实验九 用模拟计算机求电路方程的解

实验报告（预习）

姓名：彭程

学号：2020011075

班级：自 02

日期：2021 年 5 月 20 日

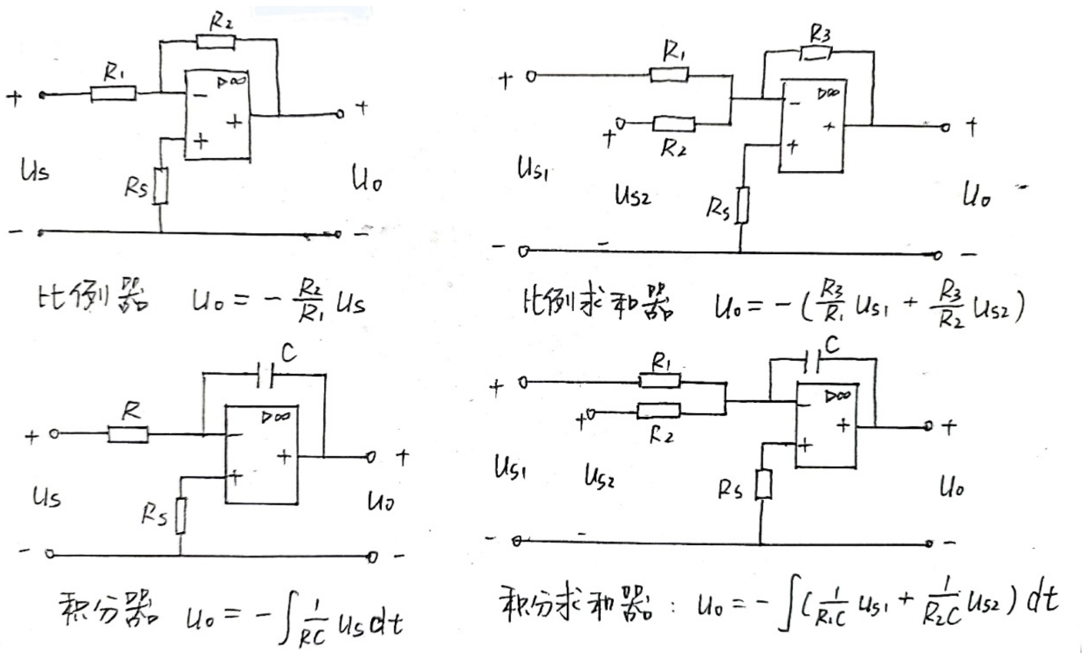
1. 实验目的

学习使用模拟计算机进行电模拟计算

2. 实验说明

模拟计算机是由含运算放大器的基本运算部件组成的，它可以对模拟量进行运算。将一些基本运算部件按要求连接起来，使模拟计算机电路的输出方程和所要研究的某系统的输出变量的微分方程完全相同。这样，模拟计算机电路输出变量的动态过程就是所研究系统的微分方程的解答。

2.1 常用基本运算部件



比例器 $u_0=-\frac{R_2}{R_1}u_s$

比例求和器 $u_0=-\left(\frac{R_3}{R_1}u_{s1}+\frac{R_3}{R_2}u_{s2}\right)$

积分器 $u_0=-\int\frac{1}{RC}u_s\,dt$

积分求和器：$u_0=-\int\left(\frac{1}{R_1C}u_{s1}+\frac{1}{R_2C}u_{s2}\right)dt$

2.2 举例说明

某系统以输出变量y描述的方程为四阶常系数线性微分方程：

$$\frac{d^4y}{dt^4}+a\frac{d^3y}{dt^3}+b\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+ey=fE \qquad (1)$$

