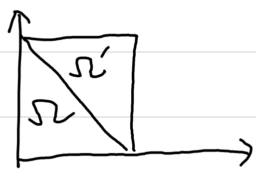
5.2 有限元理论作业

有限元理论作业

问题1. Ω为三角形区域，如图，请证明：

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\cdot\|u\|_{2,1,\Omega}$$

Hint：镜面映射



证明：只需考察 $\forall u\in C^\infty(\bar\Omega)$即可，又知 $C_0^\infty(\bar\Omega)$在 $C^\infty(\bar\Omega)$稠密，故我们设 $u\in C_0^\infty(\bar\Omega)$.

作：$\Sigma=\{(x_1,x_2)\mid 0<x_1<1,\ 0<x_2<1\}$，

将u在Σ上奇延拓，由于 $u\in C_0^\infty(\bar\Omega)$，故 $u|_L=0$.

其中 $L=\{(x_1+x_2)\mid x_1+x_2\le 1,\ 0\le x_i\le 1,\ i=1,2\}$

类似Schwarz反射定理可知其在边界L上为0，故可以奇延拓，即 $u|_{\Omega'}=-u|_{\Omega}$，且 $u|_\Sigma\in C_0^\infty(\bar\Omega)$，

故根据Σ上的情形有 $\|u\|_{L^\infty(\Sigma)}\le C\|u\|_{2,1,\Sigma}$.

又知 $\|u\|_{L^\infty(\Sigma)}=\|u\|_{L^\infty(\bar\Omega)}$

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,1,\Sigma} &= \|u\|_{L^1(\Sigma)}+\|Du\|_{L^1(\Sigma)}+\|D^2u\|_{L^1(\Sigma)}\\ &= 2\|u\|_{L^1(\bar\Omega)}+2\|Du\|_{L^1(\bar\Omega)}+2\|D^2u\|_{L^1(\bar\Omega)}\\ &= 2\|u\|_{2,1,\Omega}\end{aligned}$$

代入可得：$\|u\|_{L^\infty(\bar\Omega)}\le C\cdot 2\|u\|_{2,1,\Omega}$

7. 下面来证明 $C_0^\infty(\bar\Omega)$ 在 $C^\infty(\bar\Omega)$ 中稠密：可取截断函数 $\beta_N(x)$，设 $L=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\le 1,\ 0\le x_2\le 1\}$，有.

$$\chi_N(x)=\begin{cases}1, & |x|\le N\\ 0, & |x|>N.\end{cases}$$

且 $\beta_N(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_n(x-y)\alpha(y)\,dy$，同时，有：

$$\alpha(y)=\begin{cases}\frac{1}{C}e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}}\alpha(x)\,dx=1.$$

可以验证

$$\beta_N(x)=\begin{cases}1, & |x|\le N-1\\ 0, & |x|>N-1\end{cases}$$

且 $\beta_N(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，取 $u_N(x)=\beta_N\left(\frac{1}{dist(x,L)}\right)u(x)$.

则可验证：在 $N\to\infty$ 且 $\partial^r u_N\to\partial^r u$ 时 $u_N(x)\to u(x)$ 对于任意的多重指标 r $(N\to\infty)$ 均成立.

问题 2. 求证：

$$\iint_\Omega\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)=\int_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial v}{\partial n}+\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}\right)ds.$$

其中，$\Omega\in\mathbb{R}^2$，$n=(n_1,n_2)$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位法向量. $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位切向量，$u\in H^2(\Omega)$，$v\in H^2(\Omega)$.

证明：由 Green 公式可知：

$$\int_\Omega u_i v\,dx=\int_{\partial\Omega}uv\,n_i\,ds-\int_\Omega uv_i\,dx$$

其中 $u_i := \partial_i u$.

$$\int_\Omega v_{12} v_{12}\, dx = \int_{\partial\Omega} u_{12} v_1 \cdot n_2\, ds - \int_\Omega u_{122} v_1\, dx$$

$$\int_\Omega u_{12} v_{12}\, dx = \int_{\partial\Omega} u_{12} v_2 \cdot n_1\, ds - \int_\Omega u_{121} v_2\, dx$$

$$\int_\Omega u_{11} v_{22}\, dx = \int_{\partial\Omega} u_{11} v_2 \cdot n_2\, ds - \int_\Omega u_{112} v_2\, dx$$

$$\int_\Omega u_{22} v_{11}\, dx = \int_{\partial\Omega} u_{22} v_1 \cdot n_1\, ds - \int_\Omega u_{221} v_1\, dx.$$

