

单元2.7 推理演算

第3章 命题逻辑的推理理论

3.2 自然推理系统P



推理演算

- 证明 $A \Rightarrow B$:
 - 从真值的角度进行解释或论证
直观、看不出前提到结论的推理过程、不适用于命题变元数量多时
 - 推理演算：引入推理规则，使用推理规则和基本推理公式，逐步由前提推出结论
推演层次清晰，近似于数学推理，易于推广



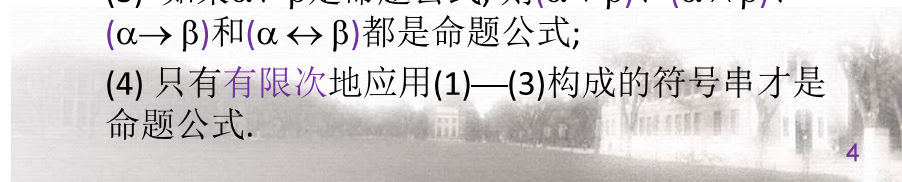
内容提要

- 自然推理系统P
- 推理规则
- 推理演算



自然推理系统P定义

- 字母表：
 - 命题变元符号：p, q, r, ...
 - 联结词符号： $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
 - 括号与逗号：(), ,
- 命题公式：定义1.6
 - (1) 任何命题变元都是命题公式;
 - (2) 如果 α 是命题公式, 则 $(\neg \alpha)$ 也是命题公式;
 - (3) 如果 α 、 β 是命题公式, 则 $(\alpha \vee \beta)$ 、 $(\alpha \wedge \beta)$ 、 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 都是命题公式;
 - (4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题公式.



自然推理系统P定义

推理规则

- 1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提
- 2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提
- 3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式的子公式都可以用等值的公式（L2-3 常用等值式）置换
- 4) 由推理定律（L2-6 重要的推理定律）和结论引入规则所导出的推理规则

5

推理规则

- (1) 前提引入规则
- (2) 结论引入规则
- (3) 置换规则
- (4) 假言推理规则

$$A \rightarrow B$$

$$A$$

$$\therefore B$$

- (5) 附加规则

$$A$$

$$\therefore A \vee B$$

- (6) 化简规则

$$A \wedge B$$

$$\therefore A$$

- (7) 拒取式规则

$$A \rightarrow B$$

$$\neg B$$

$$\therefore \neg A$$

- (8) 假言三段论规则

$$A \rightarrow B$$

$$B \rightarrow C$$

$$\therefore A \rightarrow C$$

6

推理规则

- (9) 析取三段论规则

$$A \vee B$$

$$\neg B$$

$$\therefore A$$

- (10) 构造性二难推理规则

$$A \rightarrow B$$

$$C \rightarrow D$$

$$A \vee C$$

$$\therefore B \vee D$$

- (11) 破坏性二难推理规则

$$A \rightarrow B$$

$$C \rightarrow D$$

$$\neg B \vee \neg D$$

$$\therefore \neg A \vee \neg C$$

- (12) 合取引入规则

$$A$$

$$B$$

$$\therefore A \wedge B$$

7

直接证明法

例 构造下面推理的证明：

前提： $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论： $r \wedge (p \vee q)$

证明 ① $p \rightarrow s$

前提引入

② $\neg s$

前提引入

③ $\neg p$

①②拒取式

④ $p \vee q$

前提引入

⑤ q

③④析取三段论

⑥ $q \rightarrow r$

前提引入

⑦ r

⑤⑥假言推理

⑧ $r \wedge (p \vee q)$

⑦④合取引入

推理正确， $r \wedge (p \vee q)$ 是有效结论

8

直接证明法

例 构造推理的证明: 若明天是星期一或星期三, 我就有课. 若有课, 今天必需备课. 我今天下午没备课. 所以, 明天不是星期一和星期三.

解 设 p : 明天是星期一, q : 明天是星期三,

r : 我有课, s : 我备课

前提: $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论: $\neg p \wedge \neg q$



9

直接证明法

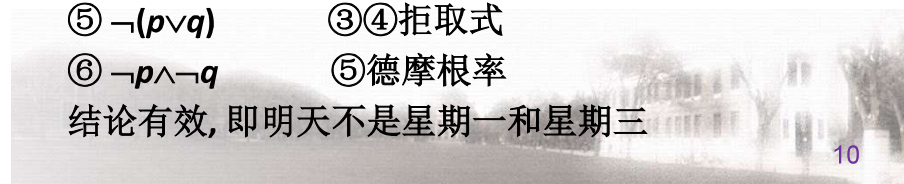
前提: $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论: $\neg p \wedge \neg q$

