# 第 3 周讲稿

## §5 事件的独立性应用和相关性的刻画

### 1. 独立试验序列

设 $\{E_i\}(i=1,2,\cdots)$ 是一列随机试验，$E_i$ 的样本空间为 $\Omega_i$，设 $A_k$ 为 $E_k$ 中可能出现的任一可观测事件，若 $A_k$ 出现的概率不依赖于其它各次试验的结果，就称 $\{E_i\}$ 为独立随机试验列.

**Bernoulli 概型**

***n* 重 Bernoulli 试验；两点分布、二项分布、几何分布、负二项分布的背景**

**★ n 重 Bernoulli 试验中，恰好出现 k 次“成功”的概率为：$C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n)$；**

**若记 n 重 Bernoulli 试验中，“成功”出现次数为 $X$，则**

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n) \leftrightarrow X \sim B(n,p)$$

**★ 进行一系列独立重复的 Bernoulli 试验（即 $\infty$ 重 Bernoulli 试验），首次“成功”出现时，恰好进行了 k 次试验的概率为：**

$$q^{k-1}p \quad (k=1,2,\cdots);$$

**若记 $\infty$ 重 Bernoulli 试验中，首次“成功”出现时所需的试验次数为 $Y$，则**

$$P(Y=k)=q^{k-1}p \quad (k=1,2,\cdots) \leftrightarrow Y \sim Ge(p)$$

**★ 进行一系列独立重复的 Bernoulli 试验（即 $\infty$ 重 Bernoulli 试验），第 r 次“成功”出现时，恰好进行了 k 次试验的概率为：**

$$C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} \quad (k=r,r+1,r+2,\cdots);$$

**若记 $\infty$ 重 Bernoulli 试验中，第 r 次“成功”出现时所需的试验次数为 $Z$，则**

$$P(Z=k)=C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} \quad (k=r,r+1,r+2,\cdots) \leftrightarrow Z \sim NB(r,p)$$

**例 11** 已知 100 件产品中有 10 件正品，每次使用正品时肯定不会发生故障，而在每次使用非正品时，均有 0.1 的可能性发生故障，现从这 100 件产品中随机抽取一件，若使用了 $n$ 次均未发生故障，问 $n$ 为多大时，才能有 70%的把握认为所取得的产品为正品。 【29】

**例 12** （**小概率原则**） 设随机试验中某一事件 $A$ 出现的概率为 $\varepsilon>0$。则不论 $\varepsilon$ 如何小，当我们不断独立地重复做该试验时, $A$ 迟早会出现的概率为 1。

### 2. 系统可靠性

**方法：将复杂系统简化为简单系统的串联和并联等。**

简单串联系统可靠性：

$$p_{串} = P(A_1A_2\cdots A_n) = p_1p_2\cdots p_n$$

简单并联系统可靠性：

$$\begin{aligned} p_{并} &= P(A_1\cup\cdots\cup A_n) = 1 - P(A_1^c\cdots A_n^c) \\ &= 1 - P(A_1^c)\cdots P(A_n^c) \\ &= 1 - (1-p_1)\cdots(1-p_n) \end{aligned}$$

### 3. 事件相关性度量

**定义** 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，称

$$r(A,B) = \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)(1-P(A))P(B)(1-P(B))}}$$

为**事件** $A$与$B$ **的相关系数**。

关于事件的相关系数，我们有如下定理

**定理** (1) $r(A,B) = 0$当且仅当$A$与$B$相互独立.

(2) $|r(A,B)| \le 1$． 而且 $r(A,B) = 1 \Leftrightarrow P(A\Delta B) = 0 \Leftrightarrow P(A) = P(AB) = P(B)$，

$$r(A,B) = -1 \Leftrightarrow P(A^c\Delta B) = 0 \Leftrightarrow P(A^c) = P(A^cB) = P(B).$$

（3） $r(A,B) > 0 \Leftrightarrow P(A|B) > P(A) \Leftrightarrow P(B|A) > P(B)$ (称为 $A,B$ 正相关).