式中 abcef 为常数，E为输入的直流电压

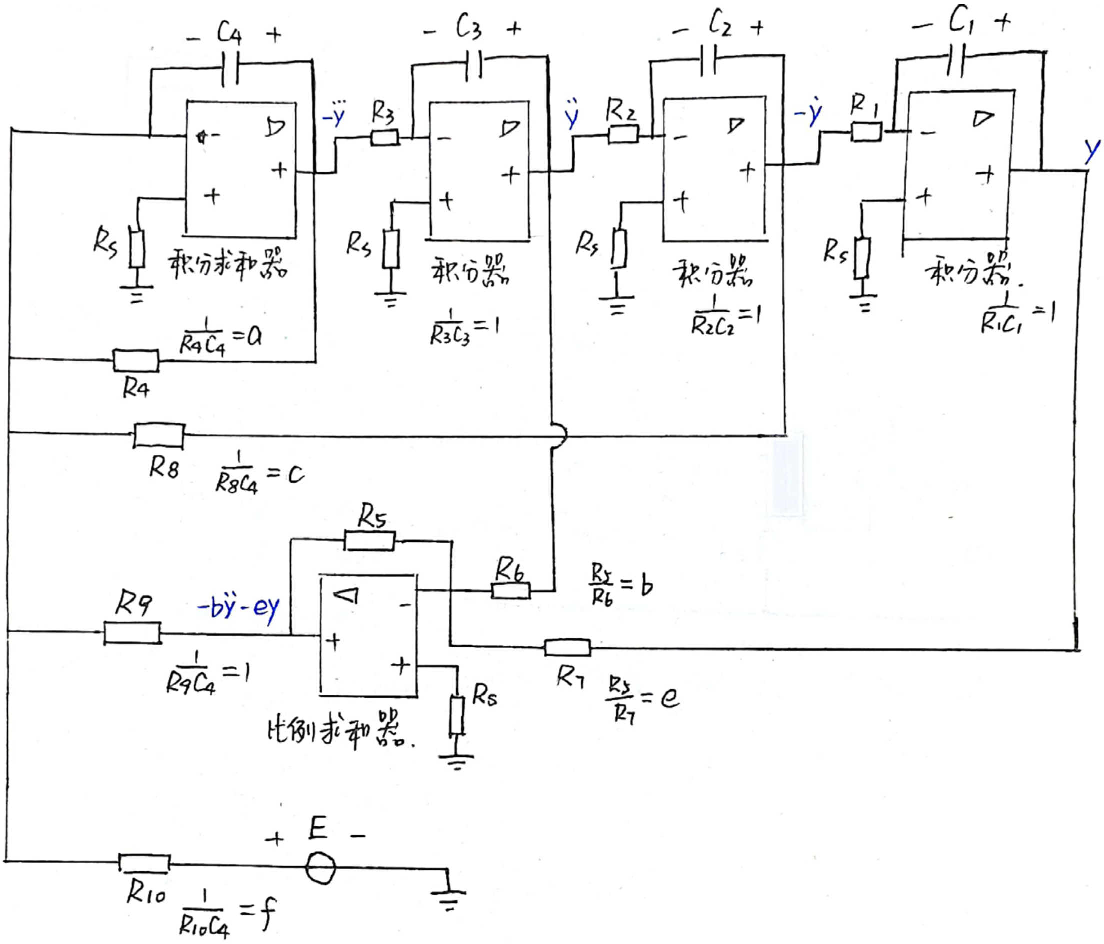
(1) 设计模拟计算机电路框图

将上式改写为 $\frac{d^4y}{dt^4}=-a\frac{d^3y}{dt^3}-b\frac{d^2y}{dt^2}-c\frac{dy}{dt}-ey+fE \qquad (2)$

两边积分得：$\frac{d^3y}{dt^3}=\int\left(-a\frac{d^3y}{dt^3}-b\frac{d^2y}{dt^2}-c\frac{dy}{dt}-ey+fE\right)dt \qquad (3)$

由方程(3)可知：将方程(2)等号右边5项求和后积分就可得到$\frac{d^3y}{dt^3}$，此运算可由积分求和器实现。再将$\frac{d^3y}{dt^3}$，$\frac{d^2y}{dt^2}$，$\frac{dy}{dt}$依次积分得$\frac{d^2y}{dt^2}$，$\frac{dy}{dt}$，y. 该功能由三个积分器实现。比例求和器完成了$(-b\frac{d^2y}{dt^2}-ey)$的运算。

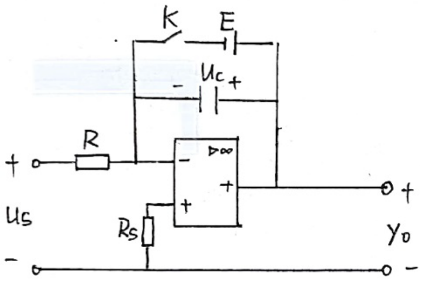
下图为能完成方程(2)模拟运算的模拟计算机电路框图：



注意：运算放大器若用反相输入端情况下，输入与输出之间有反相关系。

运放工作时，同相输入端"+"与地之间应接电阻，阻值为反相输入端所接全部电阻的并联值。

(2)起始值 $y(0)$，$\dot{y}(0)$，$\ddot{y}(0)$，$\dddot{y}(0)$ 的设置



由运放的虚短特性：

$y(t)=u_{c1}(t)$

$\dot{y}(t)=-u_{c2}(t)$

$\ddot{y}(t)=u_{c3}(t)$

$\dddot{y}(t)=-u_{c4}(t)$

在 $t=0$ 瞬间：$y(0)=u_{c1}(0)$；$\dot{y}(0)=-u_{c2}(0)$；$\ddot{y}(0)=u_{c3}(0)$；$\dddot{y}(0)=-u_{c4}(0)$

