

**硕转博指北**-Version 0.5

Qualifying Exam Fast Pass

# 目录

<b>1 历年计算数学专业硕转博第二次考试题目及参考解答</b>	<b>2</b>
1.1 硕转博专业考试大纲 . . . . .	2
1.2 2005 年考试题目及参考解答 . . . . .	4
1.3 2006 年考试题目及参考解答 . . . . .	14
1.4 2007 年考试题目及参考解答 . . . . .	22
1.5 2010 年考试题目及参考解答 . . . . .	28
1.6 2017 年考试题目及参考解答 . . . . .	32
<b>2 数值逼近知识点总结及题目</b>	<b>44</b>
<b>3 微分方程数值解知识点总结及题目</b>	<b>64</b>
<b>4 数值线性代数</b>	<b>93</b>
4.1 数值线性代数知识点总结 . . . . .	93
4.2 数值线性代数作业题及参考解答 . . . . .	140
4.3 数值线性代数其他习题及解答 . . . . .	169
<b>5 有限元</b>	<b>200</b>
5.1 有限元知识点总结 . . . . .	200
5.2 有限元理论作业 . . . . .	206
<b>6 最优化计算方法</b>	<b>224</b>
6.1 最优化计算方法知识点总结 . . . . .	224
6.2 最优化计算方法往年期末考试题 . . . . .	245
6.3 最优化计算方法本学期作业题：第一次 . . . . .	256
6.4 最优化计算方法本学期作业题：第二次 . . . . .	261
6.5 最优化计算方法 2020 期末考试理论题 . . . . .	266

# Chapter 1

## 历年计算数学专业硕转博第二次考试题目 及参考解答

中国科学院研究生院数学学科硕转博资格考试综合笔试

### 1.1 硕转博专业考试大纲

二级学科: 计算数学

考试科目: 计算数学考试时间:180 分钟

考试形式: 计算数学专业硕转博资格考试综合笔试试卷涵盖了研究生课程《数值线性代数》、《微分方程数值解 I》、《微分方程数值解 II》、《数值逼近》、《最优化计算方法》、《有限元方法的数学基础》及其相关内容, 满分为 150 分.

### 考试内容

- 1、线性代数方程组的直接解法与迭代解法; 最小二乘问题的数值解法; 特征值问题的 QR 方法; Lanczos 方法.
- 2、常微分方程初、边值问题数值解法; 抛物型方程的差分方法; 椭圆型方程的差分方法.
- 3、线性双曲型方程的差分方法; 一维非线性双曲型守恒律的差分方法; 一维双曲型守恒律的高分辨率格式.
- 4、卷积逼近; 多项式逼近; 平方逼近; 非线性逼近; 数值积分; 样条函数; Fourier 分析.
- 5、一维优化与线搜索; 梯度法与共轭梯度法; 牛顿法与拟牛顿法; 非线性最小二乘问题与二次规划; 罚函数法; 可行方向法; 逐步二次规划法.
- 6、变分原理与 Sobolev 空间; 椭圆型边值问题; 协调有限元法; 非协调有限元法; 混合有限元法; 自适应有限元法; 多水平方法与区域分解法.

## 参考书目

- 1、徐树方, 《矩阵计算的理论与方法》, 北京大学出版社, 北京, 1995.
- 2、余德浩、汤华中, 《微分方程数值解法》, 科学出版社, 北京, 2002.
- 3、张文生, 《科学计算中的偏微分方程有限差分法》, 科学出版社, 北京, 2006.
- 4、R. Leveque, Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, 2002.
- 5、王仁宏, 数值逼近, 高等教育出版社, 1999 年.
- 6、E. M. Stein and R. Shakarchi, Fourier Analysis—An Introduction, Princeton University Press, 2003.
- 7、袁亚湘、孙文瑜著, 《最优化理论和方法》, 科学出版社, 北京, 1997.
- 8、J. Nocedal and S. Wright, Numerical Optimization, Springer, 1999.
- 9、王烈衡, 许学军, 《有限元方法的数学基础》, 科学出版社, 北京, 2004.
- 10、S.C. Brenner and C.R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer-Verlag, 1994.

## 1.2 2005 年考试题目及参考解答

共 5 题

### 问题 1.2.1. (数值线性代数)

设  $A, B$  是  $n \times n$  阶矩阵, 且  $B$  对称、正定, 定义矩阵范数  $\|\cdot\|_B$  为  $\|v\|_B := (Bv, v)^{\frac{1}{2}}, \forall v \in R^n$ , 此处  $(\cdot, \cdot)$  是  $R^n$  上的欧式内积. 假设存在常数  $c_0$  和  $c_1$  使得

$$(1). c_0 \|v\|_B^2 \leq (Av, v), \quad \forall v \in R^n$$

和

$$(2). (Av, w) \leq c_1 \|v\|_B \|w\|_B, \forall v, w \in R^n$$

(a) 证明

$$\|Av\|_{B^{-1}} \leq c_1 \|v\|_B, \quad \forall v \in R^n$$

(b) 考虑用下列迭代法

$$x_{n+1} = x_n + \tau B^{-1} (f - Ax_n)$$

解方程  $Ax = f$ , 定义  $e_n := x - x_n$ , 利用 (a) 证明: 对常数  $0 < \tau \leq c_0/c_1^2$ , 有

$$\|e_{n+1}\|_B \leq (1 - c_0\tau) \|e_n\|_B$$

### 解答 1.2.1.

(a)

$$\begin{aligned} \|Av\|_{B^{-1}}^2 &= (B^{-1}Av, Av) \\ &\leq c_1 \|B^{-1}Av\|_B \|v\|_B \\ &\leq c_1 (BB^{-1}Av, B^{-1}Av)^{\frac{1}{2}} \|v\|_B \\ &= c_1 (Av, B^{-1}Av)^{\frac{1}{2}} \|v\|_B \\ &\leq c_1 c_1^{\frac{1}{2}} \|v\|_B^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}Av\|_B^{\frac{1}{2}} \|v\|_B \end{aligned}$$

又知：

$$\begin{aligned}
 \|B^{-1}Av\|_B &= (BB^{-1}Av, B^{-1}Av)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (Av, B^{-1}Av)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq c_1^{\frac{1}{2}} \|v\|_B^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}Av\|_B^{\frac{1}{2}} \\
 \Rightarrow \|B^{-1}Av\|_B^{\frac{1}{2}} &\leq c_1^{\frac{1}{2}} \|v\|_B^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

代回上式，可得  $\|Av\|_{B^{-1}}^2 \leq c_1^2 \|v\|_B^2$ . 即  $\|Av\|_{B^{-1}} \leq c_1 \|v\|_B$

(b) 用迭代法  $x_{n+1} + x_n + \tau B^{-1}(f - Ax_n)$  解方程  $Ax = f$ , 定义  $e_n := x - x_n$

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= x - x_{n+1} \\
 &= x - x_n + x_n - x_{n+1} \\
 &= e_n - \tau B^{-1}(f - Ax_n) \\
 &= e_n - \tau B^{-1}Ae_n \\
 (\text{因为 } Ae_n &= Ax - Ax_n + f - Ax_n)
 \end{aligned}$$

故：

$$\begin{aligned}
 \|e_{n+1}\|_B^2 &= (Be_{n+1}, e_{n+1}) \\
 &= (B(I - \tau B^{-1}A)e_n, (I - \tau B^{-1}A)e_n) \\
 &= (B - \tau A)e_n, (I - \tau B^{-1}A)e_n \\
 &= (Be_n, e_n) - (Be_n, \tau B^{-1}Ae_n) - \tau(Ae_n, e_n) + \tau^2(Ae_n, B^{-1}Ae_n)
 \end{aligned}$$

又由题目条件知：

$$(Ae_n, e_n) \geq C_0 \|e_n\|_B^2$$

则：

$$Ae_n, B^{-1}(Ae_n) = \|Ae_n\|_{B^{-1}}^2 \leq c_1^2 \|e_n\|_B^2$$

且

$$\begin{aligned}
 (Be_n, \tau B^{-1}Ae_n) &= \tau e_n^T B^T B^{-1} Ae_n \\
 &= \tau e_n^T Ae_n \\
 &= \tau(Ae_n, e_n) \geq \tau c_0 \|e_n\|_B^2 \quad (\text{因为 } B \text{ 对称正定})
 \end{aligned}$$

代入上式得：

$$\|e_{n+1}\|_B^2 \leq \|e_n\|_B^2 \cdot (1 - 2\tau C_0 + \tau^2 C_1^2)$$

对常数  $0 < \tau < \frac{C_0}{C_1^2}$ . 有：

$$\|e_{n+1}\|_B^2 \leq \|e_n\|_B^2 \cdot (1 - \tau C_0).$$

(原题中的结论可能有问题)

### 问题 1.2.2. (微分方程数值解 I)

考虑初值问题  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ , 证明如下龙格-库塔公式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + th, y_n + thk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hk_1)$$

对任意参数  $t$  是二阶的 (只须证局部阶段误差是三阶的), 此处  $h$  是离散步长,  $x_{n+1} = h + x_n$ .

### 解答 1.2.2.

由于  $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$ , 我们设  $x = x_n + \tau h, 0 \leq \tau \leq 1$ . 则：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_0^1 f(x_n + \tau h, y(x_n + \tau h)) d\tau$$

进一步, 我们将  $f(x_n + th, y_n + thk_1)$  在  $x_n + \tau h$  处 Taylor 展开. 得到：

$$\begin{aligned} & f(x_n + th, y_n + thk_1) \\ &= f(x_n + \tau h, y(x_n + \tau h)) + \nabla_{xy}^T f \cdot \begin{pmatrix} (t - \tau)h \\ y_n + thf(x_n, y_n) - y(x_n + \tau h) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t - \tau)h \\ y_n + thf(x_n, y_n) - y(x_n + \tau h) \end{pmatrix}^T \nabla_{xy}^2 f \begin{pmatrix} (t - \tau)h \\ y_n + thf(x_n, y_n) - y(x_n + \tau h) \end{pmatrix} \\ &+ O(h^3) \quad (I) \end{aligned}$$

同理：将  $t$  替换成  $(1-t)$  可得结构类似的 (II) 式，考察  $(I) \cdot (1-t-\tau) - (II) \cdot (t-\tau)$ ，  
 $\therefore y_n + thf(x_n, y_n) - y(x_n, \tau h) = (t-\tau)hf(x_n, y_n) + O(h^2)$ ，则

$$\begin{aligned}
& f(x_n + th, y_n + thk_1) \cdot (1-t-\tau) - f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hk_1)(t-\tau) \\
&= f(x, y(x))(1-2t) + \nabla_{xy}^T f \cdot \begin{pmatrix} (t-\tau)h \\ (t-\tau)hf(x_n, y_n) + O(h^2) \end{pmatrix} (1-t-\tau) + O(h^2)(1-t-\tau) \\
&\quad - \nabla_{xy}^T f \begin{pmatrix} (1-t-\tau)h \\ (1-t-\tau)hf(x_n, y_n) + O(h^2) \end{pmatrix} (t-\tau) + O(h^2)(t-\tau) \\
&= f(x, y(x))(1-2t) + C(t, \tau)O(h^2)
\end{aligned}$$

其中  $C(t, \tau)$  为关于  $t, \tau$  的项.

将上式积分有：

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(x_n + \tau h, y(x_n + \tau h))h d\tau \\
&= \frac{1}{1-2t} \int_0^1 h [f(x_n + th, y_n + thk_1)(1-t-\tau) - f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hk_1)(t-1) \\
&\quad + C(t, 2)O(h^2)] d\tau \\
&= \frac{h}{1-2t} [f(x_n + th, y_n + thk_1) \cdot \int_0^1 (1-t-\tau) d\tau - f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hk_1) \int_0^1 (t-\tau) d\tau \\
&\quad + O(h^2) \int_0^1 C(t, \tau) d\tau]
\end{aligned}$$

则：

$$\begin{aligned}
|R| &= \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y) dx - \frac{h}{2} [f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hk_1) + f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hk_1)] \\
&= O(h^3)
\end{aligned}$$

则证得该 Runge-Kutta 公式的局部阶段误差是三阶的.

**问题 1.2.3. (微分方程数值解 I)**

考虑如下求积分公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$$

(a) 试确定系数  $A_0, A_1, B_0$ , 使该积分公式具有尽可能高的代数精确度, 并给出代数精度的次数.

(b) 导出上述积分公式的误差余项表达式.

**解答 1.2.3.**

(a)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 1 dx \approx A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1 + B_0 \cdot 0 = A_0 \cdot 1 + A_1 \\ \frac{1}{2} &= \int_0^1 x dx \approx A_0 \cdot 0 + A_1 \cdot 1 + B_0 \cdot 1 = A_1 + B_0 \\ \frac{1}{3} &= \int_0^1 x^2 dx \approx A_0 \cdot 0 + A_1 \cdot 1 + B_0 \cdot 0 = A_1 \end{aligned}$$

则:

$$A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = \frac{1}{3}, B_0 = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f(10)$$

当  $f(x) = x^3$  时

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0) = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 0 = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$$

故该积分公式对三次多项式不精确成立. 最高次代数精度为 2 次.

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)x^3 dx \\ &= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{6} \int_0^1 f'''(\xi)x^3 dx \\ &= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{24}f'''(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0) \\
&= \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}(f(0) + f'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2}f''(0) \cdot 1^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi) \cdot 1^3) + \frac{1}{6}f'(0) \\
&= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{18}f'''(\xi)
\end{aligned}$$

则：误差余项为：

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0) \right| \\
&= \left| \frac{1}{24}f'''(\xi) - \frac{1}{18}f'''(\xi) \right| \\
&= \frac{1}{72}|f'''(\xi)| \\
&\leq \frac{1}{72} \max_{x \in [0,1]} |f'''(\xi)|
\end{aligned}$$

#### 问题 1.2.4. (有限元方法的数学基础)

考虑下列边值问题：找  $u(x) \in C(0, 1)$  使得

$$\begin{aligned}
-u'' &= f(x), \quad x \in I := (0, 1/2) \cup (1/2, 1) \\
u' \left( \frac{1}{2}+ \right) - u' \left( \frac{1}{2}- \right) &= 5u \left( \frac{1}{2} \right) \\
u'(0) = u'(1) &= 0
\end{aligned}$$

此处  $f \in L^2(0, 1)$ ,  $v(\zeta-)$  和  $v(\zeta+)$  分别表示当  $x$  从左边和右边趋于  $\xi$  时的极限值.

- (a) 使用合适的 Hilbert 空间  $V$  导出上述问题的弱形式;
- (b) 证明 (a) 中的双线性形式在  $V$  上是强制和连续的;
- (c) 对区间  $[0, 1]$  进行一致的剖分, 网格参数为  $h = 1/m$ , 基于此剖分用吸纳性有限元离散上述问题, 如果  $x = 0.5$  是网格点, 证明: 上述问题的 Galerkin 逼近在  $H^1$  范数意义下是一阶收敛的

(Hint: 可利用一下先验估计  $\|u''\|_{L^2(0,1/2)}^2 + \|u''\|_{L^2(1/2,1)}^2 = \|f\|_{L^2(0,1)}^2$ )

#### 解答 1.2.4.

- (a) 首先由  $u'' = -f \in L^2(0, 1)$  以及  $u'(0) = u'(1) = 0$ , 并记  $\Omega = (0, 1)$  可得:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (u')^2 dx &= \int_0^1 u' du \\
&= uu'|_0^1 - \int_0^1 uu'' dx \\
&= \int_0^1 u f dx \\
&\leq \|u\|_{0,\Omega} \|f\|_{0,\Omega} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

故知:  $u \in H_0^2(\Omega)$ . 那么对  $\forall v \in H_0^2(\Omega)$ , 有:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} -u'' v dx &= -u' v|_0^{\frac{1}{2}-} + (-u' v)|_{\frac{1}{2}+}^{\frac{1}{2}} + \int_{\Omega} u' v' dx \\
&= u'(0)v'(0) - u'(\frac{1}{2}-)v(\frac{1}{2}) + u'(\frac{1}{2}+)v(\frac{1}{2}) - u'(1)v(1) + \int_{\Omega} u' v' dx \\
&= \int_{\Omega} u' v' dx + \{u'(\frac{1}{2}+) - u'(\frac{1}{2}-)\}v(\frac{1}{2}) \\
&= \int_{\Omega} u' v' dx + 5u(\frac{1}{2})v(\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

又:

$$\int_{\Omega} -u'' v dx = \int_{\Omega} -u'' v dx = \int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} f v dx := f(v).$$

下面定义双线性形式

$$a(u, v) := \int_{\Omega} u' v' dx + 5u(\frac{1}{2}-)v(\frac{1}{2})$$

容易验证其线性性, 记  $K = \{v | v'(\frac{1}{2}+) - v'(\frac{1}{2}-) = 5v(\frac{1}{2}), v \in H_0^2(\Omega) \cap C(\Omega)\}$  故上述问题的弱形式为

$$\begin{cases} \text{Find } u \in \bar{K} \\ \text{s.t. } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in \bar{K} \end{cases}$$

$v = \bar{k}$  为  $H_0^2(\Omega)$  的闭子空间, 自然也为 Hilbert 空间.

(b) 我们先后来证明双线性形式在  $V$  上的强制性和连续性:

$\forall u, v \in V$ , 我们有

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} u' v' dx + 5u(\frac{1}{2}-)v(\frac{1}{2}) \\
&= \int_{\Omega} u'' v' dx \leq |u|_{2,\Omega} |v|_{0,\Omega} \leq |u|_{2,\Omega} |v|_{2,\Omega} = \|u\|_v \|v\|_v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} |v'|^2 dx + 5v\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\geq \int_{\Omega} |v'|^2 dx \\
&= |v|_{1,\Omega} \\
&\geq C\|v\|_{1,\Omega} \\
&\geq C\|v\|_v
\end{aligned}$$

容易验证  $a(\cdot, \cdot)$  为  $V$  上的一个内积.

(c) 参考有限元课程 3 月 3 日关于  $\|e\|$  的不等式证明:

$$\begin{aligned}
\|e\|^2 &\leq \|u - I_h u\|^2 = \int_0^1 (u - I_h u)'(t)^2 dt \\
&= \int_0^1 |w'(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |w'(t)|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |w'(t) - w'(\xi_i)|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_{t_i}^t w''(\eta) d(\eta) \right|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_{\xi_i}^t u''(\eta) - (I_h u(\eta))'' d(\eta) \right|^2 dt \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_{\xi_i}^t |u''(\eta)| d(\eta) \right|^2 dt \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)| d(\eta) \right|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^N h_i \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)| d\eta \right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^N h_i \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} 1^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^N h_i^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)|^2 d\eta \\
&\leq h^2 \int_0^1 |u''(\eta)|^2 d\eta \\
&= h^2 \int_0^1 f(\eta)^2 d\eta = ch^2
\end{aligned}$$

**问题 1.2.5. (有限元方法的数学基础)**

(a) 考虑空间  $Q_2 = \left\{ \sum_{i,j=0}^2 c_{i,j} x^i y^j \right\}$  和参考单元  $[0,1]^2$ , 相应的节点如下图所示.

证明这些节点对空间  $Q_2$  形成唯一可解集.

(b) 设  $\{\phi_i\}, i = 1, \dots, 9$  是对应于上述节点的基函数, 明确计算  $\phi_4$ .