代入得到待证式的左式为:

$$\int_{\partial\Omega} v_1 (u_{12} \cdot n_2 - u_{22} \cdot n_1)\, ds + \int_{\partial\Omega} v_2 (u_{12} \cdot n_1 - u_{11} \cdot n_2)\, ds$$

又知 $n_1^2 + n_2^2 = 1$, $\tau_1 = n_2$, $\tau_2 = -n_1$, 待证式子的右式为:

$$\int_{\partial\Omega} \left(-\partial_{\tau\tau} u \cdot \partial_n v + \partial_{n\tau} u \cdot \partial_\tau u\right) ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(-\sum_{i,j=1}^{2} \tau_i \tau_j u_{ij} \cdot \sum_{i=1}^{2} n_i v_i + \sum_{i,j=1}^{2} n_i \tau_j u_{ij} \cdot \sum_{i=1}^{2} \tau_i v_i\right) ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} v_1 \left(n_2 (n_2^2 + n_1^2) u_{12} - n_1 (n_1^2 + n_2^2) u_{22}\right)$$

$$+ v_2 \left(-n_2 (n_2^2 + n_1^2) u_{11} + n_1 (n_1^2 + n_2^2) u_{12}\right)$$

$$= \int_{\partial\Omega} v_1 \left(u_{12} \cdot n_2 - u_{22} \cdot n_1\right) + v_2 \left(u_{12} \cdot n_1 - u_{11} \cdot n_2\right) ds$$

问题3：求证：

$$\|\Delta u\|_{0,\Omega} = |u|_{2,\Omega}.$$

Hint：考虑由Poincáre不等式：

$$\|u\|_{2,\Omega} \le C|u|_{2,\Omega} \le C\|\Delta u\|_{0,\Omega}$$

证明：

① $\int_\Omega 2u_{12}u_{12} - 2u_{11}u_{12}\,dx = \int_{\partial\Omega} u_1(u_{12}n_2 - u_{22}n_1) + u_2(u_{12}n_1 - u_{11}n_2)\,ds$,

又因为：

$$\Gamma_1 u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

故：$\nabla u\cdot n = 0$, $\nabla u \cdot s = 0$. 则得：$\nabla u = (u_1, u_2) = 0$.

故上式①的右端项为0.

则：$\int_\Omega 2u_{12}u_{12}\,dx = \int_\Omega 2u_{11}u_{22}\,dx$.

我们知道：

$$|u|_{2,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} |u_{ij}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |u|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega u_{11}^2 + 2u_{12}^2 + u_{22}^2\,dx = |u_{11}|_{0,\Omega}^2 + 2|u_{12}|_{0,\Omega}^2 + |u_{22}|_{0,\Omega}^2.$$

由前面的结论可以得到：

$$\int_\Omega u_{11}^2 + 2u_{11}u_{22} + u_{22}^2\,dx = \int_\Omega u_{11}^2 + 2u_{12}u_{12} + u_{22}^2\,dx$$

则我们得到：

$$|\Delta u|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega (\Delta u)^2 dx = |u_{11}|_{0,\Omega}^2 + |u_{12}|_{0,\Omega}^2 + |u_{21}|_{0,\Omega}^2 + |u_{22}|_{0,\Omega}^2$$

$$= |u|_{2,\Omega}^2.$$

证毕.

问题4. $u \in H_0^m(\Omega)$，m为正整数，则有：

$$\|u\|_{m,\Omega} \le C|u|_{0,\Omega}$$

证明二者区域(成立).

证明：令 $f_r(u) = \int_\Gamma D^r u \, ds$，$\forall r$，$|r| \le m-1$，$k=m-1$.

