**★最优势检验**

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim f(x,\theta)(\theta\in\Theta)$ 的一个样本，考虑假设

$$H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$$

$X_1,\cdots,X_n$ 的取值范围 $S_n=W\bigcup W^c$，这里 $W$ 为假设检验的拒绝域。

检验函数：

$$\phi(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}1, & (x_1,\cdots,x_n)\in W\\ 0, & (x_1,\cdots,x_n)\notin W\end{cases}=1_{\{(x_1,\cdots,x_n)x\in W\}}$$

检验的势函数为

$$g(\theta)=E_\theta(\phi(x_1,\cdots,x_n))=\begin{cases}\alpha(\theta), & \theta\in\Theta_0,\\ 1-\beta(\theta), & \theta\in\Theta_1,\end{cases}$$

定义：当样本容量 $n$ 固定时，检验法 $\phi_1$ 与 $\phi_2$ 的势分别为 $g_1(\theta),g_2(\theta)$，水平均为 $\alpha(i.e.\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}g_1(\theta)\le\alpha,\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}g_2(\theta)\le\alpha)$，若 $\forall\theta\in\Theta,$ 均有

$$g_1(\theta)\ge g_2(\theta)$$

则称 $\phi_1$ 比 $\phi_2$ 的更有效。

若水平为 $\alpha$ 的检验法中，$\phi_1$ 比一切水平为 $\alpha$ 的检验法都有效，则称 $\phi_1$ 是水平为 $\alpha$ 的最优势检验。

一般而言，寻找最优势检验比较困难。有一个比较好的例子是似然比检验。

**★似然比检验**（简单假设对简单假设）

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim f(x,\theta)(\theta\in\Theta)$ 的一个样本，考虑简单假设对简单假设的问题

$$H_0:\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1$$

定义似然比

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta_1)}{L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta_0)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{f(x_i,\theta_1)}{f(x_i,\theta_0)}$$

检验的拒绝域为

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq k\}\text{（}k\text{ 待定）}$$

定理（Neyman-Pearson 引理）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim f(x,\theta)(\theta\in\Theta)$，对

$$H_0:\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1$$

$\phi$ 是其似然比检验法，若检验法 $\phi$ 与 $\tilde{\phi}$ 的势分别为 $g(\theta),\tilde{g}(\theta)$（水平为 $\alpha$）满足 $\tilde{g}(\theta_0)\leq g(\theta_0)$，则 $\tilde{g}(\theta_1)\leq g(\theta_1)$.

即若似然比检验的水平为 $\alpha$（$i.e.\ g(\theta_0)=\alpha$），则对任一水平为 $\alpha$ 的检验 $\tilde{\phi}$，若 $\tilde{g}(\theta_0)\leq\alpha$，则似然比检验 $\phi$ 为最优势检验。

例 1：设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma$ 已知）的一个样本，检验假设

$$H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu=\mu_1$$

其中 $\mu_1>\mu_0$

解：似然比

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\mu_1)}{L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\mu_0)}$$

$$=\frac{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n\exp\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\}}{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n\exp\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\}}$$

$$=\exp\{n\bar{x}(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2})-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\}$$

当 $H_0$ 为真时

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ge k \Rightarrow \overline{x} \ge \frac{\ln k+\dfrac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}}{n(\dfrac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2})}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ge \frac{\sigma\ln k}{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}++\frac{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma} \triangleq C$$

拒绝域为

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ge k\}$$

$$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\frac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ge C\}$$

$$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\frac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ge u_{1-\alpha}\}$$

是最优势检验。

例 2：设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $E(\dfrac{1}{\theta})$（$\sigma$ 已知）的一个样本，检验假设

$$H_0:\theta=\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1$$

其中 $\theta_1<\theta_0$

解：似然比

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta_1)}{L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta_0)}$$

$$=(\frac{\theta_0}{\theta_1})^n\exp\{-(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0})\sum_{i=1}^n x_i\}$$