(c) 考虑空间

$$Q'_2 = \left\{ p \in Q_2 \mid 4p(v_9) + \sum_{i=1}^4 p(v_i) - 2 \sum_{i=5}^8 p(v_i) = 0 \right\}$$

证明:  $Q'_2$  包含二次多项式  $P_2$ .

(d) 设  $\Omega$  是矩形区域, 且  $\Omega = \cup \tau_i$  是  $\Omega$  的矩形剖分, 又设  $S_h$  是基于节点  $\{v_i\}, i = 1, \dots, 8$  的分片  $Q'_2$  函数空间 (关于此矩形剖分), 证明:  $S_h \subseteq H^1(\Omega)$



**解答 1.2.5.**

(a) 唯一可解集  $\Leftrightarrow$  节点处函数值  $\hat{u}$  为 0, 则函数  $\hat{u} = 0$ .

记参考元为  $\xi, \eta$ , 设

$$\begin{cases} x = h_1\xi + x_0 \\ y = h_2\eta + y_0 \end{cases}$$

于是  $Q_2|_{\hat{T}} = \left\{ \sum_{i,j=0}^2 \hat{C}_{ij} \xi^i \eta^j \right\}$ , 根据  $\hat{u}(a_1) = \hat{u}(a_5) = \hat{u}(a_2) = 0$  知  $\hat{u}$  含  $(1-\eta)$  因子.

同理可知  $\hat{u}$  含  $(1-\xi), (1+\zeta), (1-\eta)$  因子. 所以  $\hat{u} = a(1-\xi^2)(1-\eta^2)$ , 又  $\hat{u}(a_9) = 0 \rightarrow a = 0$  即  $\hat{u} \equiv 0$ .

(b) 设插值函数  $\hat{\Pi}\hat{u} = \sum_{i=1}^9 (a_i)\phi_i$   $\hat{\Pi}\hat{u}(a_i) = \hat{u}(a_i)$

对于  $\phi_4$  满足

$$\begin{cases} \phi_4(a_4) = 1 \\ \phi_4(a_i) = 0, i \neq 4 \end{cases}$$

由  $\phi_4(a_3) = \phi_4(a_2) = \phi_4(a_6) = 0$  知:  $\phi_4$  含  $(1 - \xi)$  因子, 同理:  $\phi_4$  含  $\eta$  因子,  $(1 - \eta)$  因子和  $\xi$  因子. 故  $\phi_4$  具有形式:  $\phi_4 = (1 - \xi)(1 - \eta)\xi\eta$ .

又有  $\phi_4(a_4) = 1$ , 知:  $a(1 - (-1))a(1 - (-1))(-1)(-1) = 4a = 1$ , 故:  $a = \frac{1}{4}$ .

于是  $\phi_4 = \frac{1}{4} = (1 - \xi)(1 - \eta)\xi\eta$ .

(c)

$$Q_2^1 = \{P \in Q_2 \mid 4P(V_9) + \sum_{i=1}^4 P(v_i) - 2 \sum_{i=5}^8 P(v_i) = 0\}, \dim Q_2^1 = 8$$

$$P_2 = \text{span}\{1, \xi \cdot \eta \cdot \xi^2 \cdot \eta^2 \cdot \xi \eta\}, \dim P_2 = 6.$$

那么只需证基底在  $Q_2^1$  中, 即:

$$1 \in Q_2^1 : 4 + 4 - 2 \times 4 = 0$$

$$\xi \in Q_2^1 : \dots = 0$$

$$\eta \in Q_2^1 : \dots = 0$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\xi\eta \in Q_2^1 : \dots \dots$$

一一验证可知  $P_2$  的基底均在  $Q_2^1$  中.

(d) 对于矩形区域  $\Omega$ , 由于  $P_2 \subseteq Q_2^1$ , 我们知对于分片  $Q_2^1$  函数空间  $S_h$ . 要证  $S_h \subseteq H^1(\Omega)$ , 只需说明  $S_h \subseteq C^0(\bar{\Omega})$ . 由于是分片  $Q_2^1$  函数, 所以只需考虑. 边界的连续性.

设  $P = T \cap T'$ :

$$\cdot \text{ 在 } T \text{ 上, } \hat{\Pi}u = \sum_{i=1}^8 \hat{u}(a_i)\phi_i^1$$

$$\cdot \text{ 在 } T' \text{ 上, } \hat{\Pi}u = \sum_{i=1}^8 \hat{u}(a'_i)\phi_i^1$$

在  $T$  上时,  $\hat{\Pi}u|_e = \hat{u}(a_2)\phi_2^1 + \hat{u}(a_6)\phi_6^1 + \hat{u}(a_3)\phi_3^1$ . 同理可得  $\hat{\Pi}u$  在  $T'$  时的表达式:  $\hat{\Pi}'u$ . 注意到  $a_2$  与  $a'_1, a_6$  与  $a'_8, a_3$  与  $a'_4$  为同一个点. 可以得到:  $\hat{\Pi}u|_l - \hat{\Pi}'u|_l = 0$ . 即:  $\hat{\Pi}u$  在边界  $L$  上连续, 证毕.

### 1.3 2006 年考试题目及参考解答

共 5 题

#### 问题 1.3.1. (数值线性代数)

考虑对称正定线性方程组  $Ax = b$ , 其中  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  对称正定, 其特征值为  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n, b \in R^n$ . 记  $r_k = Ax_k - b$ , 考虑如下迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \alpha r_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

其中  $\alpha > 0$  为常量. 试求:

- (1) 常量  $\alpha$  的取值区间, 使得迭代法产生的序列  $\{x_k\}$  对任意初始点  $x_1$  均收敛到该方程组的解;
- (2)  $\alpha$  为何值时,  $\|r_{k+1}\|_2/\|r_k\|_2$  对所有的  $k$  有最好的一致估计.

#### 解答 1.3.1.

(1) 我们知道:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \alpha r_k \\ &= x_k - \alpha(Ax_k - b) \\ &= (I - \alpha(A))x_k + \alpha b \\ x_{k+1} - \alpha b &= (I - \alpha A)x_k \\ x_{k+1} &= (I - \alpha A)[(I - \alpha A)x_{k+1} + \alpha b] \\ &= (I - \alpha A)^k x_1 + \sum_{i=0}^{k-1} (I - \alpha A)^i + \alpha b, \quad k \rightarrow \infty \\ &= (I - \alpha A)^k x_1 + (I - (I - \alpha A))^{-1} \end{aligned}$$

故只需  $\rho(I - \alpha A) < 1$ ,  $\max |\lambda(I - \alpha A)| < 1$ ,  $\max |1 - \alpha \lambda(A)| < 1$

(2) 下面来关注  $\alpha$  为何值时,  $\|r_{k+1}\|_2/\|r_k\|_2$  对所有的  $k$  有最好的一致估计:

$$\begin{aligned} \frac{\|r_{k+1}\|_2}{\|r_k\|_2} &= \frac{\|Ax_{k+1} - b\|_2}{\|r_k\|_2} \\ &= \frac{\|Ax_k - \alpha Ar_k - b\|_2}{\|r_k\|_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|r_k(I - \alpha A)\|_2}{\|r_k\|_2} \\
&\leq \|I - \alpha A\|_2.
\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}
\|I - \alpha A\|_2 &= \max \sigma(I - \alpha A), I - \alpha A \text{ 对称} \rho(I - \alpha A) < 1 \\
&= \max \lambda^2(I - \alpha A) = \rho^2(I - \alpha A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{问题} &\Leftrightarrow \min_{0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}} \max \lambda(I - \alpha A) \\
&\Leftrightarrow \min_{\alpha} \max \lambda_i (i = 1, 2, \dots, n) \\
&\Rightarrow 1 - \alpha \lambda_1 = -(1 - \alpha \lambda_n) \\
&2 = \alpha(\lambda_n - \lambda_1), \quad \alpha = \frac{2}{\lambda_n - \lambda_1}
\end{aligned}$$

**问题 1.3.2.** (最优化计算方法) 设  $f(x)$  为  $R^n$  到  $R$  上一阶连续可微函数, 其导函数  $g(x)$  满足 Lipschitz 条件, 即存在常数  $L > 0$ , 使得

$$\|g(x) - g(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2, \forall x, y \in R^n$$

假设在  $x$  点有下降搜索方向  $d \in R^n$  (即满足  $d^T g(x) < 0$ ) , 取  $m = 0, 1, 2, \dots$  为最小的正整数  $k$ , 使得  $\alpha = \lambda^k$  满足下述关系式:

$$f(x + \alpha d) \leq f(x) - \mu \alpha^2 \|d\|^2$$

(其中  $\mu > 0, \lambda \in (0, 1)$  均为常数) , 试估计  $\alpha = \lambda^m$  的下界.

**解答 1.3.2.**

$$\begin{aligned}
f(x + \alpha d) &= f(x) + \alpha d^T \nabla f(x) + R_1 \\
f(x + \alpha d) - f(x) &= \int_0^\alpha d^T \nabla f(x + td) dt \\
R_1 &= \int_0^\alpha d^T (\nabla f(x + t\alpha) - \nabla f(x)) dt \\
\|R_1\| &\leq \int_0^\alpha \|\alpha\| \cdot \|\nabla f(x + td) - \nabla f(x)\| dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\alpha \|d\| \cdot L + \|\alpha\| dt \\ &= \frac{L\alpha^2}{2} \|d\|_2^2 \end{aligned}$$

又知

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \mu \|d\|^2 &> f(x) - f(x + \frac{\alpha}{\lambda} d) = -\frac{\alpha}{\lambda} d^T \nabla f(x) - \|R_2\| \\ -\alpha^2 \mu \|d\|^2 &\geq f(x + \alpha d) - f(x) = \alpha d^T \nabla f(x) + R_1 > \alpha d^T \nabla f(x) - \|R_1\| \\ f(x + \frac{\alpha}{\lambda} d) - f(x) - \frac{\alpha}{\lambda} d^T \nabla f(x) &= R_2 \\ \|R_2\| &\leq \frac{L\alpha^2}{2\lambda} \|d\|_2^2 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} (\frac{1}{\lambda^2} - 1) \alpha^2 \mu \|d\|^2 &> -\|R_2\| - \|R_1\| \\ &= (\alpha - \frac{\alpha}{\lambda}) d^T \nabla f(x) - \frac{L\alpha^2}{2} \|d\|_2^2 - \frac{L\alpha^2}{2\lambda} \|d\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\mu(\frac{1}{\lambda^2} - 1) + \frac{L}{2}(1 + \frac{1}{\lambda})\} \alpha \|d\|^2 &\geq (1 - \frac{1}{\lambda}) d^T \nabla f(x) \\ \{[\mu(\frac{1}{\lambda} - 1) + \frac{L}{2}](1 + \frac{1}{\lambda})\} \alpha \|d\|^2 &\geq (1 - \frac{1}{\lambda}) d^T \nabla f(x) \\ \Rightarrow \alpha &\geq \frac{(1 - \frac{1}{\lambda}) d^T \nabla f(x)}{[4\lambda(\frac{1}{\lambda} - 1) + \frac{1}{2}](1 + \frac{1}{\lambda}) \|d\|^2} \end{aligned}$$

**问题 1.3.3. (微分方程数值解 I)** 设常微分方程初值问题

$$y'(x) = f(x, y(x)), 0 < x < T$$

$$y(0) = y_0$$

考虑下述 Euler 差分方法,  $h = \frac{T}{n}, x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n-1$$

假定  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \right| \leq M$ , 且

$$|f(x, \xi) - f(x, \eta)| \leq L|\xi - \eta|, \quad 0 \leq x \leq T$$

其中  $L, M > 0$  为常数, 证明

$$|y(x_i) - y_i| \leq \frac{e^{TL} - 1}{L} Mh, \quad 0 \leq i \leq n$$

**解答 1.3.3.**

先计算局部截断误差:

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(s, y(s))ds$$

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + R_{i-1}$$

$$R_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s, y(s))ds - hf(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

$$\begin{aligned} |R_{i-1}| &= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(s, y(s)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]ds \right| \\ &= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(s, y(s)) - f(x_{i-1}, y(s)) + f(x_{i-1}, y(s)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))]ds \right| \\ &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(s, y(s)) - f(x_{i-1}, y(s))|ds + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_{i-1}, y(s)) - f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))|ds \\ &\quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi)) \right| \cdot |s - x_{i-1}| ds + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi)) \right| |y(s) - y(x_{i-1})| ds \\ &\leq M \int_{x_{i-1}}^{x_i} |s - x_{i-1}| ds + M \int_{x_{i-1}}^{x_i} |y(s) - y(x_{i-1})| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}Mh^2 + \frac{1}{2}Mh^2 \\ &= Mh^2 \text{ (这里有问题, 请检查)} \end{aligned}$$

又:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= y_i - y(x_i) \\ &= \varepsilon_{i-1} + h[f(x_{i-1}), y(x_{i-1})] - f(x_{i-1}, y_{i-1})] + R_{i-1} \end{aligned}$$

则:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i| &\leq (1 + hL)|\varepsilon_{i-1}| + R \\ &\leq (1 + hL)^2|\varepsilon_{i-2}| + R + (1 + hL)R \\ &\dots\dots\dots \\ &\leq (1 + hL)^i|\varepsilon_0| + \frac{R}{hL}((1 + hL)^i - 1) \end{aligned}$$

由函数  $e^x - x - 1$  的单调性可知:

$$1 + hL \leq e^{hL}, h > 0, L > 0. e^{ihL} \leq e^{TL}$$

则:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i| &\leq e^{TL}|\varepsilon_0| \cdot (e^{TL} - 1) \frac{R}{hL} \\ &= (e^{TL} - 1) \frac{R}{hL} \\ &= \frac{e^{TL} - 1}{L} \cdot \frac{R}{h} \end{aligned}$$

$$\text{则: } |y_I - y(x_i)| \leq \frac{e^{TL} - 1}{L} Mh.$$

**问题 1.3.4.** (有限元方法的数学基础) 考虑下述偏微分方程边值问题

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left( K_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中  $\Omega \subset R^2$  是平面区域 (有界开集),  $\partial\Omega$  是  $\Omega$  的边界. 试导出上述微分方程边值问题的变分形式. 若  $K_1, K_2 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $K_1, K_2 \geq \alpha > 0$  ( $\alpha$  为正常数),  $f \in L^2(\Omega)$ , 试证明其变分问题存在唯一解.

**解答 1.3.4.**

记  $\tilde{x} = (x, y)$ , 则  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ , 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y)d\tilde{x} &= \int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x}(K_1(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}v(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}(K_2(x, y))\frac{\partial u}{\partial y}v(x, y)d\tilde{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} -K_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}v(x, y)ds + \int_{\Omega} K_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}d\tilde{x} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} -K_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}v(x, y)ds + \int_{\Omega} K_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}d\tilde{x} \end{aligned}$$

又知:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \partial\Omega.$$

则有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, (x, y) \in \partial\Omega,$$

同理得到:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, (x, y) \in \partial\Omega.$$

故知:

$$\text{上式} = \int_{\Omega} K_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + K_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}d\tilde{x}$$

定义双线性形式

$$a(u, v) := \int_{\Omega} K_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + K_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}d\tilde{x}$$

并记

$$f(v) := \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y)d\tilde{x},$$

由于  $f \in L^2(\Omega)$ , 自然可知: 对于  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ , 有  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , 即  $f(v)$  为连续线性泛函

$$(\|f(v)\| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}).$$

下面来考察  $a(\cdot, \cdot)$  的性质：由于  $K_1, K_2 \in L^\infty(\Omega)$ . 则

(1) 连续性：

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} K_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + K_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\tilde{x} \\ &\leq \max\{\|K_1\|_{L^\infty}, \|K_2\|_{L^\infty}\} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\tilde{x} \\ &\leq \max\{\|K_1\|_{L^\infty}, \|K_2\|_{L^\infty}\} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

即  $a(\cdot, \cdot)$  连续.

(2) 强制性：

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} K_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + K_2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 d\tilde{x} \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 d\tilde{x} \\ &= \alpha |v|_{1,\Omega}^2 \\ &\geq \alpha \cdot C \|v\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

即  $a(u, v)$  强制. (*Poincare 不等式*)

上述问题的变分形式为：

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \\ \text{s.t. } a(u, v) = f(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

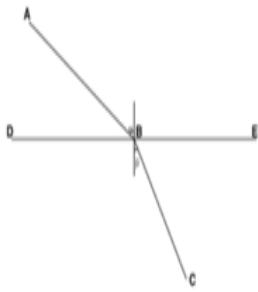
由 *Lax-Milgram 定理* 知：该变分问题有唯一解.

**问题 1.3.5.** (最优化计算方法) 设光在空气中的速度为  $v_1$ , 在玻璃中的速度为  $v_2$ . 如下图, 光从空气中的  $A$  点直线抵达玻璃表面  $DE$  上的  $B$  点后经折射后直线抵达  $C$  点, 已知光走该途径在所有可能的从  $A$  到  $C$  的途径中用时最小, 试求入射角  $\alpha$  和折射角  $\beta$  之间的关系.

### 解答 1.3.5.

费马原理又称为“最短时间原理”：光线传播的路径是需时最少的路径. 光线在介质 1 与介质 2 的传播速度分别为  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ,  $v_2 = \frac{c}{n_2}$ . 其中,  $c$  为真空光速.

由于介质会减缓光线的速度, 折射率  $n_1, n_2$  都大于 1.



根据费马原理，光线传播的路径是所需时间为极值的路径，传播时间

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}{v_2},$$

计算传播时间  $T$  对变量  $x$  的导数，并令其为零。经整理后，可得

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2} = 0.$$

将传播速度与折射率的关系式代入，就会得到折射定律： $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ .

## 1.4 2007 年考试题目及参考解答

共 6 题

**问题 1.4.1. 1.** (数值线性代数) 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为对称正定矩阵,  $b \in \mathbb{R}^n$  为已知向量, 考虑线性方程组  $Ax = b$ , 试描述预条件矩阵为  $P$  的预条件共轭梯度法 (其中残量  $b - Ax_k$  用  $r_k$  表示, 迭代方向用  $d_k$  表示).

**解答 1.4.1.**

预条件共轭梯度法的主要出发点和思想是:

选取一个非奇异矩阵  $p$ , 使得  $\tilde{A} = P^{-1}AP^{-T}$  的特征值分布在一个较小的区间里, 或分布较为“集中”的话, 应用共轭梯度法与方程组

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

其中  $\tilde{x} = P^T x, \tilde{b} = P^{-1}b$ , 将会有较快的收敛速度, 进而可以提高原问题的求解速度.

将共轭梯度法应用于方程组  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  的迭代公式具体地写出来就是:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\tilde{r}_{k-1}^T \tilde{r}_{k-1}}{\tilde{p}_k^T \tilde{A} \tilde{p}_k} \\ \tilde{x}_k &= \tilde{x}_{k-1} + a_k \tilde{p}_k \\ \tilde{r}_k &= \tilde{r}_{k-1} - a_k \tilde{A} \tilde{p}_k \\ B_k &= \frac{\tilde{r}_k^T \tilde{r}_k}{\tilde{r}_{k-1}^T \tilde{r}_{k-1}} \\ P_{k+1} &= \tilde{r}_k + \beta_k \tilde{p}_k \end{aligned}$$

其中  $\tilde{x}_0$  是任取的初值,  $\tilde{r}_0 = \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x}_0, \tilde{p}_1 = \tilde{r}_0$ .