故只需在电容上设置起始条件即可。

若 $y(0)=E$，即可如上图起始值设置电路设置起始值。

K闭合，$u_c=E$，K断开 $(t=0)$ 时，动态过程开始，其余初始条件方式相同

(3) 时间比例尺的应用

模拟机所模拟的动态过程有快有慢，对于过渡时间大于30S的慢过程，测量仪器可以用电压表和秒表；对于过程时间较短的快过程，则须使用专用仪器：录波仪或光线示波器等进行测量。也可用时间比例尺把快过程的微分方程变为慢过程的微分方程，然后用电压表及秒表测量，测完后再对实验结果进行处理。

设快过程的微分方程为 $\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=cE$ (4).

若想把过渡过程放慢K倍，则设 $t=\frac{\tau}{K}$

代入方程(4)得到慢过程：$\frac{d^2y}{d\tau^2}+a'\frac{dy}{d\tau}+b'y=c'E$ (5)

其中 $a'=\frac{a}{K}$ $b'=\frac{b}{K^2}$ $c'=\frac{c}{K^2}$

将方程(5)实验结果中的时间除以K，即为方程(4)的实验结果.

3. 实验任务

3.1 预习计算

给定三个系统的微分方程和起始条件分别为：

$\ddot{y}+0.2\dot{y}+0.25y=0.25E$ (5) 初值 $y(0)=0$ $\dot{y}(0)=0$，电源 $E=1.5V$

$\ddot{y}+20\dot{y}+y=0$ (6) 初值 $y(0)=1.5V$ $\dot{y}(0)=0$

$\ddot{y}+2\dot{y}+25y=0$ (7) 初值 $y(0)=1.5V$ $\dot{y}(0)=0$

(1) 计算方程(5)中 $y(t)$ 的解析表达式，并计算前三个极值点数值及到达极值点、和1.5V点的时间。

解：$\lambda^2+0.2\lambda+0.25=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{10}\pm\frac{\sqrt{6}}{5}i$

$\Rightarrow y(t)=A+Be^{-\frac{1}{10}t}\sin(\frac{\sqrt{6}}{5}t+\theta)$

由方程(5)：$y(\infty)=E$ 故 $A=1.5$

故 $y(t)=1.5+Be^{-\frac{1}{10}t}\sin(\frac{\sqrt{6}}{5}t+\theta)$

又 $y(0)=0$ $\dot{y}(0)=0$，则：

$$\begin{cases}1.5+B\sin\theta=0\\ -\frac{1}{10}B\sin\theta+\frac{\sqrt{6}}{5}B\cos\theta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta=1.37\ rad\\ B=-1.53\end{cases}$$

故：$y(t)=1.5-1.53e^{-0.1t}\sin(\frac{\sqrt{6}}{5}t+1.37)$ (V) $(t\geq0)$

极值点、$y'(t)=-0.1Be^{-0.1t}\sin(\frac{\sqrt{6}}{5}t+1.37)+\frac{\sqrt{6}}{5}Be^{-0.1t}\cos(\frac{\sqrt{6}}{5}t+1.37)=0$

$\Rightarrow t=6.41k$ (s) $k=1,2,3,\cdots$

故前三个极值点为 6.41s，12.82s，19.23s

相应极值 $y(t)$ 的值为 2.29V，1.08V，1.72V

达到1.5V：$y(t)=1.5V \Rightarrow t=6.41k-2.80$ (s) $k=1,2,3,\cdots$

(2) 计算方程(6)中 $y(t)$ 的解析表达式，并计算出 $y(t)$ 为 1.5V, 1.3V, 1.1V, 0.9V, 0.7V 和 0.5V 对应的时间 t。

解： $\lambda^2+20\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-10\pm3\sqrt{11}$

$\Rightarrow y=Ae^{-0.05t}+Be^{-19.95t}$

代入 $\begin{cases} y(0)=1.5\ V \\ \dot{y}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1.5 \\ -0.05A-19.95B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1.504 \\ B=-0.004 \end{cases}$