$r(A,B) < 0 \Leftrightarrow P(A|B) < P(A) \Leftrightarrow P(B|A) < P(B)$ (称为 $A,B$ 负相关) .

# 第二章　离散随机变量与随机徘徊

## §1 随机变量及其分布

### 一. 随机变量及其分布函数

在随机试验的样本空间$\Omega$上定义一单值实函数 $X = X(\omega), \omega\in\Omega$，若对任意实数 $x$，

$\{X \le x\} = \{\omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$，则称 $X$ 为随机变量。称函数

$$F(x) = P(X \le x)$$

为随机变量 $X$ 的分布函数。

显然，分布函数 $F(x)$ 是刻画随机变量 X 的取值的分布特征的，它具有以下的性质：

（1）$F(x)$ 是一个单调不减函数。

（2）$0 \le F(x) \le 1$，且 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$。

（3）$F(x)$是右连续函数。

可以证明：一个函数$F(x)$是某一个随机变量的分布函数，当且仅当性质（1）（2）（3）同时成立。

（4）$\forall x_1 < x_2, P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$。

（5）$\forall x, P(X = x) = F(x) - F(x-0)$，特别，当$F(x)$在 $x$ 处连续时，$P(X = x) = 0$。

（6）$\forall x_1 < x_2$，且$F(x)$在$x_1, x_2$处连续，则

$$P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

**二. 随机变量分类**

**三. 离散型随机变量**

分布列$\{p_i\}$：$\begin{cases} p_i \ge 0 \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$

$\{p_i\}$与分布函数的关系：结合图形理解

**四. 几个常见的离散型分布及其背景**

1. 二项分布$B(n,p)$：$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$（n=1，标准二值分布）

2. 超几何分布：

$$P(X=k) = \frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}, \quad k = \max(0, n-N), \cdots, \min(M, n)(\text{整数})$$

3. 几何分布$Ge(p)$：

$$P(X=k) = qp^{k-1}, \quad k = 1,2,\cdots$$

4. 负二项分布$NB(r,p)$（或称 Pascal 分布）：

$$P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{n-r}, \quad k = r, r+,1, \cdots,$$

**几何分布的重要结论：**

定理：设 $X$ 为只取正整数值的随机变量，则下列命题等价：

（1） X 服从几何分布。

（2） $P(X > m+n \mid X > n) = P(X > m) \quad m,n = 0,1,\cdots$。

（3） $P(X = m+n \mid X > n) = P(X = m) \quad m = 1,2,\cdots, n = 0,1,\cdots$。

证明：$(1) \Rightarrow (2)$

由于 $X$ 服从几何分布，即 $P(X=k)=qp^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$。

故

$$P(X>m+n\mid X>n)=\frac{P(X>m+n,\ X>n)}{P(X>n)}$$

$$=\frac{P(X>m+n)}{P(X>n)}=\frac{\sum_{k=m+n+1}^{\infty}qp^{k-1}}{\sum_{k=n+1}^{\infty}qp^{k-1}}$$