按照上述公式直接迭代, 需计算  $\tilde{A} = P^{-1}AP^{-T}$  和  $\tilde{b}$ , 而且还需要将迭代得到的近似解  $\tilde{x}_k$  通过变换  $x_k = P^{-T}\tilde{x}_k$  变成方程组  $Ax = b$  的近似解. 实际上这些都是不必要的, 作变换  $x_k = P^{-T}\tilde{x}_k, r_k = p\tilde{r}_k, p_k = P^{-T}\tilde{p}_k$

并记  $M = PP^T$ , 代入上面各式, 可得到如下的算法 1.

---

**Algorithm 1** 预条件共轭梯度法

---

(1) 输入  $A, M, b$  和  $x_0$

$$r_0 := b - Ax_0, \quad z_0 := M^{-1}r_0, \quad P_1 := z_0$$

$$\rho_0 := r_0^T Z_0, \quad k := 1$$

$$a_k := \frac{p_{k-1}}{p_k^T w}$$

$$x_k := x_{k-1} + a_k p_k, \quad r_k := r_{k-1} - a_k w,$$

$$z_k := M^{-1}r_k, \quad \rho_k := r_k^T z_k$$

$$\beta_k := \frac{\rho_k}{p_{k-1}}, \quad p_{k+1} = Z_k + \beta_k p_k$$

(3) 如果  $\rho_k \leq \rho_o \varepsilon$ , 则输出  $x_K$ , 结束, 否则  $k := k + 1$ , 转步 (2)

#### 问题 1.4.2. (数值线性代数)

已知  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为对称正定矩阵,  $n$  维向量  $s_k$  与  $y_k$  满足关系式  $s_k^T y_k > s_k^T B_k s_k$ ,

(1) 试求向量  $v_k$ , 使得如下对称秩一迭代满足  $B_{k+1}s_k = y_k$

$$B_{k+1} = B_k + v_k v_k^T$$

(2) 分析  $B_k$  与  $B_{k+1}$  的各个特征值之间的大小关系, 并计算行列式  $\text{Det}(B_{k+1})$ .

解答 1.4.2. (1)

$$B_{k+1}s_k = (B_k + v_k v_k^T)s_k = y_k$$

$$B_k s_k + v_k^T s_k v_k = y_k$$

两边同乘  $s_k^T$ , 有  $s_k^T B_k s_k + (v_k^T s_k)(s_k^T v_k) = s_k^T y_k$

$$(v_k^T s_k)^2 = s_k^T y_k - s_k^T B_k s_k$$

$$v_k = \frac{y_k - B_k s_k}{v_k^T s_k} = \frac{y_k - B_k s_k}{\sqrt{s_k^T y_k - s_k^T B_k s_k}}$$

(2) 由定理 6.8.  $B_k, B_{K+1}$  均为 Hermite 阵.

$$\begin{aligned} & \lambda_1, \dots, \lambda_n, \quad \mu_1, \dots, \mu_n \\ \Rightarrow & \lambda_i + \varepsilon_n \leq \mu_i \leq \lambda_i + \varepsilon_i \end{aligned}$$

关于  $\varepsilon_1, \varepsilon_n$ :  $v_k v_k^T$  的最大特征值为  $\|v_k\|_2^2 = \frac{\|y_k - B_k s_k\|_2^2}{s_k^T y_k - s_k^T B_k s_k}$ ;  $v_k v_k^T$  最小特征值为 0.

$$B_{k+1} = B_k + v_k v_k^T$$

$$\text{Det}(B_{k+1}) = \text{Det}c, \quad B_k + \rho^2(y_k - B_k s_k)(y_k - B_k s_k)^T$$

$$\det(\Lambda + \rho z z^T), \quad z = Q^T(y_k - B_k s_k) = Q^T y_k - \Lambda Q^T s_k.$$

### 问题 1.4.3. (最优化计算方法)

给出非线性方程  $f(x) = 0$  的割线法，并分析其收敛速度.

### 解答 1.4.3.

割线法求解非线性方程  $f(x) = 0$  的思路如下：

给定  $x_{n-1}$  和  $x_n$ , 我们作通过  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  和  $x_n, f(x_n)$  的直线 (函数  $f$  的割线), 点斜式方程为：

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

现选择  $x_{n+1}$  为这条割线的根, 因此  $x_{n+1}$  满足以下的方程:

$$f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) = 0$$

解得:  $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

割线法收敛速度：

如果  $f'(x^*) = 0, f''(x^*) \neq 0$ , 且  $x_1 \neq x_2$  充分靠近  $x^*$  时, 割线法产生的点列必超线性收敛于  $(x^*)$ . 如果  $f''(x^*) \neq 0$

则割线法的收敛阶为  $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ .

**问题 1.4.4. (最优化计算方法)**

已知  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  和  $c(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  为一般非线性函数, 试给出等式约束优化问题

$$\min f(x)$$

$$s.t. c(x) = 0$$

的 *Lagrange-Newton* 法, 并描述每步迭代方向满足的等价二次规划问题.

**解答 1.4.4.**

考虑等式约束优化问题

$$\min f(x)$$

$$s.t. C(x) = 0$$

$x$  是一个  $k$ - $k$ - $T$  点当且仅当存在  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  使得

$$\begin{cases} \nabla f(x) - \nabla(x)^T \lambda = 0 \\ -c(x) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

根据 *Lagrange* 函数的定义,  $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T c(x)$ .  $(*)$  式实际上就是求 *Lagrange* 函数的稳定点, 因而称之为 *Lagrange* 方法, 给定当前迭代点  $x_k \in \mathbb{R}^m$ , 求解  $(*)$  式的 *Newton-Raphaon* 步为  $((\delta x)_k, (\delta \lambda)_k)$  它满足:

$$\begin{pmatrix} w(x_k, \lambda_k) & -A(x_k) \\ -A(x_k)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta x)_k \\ (\delta \lambda)_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f(x_k) - A(x_k)\lambda_k \\ -c(x_k) \end{pmatrix} \quad (\Delta)$$

其中:

$$A(x) = \nabla C(x)^T$$

$$W(x, \lambda) = \nabla^2 f(x) - \sum_{i=1}^m (\lambda_k)_i \nabla^2 C_i(x_k)$$

考虑罚函数:

$$P(x, \lambda) = \|\nabla f(x) - A(x)\lambda\|_2^2 + \|C(x)\|_2^2$$

不难验证, 由  $(\Delta)$  定义的  $(\delta x)_k$  和  $(\delta \lambda)_k$  满足:

$$((\delta x)_k^T, (\delta \lambda)_k^T) \nabla P(x_k, \lambda_k) = -2P(x_k, \lambda_k) \leq 0$$

此处  $\nabla P$  是指在  $(x, \lambda)$  空间上的梯度, 下面的算法 2 就是基于  $(\Delta)$  的算法, 称为 *Lagrange-Newton 法*:

---

**Algorithm 2 Lagrange-Newton 法**

---

- (1) 给出  $x_1 \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 \in \mathbb{R}^m, \beta \in (0, 1), \varepsilon \geq 0, k := 1$
  - (2) 计算  $P(x_k, \lambda_K)$ , 如果  $P(x_k, \lambda_K) \leq \varepsilon$ , 则停;
  - 求解  $(\Delta)$ , 得到  $(\delta x)_k$  和  $(\delta \lambda)_k; \alpha = 1$ .
  - (3) 如果  $P(x_k + \alpha(\delta x)_k) \leq (1 - \beta\alpha)P(x_k, \lambda_k)$  则转步 (4);  $\alpha = \frac{\alpha}{4}$ , 转步 (3)
  - (4)  $x_{k+1} = x_k + \alpha(\delta x)_k; \lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha(\delta \lambda)_k$
  - $k := k + 1$ ; 转步 (2)
- 

**问题 1.4.5. (微分方程数值解 I)**

设  $\nu > 0$  是常数,  $f$  和  $u_0$  是给定的函数, 考虑下述微分方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx} + f(x, t) & [0, \pi] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

写出上述初边值问题的显式差分格式 ( $u_t$  的向前差分,  $u_{xx}$  的中心差分), 并考虑其稳定性.

**解答 1.4.5.**

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f(jh, n\Delta t), & 1 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N \\ u_j^0 = u_0(jh), & 1 \leq j \leq M \\ u_1^n = u_{M+1}^n = 0, & 0 \leq n \leq N \end{cases}$$

下面分析该微分方程初边值问题的显示差分格式的稳定性:

记  $r = \frac{\Delta t}{h^2}$  我们有: 由  $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f(jh, n\Delta t)$ ,

可知:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \nu r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \cdot f(jh, n\Delta t)$$

$$u_j^{n+1} = \nu r u_{j+1}^n + (1 - 2\nu r) u_j^n + \nu r u_{j-1}^n + \Delta t f(jh, n\Delta t)$$

则知离散的初边值问题可以写成矩阵形式:

$$\begin{cases} u^{n+1} = Cu^n + b^n + \Delta t f(jh, n\Delta t), & 0 \leq n \leq N \\ u^0 = [u_0(h), u_0(2h) \cdots u_0(Mh)]^T \end{cases}$$

其中  $u^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_n^n]^T$  和  $b^n = [0, \dots, 0]^T$ . 系数矩阵  $C = tridiag\{\nu r, 1 - 2\nu r, \nu r\}$  是  $M \times M$  的三对角矩阵, 三对角矩阵  $C$  的  $M$  个特征值为:

$$\lambda_j = 1 - 2\nu r + 2\nu r \cos(j\pi h) = 1 - 4r \sin^2 \frac{j\pi h}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

因此  $\rho(C) = \max\{|\lambda(C)|\} \leq 1 + O(\Delta t)$ , 也即:  $|1 - 4\nu r \sin^2(\frac{j\pi h}{2})| \leq 1$  成立的充分必要条件是  $\nu r \leq \frac{1}{2}$ .

又由于  $C$  是实对称矩阵, 故  $\nu r \leq \frac{1}{2}$  是该方程组显式分差格式稳定性的充分必要条件.

#### 问题 1.4.6. (有限元)

设  $\Omega$  是平面有界凸区域, 其边界为  $\partial\Omega$ , 且  $f \in L^2(\Omega)$ , 考虑下述椭圆型微分方程边值问题:

$$-\Delta u = f \text{ 在 } \Omega \text{ 中, } u = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}$$

- (1) 写出上述微分问题的位能极小原理的变分问题, 并证明其解的存在唯一性;
- (2) 写出上述微分问题的两种混合变分形式, 并分别证明其解的存在唯一性.

#### 解答 1.4.6.

本学期的有限元课程没有讲授过位能极小原理和混合变分形式的相关知识.

## 1.5 2010 年考试题目及参考解答

共 4 题

### 问题 1.5.1. (数值线性代数)

- (1) 试对求解线性方程组  $Ax = b$  的下列迭代算法: *Jacobi*, *G-S*, *SOR*, *SSOR*, *CG*, *GCR*, *Lanczos*, *GMRES* 等作一简单的分类, 并指出构造其算法的基本思路.
- (2) 对上述算法的收敛条件和适用范围作以简单的归纳和评述.

### 解答 1.5.1.

- *Jacobi Method: (Jacobi Method)*

收敛情况: 若  $A$  为对角占优矩阵, 则对于任意的  $x_0$  和  $b$ , *Jacobi* 法必定收敛.

- *GS: (Gauss-Seidel Method)*

收敛情况: 若  $A$  为对角占优矩阵, 则对于任意的  $x_0$  和  $b$ , *Gauss-Seidel* 法必定收敛.

- *SOR: Successive Over Relaxation Method* 可看成是 *Gauss-Seidel* 方法的加速, *Seidel* 迭代法是 *SOR* 方法的特例. 当系数矩阵对角占优或对称正定时, 可保证 *SOR* 迭代法收敛.

收敛情况:

1. 若  $\rho(B_\omega) < 1$ , 则  $0 < \omega < 2$ , 即说明了  $\omega$  的取值范围.

2. 若  $\omega > 1$ , 称为过松弛 (*overrelaxation*) ; 若  $\omega < 1$ , 则称为欠松弛. 显然松弛因子  $\omega$  影响 *SOR* 法的收敛性, 但寻找使  $\rho(B_\omega)$  最小化的松弛参数通常是一个相当困难的工作.

- *SSOR: 对称逐次超松弛法 (Symmetric Successive Overrelaxation Method)* 简称 *SSOR* 方法
- *CG (Conjugate Gradient Method)* 共轭梯度法 *Krylov* 子空间方法

收敛情况: 共轭梯度法收敛的快慢依赖于系数矩阵的谱分布情况; 当系数矩阵的条件数很小, 或其谱大部分集中在点附近而仅有少数几个远离此点时, 可以期望用算法迭代很少几步就会得到高精度的近似解, 大量的数值试验表明, 在这些情况下, 往往需要比

理论上估计的迭代次数更少的迭代次数就可得到所需精度的近似解. 这一现象就是所谓的共轭梯度法的“超线性收敛性”.

- *GCR*: 广义共轭残差法 (*Generalized Conjugate Residual Method*) *Krylov* 子空间方法

性质: 当系数矩阵  $A$  对称正定时, *GCR* 法就是与共轭梯度法等价的共轭剩余法.

收敛情况: 收敛速度依赖于系数矩阵  $A$  的条件数.

基本思想: 每次迭代在 *Krylov* 子空间  $K(A, r_0, j)$  上求胜欲函数  $\phi(x) = \|b - A(x_0 + x)\|_2$  的极小点.

- *Lanczos* 方法: *Krylov* 子空间方法

- *GMRES* 方法: 广义极小残量法 (*Generalized Minimum Residual*), *Krylov* 子空间方法

收敛情况:

$$\|r_m\| \leq \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(A^T + A)}{2\lambda_{\max}(A^T + A)}\right)^{m/2} \|r_0\|$$

其中是  $M$  的最小和最大特征值.

用于求解线性方程的迭代法可分为两类: 定常迭代法 (*stationary iterative method*) 和 *Krylov* 子空间方法.

表 5-1 迭代法分类表

定常迭代法	Jacobi	GS	SOR	SSOR
<i>Krylov</i> 子空间方法	CG	GMRES	Lanczos	GCR

详见数值代数课本/笔记

**问题 1.5.2. (数值线性代数)**

(1) 设线性或非线性方程组  $Ax = b$  解存在, 其单步迭代格式为:

$$x_{k+1} = \varphi_k(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

其中  $x_0$  为初值,  $\varphi_k$  为迭代算子 (线性或非线性), 若  $x_k \rightarrow x, k \rightarrow +\infty$ , 则称  $y^{(k)} = x_k - x$  为  $x_k$  的误差向量; 定义

$$R_k \equiv -\frac{1}{k} \ln \frac{\|y^{(k)}\|}{\|y^{(0)}\|}, \quad y^{(0)} \neq 0$$

为  $x_k$  的  $k$  步平均收敛速度, 这里  $\|y\|$  表示向量  $y$  的任一范数;  $R_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k$  为  $x_k$  的渐进收敛速度. 试证明渐进收敛速度与所取的范数无关.

(2) 线性方程组  $Ax = b$  (其中  $A$  非奇异) 关于单步常迭代格式为:

$$x_{k+1} = Gx_k + c, k = 0, 1, \dots$$

试证明渐进收敛速度  $R_\infty = -\ln \rho(G)$  并与所取范数无关, 其中  $\rho(G)$  表示迭代矩阵  $G$  的谱半径.

**解答 1.5.2.**

(1) 空缺

(2) 往证  $R_\infty(G) = -\ln \rho(G)$ , 其中  $G$  是单步线性定常迭代矩阵 ( $x_{k+1} = Gx_k + c, k = 0, 1, \dots$ ) , 只需证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(G)$  即可:

一方面, 因为  $(\rho(G))^k = \rho(G^k) \leq \|G^k\|$ , 所以  $\rho(G) \leq \|G^k\|^{\frac{1}{k}}$ .

另一方面, 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 考虑矩阵  $B_\varepsilon = \frac{1}{\rho(G) + \varepsilon} G$ , 显然  $\rho(B_\varepsilon)$ , 故知  $\lim_{k \rightarrow \infty} B_\varepsilon^k = 0$ , 因此存在自然数  $K$ , 使得当  $k \geq K$  时, 有  $\|B_\varepsilon^k\| = 1$ , 即:  $\|G\| \leq (\rho(G) + \varepsilon)^k$ , 因此, 我们证明了: 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在自然数  $K$ , 使得当  $k \geq K$  时, 有:  $\rho(G) \geq \|G^k\|^{\frac{1}{k}} \geq \rho(G) + \varepsilon$ .

即:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(G)$ .

**问题 1.5.3. (微分方程数值解 I)**

构造非线性模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\theta}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + (1 - \theta)u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的 Crank-Nicolson 差分格式并推导格式稳定的充分必要条件, 其中  $\theta$  是实参数.

**解答 1.5.3.**

题目奇怪, 原因: CN 格式是针对抛物型方程而言. 不知道如何对  $\frac{\partial u}{\partial x}$  构建 CN 格式.

**问题 1.5.4.** 设函数  $f(x)$  充分光滑, 在步长为  $h$  的规则网格上,  $f(x)$  的偶数  $m$  阶导数的  $2p$  阶差分近似可以表示为

$$D^m f(x) \approx \frac{1}{h^m} \sum_{n=-L}^L \alpha_{p,n}^m E^n f(x)$$

(以下内容空缺, 有待补充)

**解答 1.5.4.**

原题不全, 无法做.

## 1.6 2017 年考试题目及参考解答

共 10 题

### 问题 1.6.1. (数值逼近)

假定  $p$  和  $q$  是次数为 4 的多项式, 且有

$$p(j) = q(j) = j, j = 2, 3, 4, 5,$$

和

$$p(1) = 1, q(1) = 4$$

计算  $p(0) - q(0)$  的值.

### 解答 1.6.1.

因为  $P(j) = q(j) = J, j = 2, 3, 4, 5$  故  $j = 2, 3, 4, 5$  分别为  $P(j) - q(j)$  的 4 个零点. 故

$$P(j) - q(j) = c \cdot (x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$$

又:

$$P(1) - q(1) = 1 - 4 = c(1 - 2)(1 - 3)(1 - 4)(1 - 5)$$

解得:  $c = -\frac{3}{10}$ . 则:

$$\begin{aligned} P(1) - q(1) &= -\frac{3}{10} \cdot (0 - 2)(0 - 3)(0 - 4)(0 - 5) \\ &= -\frac{3}{10} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= -36 \end{aligned}$$

### 问题 1.6.2. (数值逼近)

寻找  $x^3 - x$  在  $[-1, 1]$  上的最佳 2 次逼近多项式, 这里  $\Pi_2$  表示次数不超过 2 的多项式空间.

### 解答 1.6.2.

寻找  $\min_{p \in \Pi_2} \max_{x \in E_{1,1}} [x^3 - x - p(x)]$ , 即需寻找函数  $x^3$  的 2 次最佳逼近多项式. 又知 Chebyshev 多项式在  $[-1, 1]$  上的最小偏差多项式, 故:

$$2^2(x^3 - x - p(x)) = T_3(x)$$

又:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$$

故:

$$p(x) = \frac{1}{4}x.$$

### 问题 1.6.3. (数值线性代数)

(a) 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\|\cdot\|$  是  $\mathbb{C}^{n \times n}$  上任一矩阵范数, 证明:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{1/m} = \rho(A)$$

其中  $\rho(A)$  为方阵  $A$  的谱半径;

(b) 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 如果  $|A| \leq B$ , 证明:  $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$ ;

(c) 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 证明:  $\rho(I_n + A) \leq 1 + \rho(A)$ , 其中  $I_n$  表示  $n$  阶单位矩阵, 特别地, 如果  $A$  为非负矩阵, 则  $\rho(A)$  是方阵  $A$  的一个单特征值.