我们知道 $\dim(P_k(\Omega)) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$

首先证明 $f_r \in (H^m(\Omega))'$. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\begin{aligned}
|f_r(u)| &= \int_p |D^r u| \, ds \\
&= \left(\int 1^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_p |D^r u|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |p|^{\frac{1}{2}} \|D^r u\| \\
&\le \|D^r u\|_{0,p} \\
&\le C' \|u\|_{m,\Omega}
\end{aligned}$$

因此 $f_r \in (H^m(\Omega))'$，$r = 1, \cdots, N$.

此外：对于 $\forall u \in P_{m-1}(\Omega)$，若 $f_r(u) = 0$，即 $\int_p D^r u \, ds = 0$.
$(|r| = m-1) \Rightarrow u \equiv 0$，则由等价模定理，对于 $\forall v \in H^m(\Omega)$，
$\|v\|_{m,\Omega} \le (|v|_{m,\Omega} + \sum_{i=1}^{r} |F_i(v)|)$，$v \in H_0^m(\Omega)$，$\|v\|_{m,\Omega} \le C|v|_{m,\Omega}$.

问题5. 混合边值问题：

$$\begin{cases}
-\Delta u = f, \ \text{in } \Omega, & f \in L^2(\Omega) \\
u|_{\Gamma_1} = g_1, \ \text{on } \Gamma_1, & g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega). \\
\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = g_2, \ \text{on } \Gamma_2, & g_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega).
\end{cases}$$

其中 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Omega$，证明其解存在和唯一性

证明：首先由迹定理可知：

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

连续满射 $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，

对于 $\forall g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$，$\exists u_g \in H^1(\Omega)$，使得

$$\gamma_0 u_g = g_1 \quad (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上})$$

$$\gamma_1 u_g = \frac{\partial u_g}{\partial n} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

并且 $\|u_g\|_{1,\Omega} \le C\|g_1\|_{\frac{1}{2},\Gamma_1}$，该式的证明如下：

设 $K = \{v \in H^1(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = g_1,\ a.e.\}$

$K \subset H^1(\Omega)$ 且为闭凸集，考虑极小化问题：

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v),\quad L = 0.$$

连续对称双线性型 $a(v,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx$

且知 a 是椭圆的，由变分原理知存在唯一的 u_g 使得：

$$\|u_g\|_{1,\Omega} = J(u_g) = \inf_{v\in K} J(v) = \inf_{v\in K} \|u_g\|_{1,\Omega}^2 = \inf_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ v|_{\Gamma_1} = g_1}} \|u_g\|_{1,\Omega}^2 = \|g_1\|_{\frac{1}{2},\Omega}$$

令 $w = u - u_g \in H^1(\Omega)$，则 $|u - u_g|_{\Gamma_1} = 0$.

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} - \frac{\partial u_g}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}$$

$$= g_2 - \frac{\partial u_g}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}$$

$$:= \tilde{g}_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2).\quad (\text{由上述迹定理})$$

此时我们知 w 满足：

$$(*)\quad P(x,y) = \begin{cases} \Delta w = f + \Delta u_g \\ w|_{\Gamma_1} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \bar{g}_2 \end{cases}$$

问题 (*) 等价于变分问题

$$\begin{cases} \text{Find } w, \text{ s.t. } a(w,v) = l(v) \\ w \in V,\ V = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_1} = 0,\ a.e. \} \end{cases}$$

其中:

$$l(v) = \langle f, v\rangle - a(u_g, v) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_g}{\partial n} v\, ds + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial w}{\partial n} v\, ds$$

$$= \langle f, v\rangle - a(u_g, v) + \int_{\Gamma_2} g_2 v\, ds$$

$$= \langle f, v\rangle - a(u_g, v) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial w}{\partial n} g_2 v\, ds.$$

又知 l 有界, $l(v) = \langle f, v\rangle - a(u_g, v) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds$

$$= \langle f, v\rangle - a(u_g, v) + \int_{\Gamma_2} g_2 v\, ds$$

$$|l(v)| \le \|f\|_{-1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + M\|u_g\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + \|g_2\|_{\frac{1}{2},\Gamma_2} \|v\|_{\frac{1}{2},\Gamma_2}$$

$$\le \|f\|_{-1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + M\cdot C\|g_1\|_{\frac{1}{2},\Gamma_1}\|v\|_{1,\Omega} + \|g_2\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_2}\|v\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}$$

$$\le \left(\|f\|_{-1,\Omega} + C\|g_1\|_{\frac{1}{2},\Gamma_1} + \|g_2\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_2} \right)\|v\|_{1,\Omega}.$$

