

单元3.3 基本的集合恒等式

第六章 集合代数

6.4 集合恒等式

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

(1) 集合恒等式

– 13组最基本的集合恒等式

(2) 半形式化方法

– 推导集合等式和包含式

集合恒等式(①~④)

设 E 是全集, A, B, C 为 E 的任意子集。

① 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$

② 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

③ 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

④ 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

集合恒等式(⑤~⑥)

⑤ 德·摩根律

绝对形式 $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

相对形式 $E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B)$

$$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$$

⑥ 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

基本的等值式(⑦~⑬)

- ⑦ 零律 $A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- ⑧ 同一律 $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$
- ⑨ 排中律 $A \cup \sim A = E$
- ⑩ 矛盾律 $A \cap \sim A = \emptyset$
- ⑪ 余补律 $\sim \emptyset = E, \sim E = \emptyset$
- ⑫ 双重否定律 $\sim(\sim A) = A$
- ⑬ 补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$ (消去差集运算符)

例

由定义证明下面的恒等式:

(1) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) 零律: $A \cap \emptyset = \emptyset$

(3) 排中律: $A \cup \sim A = E$

分配律的证明

(1) 对于任意的 x ,

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \text{ (命题逻辑分配律)}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

因而, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。 \square

零律的证明

(2) 对于任意的 x ,

$$x \in A \cap \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \text{ (命题逻辑零律)}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset,$$

因而, $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。 \square

排中律的证明

(3) 对于任意的 x ,

$$x \in A \cup \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg(x \in A)$$

$$\Leftrightarrow 1 \quad (\text{命题逻辑排中律})$$

$$\Leftrightarrow x \in E, \quad \text{因而, } A \cup \sim A = E. \quad \square$$

10

差集的性质

集合差集运算具有下列性质:

$$(1) A - B = A - (A \cap B);$$

$$(2) A - B = A \cap \sim B \quad (\text{补交转换律})$$

$$(3) A \cup (B - A) = A \cup B;$$

$$(4) A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

石纯一等,《数理逻辑与集合论》第二版,清华大学出版社,第9.5节

14

差集的性质

证 (1): $A - B = A - (A \cap B)$;

$$\forall x, x \in A - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow x \in A - B$$

15

对称差的性质

集合对称差运算具有下列性质:

$$(1) \text{交换律: } A \oplus B = B \oplus A;$$

$$(2) \text{结合律: } (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$(3) \text{分配律: } A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C);$$

$$(4) \text{同一律: } A \oplus \emptyset = A$$

$$(5) \text{零律: } A \oplus A = \emptyset$$

$$(6) \quad A \oplus (A \oplus B) = B$$

16

对称差的性质

证明(3)分配律: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$;

$$\begin{aligned} & A \cap (B \oplus C) \\ &= A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \\ &= A \cap ((B \cap \sim C) \cup (C \cap \sim B)) \\ &= (A \cap B \cap \sim C) \cup (A \cap C \cap \sim B) \\ &= (A \cap B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap C \cap \sim B) \cup (A \cap C \cap \sim A) \\ &= ((A \cap B) \cap (\sim C \cup \sim A)) \cup ((A \cap C) \cap (\sim B \cup \sim A)) \\ &= ((A \cap B) \cup \sim (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cup \sim (A \cap B)) \\ &= (A \cap B) \oplus (A \cap C) \end{aligned}$$

17

子集的性质

集合间的 \subseteq 具有下列性质:

- (1) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$;
- (2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$
- (3) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$;
- (4) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$;
- (5) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - D)$;
- (6) $C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

18

例

证明: $(A \cup B) = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B) = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

设命题1: $(A \cup B) = B$, 命题2: $A \subseteq B$, 命题3: $(A \cap B) = A$, 命题4: $A - B = \emptyset$

$1 \Rightarrow 2$: 已知 $(A \cup B) = B$, 任取 x ,

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B$
所以 $A \subseteq B$ 。

$2 \Rightarrow 3$: 已知 $A \subseteq B$, 则 $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A$,

$x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.
所以 $(A \cap B) = A$ 。

19

例

$3 \Rightarrow 4$: 已知 $(A \cap B) = A$,

$A - B = A \cap \sim B = (A \cap B) \cap \sim B = A \cap (B \cap \sim B) = \emptyset$

$4 \Rightarrow 1$: 已知 $A - B = \emptyset$,

$A \cup B = B \cup A = B \cup (A - B) = B \cup \emptyset = B$

其中, $B \cup A = B \cup (A - B)$ 见差集运算性质(3)。

20

例

已知 $A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C$, 证明 $B=C$ 。

证明1:

$$\begin{aligned} B &= B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ &= (A \cup C) \cap C = C \end{aligned}$$

证明2: 反证法。请同学自己尝试。

21

幂集的性质

集合幂集运算具有下列性质:

- 1) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$;
- 2) $A=B \Leftrightarrow P(A)=P(B)$;
- 3) $P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$;
- 4) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$;
- 5) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$;
- 6) $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$ 。

22

幂集性质(1)的证明

(1) 先证必要性。

对于任意的 x ,

$$x \in P(A)$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A$$

$$\Rightarrow x \subseteq B \quad (A \subseteq B)$$

$$\Leftrightarrow x \in P(B),$$

故有 $P(A) \subseteq P(B)$ 。

再证充分性。

对于任意的 y ,

$$y \in A$$

$$\Leftrightarrow \{y\} \in P(A)$$

$$\Rightarrow \{y\} \in P(B) \quad (P(A) \subseteq P(B))$$

$$\Leftrightarrow y \in B$$

所以, $A \subseteq B$ 。

23

幂集性质(6)的证明

对于任意的集合 x ,

若 $x=\emptyset$, $x \in P(A) \cup P(B)$ 且 $x \in (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$ 。若 $x \neq \emptyset$,

$$x \in P(A-B)$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A-B \Rightarrow x \subseteq A \wedge x \not\subseteq B$$

$$\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \notin P(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in (P(A)-P(B))$$

综上所述, 可知 $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\emptyset\}$ 。

24

小结

(1) 集合恒等式

- 13组最基本的集合恒等式

(2) 半形式化方法

- 推导集合等式和包含式