(d) 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为非负矩阵, 如果存在某一正整数  $k \geq 1$  使得  $A^k$  为正矩阵, 证明:  $\rho(A)$  是方阵  $A$  的一个单特征值.

### 解答 1.6.3.

(a)

谱半径具有如下两个性质:

(1)  $\rho(A) \leq \|A\|$ , 其中  $\|\cdot\|$  为  $C^{n \times n}$  上任意范数.

(2) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $C^{n \times n}$  上的算子范数  $\|\cdot\|$ , 使得:

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

往证本题结论, 设  $\|\cdot\|_*$  为满足上述两个性质的矩阵范数, 则有:

$$\rho(A) = \rho(A^m)^{\frac{1}{m}} \leq \|A^m\|_*^{\frac{1}{m}} \leq \rho(A^m)^{\frac{1}{m}} + \varepsilon$$

故:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|_*^{\frac{1}{m}} = \rho(A)$  再由范数的等价性可知:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|_*^{\frac{1}{m}} = \rho(A)$$

(b)

书(徐)中第 28 页定理介绍了谱半径的单调性:

设  $A \in C^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 如果  $|A| \geq B$ , 则  $\rho(A) \geq \rho(B)$ .

该定理得证明如下:

反证法, 若命题不真, 则:  $\rho(A) > \rho(B)$ . 令  $r = \frac{\rho(A) + \rho(B)}{2}$ . 则  $\rho(A) > r\rho(B)$ , 再令  $\tilde{A} = \frac{A}{r}, \tilde{B} = \frac{B}{r}$ . 则:  $\rho(\tilde{A}) = \frac{\rho(A)}{r} > 1, \rho(\tilde{B}) = \frac{\rho(B)}{r} < 1$ . 故由定理 3.8 (即:  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$ ) 可知:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{B}^k = 0$ .

而  $|A| \leq B$  又蕴含着  $|\tilde{A}^k| \leq |\tilde{A}|^k \leq |\tilde{B}^k|$ , 对一切自然数  $k$  成立, 从而有  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ . 再应用定理 3.8 知  $\tilde{A} < 1$ . 这与  $\tilde{A} > 1$  矛盾. 故  $\rho(A) \leq \rho(B)$  成立.

(c)

$$\begin{aligned} \rho(I_n + A) &= \max |\lambda(I_n + A)| \\ &= \max |1 + \lambda(A)| \\ &\leq 1 + \max |\lambda(A)| \\ &= 1 + \rho(A). \end{aligned}$$

若  $A$  非负, 由推论 5.1,  $\rho(A) > 0$ , 故:

$$\max |1 + \lambda(A)| = 1 + \max |\rho(A)| = 1 + \rho(A).$$

(d)

说法 1:

对  $A^k > 0$ , 用推论 5.1( $p_{32}$ )

即:  $\rho(A^k)$  为  $A^k$  的单特征值,  $\lambda(A^k) = (\lambda(A))^k$ , 故  $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$ , 故  $(\rho(A)^k)^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ .

即:  $\rho(A)$  为  $A$  的单特征值.

说法 2:

首先,  $A$  的特征值和特征向量 (特征对) 与  $A^k$  的正特征对是对应的, 即若  $A\xi = \lambda\xi$ ,  $(\lambda, \xi)$  为  $A$  的一个特征对.

(推论 5.1) 由  $A^k > 0$ , 指  $\rho(A^k)$  是  $A^k$  的正特征值,  $\rho(A^k)$  的几何重数是 1, 且对应的特征向量可取作正向量, 不妨记特征向量为  $u$  (并取  $u > 0$ ) , 即

$$(1) A^k u = \rho(A^k) u = (\rho(A))^k u.$$

(2) 继而可以知道;  $u$  也是  $A$  的一个特征向量, 并且其对应的特征值为  $\rho(A)$ , 且  $\rho(A)$  的几何重数为 1, 否则矛盾.

$$(3) (A^T)^k v = [\rho(A^T)]^k v, \text{ 即 } v \text{ 是 } A \text{ 的左特征向量}.$$

则由结论 (1) 和 (3), 可知属于  $\rho(A)$  的左右特征向量  $v$  和  $u$  满足  $v^T u > 0$ , 即  $v^T u \neq 0$ .

则由课本 (徐) 引理 5.4 知  $\rho(A)$  是  $A$  的单特征值.

#### 问题 1.6.4. (数值线性代数)

- (a) 本课程介绍了哪些 *Krylov* 子空间方法? 请一一写出; 如果依照构造思路的不同, 请给出它们的分类, 并指出其主要思想.
- (b) 预优技术是目前大规模科学计算中经常采用的技巧, 请指出构造预条件子的一些主要途径, 并对其主要思想作以简要阐述;
- (c) 写出预优共轭梯度法 (*PCG*) 具体的算法过程和收敛性结果; 对照 *CG* 算法的收敛结果, 解释为什么 *PCG* 算法比 *CG* 算法收敛快?

#### 解答 1.6.4.

(a)

- *CG* (*Conjugate Gradient Method*) 共轭梯度法 *Krylov* 子空间方法

收敛情况: 共轭梯度法收敛的快慢依赖于系数矩阵的谱分布情况; 当系数矩阵的条件数很小, 或其谱大部分集中在点附近而仅有少数几个远离此点时, 可以期望用算法迭代很少几步就会得到高精度的近似解, 大量的数值试验表明, 在这些情况下, 往往需要比理论上估计的迭代次数更少的迭代次数就可得到所需精度的近似解. 这一现象就是所谓的共轭梯度法的“超线性收敛性”.

- *GCR*: 广义共轭残差法 (*Generalized Conjugate Residual Method*) *Krylov* 子空间方法

性质: 当系数矩阵  $A$  对称正定时, *GCR* 法就是与共轭梯度法等价的共轭剩余法.

收敛情况: 收敛速度依赖于系数矩阵  $A$  的条件数.

基本思想: 每次迭代在 *Krylov* 子空间  $K(A, r_0, j)$  上求胜欲函数  $\phi(x) = \|b - A(x_0 + x)\|_2$  的极小点.

- Lanczos 方法: Krylov 子空间方法
- GMRES 方法: 广义极小残量法 (*Generalized Minimum Residual*) , Krylov 子空间方法

收敛情况:

$$\|r_m\| \leq \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(A^T + A)}{2\lambda_{\max}(A^T + A)}\right)^{m/2} \|r_0\|$$

其中是  $M$  的最小和最大特征值.

(b) 常用预处理方法将原方程进行等价转化, 同时预条件子 (多为对角阵) 应该具有以下特征:

- (1)  $P$  对称正定;
- (2)  $P$  应该与  $A$  的稀疏性差不多;
- (3)  $P^{-1}A$  即  $\hat{A} \approx C^{-1}AC^{-T}$  的特征值分布 “集中” .

(4) 形如  $Px = r$  的方程组容易求解, 即:  $P$  应该具有某些特殊的形状, 比如块对角, 或三角矩阵的乘积等等.

常见的预条件子有 Jacobi 预条件子、Gauss-Seidel 预条件子、不完全 Cholesky 分解预条件子.

目的归根结底是为了

$$\hat{P} = \arg \min_p \text{cond}(P^{-1}A)$$

其中  $\text{cond}A = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ .

(c) 收敛情况:

$$\|x_k - x_*\|_A \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right) \|x_0 - x_*\|_A$$

其中  $\kappa$  是  $P^{-1}A$  的最大特征值和最小特征值之比,  $x_* = A^{-1}b$ .

为何收敛速度更快: 特征值分布更加集中, 条件数更少.

### 问题 1.6.5. 空缺

解答 1.6.5.

原题不全, 无法做.

**问题 1.6.6. (最优化计算方法)**

设  $x(\sigma)$  为如下问题的解

$$\min P(x, \sigma) = f(x) + \frac{1}{\sigma} \sum$$

空缺

**解答 1.6.6.**

原题不全，无法做.

**问题 1.6.7. (微分方程数值解 I)**

分析热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0$$

的差分格式

$$u_j^{k+1} = u_j^{k-1} + \sigma(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k), \sigma = \frac{2a\Delta t}{h^2}$$

的稳定性.

**解答 1.6.7.**

将三层格式转化成与其等价的二层差分格式.

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = v_j^k + 2aru_{j+1}^k - 4aru_j^k + 2aru_{j-1}^k \\ v_j^{k+1} = u_j^k \end{cases}$$

其中  $r = \frac{\Delta t}{h^2}$ , 令  $u = [u, v]^T$ , 则上面方程组可写成:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_j^{k+1} = \begin{pmatrix} -4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_j^k + \begin{pmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_{j+1}^k + \begin{pmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_{j-1}^k$$

令  $u_j^k = v^k e^{i\sigma j h}$  代入上式得增长矩阵:

$$G(\Delta t, \sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4ar \cos \sigma h - 4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4ar \cos \sigma h - 4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

知  $G(\Delta t, \sigma)$  的特征方程为:

$$(\mu - 4\arccos\sigma h + 4ar)\mu - 1 = 0$$

$$(\Leftrightarrow \mu^2 + 8arsin^2\frac{\sigma h}{2} \cdot \mu - 1 = 0)$$

则特征根为:

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= \frac{4ar(\cos\sigma h - 1) \pm \sqrt{[4ar(\cos\sigma h - 1)]^2 + 4}}{2} \\ &= 2ar(\cos\sigma h - 1) \pm \sqrt{[2ar(\cos\sigma h - 1)]^2 + 1}\end{aligned}$$

或写成

$$\mu = -4ar\sin^2\frac{\sigma h}{2} \pm \sqrt{16a^2r^2\sin^4\frac{\sigma h}{2} + 1}$$

记  $\mu_1$  为绝对值较大的特征值:  $|\mu_1| > 1$ . 故  $\rho(G(\Delta t, \sigma)) > 1$ , 不满足 Von Neumann 条件, 不稳定.

### 问题 1.6.8. (微分方程数值解 I)

求差分格式

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\alpha}{h} \delta_x^0 u_m^n + \beta \frac{\delta_x^0(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{h^3} = 0$$

的稳定性条件, 其中  $\alpha > 0, \beta > 0$  为常数,  $\delta_x^0 u_m^n = u_{m+1}^n - u_{m-1}^n$

### 解答 1.6.8.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\alpha}{h} \delta_x^0 u_m^n + \beta \frac{\delta_x^0(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{h^3} = 0$$

其中  $\delta_x^0 u_m^n = u_{m+1}^n - u_{m-1}^n$ , 差分格式变为

$$\begin{aligned}& \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\alpha}{h}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{\beta}{h^3}(u_{m+2}^n - u_{m-2}^n - 2(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + u_m^n - u_{m-2}^n) = 0 \\& \Rightarrow \frac{1}{\Delta t}(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) + \frac{\alpha}{h}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{\beta}{h^3}(u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) = 0 \\& \Rightarrow \frac{1}{\Delta t}(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) + \frac{\beta}{h^3}(u_{m+2}^n + (\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3})u_{m+1}^n + (-\frac{\alpha}{h} + \frac{2\beta}{h^3})u_{m-1}^n - \frac{\beta}{h^3}u_{m-2}^n) = 0\end{aligned}$$

令  $v_m^{n+1} = u_m^n$ , 得:  $u_m^{n-1} = v_m^n$ , 则

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_m^{n+1}V_m^n) + \frac{\beta}{h^3}u_{m+2}^n + \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right)u_{m+1}^n + \left(-\frac{\alpha}{h} + \frac{2\beta}{h^3}\right)u_{m+1}^n - \frac{2\beta}{h^3}u_{m-2}^n = 0 \\ v_m^{n+1} = u_m^n \end{cases}$$

令  $\begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix} = \vec{u}_m^n$ , 则:

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\beta\Delta t}{h^3}u_{m+2}^n - \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right)\Delta tu_{m+1}^n - \left(-\frac{\alpha}{h} + \frac{2\beta}{h^3}\right)\Delta tu_{m-1}^n + \frac{2\beta}{h^3}\Delta tu_{m-2}^n = 0 \\ v_m^{n+1} = u_m^n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_m^{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}_m^n + \begin{pmatrix} \frac{\beta\Delta t}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}_{m+2}^n + \begin{pmatrix} \left(\frac{2\beta}{h^3} - \frac{\alpha}{h}\right)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}_{m+1}^n \\ &\quad + \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}_{m-1}^n + \begin{pmatrix} \left(\frac{\beta}{h^3}\right)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}_{m-2}^n \end{aligned}$$

令  $\vec{u}_m^n = \vec{v}^n e^{i\sigma mh}$ . 得增长因子为:

$$\begin{aligned} G(\Delta t, \sigma) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\beta\Delta t}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{2i\sigma h} + \begin{pmatrix} \left(\frac{2\beta}{h^3} - \frac{\alpha}{h}\right)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\sigma h} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\sigma h} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\beta}{h^3}\right)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-2i\sigma h} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta\Delta t}{h^3}e^{2i\sigma h} + \left(\frac{2\beta}{h^3} - \frac{\alpha}{h}\right)\Delta te^{i\sigma h} + \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right)\Delta te^{-i\sigma h} + \left(\frac{\beta}{h^3}\right)\Delta te^{-2i\sigma h} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

记左上角元素  $A$ , 特征方程为  $(x - A)x - 1 = 0$ , 即  $x^2 - Ax - 1 = 0$ .  $x_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2}$ ,

且:

$$\begin{aligned} A &= -\Delta t \frac{\beta}{h^3} \cdot (e^{2i\sigma h} - e^{-2i\sigma h}) + \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right)\Delta t (-e^{i\sigma h} - e^{-i\sigma h}) \\ &= -2i\Delta t \frac{\beta}{h^3} \cos(2\sigma h) - \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right)\Delta t \cdot 2i \cdot \cos(\sigma h) \end{aligned}$$

则

$$|x_{1,2}| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2} \right| \leq 1$$

Case 1:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow A \pm \sqrt{A^2 + 4} &\leq 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{A^2 + 4} &\leq 2 - A \\ \Leftrightarrow A^2 + 4 &\leq 4 + A^2 - 4A \\ \Leftrightarrow A &\leq 0. \end{aligned}$$

Case 2:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{A - \sqrt{A^2 + 4}}{2} < 0 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq A - \sqrt{A^2 + 4} \\ \Leftrightarrow \sqrt{A^2 + 4} &\leq A + 2 \\ \Leftrightarrow A^2 + 4 &\leq A^2 + 4 + 4A \\ \Leftrightarrow A &\geq 0. \end{aligned}$$

故只有当  $A = 0$  时,  $\rho(G(\Delta t, \sigma)) \leq 1$ , 即:

$$A = -2i\Delta t \frac{\beta}{h^3} \cos(2\sigma h) - \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3} \right) \Delta t \cdot 2i \cdot \cos(\sigma h) = 0$$

则:

$$\alpha \cdot \left( \frac{\Delta t}{h} \cdot 2i \cdot \cos(\sigma h) \right) = \left( \frac{2}{h^3} \Delta t 2i \cos(\sigma h) - \frac{1}{h^3} \Delta t 2i \cos(2\sigma h) \right) \beta$$

即:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\cos(\sigma h) - \cos(2\sigma h)}{h^2 \cdot \cos(\sigma h)}$$

时, 差分格式稳定.

### 问题 1.6.9. (有限元方法的数学基础)

考虑边值问题

$$-u'' + q(x)u = f(x), u(0) = u(1) = 0,$$

其中  $q(x) \geq 0, f(x)$  是充分光滑的函数.

- (a) 给出上述问题的弱形式, 并证明弱解存在唯一;
- (b) 若使用分片线性连续有限元逼近上述问题, 假设  $u$  和  $u_h$  分别是上述问题的解和相应的有限元解, 给出  $u - u_h$  的能量模和  $L^2$  模误差估计 (无需证明);
- (c) 假设  $\{\phi_i\}$  是分片线性连续有限元空间  $V_h$  的一组基,  $u_I$  是相应的有限元插值, 即  $u_I\{x\} = \sum u(x_i)\phi_i$ , 证明:

$$\int_0^1 (u' - u'_I)\nu'_h dx = 0, \forall \nu_h \in V_h;$$

- (d) 证明:  $\|u_h - u_I\|_{H^1(0,1)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(0,1)}$

### 解答 1.6.9.

- (a) 记  $\Omega = [0, 1]$ , 那么对  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ , 有:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)v(x)dx &= \int_{\Omega} (-u'' + q(x)u)v(x)dx \\ &= -u'v|_0^1 + \int_{\Omega} u'v'dx + \int_{\Omega} q(x)uvdx \\ &= \int_{\Omega} u'v' + quvdx \end{aligned}$$

定义双线性形式:  $a(u, v) = \int_{\Omega} u'v' + quvdx$  (可验证线性). 上述问题的弱形式为

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \\ \text{s.t. } a(u, v) = f(v) (\forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ 成立}) \end{cases}$$

则:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} u'v' + quvdx \\ &\leq |u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + \max_{x \in \Omega} |q(x)| \cdot |u|_{0,\Omega}|v|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

$$\leq (1 + \max_{x \in \Omega} |q(x)|) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

又知  $q(x)$  充分光滑, 故  $\max_{x \in \Omega} |q(x)|$  有界, 故  $a(u, v)$  连续.

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |v'|^2 + q|v|^2 dx \geq \int_{\Omega} |v'|^2 dx = \|v\|_{1,\Omega}^2 \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2$$

上面的最后一个不等号是根据 *Poincare 不等式*. 于是  $a(\cdot, \cdot)$  是强制的, 再由 *Lax-Milgram 定理* 可知: 弱形式解存在且唯一.

(b)

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq h|u|_{1,\Omega}$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq ch^2|u|$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u' - u'_I) V_h^1 dx &= \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u' - u'_I) v_h^1 dx \\ &= \sum_i (u - u_I) v_h^1|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u - u_I) v_h'' dx \end{aligned}$$

因为在插值节点  $x_i$  处有  $u(x_i) = u_I(x_i)$  且  $v_h \in V_h$  为线性元.

$$v_h'' = 0. \text{ 所以 } S_0^1(u' - u'_I) v_h' dx = 0.$$

(d) 证明:  $\|u_h - u_I\|_{H^1(0,1)} \leq ch^2\|u\|_{H^2(0,1)}$

空缺

### 问题 1.6.10. (有限元方法的数学基础)

假设  $\Omega$  是平面凸多角形区域, 试证明:

- (a)  $\|\Delta \nu\|_{0,\Omega} = |\nu|_{2,\Omega}, \forall \nu \in H_0^2(\Omega);$
- (b) 从而  $\|\Delta \nu\|_{0,\Omega} \geq C|\nu|_{2,\Omega}, \forall \nu \in H_0^2(\Omega)$ , 其中  $C > 0$  为常数 (只与  $\Omega$  有关);
- (c) 试给出  $H_0^2(\Omega)$  中的一个协调有限元, 并给出相应的插值误差估计 (无需证明)

解答 1.6.10.

