Tsinghua University

单元3.1 集合的概念

第六章 集合代数

6.1 集合的概念

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

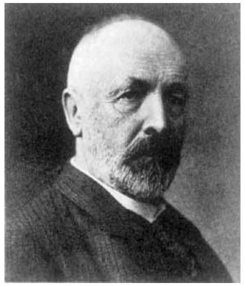
内容提要

- 关于集合论
- 集合的基本概念
- 集合之间的关系

关于集合论

集合论是基本的数学描述工具

- 集合是数学中的基本概念
- 诞生于十九世纪
- 创始人是康托



康托（1845~1918）

集合论体系

- 朴素集合论（康托集合论体系）
- 公理集合论

集合

在朴素集合论中，不能精确地定义什么是集合。

➢ 直观上，一些事物汇集到一起组成一个整体称为集合，而这些事物就是集合的元素。

人们用大写英文字母**A,B,C,...**表示集合；

用小写英文字母**a,b,c,...**表示集合中的元素；

用$a \in A$ 表示a是A的元素，读作“a属于A”；

用$a \notin A$表示a不是A的元素，读作“a不属于A”。

https://zhuanlan.zhihu.com/p/60177203

集合的表示

(1) 列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，例如，A={a,b,c,d}，B={2,4,6,…}。

(2) 描述法：用谓词P(x)表示x具有性质P，用{x|P(x)}表示具有性质 P 的集合。 例如，$P_1(x)$: x是英文字母，$P_2(x)$: x是十进制数字，$C=\{x|P_1(x)\}$ 表示26个英文字母的集合，$D=\{x|P_2(x)\}$ 表示10个十进制数字的集合。

集合表示的注意事项

(1) 集合中的元素是各不相同的。

(2) 集合中的元素不规定顺序。

(3) 集合的两种表示法可以互相转化，

例如， B={2,4,6,…}可用描述法表示为

B={x|x>0且x是偶数} 或

B={x|x=2(k+1), k为非负整数}。

常用的数集合

N： 自然数集合 N = {0,1,2,3,…}

Z： 整数集合 $Z = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

Q： 有理数集合

R： 实数集合

C： 复数集合

集合之间的关系

定义 设A,B为二集合，若B中的元素都是A中的元素，则称B是A的子集，也称A包含B，或B包含于A, 记作$B\subseteq A$，其符号化形式为 $B\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$。

若B不是A的子集， 则记作$B\not\subseteq A$，其符号化形式为

$B\not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x\in B\wedge x\notin A)$。

例：设 A={a,b,c}，B={a,b,c,d}，C={a,b}，则 $A\subseteq B$，$C\subseteq A$，$C\subseteq B$。

相等

定义 设A,B为二集合，若A包含B且B包含A，则称A与B相等，记作A=B，即 $A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in B \leftrightarrow x\in A)$。

例：设 $A=\{2\}$，$B=\{1,4\}$，$C=\{x|x^2-5x+4=0\}$，

D={x|x为偶素数}，则A=D，且B=C。

集合之间包含关系的性质

设A,B,C为三个集合，则以下三命题为真

(1) $A\subseteq A$；

(2) 若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则 $B\not\subseteq A$；

(3) 若$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

真子集

定义 设A,B为二集合，若A为B的子集且$A\neq B$，则称A为B的真子集，或称B真包含A，记作$A\subset B$，即$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B$。若A不是B的真子集，则记作$A\not\subset B$，其符号化形式为$A\not\subset B \Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)\vee A=B$。

设 A,B,C为三个集合，下面三命题为真：(1) $A\not\subset A$；(2) 若 $A\subset B$，则 $B\not\subset A$；(3) 若 $A\subset B$，且$B\subset C$，则$A\subset C$。

空集

定义 不拥有任何元素的集合称为空集合，简称为空集，记作$\varnothing$。

$\{x|x^2+1=0\wedge x\in R\}$ 和 $\{(x,y)|x^2+y^2<0\wedge x,y\in R\}$ 都是空集。

定理6. 1 空集是一切集合的子集。

证明 对于任意集合A，均有$\varnothing\subseteq A$成立，这是因为

$\varnothing\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A) \Leftrightarrow 1$. □

空集的惟一性

推论 空集是惟一的。

证明 设$\varnothing_1$与$\varnothing_2$都是空集，由定理6.1可知 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \wedge \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$ ，所以 $\varnothing_1 = \varnothing_2$ 。 □

由推论可知，无论空集以什么形式出现，它们都是相等的，所以 $\{x \mid x \neq x\} = \{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in R\} = \varnothing$。

空集是“最小”的集合，有没有最大的集合呢？

全集

定义 如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集，则称该集合为全集，记作E。

从定义可以看出，全集是相对的，视具体情况而定，因此不唯一。例如，讨论区间(a,b)上的实数性质时，可以取(a,b)为全集，也可以取$[a,b)$、$(a,b]$、$(a,+\infty)$、R等为全集。

给定若干个集合之后，都可以找到包含它们的全集。在今后讨论中，所涉及的集合都可以看成是某个全集E的子集。

幂集

定义 设A为一个集合，称由A的全体子集组成的集合为A的幂集，记作$P(A)$。

用描述法表示为 $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$。

说明：

(1) 在概率论中，用$P(A)$表示事件A的概率。

(2) 有的书上用2^A表示A的幂集。(为什么?)

集合的元素个数

规定：$\varnothing$为0元集，含1个元素的集合为单元集或1元集，含2个元素的集合为2元集，……，含n个元素的集合为n元集$(n \geq 1)$。

用$|A|$表示集合A中的元素个数，当A中的元素个数为有限数时，A为有穷集或有限集 。

定理 设集合A的元素个数$|A|=n$，则$|P(A)|=2^n$。

求P(A)的步骤

为了求出给定集合A的幂集，先求A的由低到高元的所有子集，再将它们组成集合。

设A={a,b,c}，求P(A)的步骤如下：

0元子集为∅；1元子集为{a}、{b}、{c}；

2元子集为{a,b}、{a,c}、{b,c}；3元子集为{a,b,c}=A；

所以，A的幂集为

P(A)={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c}, {b,c},{a,b,c}}。

小结

- 集合的基本概念
  - 集合、集合的表示
  - 集合的元素个数
- 集合之间的关系
  - 子集、相等、真子集、空集、全集
  - 幂集