其中 M 和 C 为常数，上式最后一个不等号由迹定理推得，故 l 是 V 空间上的连续函数．故由 Lax-Milgram 定理可知：方程 (*) 所对应的变分问题存在唯一解 w^*，又由 u_g 的唯一性，知原问题的解 $u = u_g + w^*$ 也是唯一的．

问题6. 设：

$$\Pi u = r_1\lambda_1^3 + r_2\lambda_2^3 + r_3\lambda_3^3 + r_4\lambda_1^2\lambda_2 + r_5\lambda_1\lambda_2^2 + r_6\lambda_2^2\lambda_3 + r_7\lambda_2\lambda_3^2 + r_8\lambda_3\lambda_1^2 + r_9\lambda_1\lambda_3^2 + r_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$\begin{cases} \Pi u(a_i) = u(a_i), & i=1,2,3,0 \\ \Pi u(a_{iij}) = u(a_{iij}), & i,j=1,2,3 \end{cases}$$

(4+6=10)，求出插值函数，对比和上述方法所求是否一致。

证明：三角形T上的三次多项式构成插值函数：

$$\Pi u = r_1\lambda_1^3 + r_2\lambda_2^3 + r_3\lambda_3^3 + r_4\lambda_1^2\lambda_2 + r_5\lambda_1\lambda_2^2 + r_6\lambda_2^2\lambda_3 + r_7\lambda_2\lambda_3^2 + r_8\lambda_3\lambda_1^2 + r_9\lambda_1\lambda_3^2 + r_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

插值条件为：

$$\begin{cases} \Pi u(a_i) = u(a_i), & i=1,2,3,0 \\ \Pi u(a_{iij}) = u(a_{iij}), & i,j=1,2,3 \end{cases}$$

其中 a_{iij} 是边 $\overline{a_ia_j}$ 上的三等分点，a_0 是T的重心，则可确定 $r_1, r_2, \cdots, r_{10}$ 如下：

$$r_i = u(a_i), \quad 1 \le i \le 3.$$

$$\begin{cases} u(a_{112}) = r_1\left(\frac{2}{3}\right)^3 + r_2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + r_4\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) + r_5\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ u(a_{221}) = r_1\left(\frac{1}{3}\right)^3 + r_2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + r_4\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) + r_5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{cases}$$

由此解得：

$$\begin{cases} r_4 = 9u(a_{112}) - \frac{9}{2}u(a_{221}) - \frac{5}{2}u(a_1) + u(a_2) \\ r_5 = 9u(a_{221}) - \frac{9}{2}u(a_{112}) - \frac{5}{2}u(a_2) + u(a_1) \end{cases}$$

同理可解得：

$$\begin{cases} r_6 = 9u(a_{223}) - \frac{9}{2}u(a_{332}) - \frac{5}{2}u(a_2) + u(a_3) \\ r_7 = 9u(a_{332}) - \frac{9}{2}u(a_{223}) - \frac{5}{2}u(a_3) + u(a_2) \end{cases}$$

以及：
$$\begin{cases} r_8 = 9u(a_{331}) - \frac{9}{2}u(a_{113}) - \frac{5}{2}u(a_3) + u(a_1) \\ r_9 = 9u(a_{113}) - \frac{9}{2}u(a_{331}) - \frac{5}{2}u(a_1) + u(a_3). \end{cases}$$

再由最后一个插值条件可得：
$$u(a_0) = \frac{1}{27}(r_1 + r_2 + \cdots + r_9 + r_{10})$$

故：
$$r_{10} = 27u(a_0) - \frac{9}{2}\big(u(a_{112}) + u(a_{221}) + u(a_{223}) + u(a_{332}) + u(a_{331}) + u(a_{113})\big)$$
$$+2\big(u(a_1) + u(a_2) + u(a_3)\big)$$

