Tsinghua University

单元1.8 树

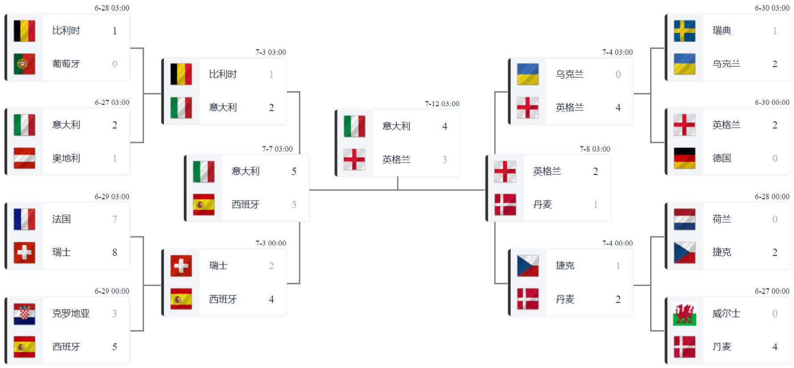
第16章 树

16.1 无向树及性质、16.2 生成树

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

应用举例

- 磁盘目录系统
- **2021年欧洲杯淘汰赛对阵图**

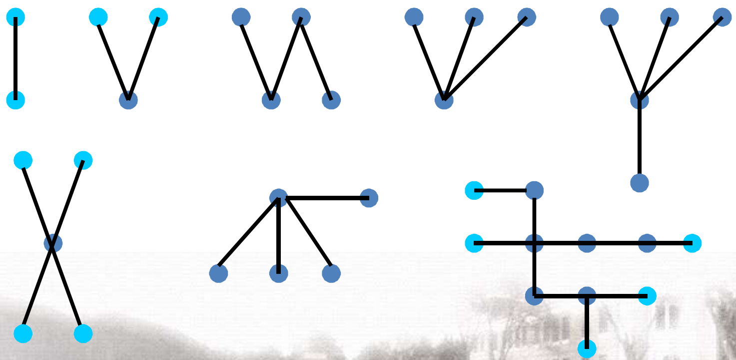


内容提要

- 无向树的定义与性质
- 生成树

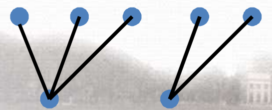
无向树

- 树: 连通无回图



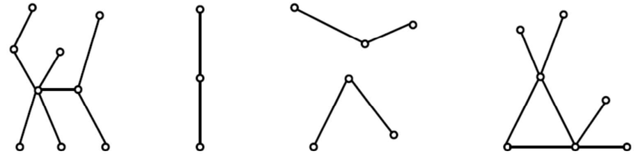
无向树

- 树(tree): 连通无回图, 常用T表示树
- 树叶(leaf): 树中1度顶点
- 分支点: 树中2度以上顶点
- 平凡树: 平凡图(无树叶,无分支点)
- 森林(forest): 无回图
- 森林的每个连通分支都是树



无向树

- 判断下图中哪些是树?



(a) (b) (c) (d)

树的等价定义

- 定理16.1: 设G=<V,E>是n阶m边无向图,则

  (1) G是树(连通无回)

⇔ (2) G中任何2顶点之间有唯一路径

⇔ (3) G无圈 $\wedge$ m=n-1

⇔ (4) G连通 $\wedge$ m=n-1

⇔ (5) G极小连通: 连通 $\wedge$ 所有边是桥

⇔ (6) G极大无回: 无圈 $\wedge$ 增加任何新边产生唯一圈

定理16.1证明(1)⇒(2)

- 证明: (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1)

(1) G是树(连通无回)

(2) G中任何2顶点之间有唯一路径

(1)⇒(2): $\forall u,v \in V$, G连通, u,v之间的短程线是路径. 如果u,v之间的路径不唯一, 则G中有回路, 矛盾!

