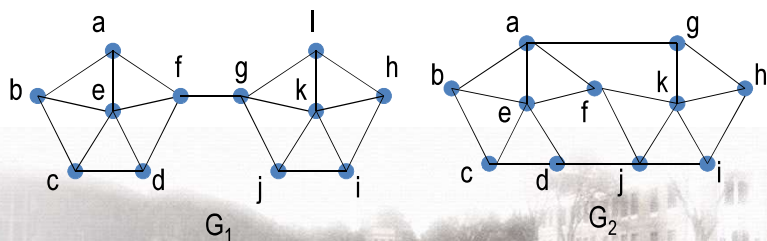
- 设 E' 是边割集,则 $p(G - E') = p(G) + 1$.
- 证: 如果 $p(G - E') > p(G) + 1$, 则 E' 不是边割集, 因为不满足定义中的极小性. #
- 注: 点割集无此性质



12

割边 (桥)

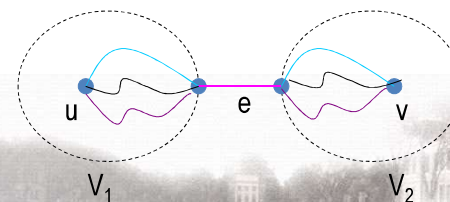
- (u,v) 是割边 $\Leftrightarrow \{(u,v)\}$ 是边割集
- 例: G_1 中 (f,g) 是桥, G_2 中无桥



13

桥的充分必要条件

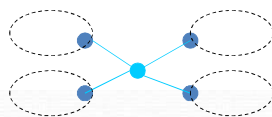
- 定理: 无向连通图 G 中边 e 是桥
- $\Leftrightarrow G$ 的任何圈都不经过 e
- \Leftrightarrow 可把 $V(G)$ 划分成 V_1 与 V_2 , 使得从 V_1 中任意顶点 u 到 V_2 中任意顶点 v 的路径都要经过 e . #



14

扇形割集

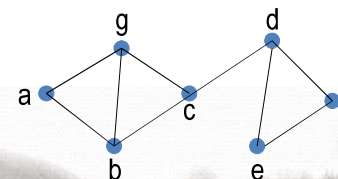
- E' 为扇形割集: 边割集 $E' \subseteq I_G(v)$
- $I_G(v)$ 不一定是边割集 (不一定极小)
- $I_G(v)$ 是边割集 $\Leftrightarrow v$ 不是割点



15

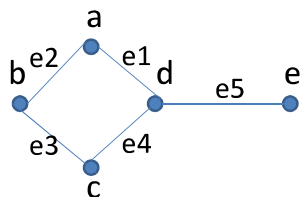
扇形割集举例

- $\{(a,g), (a,b)\}, \{(g,a), (g,b), (g,c)\},$
- $\{(c,d)\}, \{(d,e), (d,f)\}$
- $\{(d,c), (d,e), (d,f)\}$ 不是



16

求下图的全部边割集，并指出其中的桥。



Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

17

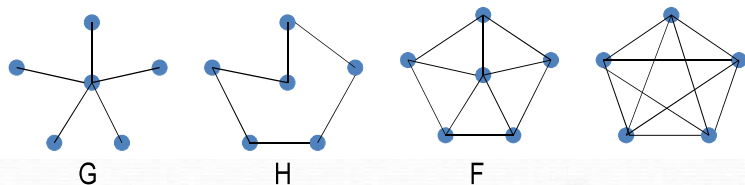
点连通度

- G 是无向连通非完全图,
 $\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 是 } G \text{ 的点割集}\}$
- 规定: $\kappa(K_n) = n-1$
 非完全图点连通度最多 $n-2$
 G 非连通: $\kappa(G)=0$
 (平凡图 N_1 连通, 但 $\kappa(N_1) = \kappa(K_1) = 0$)

18

点连通度举例

- $\kappa(G)=1, \kappa(H)=2, \kappa(F)=3, \kappa(K_5)=4$



19

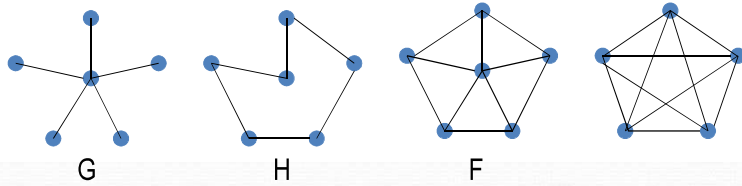
边连通度

- G 是无向连通图,
 $\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 是 } G \text{ 的边割集}\}$
- 规定: G 非连通: $\lambda(G)=0$

