单元3.9 等价关系与划分

第七章 二元关系
7.6 等价关系与划分

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

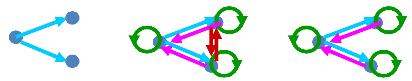
- 等价关系、等价类、商集
- 同余关系
- 划分、划分的块

等价关系

定义2.14 设A≠∅且R⊆A×A, 若R是自反、对称、传递的，则说 R是等价关系.

	关系	自反	对称	传递	等价关系
R_1	x与y同年生	√	√	√	√
R_2	x与y同姓	√	√	√	√
R_3	x的年龄不比y小	√	×	√	×
R_4	x与y选修同门课程	√	√	×	×
R_5	x的体重比y重	×	×	√	×

例



例 设A≠∅且R⊆A×A，对R依次求三种闭包, 共有6种不同顺序, 其中哪些顺序一定导致等价关系? (说明: tsr(R)=t(s(r(R))))

解 由于 sr(R)=rs(R), tr(R)=rt(R), st(R)⊆ts(R), 所以6种顺序至多产生两种结果:

	tsr(R)=trs(R)=rts(R)	str(R)=srt(R)=rst(R)
自反	√	√
对称	√	√
传递	√	×
等价关系	√(等价闭包)	×

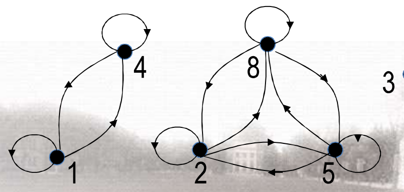
等价类

定义 设 R 是$A\neq\varnothing$上等价关系, $\forall x\in A$, 则 x关于R的等价类是 $[x]_R = \{ y \mid y\in A \wedge xRy \}$， 简称为x的等价类, 简记为[x]。

例 设 A={1,2,3,4,5,8}, A上模3同余关系

$R_3 = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3 \}$ 的等价类

[1]=[4]={1,4}, [2]=[5]=[8]={2,5,8}, [3]={3}



同余关系是等价关系

- 自反性

$$x-x=0\cdot n$$

- 对称性

$$x-y=k\cdot n \Rightarrow y-x=(-k)\cdot n$$

- 传递性

$$x-y=k_1\cdot n \wedge y-z=k_2\cdot n \Rightarrow x-z=(k_1+k_2)\cdot n$$

定理

定理 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系, 则$\forall x,y\in A$,

(1) $[x]_R\neq\varnothing$; (2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R\cap[y]_R=\varnothing$; (4) $\cup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$.

证明 (1) R自反 $\Rightarrow xRx \Rightarrow x\in[x]_R \Rightarrow [x]_R\neq\varnothing$.

(2) $\forall z,\ z\in[x]_R \Rightarrow zRx\wedge xRy \Rightarrow zRy \Rightarrow z\in[y]_R$.

所以$[x]_R\subseteq[y]_R$. 同理 $[x]_R\supseteq[y]_R$.

(3) (反证) 假设$\exists z,\ z\in[x]_R\cap[y]_R$, 则 $z\in[x]_R\cap[y]_R \Rightarrow zRx\wedge zRy \Rightarrow xRz\wedge zRy \Rightarrow xRy$, 这与$\neg xRy$矛盾!

(4) $\forall x\in A,\ x\in[x]_R\subseteq \cup\{[x]_R \mid x\in A\} \Rightarrow A\subseteq\cup\{[x]_R \mid x\in A\}$. $\forall x\in A,\ [x]_R\subseteq A \Rightarrow \cup\{ [x]_R \mid x\in A \}\subseteq A$. #

商集

定义 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系，A关于R的商集（简称A的商集）是 $A/R = \{ [x]_R \mid x\in A \}$。

- 显然 $\cup A/R = A$

- 例:设 A={1,2,3,4,5,8}, A上模3同余关系

$A/R_3 = \{ [1]_R, [2]_R, [3]_R \} = \{ \{1,4\}, \{2,5,8\}, \{3\} \}$

例

- $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$上等价关系有：I_A, E_A,

  $R_{ij}=I_A\cup\{<a_i,a_j>,<a_j,a_i>\}$, $a_i,a_j\in A$, $i\neq j$.