定理16.1证明(2)⇒(3)

(2) G中任何2顶点之间有唯一路径

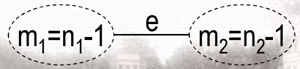
(3) G无圈 ∧ $m=n-1$

- 证明(续): (2)⇒(3): 任2点之间有唯一路径⇒无圈 (反证: 有圈⇒存在2点,它们之间有2条路径.)

$m=n-1$(归纳法): $n=1$时,$m=0$. 设$n \le k$时成立,

当$n=k+1$时, 任选1边e, G-e有2个连通分支,

$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1$.



定理16.1证明(3)⇒(4)

(3) G无圈 ∧ $m=n-1$

(4) G连通 ∧ $m=n-1$

- 证明(续): (3)⇒(4): G连通: 假设G有s个连通分支, 则每个连通分支都是树, 所以

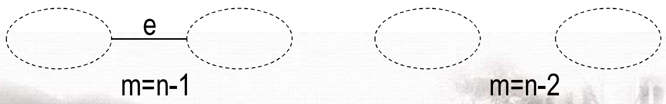
$m=m_1+m_2+\ldots+m_s=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)$
$=n_1+n_2+\ldots+n_s-s=n-s=n-1$, 所以$s=1$.

定理16.1证明(4)⇒(5)

(4) G连通 ∧ $m=n-1$

(5) G极小连通: 连通 ∧ 所有边是桥

- 证明(续): (4)⇒(5): 所有边是桥: $\forall e \in E$, G-e是n阶$(n-2)$边图, 一定不连通(连通⇒$m \ge n-1$), 所以e是割边.

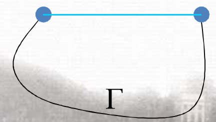


定理16.1证明(5)⇒(6)

(5) G极小连通: 连通 ∧ 所有边是桥

(6) G极大无回: 无圈 ∧ 增加任何新边得唯一圈

- 证明(续): (5)⇒(6): 所有边是桥⇒无圈. $\forall u,v \in V$, G连通, u,v之间有唯一路径Γ, 则 $\Gamma \cup (u,v)$是唯一的圈.

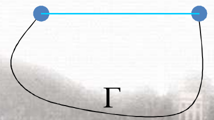


定理16.1证明(6)⇒(1)

(6) G极大无回：无圈 ∧ 增加任何新边得唯一圈

(1) G是树(连通无回)

- 证明(续)：**(6)⇒(1)：G连通：∀u,v∈V, G∪(u,v)有唯一的圈C, C-(u,v)是u,v之间的路径. #**



树的特点

- 在结点给定的无向图中，
  - 树是边数最多的无回路图 （极大无回）
  - 树是边数最少的连通图 （极小连通）
- 由此可知，在无向图G (n阶m条边) 中，
  - 若m < n-1， 则G 是不连通的
  - 若m > n-1， 则G 必含回路

定理16.2

- 非平凡树至少有**2**个树叶
- 证明：设**T**有**x**个树叶, 由定理**16.1**和握手定理,

$$2m = 2(n-1) = 2n-2 = \Sigma d(v)$$

$$= \Sigma_{v是树叶} d(v) + \Sigma_{v是分支点} d(v)$$

$$\geq x + 2(n-x) = 2n-x, \text{ 所以 } x \geq 2. \#$$

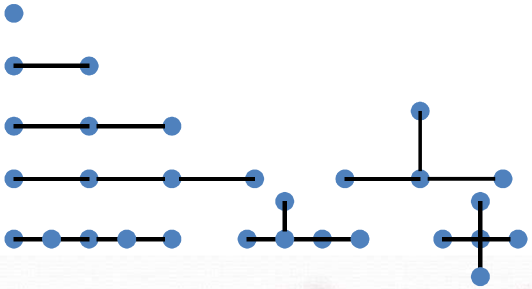
无向树的计数t_n

t_n: n(≥1)阶非同构无向树的个数

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	9	47	17	48,629	25	104,636,890
2	1	10	106	18	123,867	26	279,793,450
3	1	11	235	19	317,955	27	751,065,460
4	2	12	551	20	823,065	28	2,023,443,032
5	3	13	1,301	21	2,144,505	29	5,469,566,585
6	6	14	3,159	22	5,623,756	30	14,830,871,802
7	11	15	7,741	23	14,828,074	31	40,330,829,030
8	23	16	19,320	24	39,299,897	32	109,972,410,221