20

边连通度举例

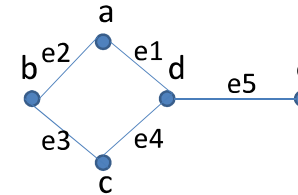
- $\lambda(G)=1, \lambda(H)=2, \lambda(F)=3, \lambda(K_5)=4$



21

举例

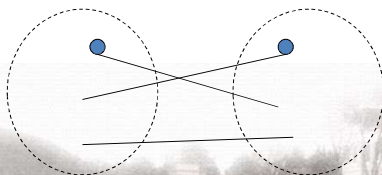
- 求下图的点连通度和边连通度。



22

引理2

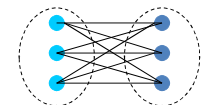
- 设 E' 是非完全连通图 G 的最小边割集, $G-E'$ 的两个(引理1)连通分支是 G_1, G_2 , 则存在 $u \in V(G_1), v \in V(G_2)$, 使得 $(u, v) \notin E(G)$.



23

引理2证明

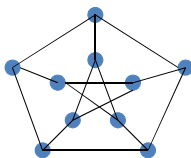
- 证: (反证) 否则
 $\lambda(G) = |E'| = |V(G_1)| \times |V(G_2)|$
 $\geq |V(G_1)| + |V(G_2)| - 1 = n - 1$,
 与 G 非完全图相矛盾! #
- $a \geq 1 \wedge b \geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1$.



24

k-(边)连通图

- k-连通图: $\kappa(G) \geq k$
- K-边连通图: $\lambda(G) \geq k$
- 例: 彼得森图: $\kappa=3, \lambda=3$



它是1-连通图, 2-连通图, 3-连通图,
但不是4-连通图

它是1-边连通图, 2-边连通图, 3-边连通图,
但不是4-边连通图

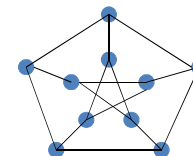


25

定理

- 定理: 对3-正则图G,
 $\kappa(G) = \lambda(G)$.

- 彼得森图: $\kappa=3, \lambda=3$



<https://blog.csdn.net/mygodhome/article/details/6000896>



26

Whitney定理

- 定理7.10(Whitney不等式): 任意G,
 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.
- 推论: k-连通图一定是k-边连通图. #



27

Whitney定理证明

- 目标: $\kappa \leq \lambda \leq \delta$.
- 证明: 不妨设G是3阶以上 连通 非完全 简单图.
(否则可直接验证结论成立).



28

Whitney定理证明

- 第一部分: $\lambda \leq \delta$
- 证明: 设 $d_G(v) = \delta$.
 $I_G(v) = \{ (u,v) \mid (u,v) \in E(G) \}$
 则必有扇形边割集 $S \subseteq I_G(v)$,
 所以, $\lambda \leq |S| \leq |I_G(v)| = \delta$.



29

Whitney定理证明

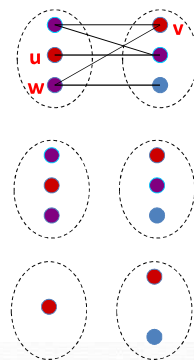
- 第二部分: $\kappa \leq \lambda$
- 证明: 设边割集 E' 满足 $|E'| = \lambda$.
 根据引理1和引理2,
 设 $G - E'$ 的两个连通分支是 G_1 和 G_2 ,
 设 $u \in V(G_1), v \in V(G_2)$, 使得 $(u,v) \notin E(G)$.



30

Whitney定理证明

- 如下构造 V'' : 对任何 $e \in E'$,
 选择 e 的异于 u, v 的一个端点放入 V'' .
 则 $u, v \in G - V'' \subseteq G - E' = G_1 \cup G_2$,
 所以 V'' 中含有点割集 V' .
 故 $\kappa \leq |V'| \leq |V''| \leq |E'| = \lambda$. #



31

Open Question Points: 10

Setting

- 1) 已知无向图 G 是 k -连通图, $k \geq 1$. 能确定 G 的点连通度吗?
- 2) 已知无向图 G 满足 $\kappa(G) = \delta(G)$, 试确定其边连通度 $\lambda(G)$.
- 3) 已知无向图 G 既有割点又有桥, 试确定其点连通度及边连通度. 由已知条件能确定 G 的最小度 $\delta(G)$ 吗?



Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

32

小结

- 点割集, 边割集, 点(边)连通度 $\kappa(\lambda)$;
- κ, λ, δ 之间关系, Whitney定理 等
- 割点, 桥的充要条件