(a) 和 (b)

$$\int_{\Omega} 2\nu_{12}\nu_{12} - 2\nu_{11}\nu_{22} dx = \int_{\partial\Omega} \nu_1(\nu_{12}n_2 - \nu_{22}n_1) + \nu_2(\nu_{12}n_1 - \nu_{11}n_2) ds,$$

又因为

$$\gamma_1 \nu|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \nu}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial s}|_{\partial\Omega} = 0,$$

故:  $\nabla \nu \cdot n = 0, \nabla \nu \cdot s = 0$ , 则得  $\nabla \nu = (\nu_1, \nu_2) = 0$ . 故上式的右端项为 0. 则  $\int_{\Omega} 2\nu_{12}\nu_{12} dx = \int_{\Omega} 2\nu_{11}\nu_{22} dx$ . 我们知道

$$|\nu|_{2,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 |\nu_{ij}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |\nu|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \nu_{11}^2 + 2\nu_{12}^2 + \nu_{22}^2 dx = |\nu_{11}|_{0,\Omega}^2 + 2|\nu_{12}|_{0,\Omega}^2 + |\nu_{22}|_{0,\Omega}^2$$

由前面的结论我们可以得到:

$$\int_{\Omega} \nu_{11}^2 + 2u_{11}\nu_{22} + \nu_{22}^2 dx = \int_{\Omega} \nu_{11}^2 + 2u_{12}\nu_{12} + \nu_{22}^2 dx.$$

则我们得到:  $|\Delta \nu|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\Delta \nu)^2 dx = |\nu_{11}|_{0,\Omega}^2 + |\nu_{12}|_{0,\Omega}^2 + |\nu_{21}|_{0,\Omega}^2 + |\nu_{22}|_{0,\Omega}^2 = |\nu|_{2,\Omega}^2$ .

命题得证.

(c) 有限元课程中大部分有限元均符合要求, 如三角形线性元等.

## Chapter 2

# 数值逼近知识点总结及题目

# 数值逼近

## 第一章

### Weierstrass 逼近定理与卷积逼近

#### 1.1 Weierstrass 逼近定理

$f \in C[a, b]$ , 那么对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在一个多项式  $P$  使得

$$\max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

#### 1.2 卷积逼近

$$\text{卷积: } (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h)$$

Dirac 序列:  $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{非负性} \\ \cdot \text{单位性} \\ \cdot \text{能量集中性} \end{array} \right.$

Dirac 序列的行为接近一个单位元.

假设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有界且分段连续, 且  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  是一个 Dirac 序列, 那么  $\{k_n * f\}_{n \in \mathbb{N}}$  在每一个界带上一致收敛于  $f$ .

#### 1.3 Fourier 级数

$k_n, n=1, 2, \dots$  是以  $2\pi$  为周期的 Dirac 序列.

若 1.  $k_n(x) \geq 0, x \in [-\pi, \pi]$

2.  $\int_{-\pi}^{\pi} k_n(x) dx = 1$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{r\pi \leq x \leq \pi} |k_n(x)| dx = 0 \quad (\text{对每个 } r)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

函数  $f$  对应的 Fourier 级数部分和：

$$S_N(f)(\theta) := \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$$

$$\text{其中 } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

$$\text{Dirichlet 核: } D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \exp(ik\theta)$$

$$S_N(f)(\theta) = D_N * f = \sum_{k=-N}^N C_k \exp(ik\theta)$$

$$\text{Bessel: } C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ikt) f(t) dt$$

$$\text{Fejér 核 } K_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \text{ 是一个 Dirac } \frac{1}{N} \text{ 的卷积}$$

Fejér-Cesàro 定理.

如果  $f$  是一个周期为  $2\pi$  的连续函数，那么

$$\frac{1}{N} (S_0(f) + \dots + S_{N-1}(f))$$

在  $\mathbb{R}$  的紧集上一致收敛于  $f$ .

推论 1.1. 若  $f$  为连续的  $2\pi$  周期函数，那么存在  $T$  使得  $\forall \epsilon > 0$  都有三角不等式  $|f(x) - T(x)| \leq \epsilon$ :

$$\max_{|x| \leq \pi} |f(x) - T(x)| \leq \epsilon.$$

(Weierstrass)  
第二定理

## 第2章 多项式插值

### 2.1 Lagrange 插值公式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)}$$

### 2.2 Newton 插值公式

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + \cdots + f(x_0, \dots, x_n)(x-x_0) \cdots (x-x_n)$$

$f(x_0, \dots, x_i)$  称为  $i$ -阶差商， $f(x_0, \dots, x_i) = \sum_{j=0}^i \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j}^i (x_j - x_k)}$

2.3 差商：上述定义的差商满足公式：

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

差商中值定理： $f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

差商性质：

$$1. \text{ 对于 } \stackrel{\infty}{\sum} f, (\lambda f)(x_0, \dots, x_n) = \lambda f(x_0, \dots, x_n)$$

$$2. (f+g)(x_0, \dots, x_n) = f(x_0, \dots, x_n) + g(x_0, \dots, x_n)$$

3.  $f(x_0, \dots, x_n)$  是一个关于  $x_0, \dots, x_n$  的齐次函数，也就是说  
 $x_0, \dots, x_n$  的位置，差商值不变。

$$4. (f \cdot g)(x_0, x_1, \dots, x_n) = f(x_0)g(x_0, x_1, \dots, x_n) + f(x_1)g(x_1, \dots, x_n) + \cdots + f(x_n)g(x_n)$$

5. 若  $f(x) = x^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x_1$

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{r_0 + \dots + r_n = m-n} x_0^{r_0} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$$

即  $f(x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & n > m \\ 1, & n = m \end{cases}$

2.4 多项式插值的误差.

$$E(f; x) := f(x) - P_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$

定理 2.6. 假设  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq m \leq n+1$ ,  $f \in W^m(M_m, a, b)$ ,

存在一个函数  $K_m(t) = \frac{1}{(m-1)!} E((x-t)_+^{m-1}, \alpha)$

使得.

$$E(f; \alpha) = \int_a^b K_m(t) f^{(m)}(t) dt$$

2.5. 插值算子. (X)

$$\|f - X(f)\| \leq (1 + \|X\|) d^*$$

$\|X\| = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^n |\ell_i(x)|$ ,  $\ell_i$  为 Lagrange 余项.

多元多项式插值

定理 2.11.  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

多元分次插值条件是  $n$  个数  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 取决于  $F$  中的  $n$  元素、插值.

称 n 行函数空间为 Fr Haar 空间, 如果 F 中的每一个非 0 函数有且只有 n 个数不为 0.

定理: a. F 是 Haar 空间.

b. 在 D 中任意 n 个不同点  $x_1, \dots, x_n$ , 均有  $\det(f_j(x_i)) \neq 0$ .

我们称 Haar 空间中的任一基底为 Chebyshev 系统:

•  $\mathbb{R}$  上的 Chebyshev 系统例子:

$$1. 1, x, \dots, x^n$$

$$2. e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}, \lambda_1 < \dots < \lambda_n$$

•  $(0, \infty)$  上 Chebyshev 系统例子:

$$1. x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_n}$$

$$2. (x + \lambda_1)^{-1}, \dots, (x + \lambda_n)^{-1}$$

• 更高维的空间没有 Chebyshev 系统

这是高维空间的一个性质. (插值问题的解的存在性)

代数曲线与插值节点之间的关系.

# 第三章

## 多项式最佳逼近

给定不同范数  $\|\cdot\|_X$ , 寻找一次多项式不超过  $n$  次多项式  $p^*$ , 使得  $p^*$  是在范数  $X$  意义下  $f$  的最佳逼近.

$$\|p^* - f\|_X = \min_{p \in \mathbb{T}_n} \|p - f\|_X.$$

3.1 L<sub>∞</sub> 范数

寻求解

$$\inf_{p \in \mathbb{T}_n} \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)|$$

\* Kolmogorov 最佳逼近定理:

$$\max_{x \in A} |f(x) - p^*(x)| \cdot q(x) > 0, \forall q \in \mathbb{T}_n.$$

其中:  $A := \{x \in [a, b] : |f(x) - p^*(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |e(x)|\}$ ,

$$e(x) = p^*(x) - f(x).$$

\* Chebyshev 定理刻画  $e$  为周期.

设有  $n+2$  个点,  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$ .

使得:  $f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^i \|f - p^*\|$

OR:  $f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^{i+1} \|f - p^*\|$

即:  $f - p$  在  $n+2$  个点上取支臂达到最大值.

易考：最小二乘偏差多项式：

$$P_n(x) = x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1x + C_0.$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} P_n(x)$$

实际为寻找函数  $f(x) = x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1x + C_0$  在区间  $[-1, 1]$  上的最小偏差多项式。

Chebyshev 多项式是在  $[-1, 1]$  上的最小偏差多项式。

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

3.2 L<sup>1</sup> 范数、

研究问题： $\inf_{p \in \mathbb{T}_n} \int_a^b |f(x) - p(x)| dx$

3.3 L<sup>2</sup> 范数

$L^2[a, b]$  空中的函数  $f$  在范数意义下

$$\|f\|_{P,2} = \left( \int_a^b p(x) f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

寻找函数  $p \in \mathbb{T}_n$ , 使得  $\|f - p\|_{P,2}$  最小。

直交函数系：

Chebyshev  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

是区间  $[-1, 1]$  上的根函数  $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  的直交系。

Legendre の級数:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n, \quad n=0, 1, 2, 3.$$

是区间  $[-1, 1]$  上的直交系函数。

(\*)  $\hat{f}$  の Fourier 展开の問題、  
 $\downarrow$

$$A_k = \int_a^b p(x) w_k^2(x) dx$$

$$c_k = \frac{1}{A_k} \int_a^b p(x) w_k(x) f(x) dx, \quad k=1, 2$$

$$\| \hat{f} - f \|_{p, 2} = \left( \int_a^b p(x) (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\hat{f}$  为  $\hat{f}$  的 Fourier 级数的 部分和  $\sum_{k=1}^n c_k w_k(x)$

\*\*\* 三种最常用的直交系:

1. Legendre の級数:

在区间  $[-1, 1]$  上的 直交函数  $p=1$  为常数的直交系的直交  
 式  $P_n$  为 Legendre の級数:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n.$$

2. Laguerre の級数:

$$L_n(x) = e^x \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x})$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}.$$

3. Hermite 多项式：

$\{H_n\}$  是在  $(-\infty, \infty)$  上关于函数  $e^{-x^2}$  所构成的多项式。

$$H_n(x) = e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x^2})$$

## 第六章 拉格朗日插值

$$-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = +\infty$$

定理： $\dim S_n(x_1, \dots, x_N) = n+N+1$ , 函数  $f$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n, (x-x_1)_+^n, \dots, (x-x_N)_+^n\}$  构成  $S_n(x_1, \dots, x_N)$  的一组基底。

自然样条函数的概念，一个  $2n+1$  次样条函数：

$$S \in S_{2n+1}(x_1, \dots, x_N)$$

如果在  $(-\infty, x_1) \cup (x_N, +\infty)$  上都满足  $n-1$  次光滑，则称之为  $2n+1$  次自然样条函数。

$$S \in N_{2n+1}(x_1, \dots, x_N) \Leftrightarrow S(x) = P_{n-1}(x) + \sum_{j=1}^N C_j (x-x_j)_+^{2n-1}$$

且设  $C_1, \dots, C_N$  满足条件

$$\sum_{j=1}^N C_j x_j^k = 0, \quad k = 0, \dots, n-1$$

且由上述定义可知： $\dim N_{2n+1}(x_1, \dots, x_N) = N$ .

在所有插值函数中，自然样条函数最光滑。

$$\text{且 } \int_a^b (S^{(n)}(x))^2 dx \leq \int_a^b |f^{(n)}(x)|^2 dx$$

## 6.2 B 梯形函数

### 6.2.1 故断器差商

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} \Delta f(x).$$

那么  $m$  阶  $(m-1)$  次 B 梯形公式为

$$B_m(x) := \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1}$$

$$B_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (x-k)_+^{m-1}$$

### 6.2.2 - 总结与性质

$$B_1(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad B_1(x) = 0, \quad x < 0, \quad x \geq 1.$$

$$B_m(x) = \int_0^1 B_{m-1}(x-t) dt$$

B 梯形函数性质：

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) B_m(x) dx = \int_{x \in [0,1]^m} \varphi(x_1 + \dots + x_m) dx_1 \dots dx_m$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(m)}(x) B_m(x) dx = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g^{(k)}(x).$$

$$3. B_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1}$$

$$4. B_m'(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1)$$

$$5. B_m(x) = \frac{x}{m-1} B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} B_{m-1}(x-1)$$

6.  $B_m$  为插值多项式。

非均匀 B 梯形函数：

$$M_p(x) = \sum_{j=p}^{p+k+1} \prod_{\substack{i=p \\ i \neq j}}^{p+k+1} \frac{1}{x_i - x_j} (x - x_j)_+^k$$

其中  $M_p$  为非均匀 B 梯形函数。

假设  $\zeta \in S_k(x_0, \dots, x_n)$  在  $[x_0, x_p]$  与  $[x_q, x_n]$  上可积，且在  $(x_p, x_q)$  中有  $n'$  个点，这里  $r$  是一个有限的数。

那么， $r \leq q - (p + k + 1)$

函数  $\{M_p\}_{[a,b]} : -k \leq p \leq n-1$  是  $S_k(x_0, \dots, x_n)$  的一组基底。

定义： $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$  是  $H$  中的一个框架，如果有存在  $A > 0, B > 0$ ，使得

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2$$

对任意  $f \in H$  成立，当  $A=B$  时，该框架为紧框架。

在  $\mathbb{R}^3$  中如何构造紧框架：

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{2j\pi}{n} \\ \sin \frac{2j\pi}{n} \end{pmatrix}, j = 0, 1, \dots, n-1$$

在  $\mathbb{R}^4$  中如何构造紧框架：

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi j}{n} \\ \sin \frac{2\pi j}{n} \\ \cos \frac{4\pi j}{n} \\ \sin \frac{4\pi j}{n} \end{pmatrix}$$

结论：列向量成框架界为  $A$  和  $B$  框架当且仅当：

(1) 行的 2 范数平方为  $A$ 。

(2) 不同行之间内积为 0。

# 数值逼近作业:

问题1. 请证明:

- (1) 若  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , 那么  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  且  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .
- (2)  $f * g = g * f$
- (3)  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .

证明:

(1) 首先我们假设  $f, g > 0$ ,

因为  $f, g$  可积, 故可知  $f(y)g(x-y)$  在  $\mathbb{R}$  上可积.

由 Tonelli 定理:

知:  $F(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy$  为  $\mathbb{R}$  上非负可积函数,

$$\text{且有 } \int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$$

$$\leq \|g\|_1 \|f\|_1,$$

对  $f, g$  一般情况, 任意  $x$   $|f * g(x)| \leq (|f| * |g|)(x)$ .

$$\text{由: } \int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} (|f| * |g|)(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1,$$

故,  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ , 且  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .

$$(2) g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f(x-y) dy$$

$$\stackrel{\text{换元 } t=x-y}{=} - \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f(t) dt$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$$

$$= f^* g^*(x).$$

$$\text{左} f * g = g * f.$$

$$(3) [(f * g) * h](z) = [(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy) * h](z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy) h(z-x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) (\int_{\mathbb{R}} g(x-y) h(z-x) dx) dy$$

$$\begin{cases} x-y=t, \\ dt=dx \end{cases}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) (\int_{\mathbb{R}} g(t) h(z-t-y) dt) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) (g * h)(z-y) dy$$

$$= [f^* (g * h)](z).$$

Hz

$$\text{左} (f * g) * h = f^* (g * h)$$

□.

[16] 证明 2. 若  $\{k_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$  为一个以  $2\pi$  为周期的 Dirac 级数,

$f$  为  $2\pi$  同周期可积函数, 若  $f$  在点  $x_0$  连续,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k_n * f)(x_0) = f(x_0),$$

若  $f$  处处连续, 则  $k_n * f$  收敛于  $f$ .

证明. 由  $f$  在  $x_0$  连续, 存在  $\delta > 0$ ,  $\exists r > 0$ , 当  $|x - x_0| < r$  时,

$$|f(x_0 - t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

考察在  $x_0$  处, 有:

$$|f(x_0-t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

考察在  $x_0$  处，有

$$\begin{aligned} |(k_n * f)(x_0) - f(x_0)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) (f(x_0-t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)| |f(x_0-t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \int_{|t|<r} |k_n(t)| |f(x_0-t) - f(x_0)| dt \\ &\quad + \int_{r \leq |t| \leq \pi} |k_n(t)| |f(x_0-t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \varepsilon + 2 \int_{r \leq |t| \leq \pi} |k_n(t)| dt \cdot M. \end{aligned}$$

因为  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  可积，知  $r \leq |t| \leq \pi$  时， $|f(x_0-t) - f(x_0)| \leq 2M$ .

又知： $\forall \varepsilon > 0, \forall r > 0, \exists N$  使得  $n > N$  时，有：

$$\int_{r \leq |t| \leq \pi} |k_n(t)| dt < \varepsilon$$

由上可知  $|k_n * f(x_0) - f(x_0)| \leq O(\varepsilon)$  故  $f$  在点  $x_0$  处连续.

当  $f$  是处处连续的，其在  $[-\pi, \pi]$  上一致连续，则由以上类似、推广理（因为对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $r > 0$ , 使得对所有  $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]$  且  $|x_1 - x_2| \leq r$  时，有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ）

可得： $\forall x \in [-\pi, \pi], |k_n * f(x) - f(x)| \leq O(\varepsilon)$ ,

即得： $k_n * f \rightarrow f$  于  $L^1$  中.

□.

问 3.

求证差商的 Leibniz 法则：

$$(fg)'(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_n)$$

证明：

$$\text{设 } n=0 \text{ 时}, (fg)'(x_0) = f(x_0)g(x_0) \text{ 成立}.$$

$$\begin{aligned}
 n=1 \text{ 时} : (fg)(x_0, x_1) &= \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x_1)g(x_1)}{x_0 - x_1} \\
 &= \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_1) + f(x_0)g(x_1) - f(x_1)g(x_1)}{x_0 - x_1} \\
 &= \frac{f(x_0)(g(x_0) - g(x_1)) + g(x_1)(f(x_0) - f(x_1))}{x_0 - x_1} \\
 &= f(x_0)g(x_0, x_1) + f(x_0, x_1)g(x_0)
 \end{aligned}$$

假设命题在  $n$  的成立，考虑对于  $n+1$  个插值节点，考察：

$$(x_0 - x_{n+1}) (fg)(x_0, \dots, x_{n+1}) = [(fg)(x_0, \dots, x_n) - (fg)(x_1, \dots, x_{n+1})]$$

$$\stackrel{\text{由归纳假设}}{=} \sum_{k=0}^n f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^{n+1} f(x_1, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_{n+1})$$

$$\begin{aligned}
 &\left( \text{即 } f(x_1, \dots, x_{k+1}) \right. \\
 &\quad \left. = f(x_0, \dots, x_k) - (x_0 - x_{k+1}) f(x_0, \dots, x_{k+1}) \right) = \sum_{k=0}^n \left[ f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \right] \\
 &\quad + \sum_{k=0}^n (x_0 - x_{k+1}) f(x_0, \dots, x_{k+1}) g(x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n f(x_0, \dots, x_k) (x_k - x_{n+1}) g(x_k, \dots, x_{n+1}) + \\
 &\quad \sum_{k=0}^n (x_0 - x_{k+1}) f(x_0, \dots, x_{k+1}) g(x_{k+1}, \dots, x_{n+1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{根据假设 I} &= \sum_{k=0}^{n+1} f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_{n+1}) \\
 &= -x_{n+1} \left[ I - f(x_0, \dots, x_{n+1}) g(x_{n+1}) \right] + \sum_{k=0}^n x_k f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_{n+1}) \\
 &\quad + x_0 \left[ I - f(x_0) g(x_0, \dots, x_{n+1}) \right] - \sum_{k=1}^{n+1} x_k f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_{n+1}) \\
 &= (x_0 - x_{n+1}) I + x_{n+1} f(x_0 - x_{n+1}) g(x_{n+1}) \\
 &\quad - x_0 f(x_0) g(x_0, \dots, x_{n+1}) + x_0 f(x_0) g(x_0, \dots, x_{n+1}) \\
 &\quad - x_{n+1} f(x_0 - x_{n+1}) g(x_{n+1}) \\
 &= (x_0 - x_{n+1}) I.
 \end{aligned}$$

$$\text{定义: } (fg)(x_0, \dots, x_{n+1}) = I = \sum_{k=0}^{n+1} f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_{n+1})$$

由割线引理可知, 等于 Leibniz 公式.

$$(fg)(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n f(x_0, \dots, x_k) g(x_k, \dots, x_n), \quad \text{见 } \square.$$

[问题 4] 假设  $f \in C^2[a, b]$ , 且  $f''(x) > 0$ ,  $a \leq x \leq b$ , 求  $f$  在  $\Pi_1$  中的最值逼近多项式.