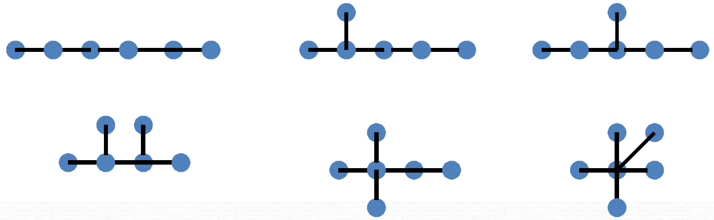
无向树的枚举

- 画出所有非同构的**n**阶无向树
- **n=1:**
- **n=2:**
- **n=3:**
- **n=4:**
- **n=5:**



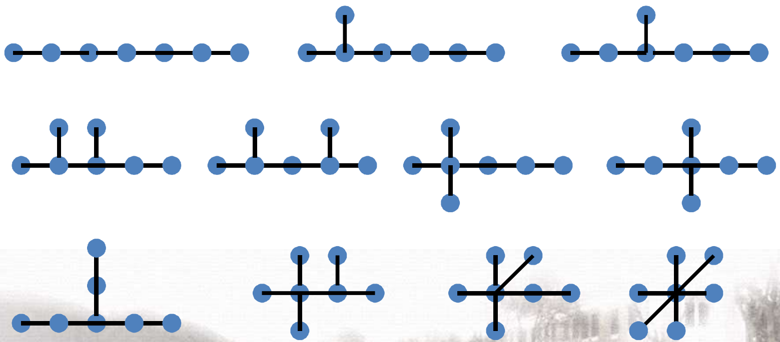
6阶非同构无向树

- **n=6: t_6=6**



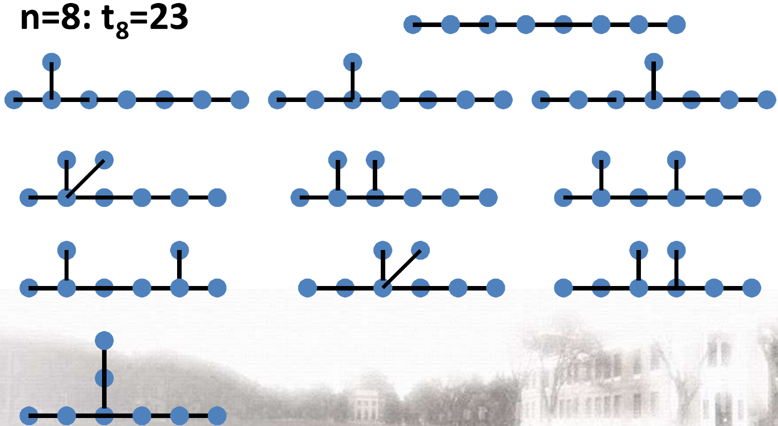
7阶非同构无向树

- **n=7: t_7=11**



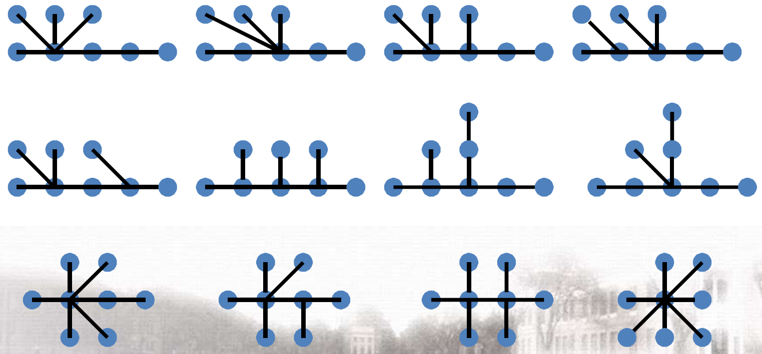
8阶非同构无向树

- **n=8: t_8=23**



8阶非同构无向树(续)