代入插值表达式可得：
$$\Pi u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)}{2} u(a_i) + \sum_{i \neq j} \frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1)u(a_{iij}) + 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3 u(a_0)$$

继而 $\Pi u(a_i)$ 和 $\Pi u(a_{iij})$ 可得.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{问题7. Crouzeix-Rariart元 (1973)} \\ T = \text{三角形},\ P_T = P_1(T),\ \Sigma_T = \{u(a_{ij})\} \\ \text{适定性? 连续性} \subset H^1(\Omega)? \end{array}}$$

证明：适定性：
$$\forall u \in P_1(T),\ \Pi u = u,\ \Sigma_T = \{u(a_{ij})\}$$

若 $\Sigma_T = 0$ 时. 由 $u(a_{12}) = u(a_{23}) = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$,

又：$\Pi u \in P_1(T)$, 因此 Πu 含 $\lambda_2 - \frac{1}{2}$ 因子.

同理可知 Πu 也含 $\lambda_1 - \frac{1}{2}$, $\lambda_3 - \frac{1}{2}$ 因子, 注意 $\Pi u \in P_1(T)$,

故 $\Pi u = 0$. 设基函数 $\Pi u = u(a_{12})\phi_{12} + u(a_{23})\phi_{23} + u(a_{31})\phi_{31}$.

其中 ϕ_{12} 满足：

$$\begin{cases} \phi_{12}(a_{12})=1 \\ \phi_{12}(a_{31}) = \phi_{12}(a_{23}) = 0 \\ \phi_{12} \in P_1(T) \end{cases}$$

知：$\phi_{12}\big|_{\lambda_3=\frac{1}{2}} = 0$，$\phi_{12} = a(\lambda_3-\frac{1}{2})$. 又由 $\phi_{12}(a_{12})=1$，

可知 $a(0-\frac{1}{2})=1$，则 $a=-2$，即 $\phi_{12} = -2(\lambda_3-\frac{1}{2})$，

同理：$\phi_{23} = -2(\lambda_1-\frac{1}{2})$，$\phi_{31} = -2(\lambda_2-\frac{1}{2})$.

连续性：

在上述两个相邻单元 T 和 T' 的公共边上，T 单元基函数值为：

$$u(a_{23})\phi_{23}'\big|_{\overline{a_2a_3}} = u(a_{23})$$

其中：$\phi_{23}' = 1-2\lambda_4$，$\phi_{23} = 1-2\lambda_1$.

问题 8. Carey 元 (1976)

$$P_T = P_1(T) \oplus \text{span}\{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\}$$

$$\Sigma_T = \{u(a_i), i=1,2,3, \frac{1}{|T|}\int_T \Delta u\, dx\}$$

连续性：$\subset H^1(\Omega)$?

证明：Carey 三角形元

$$P_T = P_1(T) \oplus \text{span}\{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\}$$

$$\Sigma_T = \{u(a_i): i=1,2,3, \frac{1}{|T|}\int_T \Delta u\, dx\}$$

我们首先来考察 Carey 元的适定性：

对于 $\Sigma_T=0$，知 $u(a_i)=0$，$i=1,2,3$，且 $\frac{1}{|T|}\int_T \Delta u\,dx=0$.

在 T 上 $\Pi u=\sum_{i=1}^{3}u(a_i)\phi+\beta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)$,

~~我~~们有：
$$\begin{cases}\Pi u(a_i)=u(a_i)=0\\ \frac{1}{|T|}\int_T\Delta(\Pi u)\,dx=\frac{1}{|T|}\int_T\Delta u\,dx=0\end{cases}$$

经过简单计算可知：$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\big|_{a_i}=0$.

则可得：
$$\int_T\Delta\left(\beta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)\right)dx=0.$$

进而由 Green 公式可知：
$$\beta\cdot\int_{\partial T}\frac{\partial(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)}{\partial n}ds=0$$

又因为：$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\in P_2(T)$，故
$$\int_T\Delta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)\,dx\neq 0.$$

那么必有 $\beta=0$，则可知在条件 $\Sigma_T=0$ 下，Πu 只有零解.
适定性证毕.