证明

- | | |
|------------------------------|-------|
| ① $r \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ② $\neg s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg r$ | ①②拒取式 |
| ④ $(p \vee q) \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ⑤ $\neg(p \vee q)$ | ③④拒取式 |
| ⑥ $\neg p \wedge \neg q$ | ⑤德摩根率 |

结论有效, 即明天不是星期一和星期三



10

附加前提证明法

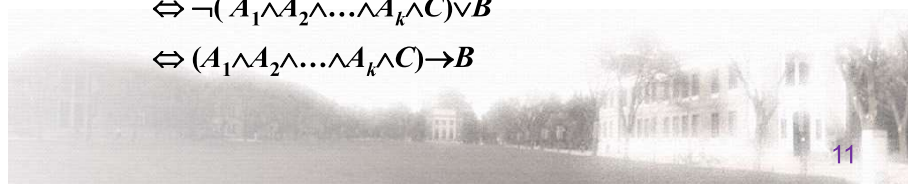
| | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 欲证明 | 等价地证明 |
| 前提: A_1, A_2, \dots, A_k | 前提: A_1, A_2, \dots, A_k, C |
| 结论: $C \rightarrow B$ | 结论: B |

理由: $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \vee B$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B$



11

附加前提证明法

例 构造下面推理的证明:

前提: $\neg p \vee q, \neg q \vee r, r \rightarrow s$

结论: $p \rightarrow s$

- | | |
|---------------------|---------|
| 证明 ① p | 附加前提引入 |
| ② $\neg p \vee q$ | 前提引入 |
| ③ q | ①②析取三段论 |
| ④ $\neg q \vee r$ | 前提引入 |
| ⑤ r | ③④析取三段论 |
| ⑥ $r \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ⑦ s | ⑤⑥假言推理 |

推理正确, $p \rightarrow s$ 是有效结论



12

归谬法（反证法）

欲证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: B

将 $\neg B$ 加入前提, 若推出矛盾, 则得证推理正确.

理由: $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \rightarrow R \wedge \neg R, R \text{ 为任意命题公式}$

13

归谬法

例 构造下面推理的证明

前提: $\neg(p \wedge q) \vee r, r \rightarrow s, \neg s, p$

结论: $\neg q$

证明 用归谬法

① q 结论否定引入

② $r \rightarrow s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

14

归谬法

⑤ $\neg(p \wedge q) \vee r$ 前提引入

⑥ $\neg(p \wedge q)$ ④⑤析取三段论

⑦ $\neg p \vee \neg q$ ⑥置换

⑧ $\neg p$ ①⑦析取三段论

⑨ p 前提引入

⑩ $\neg p \wedge p$ ⑧⑨合取引入

推理正确, $\neg q$ 是有效结论

15

归谬法

例 用反证法证明 $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$ (二难推论)

前提: $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R$

结论: R

证明 用归谬法

① $\neg R$ 结论否定引入

② $P \rightarrow R$ 前提引入

③ $\neg P$ ①②拒取式

④ $Q \rightarrow R$ 前提引入

⑤ $\neg Q$ ①④拒取式

16

归谬法

- ⑥ $P \vee Q$ 前提引入
 ⑦ P ⑤⑥析取三段论
 ⑧ $P \wedge \neg P$ ③⑦合取引入

推理正确, R 是有效结论

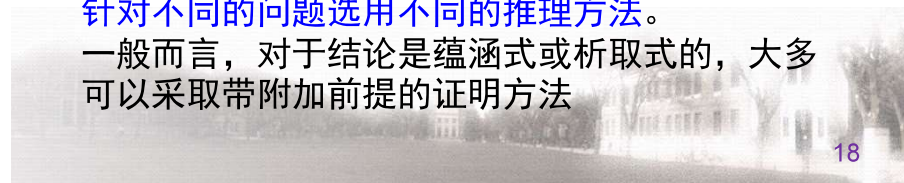


17

三种证明方法之间的关系

$$\begin{aligned} & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow R \wedge \neg R && \text{反证法} \\ \Leftrightarrow & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow \neg B \rightarrow (R \wedge \neg R) && \text{附加前提} \\ \Leftrightarrow & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow \neg \neg B \vee (R \wedge \neg R) && \text{证明法} \\ \Leftrightarrow & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B && \text{直接法} \end{aligned}$$

对于命题逻辑推理而言, 任何一个问题的推理, 都可以采取三种推理方法中的任何一种来证明, 针对不同的问题选用不同的推理方法。
 一般而言, 对于结论是蕴涵式或析取式的, 大多可以采取带附加前提的证明方法