- **n=8: t_8=23**



8阶非同构无向树(解法2)

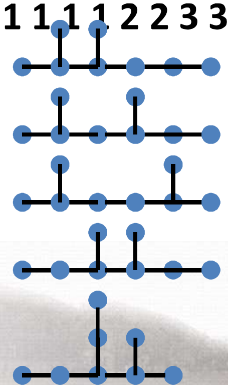
- **n=8: 度数列有11种:**

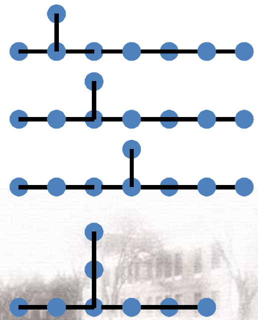
(1)^{1} 1 1 1 1 1 1 1 7
(2)^{1} 1 1 1 1 1 1 2 6
(3)^{1} 1 1 1 1 1 1 3 5
(4)^{1} 1 1 1 1 1 1 4 4
(5)^{2} 1 1 1 1 1 2 2 5
(6)^{3} 1 1 1 1 1 2 3 4
(7)^{1} 1 1 1 1 1 3 3 3
(8)^{5} 1 1 1 1 2 2 3 3
(9)^{3} 1 1 1 1 2 2 2 4
(10)^{4} 1 1 1 2 2 2 2 3
(11)^{1} 1 1 2 2 2 2 2 2

8阶非同构无向树(解法2)

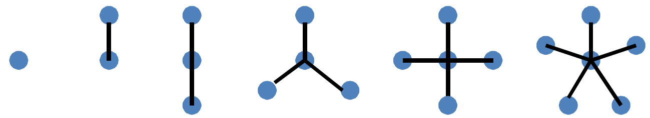
- **n=8: 度数列有11种:**

(8)^{5} 1 1 1 1 2 2 3 3 **(10)^{4} 1 1 1 2 2 2 2 3**





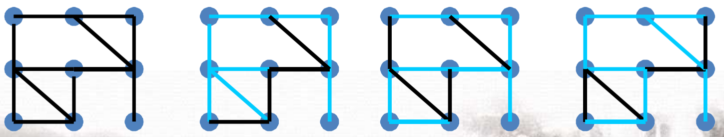
星: $S_n=K_{1,n-1}$



S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6

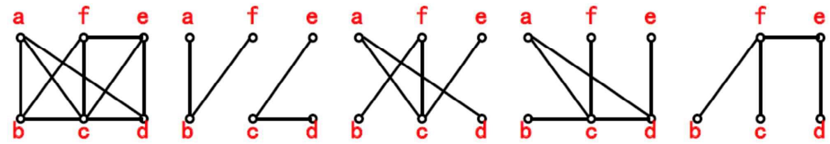
生成树

- 生成树: $T \subseteq G \wedge V(T)=V(G) \wedge T$是树
- 树枝(tree edge): $e \in E(T)$, $n-1$条
- 弦(chord): $e \in E(G)-E(T)$, $m-n+1$条
- 余树: $G[E(G)-E(T)] = \overline{T}$



生成树

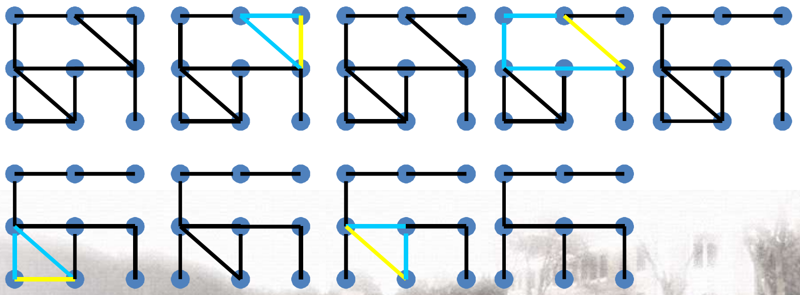
- 判断下图是否为(a)的生成树



(a) (b) (c) (d) (e)