下面来求解 Carey 元的基函数：

设在 T 上，$\Pi u=\sum_{i=1}^{3}u(a_i)\phi+\beta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)$,
ϕ_i 满足 $\phi_i(a_j)=\delta_{ij}$，$i,j=1,2,3$.

代入可知 $\phi_i=\lambda_i$，又知 $\frac{1}{|T|}\int_T\Delta(\Pi u)\,dx=\frac{1}{|T|}\int_T\Delta u\,dx$,

即：$\beta\int_T\Delta(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)\,dx=\int_T\Delta u\,dx$

$$\begin{aligned}\partial_{xx}(\lambda_1\lambda_2)&=\partial_x(\partial_x(\lambda_1\lambda_2))\\&=\partial_x(\lambda_1\partial_x\lambda_2+\lambda_2\partial_x\lambda_1)\\&=\partial_x\left(\lambda_1\frac{\eta_2}{2|T|}+\lambda_2\frac{\eta_1}{2|T|}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\eta_1 \eta_2}{2|T|^2}$$

$$\partial_{yy}(\lambda_1\lambda_2) = -\frac{\xi_1\xi_2}{2|T|^2}$$

$$\Delta(\lambda_1\lambda_2) = \frac{\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2}{2|T|^2}$$

$$\Rightarrow \Delta(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) = \frac{\eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2 + \eta_2\eta_3 - \xi_2\xi_3 + \eta_1\eta_3 - \xi_1\xi_3}{2|T|^2} := A$$

则可知：$\beta = \frac{\int_T \Delta u\, dx}{A}$. 下面我们来考察 Carey元 的连续性

$$\Pi u = \sum_{i=1}^{3} u(a_i)\lambda + \beta(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)$$

我们知道在相邻两个单元 T 与 T' 的共同边界 $\overline{a_2a_3}$ 上，有 T 上基函数为 $u(a_2)\lambda_2 + u(a_3)\lambda_3 + \beta\lambda_2\lambda_3$. T' 上基函数为 $u(a_2)\lambda_2' + u(a_3)\lambda_3' + \beta\lambda_2'\lambda_3'$. 又知 $\overline{a_2a_3}$ 边上的任意一点均有：

$$\lambda_2 = \lambda_2', \quad \lambda_3 = \lambda_3'.$$

故 $\Pi u \in C^0(\Omega)$, 即有 $\Pi u \in H^1(\Omega)$.

问题9. 不完全双二次元

$$\begin{cases} \hat{\Sigma} = \{\hat{u}(\hat{a}_i),\ i=1,2,\cdots,8\} \\ Q_2'(\hat{T}) = Q_2(\hat{T}) \setminus \{\xi^2\eta^2\} = \mathrm{span}\{1, \xi, \eta, \xi\eta, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2\} \end{cases}$$

请证明其适定，且为 C^0元，并计算插值函数.

证明：首先来考察不完全双二次元的适定性：

对于 $\hat{\Sigma} = 0$，我们知 $\hat{u}\hat{a}_1 = \hat{u}\hat{a}_8 = \hat{u}\hat{a}_2 = 0$.

故 $\hat{\Pi}\hat{u}\big|_{y=-1} = 0$. $\hat{u}$ 必含 $(1+y)$ 因子，同理，$\hat{\Pi}\hat{u}$ 含

$(1-\eta)$, $(1+\xi)$, $(1-\xi)$ 因子.

$$\hat{\Pi}\hat{u} = a(1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

故 $\hat{\Pi}\hat{u}$ 最高次 $\xi^2\eta^0$ 为 0. 则 $a=0$

下面我们来计算插值函数:

$$\hat{\Pi}\hat{u} = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\eta^2 + \alpha_6\xi\eta + \alpha_7\xi^2\eta + \alpha_8\xi\eta^2.$$

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = \hat{\Pi}\hat{u}(\hat{a}_1) = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 \\ \hat{u}_2 = \hat{\Pi}\hat{u}(\hat{a}_2) \\ \vdots \\ \hat{u}_8 = \hat{\Pi}\hat{u}(\hat{a}_8) \end{cases}$$

解出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_8$ 即可.

问题 10. 请分析二次有限元的误差

证明: Poission 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla v \, dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx$$

$$\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{1,\Omega} \simeq |\cdot|_{1,\Omega}.$$

由 0 边界条件和 Poincáre 不等式.