解: 设  $f$  在  $\Pi_1$  中的最值逼近多项式为  $P_1$ :  $P_1(x) := a_0 + a_1 x$ .

由 Chebyshev 定理, 至少有 3 个点  $x_1, x_2, x_3$ :  $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ .

$$\text{使得: } f(x_k) - P_1(x_k) = (-1)^k \|f - P_1\|$$

$$\Rightarrow f(x_k) - P_1(x_k) = (-1)^{k+1} \|f - P_1\|$$

又可知:  $f'(x) - a_1$  在  $(a, b)$  内只有一个零点. 该零点为  $x_2$ .

$$\text{又: } P'_1(x_2) - f'(x_2) = a_1 - f'(x_2) = 0$$

$$f'(x_2) = a_1$$

又: 在区间的端点处有:  $P_1(a) - f(a) = P_1(b) - f(b) = -[P_1(x_2) - f(x_2)]$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 a - f(a) = (a_0 + a_1 b) - f(b) \\ a_0 + a_1 a - f(a) = f(x_2) - (a_0 + a_1 x_2) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \frac{a+x_2}{2} \\ a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \end{array} \right.$$

$$\text{又: } P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$= \left( \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \frac{a+x_2}{2} \right) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} x$$

$f$  在  $\Pi_1$  中的最值逼近多项式如上.

问题 5、 $B_m(x)$  为  $m$  阶  $B$ -样条函数，试证之：

$$B_m(x) = \frac{x}{m-1} B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} B_{m-1}(x-1)$$

证明：要证  $B_m(x)$  为  $m$  阶  $B$ -样条函数，我们先来证  $B$ -样条函数如下：

性质： $B'_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1)$ ,  $x \in (0, m)$ .

其证明如下：使用数学归纳法：

当  $m=2$  时， $B'_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & 1 < x \leq 2 \end{cases} = B_1(x) - B_1(x-1)$ , 成立.

假设当  $m=m_0$  时命题成立，即： $B_{m_0}(x) = \frac{x}{m_0-1} B_{m_0-1}(x) + \frac{m_0-x}{m_0-1} B_{m_0-1}(x-1)$

当  $m=m_0+1$  时，有：

$$\begin{aligned} B'_{m_0+1}(x) &= (\int_0^x B_{m_0}(x-t) dt)' = \int_0^x B'_{m_0}(x-t) dt \\ &= \int_0^x [B_{m_0-1}(x-t) - B_{m_0-1}(x-t-1)] dt \\ &= B_{m_0}(x) - B_{m_0}(x-1) \end{aligned}$$

从而命题： $B'_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1)$  成立.

下面来证本题中的命题：仍是用数学归纳法：

当  $m=2$  时， $B_2(x) = x B_1(x) + (2-x) B_1(x-1)$ , 容易验证.

假设当  $m=m_0$  时，命题成立，即：

$$B_{m_0}(x) = \frac{x}{m_0-1} B_{m_0-1}(x) + \frac{m_0-x}{m_0-1} B_{m_0-1}(x-1).$$

当  $m=m_0+1$  时，我们考察待证等式的左边：

$$\frac{x}{m_0} B_{m_0}(x) + \frac{m_0+1-x}{m_0} B_{m_0}(x-1)$$

对该式求导得：

$$\begin{aligned} [\frac{x}{m_0} B_{m_0}(x) + \frac{m_0+1-x}{m_0} B_{m_0}(x-1)]' &= \frac{1}{m_0} [B_{m_0}(x) - B_{m_0}(x-1)] + \frac{x}{m_0} [B_{m_0-1}(x) - B_{m_0-1}(x-1)] \\ &\quad + \frac{m_0+1-x}{m_0} [B_{m_0-1}(x-1) - B_{m_0-1}(x-2)] \\ &= \frac{1}{m_0} [B_{m_0}(x) - B_{m_0}(x-1)] + \frac{m_0-1}{m_0} \left[ \frac{x}{m_0-1} (B_{m_0-1}(x) - B_{m_0-1}(x-1)) \right] \\ &\quad + \frac{m_0+1-x}{m_0-1} [B_{m_0-1}(x-1) - B_{m_0-1}(x-2)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m_0} (\beta_{m_0}(x) - \beta_{m_0}(x-1)) + \frac{m_0-1}{m_0} \left[ \left[ \frac{x}{m_0-1} \beta_{m_0-1}(x) + \frac{m_0-x}{m_0-1} \beta_{m_0-1}(x-1) \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{x-1}{m_0-1} \beta_{m_0-1}(x-1) + \frac{m_0-(x-1)}{m_0-1} \beta_{m_0-1}(x-2) \right] \right]$$

由(1)得<sup>PS.13</sup>

$$= \frac{1}{m_0} [\beta_{m_0}(x) - \beta_{m_0}(x-1)] + \frac{m_0-1}{m_0} [\beta_{m_0}(x) - \beta_{m_0}(x-1)]$$

$$= \beta'_{m_0+1}(x)$$

对上两边求 $\beta$ , 得 $\beta_{m_0+1}(0) = 0$  为 $\beta$ :

$$\beta_{m_0+1}(x) = \int_0^x \beta'_{m_0+1}(y) dy = \int_0^x \left[ \frac{y}{m_0} \beta_{m_0}(y) + \frac{m_0+y}{m_0} \beta_{m_0}(y-1) \right]' dy \\ = \frac{x}{m_0} \beta_{m_0}(x) + \frac{m_0+x}{m_0} \beta_{m_0}(x-1)$$

由数学归纳法, 命题得证.

[6] 证明 6. 证明如图 1:

$M_p^k$  为折断函数的差分, 当  $k > 1$  时,

$$M_p^k(x) = \frac{(x-x_p) M_p^{k-1}(x) + (x_{p+k+1}-x) M_{p+1}^{k-1}(x)}{x_{p+k+1} - x_p}$$

证明:  $g(t) h(t) = f(t) = (-1)^{k+1} (x-t)_+^{k+1}$

又因:  $g(t) h(t) = f(t) = (-1)^{k+1} (x-t)_+^{k+1}$

$$M_p^k(x) = f(x_p, \dots, x_{p+k+1})$$

$$= \sum_{j=p}^{p+k+1} g(x_p, \dots, x_j) h(x_j, \dots, x_{p+k+1})$$

$$= g(x_p) h(x_p, \dots, x_{p+k+1}) + g(x_p, x_{p+1}) h(x_{p+1}, \dots, x_{p+k+1})$$

又通过观察<sup>13</sup>结构可知:  $M_p^{k-1}(x) = f(x_p, \dots, x_{p+k}) = h(x_p, \dots, x_{p+k})$

$$M_{p+1}^{k-1}(x) = h(x_{p+1}, \dots, x_{p+k+1})$$

$$\begin{aligned}
 M_p^k(x) &= g(x_p) h(x_p, \dots, x_{p+k+1}) + g(x_p, x_{p+1}) h(x_{p+1}, \dots, x_{p+k+1}) \\
 &= (-1)(x-x_p) \frac{M_p^{k-1}(x) - h(x_{p+1}, \dots, x_{p+k+1})}{x_p - x_{p+k+1}} + M_{p+1}^{k-1}(x) \\
 &= \frac{(x-x_p) M_p^{k-1}(x)}{x_{p+k+1} - x_p} + M_{p+1}^{k-1}(x) \left( -\frac{(x-x_p)}{x_{p+k+1} - x_p} + 1 \right) \\
 &= \frac{(x-x_p) M_p^{k-1}(x) + (x_{p+k+1}-x) M_{p+1}^{k-1}(x)}{x_{p+k+1} - x_p}
 \end{aligned}$$

证毕.

## Chapter 3

# 微分方程数值解知识点总结及题目

数值方法数值解

Euler 方法局部截断误差

在区间  $[x, x+h]$  积分,  $y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(s, y(s)) ds$

用左矩形公式计算积分, 并令  $x = x_m$ :

$$y(x_m+h) = y(x_m) + hf(x_m, y(x_m)) + R_m$$

其中  $R_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s)) ds - hf(x_m, y(x_m))$

(局部)

估计局部误差  $R_m$ :

设  $f(x, y)$  及  $x$  和  $y$  均满足 Lipschitz 条件.  $k, L$  为  
相应的 Lipschitz 常数. 则有:

$$\begin{aligned} |R_m| &= \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} [f(x, y(x)) - f(x_m, y(x_m))] dx \right| \\ &\leq \int_{x_m}^{x_{m+1}} |f(x, y(x)) - f(x_m, y(x_m))| dx \\ &\leq k \int_{x_m}^{x_{m+1}} |x - x_m| dx + L \int_{x_m}^{x_{m+1}} |y(x) - y(x_m)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} kh^2 + L \int_{x_m}^{x_{m+1}} |y'(s)| \cdot |x - x_m| dx \\ &\leq \frac{h^2}{2} (k + LM) \equiv R, \quad x_{m-1} < \xi < x_m \end{aligned}$$

(整体)

估计整体误差  $\epsilon_m$ ,  $\epsilon_m \equiv y(x_m) - y_m$ .

因为 Euler 公式,  $y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m)$

和  $y(x_m+h) = y(x_m) + hf(x_m, y(x_m)) + R_m$

两者相减得:

$$\epsilon_{m+1} = \epsilon_m + h[f(x_m, y(x_m)) - f(x_m, y_m)] + R_m.$$

$$|\varepsilon_{m+1}| \leq (1+hL)|\varepsilon_m| + |R_m|$$

对  $n = m+1, m, \dots, 1$ , 反复利用上述不等式, 有:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n| &\leq (1+hL)|\varepsilon_{n-1}| + R \\ &\leq (1+hL)^2 |\varepsilon_{n-2}| + R + (1+hL)R \\ &\vdots \\ &\leq (1+hL)^n |\varepsilon_0| + R \sum_{j=0}^{n-1} (1+hL)^j \end{aligned}$$

如果  $a \leq x_n = nh \leq b$ , 则有:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n| &\leq (1+hL)^n |\varepsilon_0| + \frac{R}{hL} ((1+hL)^n - 1) \\ &\leq e^{L(b-a)} |\varepsilon_0| + \frac{R}{hL} (e^{L(b-a)} - 1), \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

高阶导数近似.

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u_j + (\Delta x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} (\Delta x)^n \left( \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_j + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{j-1} &= u_j - (\Delta x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j - \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^n}{n!} (\Delta x)^n \left( \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_j + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + \frac{1}{2} (\Delta x) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \dots$$

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j + \frac{1}{360} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right)_j + \dots$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$(\Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = c_1 u_{j-2} + c_2 u_{j-1} + c_3 u_j + c_4 u_{j+1} + c_5 u_{j+2} + O(\Delta x^6).$$

其中  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  待定

$$\begin{aligned} \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= [C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5] u_j \\ &+ \left[ \frac{(-1)}{1!} C_1 + \frac{(-1)}{1!} C_2 + \frac{(1)}{1!} C_4 + \frac{(2)}{1!} C_5 \right] \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j \\ &+ \left[ \frac{(-2)^2}{2!} C_1 + \frac{(-1)^2}{2!} C_2 + \frac{(1)^2}{2!} C_4 + \frac{(2)^2}{2!} C_5 \right] \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j \\ &+ \left[ \frac{(-2)^3}{3!} C_1 + \frac{(-1)^3}{3!} C_2 + \frac{(1)^3}{3!} C_4 + \frac{(2)^3}{3!} C_5 \right] \Delta x^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j \\ &+ \left[ \frac{(-2)^4}{4!} C_1 + \frac{(-1)^4}{4!} C_2 + \frac{(1)^4}{4!} C_4 + \frac{(2)^4}{4!} C_5 \right] \Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j \\ &+ \left[ \frac{(-2)^5}{5!} C_1 + \frac{(-1)^5}{5!} C_2 + \frac{(1)^5}{5!} C_4 + \frac{(2)^5}{5!} C_5 \right] \Delta x^5 \left( \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_j \\ &+ O(\Delta x^6) \end{aligned}$$

比较各阶系数：

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 0$$

$$-2C_1 - C_2 + C_4 + 2C_5 = 0$$

$$4C_1 + C_2 + C_4 + 4C_5 = 2$$

$$-8C_1 - C_2 - C_4 + 8C_5 = 0$$

$$16C_1 + C_2 + C_4 + 16C_5 = 0$$

解得：

$$C_1 = -\frac{1}{12}, \quad C_2 = \frac{4}{3}, \quad C_3 = -\frac{5}{2}, \quad C_4 = \frac{4}{3}, \quad C_5 = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{j-2} + 16u_{j-1} - 30u_j + 16u_{j+1} - u_{j+2}}{12 \Delta x^2}$$

第一 Green 公式：

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \iint_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy.$$

分析初值问题和差分格式：

$$u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1-2r) u_j^n + r u_{j+1}^n, \quad -\infty < j < +\infty$$

收敛性，其中  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

解：作变量替换  $m=j\pm 1$ ，得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ij\xi} u_{j+1}^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(m+1)\xi} u_m^n \\ &= e^{\pm i\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ij\xi} u_j^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1}(\xi) &= r e^{-i\xi} \hat{u}^n(\xi) + (1-2r) \hat{u}^n(\xi) + r e^{i\xi} \hat{u}^n(\xi) \\ &= [r e^{-i\xi} + (1-2r) + r e^{i\xi}] \hat{u}^n(\xi) \\ &= [2r \cos \xi + (1-2r)] \hat{u}^n(\xi) \\ &= (1-4r \sin^2 \frac{\xi}{2}) \hat{u}^n(\xi) \end{aligned}$$

$\hat{u}$  的系数  $G(\xi) \triangleq 1-4r \sin^2 \frac{\xi}{2}$

称为差分格式的系数。也常称为传播因子或增长因子。

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (1-4r \sin^2 \frac{\xi}{2})^{n+1} \hat{u}^0(\xi)$$

若限制  $r$ ，满足  $(1-4r \sin^2 \frac{\xi}{2}) \leq 1$

解得： $r \leq \frac{1}{2}$ ，因此  $r \leq \frac{1}{2}$  是稳定的充分条件。

(13)

分析差分格式

$$-\alpha r u_{j-1}^{n+1} + (1+2\alpha r) u_j^{n+1} - \alpha r u_{j+1}^{n+1}$$

$$= (1-\alpha)r u_{j-1}^n + [1-2(1-\alpha)r] u_j^n + (1-\alpha)r u_{j+1}^n$$

 $j=0, \pm 1, \dots$ 稳定性，其中  $\alpha \in [0, 1]$ 

解：

$$-\alpha r e^{-i\zeta} \hat{u}^{n+1} + (1+2\alpha r) \hat{u}^{n+1} - \alpha r e^{i\zeta} \hat{u}^{n+1}$$

$$= (1-\alpha)r e^{-i\zeta} \hat{u}^n + [1-2(1-\alpha)r] \hat{u}^n + (1-\alpha)r e^{i\zeta} \hat{u}^n$$

化简得：

$$\hat{u}^{n+1} = G(\zeta) \hat{u}^n$$

$$G(\zeta) = \frac{-4(1-\alpha)r \sin^2 \frac{\zeta}{2}}{1+4\alpha r \sin^2 \frac{\zeta}{2}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{-4r \sin \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\zeta}{2}}{(1+4\alpha r \sin^2 \frac{\zeta}{2})^2} = 0, \text{ 由极点处 } \zeta = 0, \pm \pi.$$

$$\text{注意: } G(0) = 1, \quad G(\pm \pi) = \frac{1-4(1-\alpha)r}{1+4\alpha r}$$

$$\text{且有: } \left| \frac{1-4(1-\alpha)r}{1+4\alpha r} \right| \leq 1 \text{ 恒成立, 故由 } -1 \leq \frac{1-4(1-\alpha)r}{1+4\alpha r} \leq 1.$$

解得  $\alpha \geq \frac{1}{2}, r > 0$ , 上式成立, 即  $|G(\zeta)| \leq 1$ . 当  $\alpha < \frac{1}{2}$ , $r \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)}$ , 时成立, 即  $|G(\zeta)| \leq 1$ . 因此  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ,无条件稳定, 当  $\alpha < \frac{1}{2}$  时, 有条件稳定, 即当条件为:  $r \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)}$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

差分格式：

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1-2r) u_j^n + r u_{j+1}^n, & j=1, \dots, m-1 \\ u_0^{n+1} = 0, \quad u_m^{n+1} = 0, & n=0, 1, 2, \dots \\ u_j^0 = f(j \Delta x), & j=0, \dots, M. \end{cases}$$

稳定性，其中  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ . 设  $\bar{u}_j^n$  是定义在该点  $j=0, \dots, M$  上的高数值。

构造函数：

$$u^n(x) = \begin{cases} \bar{u}_j^n, & x_j - \frac{\Delta x}{2} < x \leq x_j + \frac{\Delta x}{2} \\ 0, & x_0 < x \leq x_0 + \frac{\Delta x}{2} \text{ 或 } x_M - \frac{\Delta x}{2} \leq x_M. \end{cases}$$

当  $x=0$  奇迹地再周期地选择到整个实轴上。

$$u^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k^n e^{ik\pi x}$$

$$C_k^n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u^n(x) e^{-ik\pi x/l} dx, \quad k=0, \pm 1, \pm 2.$$

差分格式  $u^{n+1} = Q u^n$  稳定性的必要条件是

$$|P(Q)| \leq 1 + C \Delta t$$

其中  $C$  是某一个  $\Delta t$  无关的非负常数。

Von Neumann 条件

$$\text{差分方程 } \sum_{V \in N_1} a_V T^V u_j^{n+1} = \sum_{V \in N_0} b_V T^V u_j^n \text{ 按谱范数量。}$$

元（或平方根）且且仅当对所有  $0 < \tau < \tau_0$ ,  $0 < n \leq T$ , 和一切

$$\beta = 2\pi l / \tau \text{ 成立. } |G(\beta, h)| \leq 1 + O(\tau)$$

抛物型方程：

- $\alpha$  常系数扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

(向前差分格式)

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0$$

截断误差为  $O(\Delta t + h^2)$ , 稳定增长因子为:

$$G(\Delta t, \alpha) = 1 - 4\alpha r \sin^2 \frac{\omega h}{2}$$

其中  $r = \frac{\Delta t}{h^2}$ , 稳定性条件  $\alpha r \leq \frac{1}{2}$ .