$$=q^m=P(X>m)$$

$(2)\Rightarrow(3)$

由（2）知

$$\frac{P(X>m+n)}{P(X>n)}=P(X>m)\quad m,n=0,1,\cdots$$

得

$$\frac{P(X>m-1+n)}{P(X>n)}=P(X>m-1)\quad m=1,2,\cdots;n=0,1,\cdots$$

注意到 $X$ 为只取正整数值，故 $P(X=m)=P(X>m-1)-P(X>m)$ ，后式减前式得

$$\frac{P(X=m+n)}{P(X>n)}=P(X=m)\quad m=1,2,\cdots;n=0,1,\cdots$$

即 $P(X=m+n\mid X>n)=P(X=m)\quad m=1,2,\cdots,n=0,1,\cdots$。

$(3)\Rightarrow(1)$

由于 $\dfrac{P(X=m+n)}{P(X>n)}=P(X=m)\quad m=1,2,\cdots;n=0,1,\cdots$

所以 $P(X=m+n)=P(X=m)P(X>n)$

令 $G(m)=P(X>m),\ F(m)=P(X=m)\quad m=1,2,\cdots$

则上式化为

$F(m+n)=G(n)F(m)$ 且 $G(1)+F(1)=1$

从而，

$$P(X=k)=F(k)=G(1)F(k-1)=(G(1))^2F(k-2)=\cdots=(G(1))^{k-1}F(1)\quad k=1,2,\cdots$$

即 $X \sim Ge(F(1))$

注：截止的几何分布：

背景：做一系列独立重复的 Bernoulli 试验，直到首次试验成功时或试验进行到第 $m$ 次为止，所需的试验的次数。

$$P(X=k)=\begin{cases} q^{k-1}p, & k=1,2,\cdots,m-1 \\ q^{m-1}, & k=m \end{cases}$$

**几个例子：**

二项分布与几何分布结合：

**例 1：**父亲要孩子们去后院整理杂物，于是他的 3 个孩子就用每人同时抛一个硬币来决定谁去整理，他们规定，谁抛出的面与另外两人的不同就谁去整理，若三人抛出的面相同则需重抛，直到选出为止，假设硬币出现正面的概率为 $p$，出反面为 $q$，求

（1） 他们抛了不到 n 轮就能选出人的概率； 【$1-(1-3pq)^{n-1}$】

（2） 若 $p=\dfrac{1}{2}$，最少要抛多少轮，才能以 0.95 以上的概率可以选出人来。 【3】

负二项分布：

**例 2：**甲、乙两人进行比赛，直到某一人赢 5 局为止，假设每局比赛独立，且每局甲胜的概率为 0.58，乙胜的概率为 0.42。求

（1） 比赛在第 7 局结束的概率？

（2） 若比赛在第 7 局结束的条件下，甲比赛获胜的概率？

解：设 $X$ 为甲赢 5 局时所需的比赛局数，$Y$ 为乙赢 5 局时所需的比赛局数，显然

$$X \sim NB(5,\,0.58);\quad Y \sim NB(5,\,0.42)$$

记 $A$={甲比赛最终获胜} ，B={比赛在第 7 局结束}

（1）$P(B)=P(X=7)+P(Y=7)$

$$=C_6^4(0.58)^5(0.42)^2+C_6^4(0.42)^5(0.58)^2=0.17+0.066=0.24$$

（2）$P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(X=7)}{P(X=7)+P(Y=7)}=\dfrac{0.17}{0.24}=0.71$

**二项分布的一些简单结论补充：**

**结论 1. 二项分布 $B(n,p)$ 的最大可能值 $k^*$ 存在，且**

$$k^*=\begin{cases} (n+1)p\text{或}(n+1)p-1, & \text{当}(n+1)p\text{为整数时，} \\ [(n+1)p], & \text{当}(n+1)p\text{为非整数时.} \end{cases}$$

**结论 2.（超几何分布的二项分布逼近）**设 $T=M+N$，且 $X$ 服从超几何分布，即

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}, \quad k=0,1,2,\cdots,\min(M,n)$$

若 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{M}{T}=p$，则 $\lim\limits_{T\to\infty}P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2\cdots,n$

**证明：**由于当 $T\to\infty$ 时，$M\to\infty$，故

$$\frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}=C_n^k(\frac{M}{T})^k(1-\frac{M}{T})^{n-k}\frac{(1-\frac{1}{M})(1-\frac{2}{M})\cdots(1-\frac{k-1}{M})(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{M})\cdots(1-\frac{n-k-1}{n})}{(1-\frac{1}{T})(1-\frac{2}{T})\cdots(1-\frac{n-1}{T})}$$

$\to C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, 当 $T\to\infty$ 时。

该结论在统计中有重要意义。