故:
$$|u-u_h|_{1,\Omega} \le C \inf_{v_h \in V} |u - v_h|_{1,\Omega}$$
$$\le C\,|u - \Pi u|_{1,\Omega}$$

$$= C\left(\sum_{T\in T_h} |u - \Pi_T u|_{1,T}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

下面我们仅需估计 $|u-\Pi_T u|_{1,T}$ 即可，也即是考量单元 T 上的误差。后边来估计 $|u-\Pi_T u|_{m,T}$，$m=0,1,2$.
下面我们以二次元为例子分析单元上的有限元插值误差.

对于插值函数 $\Pi_h u$. $\|u-u_h\|_V \le C\|u-\Pi_h u\|_V$.
u_h 是有限元解，$\Pi_h u$ 是精确解的插值函数，只需估计 $|u-\Pi_T u|_{1,T}$，即单元误差.
二次元插值为：$\Pi_T u = \sum_{i=1}^{3} u(a_i)\phi_i + \sum_{i<j}^{3} u(a_{ij})\phi_{ij}$.

分如下几步骤进行：

1. 将一般单元 T 的插值误差变换为参考元 $\hat{T}$ 上的插值误差.
2. 在参考元 $\hat{T}$ 上对插值误差进行估计，利用等价模定理和 Bramble-Hilbert 定理得到高阶半模控制.
3. 最后把此半模转换到一般的单元 T 上，使用变换：

$$F_T = \begin{cases} x = (x_1-x_3)\lambda_1 + (x_2-x_3)\lambda_2 + x_3 \\ y = (y_1-y_3)\lambda_1 + (y_2-y_3)\lambda_2 + y_3 \end{cases}$$

$F_T(\hat{T}) = \hat{T}$，线性可逆，且 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right| = 2|T|$.

(引理 5.2)
设三角形 T 的最小角是 $\theta_0 > 0$，则有 $s=3$ 时，

$$|\hat{u}|_{3,\hat{T}} \le \frac{h_T^2}{\sin\theta_0}|u|_{3,T}$$

$$|\hat{u}|_{3,\hat{T}}^2 = \int_{\hat{T}} \left[\frac{\partial^3\hat{u}}{\partial\lambda_1^3}\right]^2 + \left[\frac{\partial^3\hat{u}}{\partial\lambda_1^2\partial\lambda_2}\right]^2 + \left[\frac{\partial^3\hat{u}}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2^2}\right]^2 d\lambda_1 d\lambda_2$$

以 $\int_{\hat{T}} \left[\frac{\partial^3\hat{u}}{\partial\lambda_1^3}\right]^2 d\lambda_1 d\lambda_2$ 为例：

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial^2 \lambda_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2$$

$$\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \lambda_1^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)^2\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}$$

$$\int_{\hat{T}}\left[\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \lambda_1^3}\right]^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \le C\int_{\hat{T}}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)^2\right]\cdot h_T^6\, d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$\le C\cdot\int_T \sum_{|r|=3}(D^r u)^2\cdot h_T^6 \frac{1}{2|T|}\,dx\,dy$$

$$\le \frac{C\cdot h_T^6}{2\cdot h_T^2 \sin^2\theta_0}\cdot |u|_{3,T}^2$$

$$= \frac{C\cdot h_T^4}{\sin\theta_0}|u|_{3,T}^2$$

故：$|\hat{u}|_{3,T} \le \frac{C\cdot h_T^2}{(\sin\theta_0)^{\frac{1}{2}}}|u|_{3,T} \le \frac{C\cdot h_T^2}{\sin\theta_0}|u|_{3,T}$

下一步进行参考元$\hat{T}$上的插值误差估计：

(引理5.3) $\|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}\|_{1,\hat{T}} \le C|\hat{u}|_{3,\hat{T}},\ \forall \hat{u} \in H^3(\hat{T})$.

$$\hat{\pi}\hat{u} = \beta_1\lambda_1^2 + \beta_2\lambda_2^2 + \beta_3\lambda_3^2 + \beta_4\lambda_1\lambda_2 + \beta_5\lambda_2\lambda_3 + \beta_6\lambda_1\lambda_3$$

令 $l_i(\hat{u}) = \hat{u}_i = \hat{u}(\hat{a}_i)$，$l_i(\hat{u}) = 0,\ \hat{u} \in P_2(\hat{T}) \Rightarrow \hat{u} = 0$.