(向后差分格式)

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0$$

截断误差为  $O(\Delta t + h^2)$ , 稳定增长因子为:

$$G(\Delta t, \alpha) = \frac{1}{1 + 4\alpha r \sin^2 \frac{\omega h}{2}}$$

由于  $\alpha > 0$ , 对于任何网格比  $r$ , 都有  $|G(\Delta t, \alpha)| \leq 1$ ,  
该格式无条件稳定.

(加权隐式格式)

是向前差分格式 + 向后差分格式.

向前差分格式:

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^k + u_{j-1}^{k-1}}{h^2} = 0$$

向后差分格式:

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\Delta t} = \alpha \theta \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + \alpha(1-\theta) \frac{u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}}{h^2}$$

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\Delta t} = \alpha \theta \frac{1}{h^2} \int_x^2 u_j^k + \alpha(1-\theta) \frac{1}{h^2} \int_x^2 u_j^{k-1}$$

$$E = \alpha(\frac{1}{2} - \theta) \Delta t \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_j^k + \theta (\Delta t^2 + h^2).$$

$\theta \neq \frac{1}{2}$  时，截断误差为  $O(\Delta t + h^2)$ ，

$\theta = \frac{1}{2}$  时，截断误差为  $O(\Delta t + h^2)$ ，

$$\text{称 } \theta = \frac{1}{2} \text{ 为 Crank-Nicolson 格式} \quad \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2h^2} \delta_x^2 (u_j^{k+1} + u_j^k)$$

为 CN 格式。 (Crank-Nicolson 格式)

$$\text{② Fourier 方法分析其稳定性: } G(\Delta t, \theta) = \frac{1 - 4(1-\theta) \arcsin^2 \frac{\omega h}{2}}{1 + 4\theta \arcsin^2 \frac{\omega h}{2}}$$

由  $|G(\Delta t, \theta)| < 1$ ，得：

$$-1 \leq \frac{1 - 4(1-\theta) \arcsin^2 \frac{\omega h}{2}}{1 + 4\theta \arcsin^2 \frac{\omega h}{2}} \leq 1$$

收敛性条件为：

$$\Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}, \quad r \leq \frac{1}{2\alpha(1-2\theta)}$$

$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  时，无条件稳定

$$\text{Richardson 格式: } \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\Delta t} - \alpha \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0$$

$$\text{Du Fort-Frankel 格式: } \frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\Delta t} - \alpha \frac{u_{j+1}^k - (u_j^{k+1} + u_j^{k-1}) + u_{j-1}^k}{h^2} = 0 \quad (*)$$

(注) 分析 Du Fort-Frankel 格式的稳定性：

分析：将  $\gamma_j$  与  $u_j$  的关系代入  $(*)$  式，化简得  $\gamma_j^{k+1} = \gamma_j^k + 2\alpha r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+2\alpha r)u_j^{k+1} = (1-2\alpha r)\gamma_j^k + 2\alpha r(u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) \\ \gamma_j^{k+1} = u_j^k \end{array} \right.$$

其中  $r = \frac{\Delta t^2}{h^2}$ ,  $\gamma_j^k = u_j^k$ ,  $\Sigma u = (u, v)^T$ , 由上面方程可得：

$$\begin{bmatrix} 1+2ar & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_j^{k+1} = \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_{j-1}^k + \begin{bmatrix} 0 & 1-2ar \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_j^k - \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_{j+1}^k$$

令  $u_j^k = v^k e^{i\sigma j h}$  ( $i^2 = -1$ ) 代入上式, 得增长矩阵  $G(st, \sigma)$ ,

$$\begin{bmatrix} 1+2ar & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4ar \cos \sigma h & 1-2ar \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2ar \cos \sigma h}{1+\alpha} & \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $\alpha = 2ar$ ,  $G(st, \sigma)$  的特征方程为

$$\mu^2 - \left( \frac{2\alpha}{1+\alpha} \cos \sigma h \right) \mu - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0$$

方程:  $x^2 - bx - c = 0$  | 根的表达式为  $\mu_{1,2} = \frac{\alpha \cos \sigma h \pm \sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \sigma h}}{1+\alpha}$

两根子超过单位圆且其中一个在圆内.

分两种情况讨论:

(1) 重根,  $\mu_1 = \mu_2 = \frac{\alpha \cos \sigma h}{1+\alpha}$ , 且  $|\mu_i| < 1$ ,  $i=1,2$ .

(2) 动根互异:  $|\mu_i| < 1$  ( $i=1,2$ )

故 Du Fort - Frankel 稳定无条件稳定.

ii: b) 离散 Richardson 算法的稳定性和

• 离散时间微分方程

1. 隐式差分

左偏心差分:  $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{st} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$

右偏心差分:  $\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^n}{st} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$

中心差分:  $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{st} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} u_m^n = v^n e^{i\sigma m h} \\ (= v^n e^{i\sigma x}) \end{array} \right\}$  左偏心差分:  $G_1(st, \sigma) = a e^{-i\sigma h} + (1+ar)$   
 右偏心差分:  $G_2(st, \sigma) = (1+ar) - a e^{i\sigma h}$   
 中心差分:  $G_3(st, \sigma) = 1 - i ar \sin \sigma h$ .

左偏心形式：

$$|G_1(\alpha t, \sigma)|^2 \leq 1 \Leftrightarrow ar(1-ar) \sin^2 \frac{\sigma h}{2} \geq 0$$

充分必要条件  $a > 0$ , 且  $a \frac{\alpha t}{h} \leq 1$ .

右偏心形式：

$$|G_2(\alpha t, \sigma)|^2 \leq 1 \Leftrightarrow ar(1+ar) \sin^2 \frac{\sigma h}{2} \leq 0$$

充分必要条件  $a < 0$  且  $|a| \frac{\alpha t}{h} \leq 1$

中性形式：

$$|G_3(\alpha t, h)|^2 = 1 + a^2 r^2 \sin^2 \sigma h.$$

是绝对不稳定性.

梯形法数值解作业：

问题1 已知梯形公式求局部截断误差估计：

$$R_m^{(1)} = -\frac{h^3}{12} y''(x_m + \xi h)$$

求整体截断误差  $E_m = ?$

解：

整体误差  $E_m$  定义为  $E_m = y(x_m) - y_m$

由梯形公式： $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1})]$

$$\text{即 } y(x_{m+1}) = y(x_m) + \frac{h}{2} [f(x_m, y(x_m)) + f(x_{m+1}, y(x_{m+1}))] + R_m^{(1)}$$

记  $h$  为分割小区间长， $L$  为  $y$  的 Lipschitz 常数，有：

$$E_m = y(x_m) - y_m = E_{m-1} + \frac{h}{2} [f(x_{m-1}, y(x_{m-1})) + f(x_m, y(x_m))]$$

$$+ R_m^{(1)} - \frac{h}{2} [f(x_{m-1}, y_{m-1}) + f(x_m, y_m)]$$

$$\text{由 } |E_m| \leq |E_{m-1}| + \frac{h}{2} [L|E_{m-1}| + L|E_1|] - R_m^{(1)}$$

$$\text{即 } (1 + \frac{hL}{2}) |E_m| \leq (1 + \frac{hL}{2}) |E_{m-1}| - R_m^{(1)}$$

$$|E_m| \leq \left( \frac{1 + \frac{hL}{2}}{1 - \frac{hL}{2}} \right)^m |E_0| - \frac{1}{1 - \frac{hL}{2}} \cdot R_m^{(1)}$$

$$|E_m| \leq \left( \frac{1 + \frac{hL}{2}}{1 - \frac{hL}{2}} \right)^m |E_0| + \frac{2R_m^{(1)}}{2-hL} \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{1 + \frac{hL}{2}}{1 - \frac{hL}{2}} \right)^i$$

$$= \left( 1 + \frac{2hL}{2-hL} \right)^m |E_0| + \frac{2R_m^{(1)}}{2-hL} \left[ 1 - \left( \frac{2+hL}{2-hL} \right)^m \right] \left( 1 - \frac{2+hL}{2-hL} \right)^{-1}$$

$$= \left( 1 + \frac{2hL}{2-hL} \right)^m |E_0| + \left| \frac{R_m^{(1)}}{hL} \left[ \left( 1 + \frac{2hL}{2-hL} \right)^m - 1 \right] \right|$$

$$\leq e^{\frac{2mhL}{2-hL}} |E_0| + \left| \frac{R_m^{(1)}}{hL} \left( e^{\frac{2mhL}{2-hL}} - 1 \right) \right|$$

$$\text{利用 } mh \leq b-a, \text{ 可得: } |E_m| \leq e^{\frac{2L(b-a)}{2-hL}} |E_0| + \frac{h^2 M}{L} \left( e^{\frac{2L(b-a)}{2-hL}} - 1 \right)$$

( $M = \max_{x \in (a,b)} |y'(x)|$ ). 由  $\lambda \rightarrow 0$  及  $|E_0| \rightarrow 0$  时,  $|E_m| \rightarrow 0$ , 即  $y_m \rightarrow y(x_m)$

因此梯形方法的解  $y_m$  收敛到初值问题的解  $y(x_m)$ , 其整体截断误差估计如下. ( $O(h^2)$ )

(b) 用中点公式和梯形公式计算 PMEME 算法

解: 中点公式:  $\begin{cases} y_{m+1} = y_{m-1} + 2h f_m, & x_{m-1} < \xi_1 < x_{m+1} \\ R_m = \frac{h^3}{3} y''(\xi_1) \end{cases}$

梯形公式:  $\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} (f_{m+1} + f_m), & x_m < \xi_2 < x_{m+1} \\ R_m = -\frac{h^3}{12} y''(\xi_2) \end{cases}$

下商设第  $m+1$  层近似值和校正值 分别为  $P_{m+1}$  和  $C_{m+1}$ .

由 |:  $y(x_{m+1}) - P_{m+1} = \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\xi_1), \quad x_{m-1} < \xi_1 < x_{m+1}$

$y(x_{m+1}) - C_{m+1} = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi_2), \quad x_m < \xi_2 < x_{m+1}$

上述两式相减, 得: ( $f \in C^2$ , 二阶导数连续)

$$\begin{aligned} C_{m+1} - P_{m+1} &= \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\xi_1) + \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi_2) \\ &= h^3 \cdot \frac{5}{12} f^{(2)}(\xi) \end{aligned}$$

(其中  $x_{m-1} < \xi < x_{m+1}$ , 这样的  $\xi$  是存在的)

得:  $h^3 f^{(2)}(\xi) = \frac{12}{5} (C_{m+1} - P_{m+1}), \quad x_{m-1} < \xi < x_{m+1}$

假设这方程之解  $f$  为 3 阶导数  $f^{(3)}(x)$  在  $(x_{m-1}, x_{m+1})$  内存在且连续.

由 |:  $f^{(2)}(\xi_1) = f^{(2)}(\xi) + O(h)$

$f^{(2)}(\xi_2) = f^{(2)}(\xi) + O(h)$

进而:  $R_1 = \frac{1}{3} h^3 f^{(2)}(\xi_1) = \frac{1}{3} h^3 f^{(2)}(\xi) + O(h^4)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5} (C_{m+1} - P_{m+1}) + O(h^4) = \frac{4}{5} (C_{m+1} - P_{m+1}) + O(h^4)$$

$R_2 = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi_2) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi) + O(h^4)$

$$= -\frac{1}{12} \cdot \frac{12}{5} (C_{m+1} - P_{m+1}) + O(h^4) = -\frac{1}{5} (C_{m+1} - P_{m+1}) + O(h^4)$$

由修正值为:  $\bar{y}_{m+1}^{(0)} = y_{m+1}^{(0)} + \frac{4}{5} (C_{m+1} - P_{m+1})$

$\bar{y}_{m+1}^{(1)} = y_{m+1}^{(1)} - \frac{1}{5} (C_{m+1} - P_{m+1}).$

由于在求  $\bar{y}_{m+1}^{(0)}$  时，预测值  $P_{m+1}$  和校正值  $C_{m+1}$  在茎后尚未算出，故分别用下标 0 表示预测值和校正值代替，假设用上标 (0) 表示预测值，用上标 (1) 表示校正值，用 “-” 表示经过了修正，则此构成 PMECE 模式。

$$P: \bar{y}_{m+1}^{(0)} = y_m^{(1)} + 2h f_m^{(1)}$$

$$M: \bar{y}_{m+1}^{(0)} = y_{m+1}^{(0)} + \frac{4}{5} (y_m^{(1)} - \bar{y}_m^{(0)})$$

$$\bar{E}: \bar{f}_{m+1}^{(0)} = f(x_{m+1}, \bar{y}_{m+1}^{(0)})$$

$$C: \bar{y}_{m+1}^{(1)} = \bar{y}_m^{(1)} + \frac{h}{2} (\bar{f}_{m+1}^{(0)} + f_m^{(1)})$$

$$M: \bar{y}_{m+1}^{(1)} = y_{m+1}^{(1)} - \frac{1}{5} (y_{m+1}^{(1)} - \bar{y}_{m+1}^{(0)})$$

$$\bar{E}: \bar{f}_{m+1}^{(1)} = f(x_{m+1}, \bar{y}_{m+1}^{(1)})$$

□.

问题 3. 求证  $(\delta_{xx} u)_4 = \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_6 - \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta x^2} (u_4 - u_3)$

证明：由  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_6$  知  $u_3$  在  $u_4$  处 Taylor 展开式

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_6 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_4 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_4 (\Delta x) + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_4 \frac{(\Delta x)^2}{2} + O(\Delta x^3)$$

$$u_3 = u_4 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_4 (-1) \Delta x + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_4 (-1)^2 \frac{(\Delta x)^2}{2} + O(\Delta x^3)$$

$$\text{设 } a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_6 \Delta x + b u_3 + c u_4 = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_4 (\Delta x)^2 + O(\Delta x^3)$$

由 Taylor 展开式。 ( $j=4$ )

<u>求和项</u>	$u_j$	$\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j$	$\Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j$	$\Delta x^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j$
$\Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j$	0	1	0	0
$-a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_b \Delta x$	0	$-a$	$-a(1) \cdot 1$	$-a(1)^2 \cdot \frac{1}{2}$
$-b u_3$	$-b$	$-b \cdot 1 \cdot 1$	$-b(-1)^2 \cdot \frac{1}{2}$	$-b(-1)^3 \frac{1}{6}$
$-c u_4$	$-c$	0	0	0

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

故:  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_4 (\Delta x)^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_b + \frac{2}{3} (u_3 - u_4) + O(\Delta x^3)$

进而得:  $(\Delta_{xx} u)_4 = \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_b - \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta x^2} (u_4 - u_3)$ .

改写

#### 16] 4. 一阶导数

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = \frac{1}{\Delta x} (a u_{j-2} + b u_{j-1} + c u_j + d a u_{j+1})$$

三阶精度格式，并裁断误差一项.

解: 计算如下 Taylor 级数表.

<u>求和项</u>	$u_j$	$\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j$	$\Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j$	$\Delta x^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j$	$\Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j$
$\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j$	0	1	0	0	0
$-a u_{j-2}$	$-a$	$-a(-2)$	$-a(-2)^2 \frac{1}{2}$	$-a(-2)^3 \frac{1}{6}$	$-a(-2)^4 \frac{1}{24}$
$-b u_{j-1}$	$-b$	$-b(-1)$	$-b(-1)^2 \frac{1}{2}$	$-b(-1)^3 \frac{1}{6}$	$-b(-1)^4 \frac{1}{24}$
$-c u_j$	$-c$	0	0	0	0
$-d a u_{j+1}$	$-da$	$-da(1)$	$-da(1)^2 \frac{1}{2}$	$-da(1)^3 \frac{1}{6}$	$-da(1)^4 \frac{1}{24}$

$$\text{有: } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \\ da = 2 \quad (da = \frac{1}{3}) \end{cases}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{6} u_{j-2} - u_{j-1} + \frac{1}{2} u_j + \frac{1}{3} u_{j+1} \right)$$

以此为基础推导出差分方程为:

$$\begin{aligned} R_j &= \left[ \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{24} \left[ -\frac{1}{6} \times 16^{j+1+1} - \frac{1}{3} \right] \Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \right) \right]_j \\ &= \left[ \left( -\frac{1}{12} \Delta x^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \frac{1}{\Delta x} \right]_j \\ &= \left[ -\frac{1}{12} \Delta x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_j \end{aligned}$$

15] 例 5 - 讨论边值问题 ( $a < 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

初值问题:

$$u_j^{n+1} = (1+r) u_j^n - r u_{j+1}^n \quad j=0, \dots, M-1$$

$$u_M^{n+1} = 0, \quad n=0, 1, \dots$$

$$u_j^0 = f(j \Delta x)$$

稳定的稳定性条件是  $-1 \leq r < 0$ , 其中  $\Delta x = \frac{1}{M}$ ,  $r = \frac{a \Delta t}{\Delta x}$ .

$$\text{记} \begin{cases} u_j^{n+1} = (1+r)u_j^n - ru_{j+1}^n, & j=0, \dots, M-1, r < 0, \\ \end{cases}$$

$$\text{则有 } u_j^n = v^n e^{i\sigma j \Delta x}, \text{ 且:}$$

$$v^{n+1} = (1+r)v^n - r e^{i\sigma \Delta x} v^n = v^n (1+r - r \cos \sigma \Delta x - i r \sin \sigma \Delta x)$$

$$G(\Delta t, \sigma) = 1+r - r \cos \sigma \Delta x - i r \sin \sigma \Delta x.$$

$$|G(\Delta t, \sigma)| \leq 1 \Rightarrow (1+r)^2 - 2r(1+r) \cos \sigma \Delta x + r^2 \leq 1, \sigma \Delta x \in [-\pi, \pi].$$

$$r^2 - 2r^2 \cos \sigma \Delta x + r \leq 0, (r < 0)$$

$$(1+2\cos \sigma \Delta x)r + 1 \leq 0, \text{ 且 } \sigma \Delta x \in [-\pi, \pi], \text{ 有 } r > -1.$$

因此:  $r \in [-1, 0]$ , 且差分格式稳定  $\Leftrightarrow r < -1$ .

故:  $-1 \leq r < 0$  是稳定的必要条件.

问题6、写出近似偏微分方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的加权CN方法，并用Fourier分析法分析其稳定性.