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ge k$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^n x_i \le \frac{2}{\theta_0}(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0})^{-1}(n\ln\frac{\theta_0}{\theta_1}-\ln k)\triangleq C$$

由于$T \triangleq \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(2n)$

最优势检验的拒绝域为$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): T \le \chi_\alpha^2(2n)\}$。

**★广义似然比检验**（复合假设）

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$$

广义似然比

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)}$$

拒绝域形式：

$$W = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ge C\}$$
$$P(\lambda(X_1, X_2, \cdots, X_n) \ge C) \le \alpha, \forall \theta \in \Theta_0 (under\ H_0)$$

例 3 例 1：设$X_1, \cdots, X_n$是$N(\mu, \sigma^2)$（$\mu, \sigma$均未知）的一个样本，求

$$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu = \mu_1$$

的广义似然比检验。

解：记$\theta = (\mu, \sigma), \Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma): \sigma^2 > 0\}, \Theta = \{(\mu, \sigma): \mu \in R, \sigma^2 > 0\}$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)}$$

$$= \frac{L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}, \frac{n-1}{n}s^2)}{L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \mu_0, \sigma^2)} = [\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}]^{\frac{n}{2}}$$

$$= (1 + \frac{t^2}{n-1})^{\frac{n}{2}} \quad t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$\{\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq C\}=\{|t|\geq d\}$$
$$C=(1+\frac{\alpha^2}{n-1})^{\frac{n}{2}},d=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$
$$\Rightarrow W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):|t|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

与以前的双侧检验一致。

★Bayes 检验

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim f(x,\theta)(\theta\in\Theta)$ 的一个样本，考虑假设

$$H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$$

Bayes 检验的思想：在得到 $\theta$ 的后验分布后，计算此两个假设下的后验概率

$$\alpha_0=P(H_0|x_1,\cdots,x_n)=P(\theta\in\Theta_0|x_1,\cdots,x_n)$$
$$\alpha_1=P(H_1|x_1,\cdots,x_n)=P(\theta\in\Theta_1|x_1,\cdots,x_n)$$

称 $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ 为后验概率比（Odds）。

检验准则（Jeffreys 准则）

（1） $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}<1$, 则拒绝 $H_0$，接受 $H_1$；

（2） $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}>1$, 则接受 $H_0$；

（1） $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}<1$, 不宜做判断。

先验概率比：

$$\frac{\pi_0}{\pi_1}=\frac{P_\pi(H_0)}{P_\pi(H_1)}=\frac{P_\pi(\theta\in\Theta_0)}{P_\pi(\theta\in\Theta_1)}$$

考虑后验概率比与先验概率比之间的关系，需要引入 $H_0$ 对 $H_1$ 的 Bayes 因子

$B^\pi(x_1,\cdots,x_n)$：

$$B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\alpha_0/\alpha_1}{\pi_0/\pi_1}$$

实际上，$B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{f(x_1,\cdots,x_n\mid H_0)}{f(x_1,\cdots,x_n\mid H_1)}$

其中 $f(x_1,\cdots,x_n\mid H_i)=\int\limits_{\Theta_i} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)\pi_i(\theta)d\theta\ (i=0,1)$ 为边际似然。

这里，我们有

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{P(H_0\mid x_1,\cdots,x_n)}{P(H_1\mid x_1,\cdots,x_n)}=\frac{P_{\pi}(H_0)}{P_{\pi}(H_1)}B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{\pi_0}{\pi_1}B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\alpha_0=P(H_0\mid x_1,\cdots,x_n)=[1+\frac{\pi_1}{\pi_0}\frac{1}{B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)}]^{-1}$$

先验概率确定后，$B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)$ 越大，$\alpha_0$ 越大，越偏向于接受 $H_0$。

注：Jeffreys 准则（Bayes 因子）

| $B^{\pi}$ | 可信强度（接受 $H_0$ 的强度） |
|---|---|
| 1:1 至 3:1 | 不值一提（Barely worth mentioning） |
| 3:1 至 10:1 | 实质性的（Substantial） |
| 10:1 至 30:1 | 强（Strong） |
| 30:1 至 100:1 | 非常强（Very strong） |
| 大于 100:1 | 决定性的（Decisive） |

