第 6 周讲稿

第三章　Poisson 分布与 Poisson 过程

§1　Poisson 过程的物理背景

例（保险理赔次数与 Poisson 过程）

将 $(0,t]$ 时间中到来的理赔次数记为 N_t。假定

1) 在互不相交的各时段内，理赔的发生是相互独立的。

2) 在相同长度的时间段中，理赔发生的统计规律是相同的（如果还要考虑季节差别等因素的影响，那么这个假定只能在相对地不太长的时段内近似成立）。

3) 在每个小时间段 $(t,\ t+h]$ 内有两次或更多次的理赔发生的概率 $P(\omega: N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)\ge 2)=o(h)$，而恰好发生一次理赔的概率近似地与这段时间的长度 h 成正比，即 $P(\omega: N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=1)=\lambda h+o(h)$. 因此，在 $(t,\ t+h]$ 内无理赔发生的概率 $P(\omega: N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=0)=1-(\lambda h+o(h))$.

这里的条件 1）与 2）分别就是我们在上一章中所提到的独立增量性与时齐性，而条件 3）称为**普通性**。即 N_t 是一个时齐的独立增量过程，从而要知道其有限维分布，只需要求其一维分布 $P(N_t=k)$，记 $p_k(t)=P(\omega: N_t(\omega)=k)$.

对于 $k\ge 2$，我们有

$$
\begin{aligned}
p_k(t+h) &= P(\omega: N_{t+h}(\omega)=k) \\
&= P(\omega: N_t(\omega)=k, N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=0) \\
&\quad + P(\omega: N_t(\omega)=k-1, N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=1) \\
&\quad + P(\omega: N_t(\omega)=k-m, N_{t+h}(\omega)-N_t(\omega)=m\ge 2).
\end{aligned}
$$

由上面的条件 1) —3)，上式应等于（注意 $o(h)$ 的线性组合仍是 $o(h)$）

$$p_k(t)(1-\lambda h+o(h))+p_{k-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h).$$

通过检查上述过程可知，上式对 $k=1$ 仍然成立，从而我们得到

$$p_k(t+h)-p_k(t)=-\lambda h p_k(t)+\lambda h p_{k-1}(t)+o(h).\quad (k\ge 1)$$

在上式等号两边同除以 h，并令 $h\to 0$，就得到如下的无穷个常微分方程组

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \qquad (k \ge 1) \tag{3.1}$$

类似地，对 $k=0$ 我们还有 $\quad p_0(t+h) - p_0(t) = -\lambda p_0(t)h + o(h))$

即
$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t). \tag{3.2}$$

由 N_t 的定义，有 $N_0 = 0$，即我们有初始条件 $p_0(0)=1, p_k(0)=0$. 在此初始条件下解常微分方程组 (3.2)，就得到

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \quad .$$

再由(3.1)式我们有
$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

于是可解得
$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \quad ,$$

进一步又由(3.1)式得

$$p_2'(t) = -\lambda p_2(t) + \lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

并解得
$$p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}.$$

一般地，用数学归纳法，由(3.1) 式得到

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) = -\lambda p_k(t) + \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t},$$

由此解得

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{3.3}$$

这样我们就得到了随机变量 N_t 的分布:

$$P(\omega : N_t(\omega) = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

即

$$N_t \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n & \cdots \\ e^{-\lambda t} & \lambda e^{-\lambda t} & \cdots & \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} & \cdots \end{pmatrix}.$$

下面我们用另一种方法，称为**矩母函数方法**，以一次性地推导出全部 $p_k(t)$ 的表达式. 引入一个参数 z，并定义

$$M(t,z) \overset{\Delta}{=} Ee^{zN_t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{zk} p_k(t),$$

它称为 N_t 的**矩母函数**. 那么我们有

$$\frac{\partial M(t,z)}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{zk}p'_k(t)=-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}e^{zk}p_k(t)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{zk}p_{k-1}(t)$$

$$=-\lambda M(t,z)+\lambda e^{z}M(t,z)=\lambda(e^{z}-1)M(t,z)\,.$$

这是一个 z 为参数的关于自变量 t 的常系数常微分方程，且满足初始条件 $M(0,z)=p_0(0)=1$. 此方程的解为

$$M(t,z)=e^{\lambda t(e^{z}-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}e^{zk}\,.$$

按矩母函数的定义，便得到表达式

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\,.$$

这种矩母函数方法, 适用于只取自然数值的随机变量的分布.

§2 Poisson 分布与 Poisson 过程

一. Poisson 分布

1. Poisson 分布与 Poisson 过程的联系

定义：称随机变量 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 分布，若

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

并记为 $X\sim P(\lambda)$（ 或 $X\sim Poisson_{\lambda}$ ）。

Poisson 分布可以理解成 Poisson 过程在 $[0,1]$ 时段内的 Poisson 流的分布。

2. Poisson 分布的基本性质

性质 1：（Poisson 定理）设随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p_n)$ ($0<p_n<1$ 依赖于 n)，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(X=k)=\lim_{n\to\infty}C_n^k {p_n}^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

Poisson 近似定理说明了，Poisson 分布的广泛存在性的另一个理由。

性质 2： $X\sim P(\lambda)\Rightarrow EX=DX=\lambda$

性质 3：(Poisson 分布的可加性) 设相互独立随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 服从参数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 的 Poisson 分布，则 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 的 Poisson 分布。

（直观理解：考虑 Poisson 过程）

性质 4：(Poisson 分布在随机选择下的不变性) 设 $X\sim P(\lambda)$ (X 表示某一群体的个数)，从此 X 个个体中逐个独立地以保留概率 p 筛选得到 Y 个个体，则 $Y\sim P(\lambda p)$。