故 $y(t)=1.504e^{-0.05t}-0.004e^{-19.95t}$

$y(t_1)=1.5\ V \Rightarrow t_1=0$ $\quad y(t_4)=0.9 \Rightarrow t_4=10.24\ s$

$y(t_2)=1.3\ V \Rightarrow t_2=2.91\ s$ $\quad y(t_5)=0.7 \Rightarrow t_5=15.25\ s$

$y(t_3)=1.1\ V \Rightarrow t_3=6.24\ s$ $\quad y(t_6)=0.5 \Rightarrow t_6=21.97\ s$

(3) 使用时间比例尺（令 $K=10$），将快过程的微分方程(7)变为慢过程的方程，计算该方程中的 $y(t)$ 的表达式，并计算出前三个极值点的数值及到达极值点、和 0V 点时间。

解： 慢过程方程为： $\ddot{y}+0.2\dot{y}+0.25y=0$

由(1)得： $y(\tau)=Be^{-0.1\tau}\sin(\frac{\sqrt{6}}{5}\tau+\theta)$

代入 $y(0)=1.5\ V$ $\dot{y}(0)=0$ 得：

$\begin{cases} B\sin\theta=1.5 \\ -0.1B\sin\theta+\frac{\sqrt{6}}{5}B\cos\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=1.37\ rad \\ B=1.53 \end{cases}$

$y(\tau)=1.53e^{-0.1\tau}\sin(\frac{\sqrt{6}}{5}\tau+1.37)$ （慢过程中的表达式）

极值点、 $y'(\tau)=-0.1Be^{-0.1\tau}\sin(\frac{\sqrt{6}}{5}\tau+1.37)+\frac{\sqrt{6}}{5}Be^{-0.1\tau}\cos(\frac{\sqrt{6}}{5}\tau+1.37)=0$

故 $\tau=6.4k \quad k=1,2,3,\cdots$

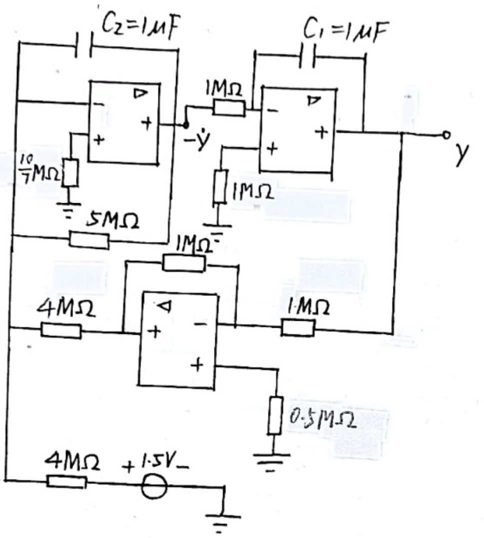
极值点： $\tau_1=6.4\ s \quad \tau_2=12.8\ s \quad \tau_3=19.2\ s$

极值 ： $y(\tau_1)=-0.80V \quad y(\tau_2)=0.42V \quad y(\tau_3)=-0.22V$

0V点： $y(\tau)=0 \quad \tau=6.4k-2.8\ (s) \quad k=1,2,3,\cdots$

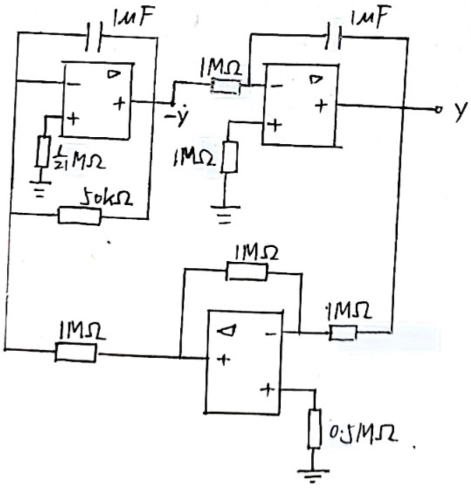
(4) 给定 $C_1=C_2=1\,\mu F$，确定其他元件的参数，分别画出求解微分方程(5)、方程(6)和慢过程方程解的模拟计算机电路框图。

方程(5)：



$$\dot{y}=\int(-0.2\dot{y}-0.25y+0.25E)\,dt$$

方程(6)：



$$\dot{y}=\int(-20\dot{y}-y)\,dt$$

方程(7)的慢过程： $\dot{y}=\int(-0.2\dot{y}-0.25y)\,dt$