清華大學 Tsinghua University

单元2.3 等值式

第2章 命题逻辑等值演算

2.1 等值式

内容提要

- 等值式定义
- 常用等值式
- 置换规则

等值式

- 公式A、B共同含有n个命题变元，若在所有可能的2^n个赋值下，A与B的真值都相等，则称A与B是等值的（等价）。
- 定义2.1 若等价式A↔B是重言式, 则称A与B等值, 记作A⇔B, 并称A⇔B是等值式

⇔与↔的区别

- “↔”是一种逻辑联结词，公式A↔B 是命题公式，其中“↔”是一种逻辑运算， A↔B的结果仍是一个命题公式。
- “⇔”则是描述了两个公式A与B之间的一种逻辑等价关系，A⇔B表示“命题公式A等价于命题公式B”，A⇔B的结果不是命题公式。

- 计算机无法判断A、B是否逻辑等价，但是可以判断A↔B 是否为永真式。

⇔的性质

由于“⇔”不是一个联结词，而是一种关系，为此，这种关系具有如下三个性质：

- 自反性：A ⇔ A；
- 对称性：若A ⇔ B，则B ⇔ A；
- 传递性：若A ⇔ B，B ⇔ C，则A ⇔ C。

这三条性质体现了“⇔”的实质含义。

如何判断两个公式是否等值？

- **真值表法：**

例：判断 $\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 是否等值

p q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$	$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$
0 0	1	1	0	1	1	1
0 1	1	0	1	0	0	1
1 0	0	1	1	0	0	1
1 1	0	0	1	0	0	1

结论：$\neg(p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$

如何判断两个公式是否等值？

例：判断下述3个公式之间的等值关系：

$p\to(q\to r)$, $(p\to q)\to r$, $(p\wedge q)\to r$

p q r	$p\to(q\to r)$	$(p\to q)\to r$	$(p\wedge q)\to r$
0 0 0	1	0	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	0	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	1	1
1 1 0	0	0	0
1 1 1	1	1	1

$p\to(q\to r)$与$(p\wedge q)\to r$等值，但与$(p\to q)\to r$不等值

常用等值式

- 交换律：

  $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$，$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$，$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow B\leftrightarrow A$

- 结合律：

  $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

  $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

  $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow C\Leftrightarrow A\leftrightarrow(B\leftrightarrow C)$

蕴含联结词是否具有交换律和结合律？

- 分配律：

  $\boxed{A\leftrightarrow(B\leftrightarrow C)\overset{?}{\Leftrightarrow}(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(A\leftrightarrow C)}$

  $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

  $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

  $A\to(B\to C)\Leftrightarrow(A\to B)\to(A\to C)$

常用等值式

- 否定律：　$\neg(A \to B) \Leftrightarrow ?$
  - $\neg\neg A \Leftrightarrow A$　$\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow ?$　双重否定率
  - $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$　德摩根率
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- 幂等律：　$A \vee A \Leftrightarrow A$，$A \wedge A \Leftrightarrow A$
- 吸收率：　$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，　$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
- 蕴含等值式：$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- 假言易位：　$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
- 归谬率：　$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

常用等值式

- 等价等值式：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
- 等价否定等值式：
  - $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
- 零律：　$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$，　$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
- 同一率：　$A \vee 0 \Leftrightarrow A$，　$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
- 排中律：　$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
- 矛盾律：　$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

A
$\Leftrightarrow A \vee (B \wedge \neg B)$
$\Leftrightarrow A \wedge (B \vee \neg B)$

注：这里的0、1可分别替换为任意的矛盾式和重言式。

常用等值式（补充）

- 分配律：　$A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \to B) \to (A \to C)$
- 等幂律：　$A \to A \Leftrightarrow 1$，　$A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$
- 零律：　$A \to 1 \Leftrightarrow 1$，　$0 \to A \Leftrightarrow 1$
- 同一率：　$A \to 0 \Leftrightarrow \neg A$，$0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow \neg A$
- 其他：　$A \to \neg A \Leftrightarrow \neg A$，　$\neg A \to A \Leftrightarrow A$
  - $A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow 0$

$$A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C \Leftrightarrow B \to (A \to C)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

$$(A \to C) \wedge (B \to C) \Leftrightarrow (A \vee B) \to C$$

置换规则

设$\Phi(A)$是含公式A的公式，

用公式B置换$\Phi(A)$中的A，得公式$\Phi(B)$，

如果$A \Leftrightarrow B$，则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。

等值演算

等值演算: 由已知的等值式推演出新的等值式的过程

证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\land q)\to r$

$p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow p\to(\neg q\lor r)$ (蕴涵等值式, 置换规则)

$\Leftrightarrow \neg p\lor(\neg q\lor r)$ (蕴涵等值式, 置换规则)

$\Leftrightarrow (\neg p\lor\neg q)\lor r$ (结合律, 置换规则)

$\Leftrightarrow \neg(p\land q)\lor r$ (德摩根律, 置换规则)

$\Leftrightarrow (p\land q)\to r$ (蕴涵等值式, 置换规则)

如何证明两个公式不等值?

- 证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个成真, 另一个成假.
- 证明: $p\to(q\to r) \not\Leftrightarrow (p\to q)\to r$

方法一 真值表法

方法二 观察法. 容易看出000使左边成真, 使右边成假.

方法三 先用等值演算化简公式, 再观察.

判断公式类型

- 用等值演算法判断下列公式类型

（1）$q\land\neg(p\to q)$

解 $q\land\neg(p\to q)$

$\Leftrightarrow q\land\neg(\neg p\lor q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\land(p\land\neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\land(q\land\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\land 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

该式为矛盾式.

Open Question Points: 10 Setting

判断下列公式的类型:

(1) $\big((P\lor Q)\land\neg(\neg P\land(\neg Q\lor\neg R))\big)\lor(\neg P\land\neg Q)\lor(\neg P\land\neg R)$

(2) $(\neg P\land(\neg Q\land R))\lor((Q\land R)\lor(P\land R))$

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

应用举例

- 有一逻辑学家误入某部落，被拘于劳狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：
  “今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。为协助你脱逃，今加派两名战士负责解答你所提的一个问题，他们只能回答“是”还是“不是”。惟可虑者，此两战士中一名天性诚实，一名说谎成性，今后生死由你自己选择。”
- 逻辑学家沉思片刻，即向一战士发问，然后开门从容离去。该逻辑学家应如何发问？

应用举例

问题	这是一扇生门吗？			
假定的实际情况	生门 1		死门 0	
回答情况	诚实的战士	虚伪的战士	诚实的战士	虚伪的战士
	1	0	0	1

- 逻辑学家随便指一扇门，问其中一个战士“如果我问我指的是一扇‘生门’，那么你的同伙会回答‘是’，对吗？”
- 若回答是‘否’，那么所指门即是生门，可以得生。反之。

https://blog.csdn.net/CMutoo/article/details/5351498

小结

- 等值式定义
- 常用等值式
- 置换规则