18

消解证明法

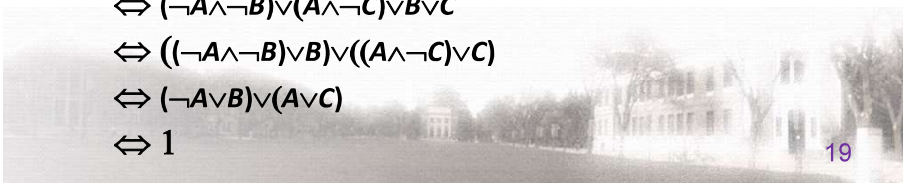
归结规则

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \vee C \\ \hline \therefore B \vee C \end{array}$$

$$(A \rightarrow C) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (A \vee \neg A) \rightarrow (B \vee C)$$

理由 $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \vee (B \vee C) \\ & \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee B \vee C \\ & \Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \vee ((A \wedge \neg C) \vee C) \\ & \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (A \vee C) \\ & \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$



19

消解证明法

1. 将每一个前提化成等值的合取范式, 设所有合取范式的全部简单析取式为 A_1, A_2, \dots, A_t
2. 将结论的否定化成等值的合取范式 $B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_s$, 其中每个 B_j 是简单析取式
3. 以 A_1, A_2, \dots, A_t 和 B_1, B_2, \dots, B_s 为前提, 使用归结规则推出 0

除前提引入规则外, 只使用归结规则



20

消解证明法

例 用消解证明法构造下面推理的证明:

前提: $(p \rightarrow q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论: $p \wedge \neg q$

解 $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow$
 $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$r \rightarrow s \Leftrightarrow \neg r \vee s$

$\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

把推理的前提改写成

前提: $p \vee r, \neg q \vee r, \neg r \vee s, \neg s, \neg p \vee q$

(结论均为0, 不必写出)

21

消解证明法

前提: $p \vee r, \neg q \vee r, \neg r \vee s, \neg s, \neg p \vee q$

证明 ① $p \vee r$

前提引入

② $\neg p \vee q$

前提引入

③ $q \vee r$

①②归结

④ $\neg q \vee r$

前提引入

⑤ r

③④归结

⑥ $\neg r \vee s$

前提引入

⑦ s

⑤⑥归结

⑧ $\neg s$

前提引入

⑨ 0

⑦⑧合取引入

22

命题逻辑推理的应用

- 举例: 符号化下面的语句, 并用演绎法证明结论是否有效。
- 或者下午是天晴, 或者是下雨; 如果下午是天晴, 则我将去看电影; 如果下午我去看电影, 我就不看书。所以: 如果我下午看书, 则下午天在下雨。

设: P: 下午天晴; Q: 下午下雨; R: 下午去看电影; S: 下午看书

前提: $P \vee Q, P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S$

结论: $S \rightarrow Q$

23

命题逻辑推理的应用

前提: $P \vee Q, P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S$

结论: $S \rightarrow Q$

证明 ① S

附加前提引入

② $R \rightarrow \neg S$

前提引入

③ $\neg R$

①②拒取式

④ $P \rightarrow R$

前提引入

⑤ $\neg P$

③④拒取式

⑥ $P \vee Q$

前提引入

⑦ Q

⑤⑥析取三段论

推理正确, $S \rightarrow Q$ 是有效结论

24

命题逻辑推理的应用

- 例：符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下

A或B盗窃了x；若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；若B证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；若B证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时屋里灯光灭了。

所以：B盗窃了x。

- 设：P:A盗窃了x；Q:B盗窃了x；R:作案时间在午夜前；S:B证词正确；T:午夜时灯光灭了。

前提： $P \vee Q, P \rightarrow \neg R, S \rightarrow \neg T, \neg S \rightarrow R, T$

结论：Q

25

命题逻辑推理的应用

前提： $P \vee Q, P \rightarrow \neg R, S \rightarrow \neg T, \neg S \rightarrow R, T$

结论：Q

证明：直接法（反证法请同学们自行完成）：

- | | |
|--------------------------|---------|
| ① T | 前提引入 |
| ② $S \rightarrow \neg T$ | 前提引入 |
| ③ $\neg S$ | ①②拒取式 |
| ④ $\neg S \rightarrow R$ | 前提引入 |
| ⑤ R | ③④假言推理 |
| ⑥ $P \rightarrow \neg R$ | 前提引入 |
| ⑦ $\neg P$ | ⑤⑥拒取式 |
| ⑧ $P \vee Q$ | 前提引入 |
| ⑨ Q | ⑦⑧析取三段论 |

推理正确, Q是有效结论

26

Open Question Points: 10

Setting

符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

如果马会飞或者羊吃草，则母鸡是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子就会跑；烤熟的鸭子不会跑。

所以：羊不吃草。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

27

小结

- 自然推理系统P
- 推理规则
- 推理演算

29