  $A/I_A=\{\ \{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\ \}$

  $A/E_A=\{\ \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\ \}$

  $A/R_{ij}=(A/I_A)\cup\{\{a_i,a_j\}\}-\{\{a_i\},\{a_j\}\}$

  $=\{\ \{a_1\},\ldots,\{a_{i-1}\}, \{a_{i+1}\},\ldots,\{a_{j-1}\},\{a_{j+1}\},\ldots,\{a_n\}, \{a_i,a_j\}\ \}$

  空关系$\varnothing$不是A上等价关系(非自反)

例

- $A=\{a,b,c\}$上全体等价关系共有5种

  $R_1=I_A$, $R_2=E_A$, $R_3=I_A\cup\{<b,c><c,b>\}$,
  $R_4=I_A\cup\{<a,c><c,a>\}$, $R_5=I_A\cup\{<a,b><b,a>\}$

- 商集：$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$, $\{\{a,b,c\}\}$, $\{\{a\},\{b,c\}\}$, $\{\{a,c\},\{b\}\}$, $\{\{a,b\},\{c\}\}$

还有其余的等价关系吗？(A上关系数$2^{3^2}=2^9=512$)

划分

定义 $A\neq\varnothing$的一个划分是$\mathcal{A}\subseteq P(A)$满足

(1) $\varnothing\notin\mathcal{A}$

(2) $\forall x,y(\ x,y\in\mathcal{A}\wedge x\neq y\Rightarrow x\cap y=\varnothing\ )$

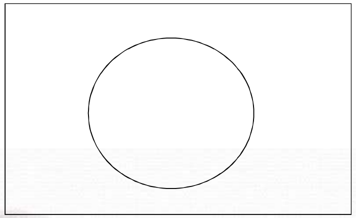
(3) $\cup\mathcal{A}=A$

$\mathcal{A}$中元素称为划分块(block).

划分举例

- 设$\varnothing\neq A_1,A_2,\ldots,A_n\subset E$

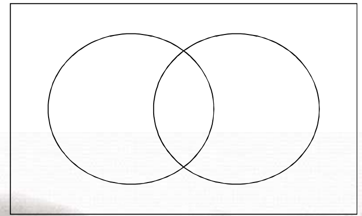
- $\mathcal{A}_i=\{A_i,\sim A_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$



划分举例

- 设$\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$
- $\mathcal{A}_{ij} = \{A_i \cap A_j, \sim A_i \cap A_j, A_i \cap \sim A_j, \sim A_i \cap \sim A_j\} - \{\varnothing\}$

  $i,j=1,2,\ldots,n \land i \neq j$

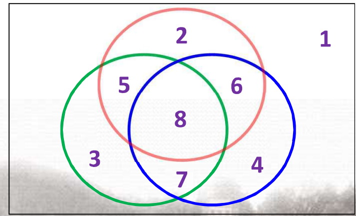


划分举例

- ……
- $\mathcal{A}_{12\ldots n} = \{\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_n, \ldots,$

  $\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_{n-1} \cap A_n, \ldots$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} - \{\varnothing\}$



定理

- 设$A \neq \varnothing$, 则

  (1) R是A上等价关系 $\Rightarrow$ 商集A/R是A的划分

  (2) $\mathcal{A}$是A的划分 $\Rightarrow$ 同块关系 $R_{\mathcal{A}}$

  $xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z \in \mathcal{A} \land x \in z \land y \in z)$

  是A上等价关系. #

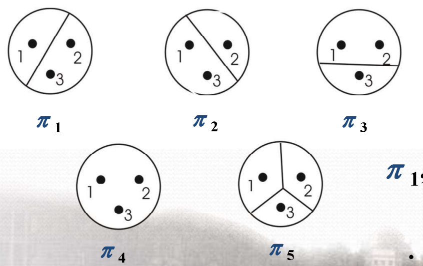
- $R_{\mathcal{A}}$称为由划分$\mathcal{A}$所定义的等价关系

  非空集合的等价关系与划分一一对应。

例

例 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.



π_4对应于全域关系E_A

π_5对应于恒等关系I_A

π_1, π_2和π_3分别对应于等价关系

$R_1=\{<2,3>,<3,2>\} \cup I_A$

$R_2=\{<1,3>,<3,1>\} \cup I_A$

$R_3=\{<1,2>,<2,1>\} \cup I_A$

例

例5 设$A=\{1,2,3,4\}$，在$A\times A$上定义二元关系

R： $<<x, y>,<u, v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v$，

求R 导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$ $|A\times A|=16$

根据有序对$<x,y>$的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分.

$(A\times A)/R=\{\{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\}, \{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\}, \{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\}\}$

Stirling子集数

- 把n个不同球放到k个相同盒子, 要求无空盒, 不同放法的总数

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

称为Stirling子集数。

- 把n元集分成k个非空子集的分法总数（课本P282）

Stirling子集数递推公式

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1, \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1, \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = C_n^2, \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1.$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}.$$

先把n-1个元素分成k个子集, 再加入第n个元素到其中之一

先把n-1个元素分成k-1个子集, 再让第n个元素自成一子集

例

- A={a,b,c}上有5种等价关系

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = 1 + 2^2 - 1 + 1 = 5$$

- A={a,b,c,d}上有15种等价关系

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = 1 + (2^3 - 1) + C_4^2 + 1 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

小结

- ~ 等价关系(自反, 对称, 传递)
  – 等价类[x], 商集A/R
  – 同余关系
- 划分, 块