解: 其加权CN格式为:

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}}{h^2}$$

令  $u_j^k = v^k e^{i\sigma j h}$ , 并将上式变化为:

$$u_j^k - u_j^{k-1} = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{h^2} [u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k + u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}]$$

$$\begin{aligned} \text{则: } & (1+r) v^{k+1} e^{i\sigma j h} - \frac{1}{2} r [v^{k+1} e^{i\sigma(j+1)h} + v^{k+1} e^{i\sigma(j-1)h}] \\ & = (1+r) v^k e^{i\sigma j h} + \frac{1}{2} r [v^k e^{i\sigma(j+1)h} + v^k e^{i\sigma(j-1)h}] \end{aligned}$$

$$\text{其中 } r = \frac{\Delta t}{h^2}.$$

消去公共因子  $e^{i\sigma j h}$ :

$$[1+r - \frac{r}{2} (e^{i\sigma h} + e^{-i\sigma h})] v^{k+1} = [1-r + \frac{r}{2} (e^{i\sigma h} + e^{-i\sigma h})] v^k.$$

$$\text{由: } G(\Delta t, \sigma) = \frac{1-2r \sin^2 \frac{\sigma h}{2}}{1+2r \sin^2 \frac{\sigma h}{2}}, \text{ 由 } |G(\Delta t, \sigma)| \leq 1, \text{ 得:}$$

$$-1 \leq \frac{1 - 2r \sin^2 \frac{\theta h}{2}}{1 + 2r \sin^2 \frac{\theta h}{2}} \leq 1, \text{ 该不等式成立.}$$

缺某些条件成立.

问题 7. 证明 Richardson 收敛:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\alpha t} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k - u_{j-1}^k}{h^2} = 0$$

收敛稳定性.

解:  $\{u_j\}$  为  $\frac{\partial u}{\partial x}$  的离散化成的差分形式  $= \frac{\partial u}{\partial x}$  的解.

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = v_j^k + 2ar u_{j+1}^k - 4ar u_j^k + 2ar u_{j-1}^k \\ v_j^{k+1} = u_j^k \end{cases}$$

其中  $r = \frac{\alpha t}{h^2}$ , 令  $u = [u, v]^T$ , 则上面方程组可写成:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_j^{k+1} = \begin{pmatrix} -4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_j^k + \begin{pmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_{j+1}^k + \begin{pmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_{j-1}^k$$

且  $u_j^k = v^k e^{i\omega j h}$  代入上式得增长矩阵:

$$G(1\alpha t, \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4ar \cos \omega h - 4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{4ar \cos \omega h - 4ar}_{\sim 1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

故  $G(1\alpha t, \omega)$  特征值为:

$$(1 - 4ar \cos \omega h + 4ar) \mu - 1 = 0$$

$$(\Leftrightarrow \mu^2 + 8ar \sin^2 \frac{\omega h}{2} \cdot \mu - 1 = 0)$$

$$\text{解得: } \mu_{1,2} = \frac{4ar(\cos \omega h - 1) \pm \sqrt{[4ar(\cos \omega h - 1)]^2 + 4}}{2}$$

$$= 2ar(\cos \omega h - 1) \pm \sqrt{[2ar(\cos \omega h - 1)]^2 + 1} \quad \left( \text{或得: } -4ar \sin^2 \frac{\omega h}{2} \pm \sqrt{16ar^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} + 1} \right)$$

记  $\mu_1$  为 2x2 矩阵最大特征值： $|\mu_1| > 1$ .

则  $P(G(1+t, \sigma)) > 1$ , 不满足 Von Neumann 条件, 不收敛.

问题 8. 关于三对角矩阵特征值的求解  
(数值线性代数中亦有用)

解：

$$\begin{pmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & c & a & b \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \det \begin{pmatrix} a-x & b & & & \\ c & a-x & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a-x & b \\ & & & c & a-x \end{pmatrix} = 0$$

上面行列式记为  $D_n(x)$ . (for  $n \times n$  矩阵)

$$D_n(x) = (a-x) D_{n-1} - b D_{n-2}(x)$$

$$D_0(x) = 1$$

$$D_1(x) = a-x$$

$$D_2(x) = (a-x)^2 - bc$$

$$\begin{aligned} & \text{令 } \lambda^2 - (a-x)\lambda + bc = 0 \\ & \alpha, \beta \text{ 为根, } \alpha + \beta = a-x, \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \\ & \alpha \beta = bc, \beta \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0 \end{aligned}$$

$$D_n(x) = (a-x) D_{n-1}(x) - bc D_{n-2}(x)$$

$$:= (\alpha + \beta) D_{n-1}(x) - \alpha \beta D_{n-2}(x) \quad (\text{为了求通项公式而设})$$

$$D_n(x) - \alpha D_{n-1}(x) = \beta D_{n-1}(x) - \alpha D_{n-2}(x)$$

$$D_n(x) - \alpha D_{n-1}(x) = \beta^{n-1} (D_1(x) - \alpha D_0(x)) = \beta^{n-1} (\alpha + \beta - \alpha) = \beta^n$$

$$\text{即得: } D_n(x) - \beta D_{n-1}(x) = \alpha^n$$

$$\begin{cases} D_n(x) - \alpha D_{n-1}(x) = \beta^n \\ D_n(x) - \beta D_{n-1}(x) = \alpha^n \end{cases}, \quad D_n(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, & \alpha \neq \beta \\ (n+1) \alpha^n, & \alpha = \beta \end{cases}$$

商之比得：

$$\frac{\alpha}{\beta} = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}$$

$$\alpha \beta = bc \Rightarrow \beta^2 e^{\frac{2\pi i k}{n+1}} = bc, \quad \beta = \sqrt{bc} e^{-\frac{i k \pi}{n+1}}$$

$$\alpha + \beta = a - x \Rightarrow x = a - (\alpha + \beta) = a - \sqrt{bc} (e^{\frac{i k \pi}{n+1}} + e^{-\frac{i k \pi}{n+1}}) = a - 2\sqrt{bc} \cos \frac{k \pi}{n+1}, \quad (k=0 \dots n).$$

求 Runge Kutta 公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + th, y_n + th k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)h k_1)$$

求局部截断误差：

解：在区间  $[x, x+h]$  上分，有：

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(s, y(s)) ds$$

用左矩形公式计算积分。令  $x=x_m$

$$y(x_m+h) = y(x_m) + \frac{h}{2} (k_2 + k_3) + R_m$$

$$\text{其中 } R_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s)) ds - \frac{h}{2} (k_2 + k_3)$$

估计局部误差  $R_m$ : (设  $k, l$  分别为 Lipschitz 常数,  $M = \max \{ |f(x, y)| \}$ )

$$|R_m| = \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) - \frac{1}{2} \left( f(x_m + th, y_m + th f(x_m, y_m)) + f(x_m + (1-t)h, y_m + (1-t)h f(x_m, y_m)) \right) dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left( f(x, y(x)) - f(x_m + th, y_m + th f(x_m, y_m)) \right) dx \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left( f(x, y(x)) - f(x_m + (1-t)h, y_m + (1-t)h f(x_m, y_m)) \right) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) - f(x_m + th, y_m + th f(x_m, y_m)) dx \right|$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) - f(x_m + (1-t)h, y_m + (1-t)h f(x_m, y_m)) dx \right|$$

$$\alpha : \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) - f(x_m + th, y_m + th f(x_m, y_m)) dx \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) - f(x_m + th, y(x)) dx \right|$$

$$+ \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m + th, y(x)) - f(x_m + th, y_m + th f(x_m, y_m)) dx \right|$$

$$\leq k \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} |x - (x_m + th)| dx$$

$$+ l \cdot \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} y(x) - (y_m + th f(x_m, y_m)) dx \right|$$

$$\text{第1部分} \leq k \cdot \int_0^h |x - th| dx$$

$$= k \cdot \left( \int_0^{th} th - x dx + \int_{th}^h x - th dx \right)$$

$$= k \cdot \left( \int_0^{th} th dx + \int_0^{th} -x dx + \int_{th}^h x dx + \int_{th}^h -th dx \right)$$

$$= k \cdot \left( t^2 h^2 - \frac{1}{2} t^2 h^2 + \frac{1}{2} (h^2 - t^2 h^2) - th (h - th) \right)$$

$$= k \cdot h^2 \left( t^2 - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} - t + t^2 \right)$$

$$= k \cdot h^2 \cdot \left( t^2 - t + \frac{1}{2} \right)$$

$\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}$

$$\leq \left( \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} |y(x) - y(x_m)| dx \right| + \int_{x_m}^{x_{m+1}} |th f(x_m, y_m)| dx \right)$$

$$\leq l \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} |y'(x)| \cdot |x - x_m| dx + |th^2 f(x_m, y_m)|$$

$$\leq l \cdot M \cdot \frac{h^2}{2} + t h^2 M = M h^2 \cdot \left( \frac{l}{2} + t \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{由定理知: } \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y_N) - f(x_m + (1-t)h, y_m + (1-t)h f(x_m, y_m)) dx \right| \\
 & \leq b \cdot h^2 \cdot ((1-t)^2 - (1-t) + \frac{1}{2}) + M h^2 \cdot (\frac{L}{2} + 1-t) \\
 & = k h^2 \cdot (1+t^2 - 2t - 1 + t + \frac{1}{2}) + M h^2 \cdot (\frac{L}{2} + 1-t) \\
 & = k \cdot h^2 \cdot (t^2 - t + \frac{1}{2}) + M h^2 \cdot (\frac{L}{2} + 1-t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_m & : |R_m| \leq \frac{1}{2} \cdot \left( k h^2 (t^2 - t + \frac{1}{2}) + M h^2 (\frac{L}{2} + t) \right. \\
 & \quad \left. + k h^2 (t^2 - t + \frac{1}{2}) + M h^2 (\frac{L}{2} + 1-t) \right) \\
 & = k h^2 \cdot (t^2 - t + \frac{1}{2}) + M h^2 \\
 & = (k(t^2 - t + \frac{1}{2}) + M) h^2
 \end{aligned}$$

i.e.: 此估计并不是最紧的估计, 更紧的估计可由下面的方法得到.

1. 阐述四阶Runge-Kutta方法的推导过程。

由  $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$

设  $x = x_n + zh, 0 \leq z \leq 1$ ,

则  $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_0^1 f(x_n + zh, y(x_n + zh)) dz$

进一步，我们用  $f(x_n + zh, y_n + zhk_1)$  在  $x_n + zh$  处 Taylor 展开。

$$f(x_n + zh, y_n + zhk_1)$$

$$= f(x_n + zh, y(x_n + zh)) + \nabla_{xy}^T f \cdot \begin{pmatrix} (t-z)h \\ y_n + zh f(x_n, y_n) - y(x_n + zh) \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t-z)h \\ y_n + zh f(x_n, y_n) - y(x_n + zh) \end{pmatrix}^T \nabla_{xy}^2 f \begin{pmatrix} (t-z)h \\ y_n + zh f(x_n, y_n) - y(x_n + zh) \end{pmatrix}$$

$$+ O(h^3) \quad (\text{I})$$

II: 将 t 替换为  $(1-t)h$  得到的表达式 (II) 为：

$$(\text{I}) \times (1-t) - (\text{I}) \times (t-1)$$

$$\therefore y_n + th f(x_n, y_n) - y(x_n + zh) = (t-1)h f(x_n, y_n) + O(h^2)$$

$$f(x_n + zh, y_n + zhk_1) \cdot (1-t) - f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)h k_1) (t-1)$$

$$= f(x, y(x)) (1-2t) + \nabla_{xy}^T f \begin{pmatrix} (t-1)h \\ (t-1)h f(x_n, y_n) + O(h^2) \end{pmatrix} (1-t) + O(h^2)(t-1)$$

$$- \nabla_{xy}^T f \begin{pmatrix} (1-t-1)h \\ (1-t-1)h f(x_n, y_n) + O(h^2) \end{pmatrix} (t-1) + O(h^2)(t-1)$$

$$= f(x, y(x)) (1-2t) + (1-t, 1) O(h^2)$$

其中  $C(t, \nu)$  为关于  $t, \nu$  的项.

由上式可知有:

$$\int_0^1 f(x_n + zh, y_{(x_n + zh)}) h dt$$

$$= \frac{1}{1-t} \int_0^1 h [f(x_n + th, y_n + thk_1) (1-t-2) - f(x_n + (1-t)h, y_n + ((1-t)hk_1)) (t-2) \\ + C(t, \nu) O(h^2)] dz$$

$$= \frac{h}{1-t} \left[ f(x_n + th, y_n + thk_1) \cdot \int_0^1 (1-t-2) dz \right. \\ \left. - f(x_n + (1-t)h, y_n + ((1-t)hk_1)) \int_0^1 (t-2) dz \right. \\ \left. + O(h^2) \int_0^1 C(t, \nu) dz \right]$$

$$= \frac{h}{2} \left[ f(x_n + th, y_n + thk_1) + f(x_n + ((1-t)h, y_n + ((1-t)hk_1)) \right] + O(h^3)$$

$$k_1 : |R| = \int_{x_n}^{x_n + h} f(x, y) dx - \frac{h}{2} [f(x_n + th, y_n + thk_1) + f(x_n + ((1-t)h, y_n + ((1-t)hk_1))]$$

$$= O(h^3)$$

由此可知该 Runge-Kutta 方法的局部步长误差

是  $O(h^3)$ .

如下积分公式

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$$

(a) 讨论该公式系数  $A_0, A_1, B_0$ , 使该积分公式具有尽可能高的代数精度, 并给出代数精度的次数.

(b) 基于上述积分公式该公式的表达式

解: (a)  $\int_0^1 1 dx \approx A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1 + B_0 \cdot 0 = A_0 + A_1$

$$\int_0^1 x dx \approx A_0 \cdot 0 + A_1 \cdot 1 + B_0 \cdot 1 = A_1 + B_0$$

$$\frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx \approx A_0 \cdot 0 + A_1 \cdot 1 + B_0 \cdot 0 = A_1$$

解:  $A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = \frac{1}{3}, B_0 = \frac{1}{6}$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0)$$

当  $f(x) = x^3$  时,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0) = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 0 = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$$

故该积分公式不精确. 提高其代数精度

$$\begin{aligned} (b) \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 dx \\ &= f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(0) + \frac{1}{6} \int_0^1 f'''(\xi)x^3 d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0) \\
 = & \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}\left(f(0) + f'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2}f''(0) \cdot 1^2 + \frac{1}{6}f'''(0) \cdot 1^3\right) + \frac{1}{6}f'(0) \\
 = & f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{18}f'''(0)
 \end{aligned}$$

证：误差估计：

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{24}f''(\xi) - \frac{1}{18}f'''(\xi) \right|$$

$$= \frac{1}{72}f'''(\xi)$$

$$\leq \frac{1}{72} \max_{x \in [0,1]} |f'''(x)|$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + \frac{\alpha}{h} \int_x^0 u_m^n + \beta \frac{\delta_x(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{h^3} = 0$$

$$\delta_x u_m^n = u_{m+1}^n - u_{m-1}^n$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + \frac{\alpha}{h} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{\beta}{h^3} (u_{m+2}^n - u_m^n - 2(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + u_m^n - u_{m-2}^n) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^n) + \frac{\alpha}{h} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{\beta}{h^3} (u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^n) + \frac{\beta}{h^3} u_{m+2}^n + \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3} \right) u_{m+1}^n + \left( -\frac{\alpha}{h} + \frac{2\beta}{h^3} \right) u_{m-1}^n - \frac{\beta}{h^3} u_{m-2}^n = 0$$

$$\begin{cases} v_m^{n+1} = u_m^n \end{cases} : u_m^{n-1} = v_m^n$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u_m^{n+1} - v_m^n) + \frac{\beta}{h^3} u_{m+2}^n + \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3} \right) u_{m+1}^n + \left( -\frac{\alpha}{h} + \frac{2\beta}{h^3} \right) u_{m-1}^n - \frac{\beta}{h^3} u_{m-2}^n = 0 \\ v_m^{n+1} = u_m^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\beta \cdot \Delta t}{h^3} u_{m+2}^n - \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3} \right) \Delta t u_{m+1}^n - \left( -\frac{\alpha}{h} + \frac{2\beta}{h^3} \right) \Delta t u_{m-1}^n + \frac{\beta}{h^3} u_{m-2}^n = 0 \\ v_m^{n+1} = u_m^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_m^{n+1} = \begin{pmatrix} u_m^{n+1} \\ v_m^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} u_{m+2}^n \\ v_{m+2}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_3 \begin{pmatrix} u_{m+1}^n \\ v_{m+1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_4 \begin{pmatrix} u_{m-1}^n \\ v_{m-1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_5 \begin{pmatrix} u_{m-2}^n \\ v_{m-2}^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\beta \cdot \Delta t}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} -\left( \frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_4 = \begin{pmatrix} -\left( \frac{\alpha}{h} + \frac{2\beta}{h^3} \right) \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_5 = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{h^3} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum U_m^n = v^n e^{i\omega nh}, \quad \text{if } \dots$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_m^{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{U}_m^n + \begin{pmatrix} \frac{\beta \Delta t}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{U}_{m+2}^n + \begin{pmatrix} \left(\frac{2\beta}{h^3} - \frac{\alpha}{h}\right) \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{U}_{m+1}^n \\ &\quad + \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right) \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{U}_{m-1}^n + \begin{pmatrix} \frac{\beta}{h^3} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{U}_{m-2}^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\beta \Delta t}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega h} + \begin{pmatrix} \left(\frac{2\beta}{h^3} - \frac{\alpha}{h}\right) \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega h} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right) \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega h} + \begin{pmatrix} \frac{\beta}{h^3} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{21. } G_{1(0t, 0)} &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta \Delta t}{h^3} e^{i\omega h} + \left(\frac{2\beta}{h^3} - \frac{\alpha}{h}\right) \Delta t e^{i\omega h} + \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right) \Delta t e^{-i\omega h} + \frac{\beta}{h^3} \Delta t e^{-2i\omega h} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

设左上角元素为 A, 特征方程为  $(X - A)x - 1 = 0$ .

$$\text{即: } X^2 - Ax - 1 = 0. \quad X_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2}$$

$$\begin{aligned} A &= -\Delta t \frac{\beta}{h^3} \cdot (e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) + \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right) \Delta t \cdot (-e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}) \\ &= -2i \Delta t \frac{\beta}{h^3} \cos(2\omega h) - \left(\frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3}\right) \Delta t \cdot 2i \cdot (\sin(\omega h)) \end{aligned}$$

$$\text{且 } |X_{1,2}| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2} \right| \leq 1$$

$$\text{Case 1: } 0 < \frac{A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow A + \sqrt{A^2 + 4} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{A^2 + 4} \leq 2 - A$$

$$\begin{aligned} \text{Case 2: } -1 &\leq \frac{A - \sqrt{A^2 + 4}}{2} < 0 \Leftrightarrow -2 \leq A - \sqrt{A^2 + 4} \Leftrightarrow \sqrt{A^2 + 4} \leq A + 2 \\ &\Leftrightarrow A^2 + 4 \leq A^2 + 4 + 4A \Leftrightarrow A \geq 0 \end{aligned}$$

72. 只有当  $A = 0$  时,  $|P(G_1(\Delta t, \sigma))| \leq 1$

解:

$$A = -2i \Delta t \frac{\beta}{h^3} \cos(2\sigma h) - \left( \frac{\alpha}{h} - \frac{2\beta}{h^3} \right) \Delta t \cdot 2i \cdot \cos(\sigma h) = 0$$

$$\text{解得: } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left( \frac{\Delta t}{h} \cdot 2i \cdot \cos(\sigma h) \right) = \left( \frac{2}{h^3} \Delta t \cdot 2i \cdot \cos(2\sigma h) - \frac{1}{h^3} \Delta t \cdot 2i \cdot \cos(\sigma h) \right) \beta$$

$$\text{解得: } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 \cos(\sigma h) - \cos(2\sigma h)}{h^2 \cdot \cos(\sigma h)} \text{ 时, 差分格式稳定.}$$