直观例子：假设某段时间里来百货公司的顾客数服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而在百货公司里每个顾客购买电视机的概率为 p，且每个顾客是否购买电视机是独立的，求在这段时间内，百货公司内购买电视机的人数分布？

二. Poisson 过程的定义性质及其应用

1. 定义

定义： 一个整数值随机过程 ***N***$=\{N_t,t\geq 0\}$ 满足下述三个条件，就称它为**强度为 λ 的 Poisson 过程:**

(1) $N_t=0$；

(2) N_t 是独立增量过程（即对任意的 $0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$， N_t 在区间 $(t_i,t_{i+1}]$ 上的增量 $N_{t_{i+1}}-N_{t_i}$ 是相互独立的，$i=1,2,\cdots n-1$）

(3) 对任意 $t>0, s\geq 0$ 增量 $N_{s+t}-N_s\sim P(\lambda t)$，即

$$P(N_{s+t}-N_s=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

定理（等价定义）： $\{N_t,t\geq 0\}$ 为**强度为 λ 的 Poisson 过程** $\Leftrightarrow\{N_t,t\geq 0\}$ 是初值为 0 的满足普通性的时齐独立增量过程。

2. Poisson 过程的性质

性质 1：（有限维分布） 设 $\{N_t,t\geq 0\}$ 为是度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，则 N_t 的有限维分布为: 对任意 n，任意 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ 及任意非负整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，有

$$
\begin{aligned}
&P(N_{t_1}=k_1, N_{t_2}=k_2, \cdots, N_{t_n}=k_n) \\
&= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n} t_1^{k_1} (t_2-t_1)^{k_2-k_1} \cdots (t_n-t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{k_1!(k_2-k_1)!\cdots(k_n-k_{n-1})!}
\end{aligned}
$$

性质 2： $EN_t = DN_t = \lambda t;\ Cov(N_s, N_t) = \lambda(s \wedge t)$。

性质 3:（Poisson 过程的可加性）独立 Poisson 过程的和仍为 Poisson 过程，且其强度恰为各强度之和。

性质 4:（与二项分布的联系）

（1） $\{X_t, t \ge 0\}$ 与 $\{Y_t, t \ge 0\}$ 分别为强度为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 过程，且相互独立。则

$$
P(Y_t = k | X_t + Y_t = n) = \begin{cases} C_n^k (\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^k (\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}, & k = 0,1,2,\cdots,n \\ 0, & otherwise \end{cases}
$$

从而 $E(Y_t | X_t + Y_t) = (X_t + Y_t)\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$。

（2）设 $\{N_t, t \ge 0\}$ 为强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程，则对 $0<u<t$ ，$0 \le k \le n$，有

$$
P(N_u = k | N_t = n) = C_n^k (\frac{u}{t})^k (1-\frac{u}{t})^{n-k} ,
$$

即在条件概率 $P(*|N_t = n)$ 下，$N_u\ \ (u<t)$ 的条件分布为二项分布 $B(n, \dfrac{u}{t})$.

性质 5:（随机分流性）假设顾客到达商场的人数是强度为 λ 的 Poisson 过程，且每一个到达商场的顾客是男性还是女性的概率分别为 p 和 q（$p+q=1$），若 $N_t^{(1)}$ 和 $N_t^{(2)}$ 分别为$(0, t]$内到达商场的男性顾客和女性顾客数，则 $N_t^{(1)}$ 和 $N_t^{(2)}$ 分别是强度为 λp 和 $\lambda(1-p)$ 的 Poisson 过程，且相互独立的。

3. 应用举例

复合 Poisson 过程

设 $\{N_t, t \ge 0\}$ 为强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程，$\{Y_i, i \ge 1\}$ 是 $\{N_t, t \ge 0\}$ 独立的随机变量序列，且 Y_i *i.i.d.*. 定义

$$
X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i
$$

性质： $EX_t = EN_t EY_1 = \lambda t EY_1$；

$DX_t = \lambda t EY_1{}^2$

附录：矩母函数补充

定义: 随机变量 X 的矩母函数定义为 $m_X(u) = E(e^{uX}),\quad u \in R$（如果后者的期望存在的话）

矩母函数 $m_X(u)$ 具有如下性质：

（1） 若 X 的矩母函数 $m_X(u)$ 在 $u=0$ 的某一开领域内存在，则 $E(X^n) = m_X^{(n)}(0)$。

（2） 若随机变量 X 与 Y 独立，则 $m_{X+Y}(u) = m_X(u) m_Y(u)$。

（3） 当矩母函数存在时，它可以唯一决定随机变量的分布。

例 1： $X \sim P(\lambda)$，则

$$m_X(u) = Ee^{uX} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{\lambda(e^u - 1)}$$

从而 $EX = m_X'(0) = \lambda$； $EX^2 = m_X''(0) = \lambda + \lambda^2$，故 $DX = \lambda$。

例 2：复合 Poisson 过程的矩母函数：设 Y_i 的矩母函数为 $m_Y(u)$，则

$$M_t(u) = E(e^{uX_t}) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{uX_t} \mid N_t = n) P(N_t = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{u(Y_1 + \cdots + Y_n)} \mid N_t = n) P(N_t = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{u(Y_1 + \cdots + Y_n)}) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (m_Y(u))^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{\lambda t (m_Y(u) - 1)}$$

故可推得 $EX_t = \lambda t EY_1$， $DX_t = \lambda t EY_1{}^2$