定理16.3

- 无向图G连通 $\Leftrightarrow$ G有生成树
- 证明: ($\Leftarrow$) 显然. ($\Rightarrow$) 破圈法. #



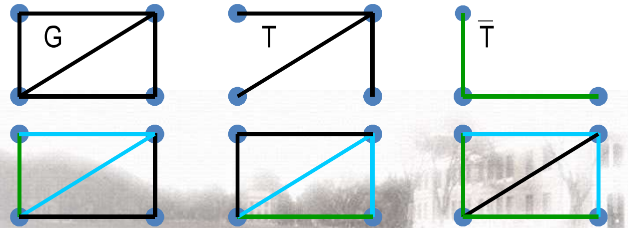
三个推论和一个定理

- 推论1: G是n阶m边无向连通图$\Rightarrow m \geq n-1$. #
- 推论2: T是n阶m边无向连通图G的生成树 $\Rightarrow$ $|E(\overline{T})|=m-n+1$. #
- 推论3: T是无向连通图G的生成树, C是G中的圈 $\Rightarrow$ $|E(\overline{T})| \cap |E(C)| \neq \varnothing$. （弦，圈）
- 定理: 设T是连通图G的生成树, S是G中的割集, 则$E(\overline{T}) \cap S \neq \varnothing$. （树枝，割集）

连通	弦	回路
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
无回	树枝	割集

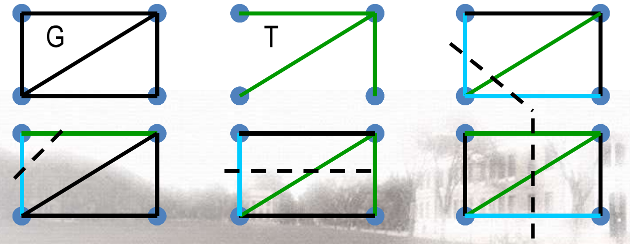
推论3

- 设T是连通图G的生成树, C是G中的圈, 则 E($\overline{T}$)∩E(C)≠∅.
- 证明: (反证) 若E($\overline{T}$)∩E(C)=∅, 则 E(C)⊆E(T), T中有回路C, T是树, 矛盾! #



定理

- 设T是连通图G的生成树, S是G中的割集, 则 E(T)∩S≠∅.
- 证明: (反证) 若E(T)∩S=∅, 则 T⊆G-S,则G-S连通, S是割集, 矛盾! #



定理16.4

- 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的弦, 则 T∪e中存在由弦e和其他树枝组成的圈, 并且不同的弦对应不同的圈.

定理16.4证明

- 证明: 设e=(u,v), 设P(u,v)是u与v之间在T中的唯一路径, 则P(u,v)∪e是由弦e和其他树枝组成的圈.

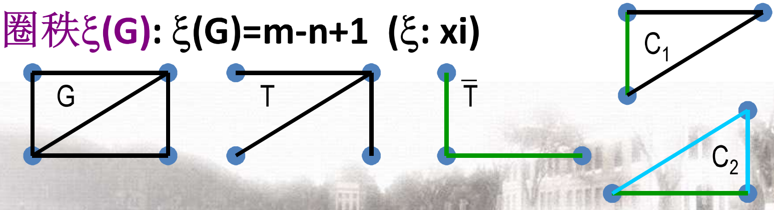
  设e_1,e_2是不同的弦,对应的圈是C_{e1},C_{e2}, 则 $e_1 \in E(C_{e1})-E(C_{e2})$, $e_2 \in E(C_{e2})-E(C_{e1})$, 所以$C_{e1} \neq C_{e2}$. #