则由等价模范数定理，有：

$$\|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}\|_{3,\hat{T}} \le C\left(|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}|_{3,\hat{T}} + \sum_{i=1}^{3}|l_i(\hat{u} - \hat{\pi}u)|\right)$$

$$= C|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}|_{3,\hat{T}}$$

$$= C|\hat{u}|_{3,\hat{T}}$$

$$\|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}\|_{1,\hat{T}} \le \|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}\|_{3,\hat{T}} \le C|\hat{u}|_{3,\hat{T}}.$$

(引理5.4). $\widehat{\Pi_T u} = \hat{\pi}\hat{u}$.

证明如下: $\Pi_T u = \beta_1\lambda_1^2 + \beta_2\lambda_2^2 + \beta_3\lambda_3^2 + \beta_4\lambda_1\lambda_2 + \beta_5\lambda_2\lambda_3 + \beta_6\lambda_1\lambda_3$

二次元插值函数，它的系数全部为 Σ_T 中的插值条件的线性组合.

又: $u(a_i) = u(F(\hat{a}_i)) = u\circ F(\hat{a}_i) = \hat{u}(\hat{a}_i)$, $i=1,2,3$

$u(a_{ij}) = u(F(\hat{a}_{ij})) = u\circ F(\hat{a}_{ij}) = \hat{u}(\hat{a}_{ij})$

$\Rightarrow \hat{\beta}_1(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_{ij}) = \beta_1(a_1, \cdots, a_{ij}, \cdots)$

$= \widehat{\beta_1(a_1, \cdots, a_{ij})}$

所以 $\widehat{\Pi_T u} = \beta_1\widehat{(a_1, \cdots, a_{31})}\hat{\lambda}_1^2 + \cdots + \beta_6\widehat{(a_1, \cdots, a_{31})}\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_1$.

$\hat{\beta}_1(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_{31})\hat{\lambda}_1^2 + \cdots + \hat{\beta}_6(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_{31})\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_1$.

$= \hat{\pi}\hat{u}$.

(定理5.1): $|u - \Pi_T u|_{s,T} \le C h_T^{1-s} |\widehat{u - \Pi_T u}|_{s,\hat{T}}$, $s=0,1$

$= h_T^{1-s} |\hat{u} - \widehat{\Pi u}|_{s,\hat{T}}$

$= h_T^{1-s} |\hat{u} - \hat{\pi} u|_{s,\hat{T}}$

$\le C h_T^{1-s} h_T^2 |u|_{3,\hat{T}}$

$\le C h_T^{1-s} h_T^2 |u|_{3,\hat{T}}$

$\le C h_T^{3-s} |u|_{3,\hat{T}}$.

(推论1): $\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}^2 = \|u - \Pi_h u\|_{0,\Omega}^2 + \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}^2$

$\le \sum_{T\in T_h} (\|u - \Pi_T u\|_{0,T}^2 + |u - \Pi_T u|_{1,T}^2)$

$$\le \sum_{T\in T_h}\left(Ch_T^6|u|_{3,T}^2 + Ch_T^4|u|_{3,T}^2\right)$$

$$\le \sum_{T\in T_h} Ch_T^4|u|_{3,T}^2$$

$$\le Ch^4|u|_{3,\Omega}^2.$$

$$\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega} \le Ch^2|u|_{3,\Omega}.$$

推论2：设 u, u_h 分别为 Poission方程精确解和有限元解。
则有如下估计：

$$|u-u_h|_{1,\Omega} \le Ch^2|u|_{3,\Omega}.$$

证明如下：由 Cea 引理及推论：

$$|u-u_h|_{1,\Omega} \le C\inf_{v_h\in V_h}|u-v_h|_{1,\Omega}$$

$$\le C|u-\Pi_h u|_{1,\Omega}$$

$$\le Ch^2|u|_{3,\Omega}.$$