$B^{\pi}$ 值小于 1 的，正好反过来（接受 $H_1$ 的强度）。

情形 1：简单假设对简单假设

$$H_0:\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1$$

此时

$$\alpha_0 = P(\theta=\theta_0 \mid x_1,\cdots,x_n) = \frac{\pi_0 f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_0)}{\pi_0 f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_0) + \pi_1 f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_1)}$$

$$\alpha_1 = P(\theta=\theta_1 \mid x_1,\cdots,x_n) = \frac{\pi_1 f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_1)}{\pi_0 f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_0) + \pi_1 f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_1)}$$

故

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\pi_0}{\pi_1} \frac{f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_0)}{f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_1)}$$

故 Bayes 因子

$$B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_0)}{f(x_1,\cdots,x_n \mid \theta_1)}$$ （即似然比）与先验分布无关。

情形 2：复合假设对复合假设

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$$

设 $\theta$ 的先验分布为 $\pi(\theta)$，则先验概率

$$\pi_0 = P_{\pi}(H_0) = P_{\pi}(\theta \in \Theta_0)$$
$$\pi_1 = P_{\pi}(H_1) = P_{\pi}(\theta \in \Theta_1)$$

先将先验分布 $\pi(\theta)$ 进行分解，使得其支撑集在 $\Theta_0$ 和 $\Theta_1$ 上，记

$$g_0(\theta) = \frac{\pi(\theta)}{\pi_0} 1_{\Theta_0}(\theta)$$

$$g_1(\theta) = \frac{\pi(\theta)}{\pi_1} 1_{\Theta_1}(\theta)$$

此时先验分布 $\pi(\theta) = \pi_0 g_0(\theta) + \pi_1 g_1(\theta)$，于是

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{P(\theta\in\Theta_0\mid x_1,\cdots,x_n)}{P(\theta\in\Theta_1\mid x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\int\limits_{\Theta_0} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int\limits_{\Theta_1} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

$$=\frac{\int\limits_{\Theta_0} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)\pi_0 g_0(\theta)d\theta}{\int\limits_{\Theta_1} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)\pi_1 g_1(\theta)d\theta}$$

故有

$$B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\alpha_0/\alpha_1}{\pi_0/\pi_1}=\frac{\int\limits_{\Theta_0} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)g_0(\theta)d\theta}{\int\limits_{\Theta_1} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)g_1(\theta)d\theta}$$（加权似然比）

情形 3：简单假设对复合假设：

$H_0:\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\neq\theta_0$

解：记 $\Theta_0=\{\theta_0\},\Theta_1=\Theta-\{\theta_0\}$

$P_\pi(\theta=\theta_0)=\pi_0>0$（依据经验确定）

对于 $\Theta_1=\Theta-\{\theta_0\}$ 上的分布，我们可以给一个正常的密度函数然后进行放缩。这样我们的先验就变成了 $\pi(\theta)=\pi_0 1_{\Theta_0}(\theta)+(1-\pi_0)g_1(\theta)1_{\Theta_1}(\theta)$

后验分布为

$$\pi(\theta\mid x_1,\cdots,x_n)\propto\pi_0 f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta_0)I_{\Theta_0}(\theta)+\pi_1 g_1(\theta)f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)I_{\Theta_1}(\theta)$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{P(\theta=\theta_0\mid x_1,\cdots,x_n)}{P(\theta\in\Theta_1\mid x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\pi_0 f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)}{\pi_1\int\limits_{\Theta_1} g_1(\theta)f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)d\theta}$$

$$B^{\pi}(x_1,\cdots,x_n)==\frac{f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)}{\int\limits_{\Theta_1} f(x_1,\cdots,x_n\mid\theta)g_1(\theta)d\theta}$$与先验分布无关。

检验可用 Jeffreys 准则（Bayes 因子情形）进行。