定理(破圈法)

- 设G是无向连通图, $G' \subseteq G$, G'无圈, 则G中存在生成树T, $G' \subseteq T \subseteq G$.
- 证明: 不妨设G有圈C_1(否则G是树, $T=G$). 则$\exists e_1 \in E(C_1)-E(G')$, 令$G_1=G-\{e_1\}$.
  若G_1还有圈C_2, 则$\exists e_2 \in E(C_2)-E(G')$,
  令$G_2=G_1-\{e_2\}=G-\{e_1,e_2\}$. 重复进行,
  直到$G_k=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$无圈为止, $T=G_k$. #

基本回路

- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $\overline{T}=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_{m-n+1}\}$
- 基本回路: $T \cup e'_r$中的唯一回路C_r
- 基本回路系统: $\{C_1,C_2,\ldots,C_{m-n+1}\}$
- 圈秩$\xi(G)$: $\xi(G)=m-n+1$ (ξ: xi)



定理16.5

- 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的树枝, 则G中存在由树枝e和其他弦组成的割集, 并且不同的树枝对应不同的割集.

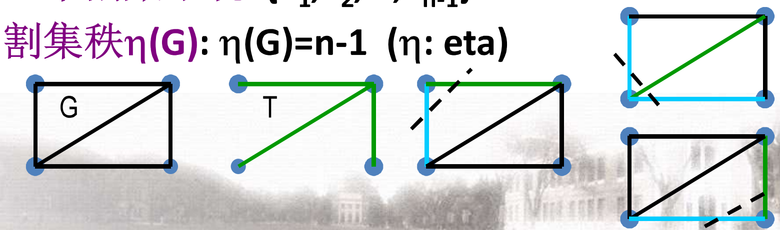
定理16.5证明

- 证明: e是T的桥, 设$T-e$的两个连通分支是T_1与T_2, 则$E(G) \cap (V(T_1) \& V(T_2))$是由树枝$e$和其他弦组成的割集.

  设e_1,e_2是不同的树枝,对应的割集是S_{e1},S_{e2}, 则$e_1 \in S_{e1}-S_{e2}$, $e_2 \in S_{e2}-S_{e1}$, 所以$S_{e1} \neq S_{e2}$. #

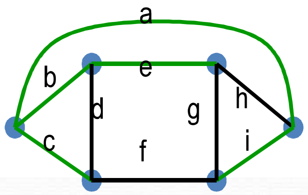
基本割集

- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $T=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\}$
- 基本割集: e_r对应的唯一割集S_r
- 基本割集系统: $\{S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}\}$
- 割集秩η(G): η(G)=n-1 (η: eta)



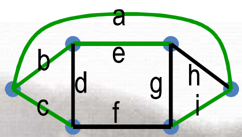
例

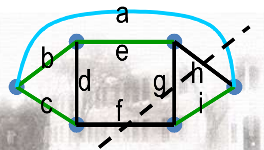
- G如图,T={a,b,c,e,i}是G的生成树,求对应T的基本回路系统和基本割集系统.



解

- 解: $\overline{T}$={d,f,g,h}, 基本回路: C_d=dcb, C_f=fcai, C_g=gebai, C_h=heba, 基本回路系统: $\{C_d,C_f,C_g,C_h\}$. 基本割集: S_a={a,h,g,f}, S_b={b,d,g,h}, S_c={c,d,f}, S_e={e,g,h}, S_i={i,g,f}, 基本割集系统: $\{S_a,S_b,S_c,S_e,S_i\}$. #





- 设e为无向连通图G中一边：
  - 若e在G的任何生成树中，e应满足什么性质？
  - 若e不在G的任何生成树中，e应满足什么性质？

小结

- 无向树
  - 等价定义与性质
  - 非同构无向树的枚举(利用度数列)
- 生成树
  - 基本割集系统, 基本回路系统