4.3 数值线性代数其他习题及解答

《数值线性代数》习题

一．矩阵代数基础(共七题)

1.设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \text{收敛} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k = 0 \tag{1}$$

而且当(1)右端条件满足时, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1} \tag{2}$$

此外对于收敛级数的部分和, 有下述估计, 即:存在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的相容范数 $\|\cdot\|$, 使得:

$$\| (I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} A^k \| \leq \frac{\| A \|^{m+1}}{1- \| A \|} \tag{3}$$

证明. (1)⇒: 若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛, 由Cauchy收敛准则有 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\| A^{n+1} \| < \epsilon,$$

即当 $n > N+1$ 时

$$\| A^n \| < \epsilon.$$

因此, $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$.

⇐: 因 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, 则 $\rho(A) < 1$, 因此存在某一相容范数 $\|\cdot\|$, 使得 $\| A \| < 1$.

令 $S_m = \sum_{k=0}^{m} A^k$, 那么

$$\begin{aligned}
\| Sm \| &= \| I + A + A^2 + \cdots + A^m \| \\
&\leq \| I \| + \| A \| + \cdots + \| A \|^m \\
&= \frac{1- \| A \|^{m+1}}{1- \| A \|} \\
&\leq \frac{1}{1- \| A \|}
\end{aligned}$$

1

则 $\| Sm \|$ 有界, 即 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛.

(2)通过计算有

$$(I-A)S_m = I + A + A^2 + \cdots + A^m - A - A^2 - \cdots - A^{m+1} = I - A^{m+1}$$

令 $m \to \infty$ 有

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I, \tag{4}$$

即

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{5}$$

那么

$$\begin{aligned} &\| (I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{m} A^k \| = \| \sum_{k=m+1}^{\infty} A^k \| \leq \| A \|^{m+1} \| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \| \\ \leq\ & \| A \|^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k = \frac{\| A \|^{m+1}}{1 - \| A \|} \end{aligned}$$

□

2.设 A 和 B 分别为 $m \times n$, $n \times m$阵, 则

(1) AB 与 BA 有相同的(包括重数)非零特征值;

(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 且至少一个可逆, 则 AB 与 BA 相似.

证明. 不妨设 $m \leq n$, 则

$$\begin{aligned} \lambda^m \det(\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}) &= \lambda^m \det(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}) \\ &= \lambda^m \det(\begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{bmatrix}) \\ &= \lambda^m \det(\lambda I_n - BA) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^m \det(\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}) &= \det(\begin{bmatrix} \lambda I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}) \\ &= \det(\begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}) \\ &= \lambda^n \det(\lambda I_m - AB) \end{aligned}$$

即, $det(\lambda I_n - BA) = \lambda^{n-m}\det(\lambda I_m - AB)$.
因此, AB 的特征多项式与 BA 的特征多项式的非零根具有相同重数.
(2)不妨设 A 可逆, 则 $A^{-1}(AB)A = BA$, 即 AB 和 BA 相似. □

3.(1)设 A 为 $n \times n$ 的Hermite阵, 则

$$\lambda_1 = \max_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x}, \lambda_n = \min_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x}. \tag{6}$$

(2)设 A, B 均为 n 阶Hermite阵, 且 B 正定,记 $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ 为 A 关于 B 的相对特征值, 即 μ_i 为 $\det(A-\mu B)$ 的根, 则

$$\mu_1 = \max_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*Bx}, \mu_n = \min_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*Bx}. \tag{7}$$

证明. (1)因为 A 是Hermite阵, 因此存在酉矩阵 Q, 使得 $A = Q^*\Lambda Q$, 其中 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 对任意 $x \neq 0$, 令 $y = Qx$, 此时 $y \neq 0$.

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{x^*Q^*\Lambda Qx}{x^*Q^*Qx} = \frac{y^*\Lambda y}{y^*y} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i|y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2},$$

所以

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n\sum_{i=1}^n |y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i|y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \frac{\lambda_1\sum_{i=1}^n |y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \lambda_1.$$

取 x_1 为 A 对应于 λ_1 的特征向量, x_n 为 A 对应于 λ_n 的特征向量,

$$\frac{x_1^*Ax_1}{x_1^*x_1} = \frac{\lambda_1 x_1^*x_1}{x_1^*x_1} = \lambda_1, \frac{x_n^*Ax_n}{x_n^*x_n} = \frac{\lambda_n x_n^*x_n}{x_n^*x_n} = \lambda_n,$$

故

$$\lambda_1 = \max_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x}, \lambda_n = \min_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

(2)因 B 正定, 故 $\det(B^{-\frac{1}{2}}) \neq 0$, 则

$$\det(B^{-\frac{1}{2}})\det(A-\mu B)\det(B^{-\frac{1}{2}}) = \det(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} - \mu I),$$

故 μ_i 为 $\det(\mu I - B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})$ 的根, 即 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 为 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ 的所有特征值.对任意 $x \neq 0$, 令 $y = B^{\frac{1}{2}}x$, 此时 $y \neq 0$.

$$\frac{x^*Ax}{x^*Bx} = \frac{x^*B^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}x}{x^*B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}x} = \frac{y^*B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}y}{y^*y},$$

则

$$\lambda_1 = \max_{y\neq 0}\frac{y^*B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}y}{y^*y} = \max_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*Bx}, \lambda_n = \min_{y\neq 0}\frac{y^*B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}y}{y^*y}\min_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*Bx}.$$

□

4.设 A, B 为 n 阶Hermite正定阵,则

$$\kappa(A+B) \leq \max\{\kappa(A), \kappa(B)\}, \tag{8}$$

$$\max\{\frac{\kappa(A)}{\kappa(B)}, \frac{\kappa(B)}{\kappa(A)}\} \leq \kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B), \tag{9}$$

其中 $\kappa(A)$ 表示 A 的条件数.

证明. (1) A, B 为 n 阶Hermite正定阵, 则 $A+B$ 也是Hermite正定阵.

设 $\lambda_1(C), \lambda_n(C)$ 分别表示 C 的最大最小特征值, 则 $\lambda_1(A), \lambda_n(A), \lambda_1(B), \lambda_n(B) > 0$, 由第三题,

$$\lambda_1(A+B) = \max_{x\neq 0}\frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \leq \max_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x} + \max_{x\neq 0}\frac{x^*Bx}{x^*x} = \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$$

$$\lambda_n(A+B) = \min_{x\neq 0}\frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \geq \min_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x} + \min_{x\neq 0}\frac{x^*Bx}{x^*x} = \lambda_n(A) + \lambda_n(B),$$

因此,

$$\kappa(A+B) = \frac{\lambda_1(A+B)}{\lambda_n(A+B)} \leq \frac{\lambda_1(A)+\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)+\lambda_n(B)}.$$

利用 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}, a, b, c, d > 0$, i.若 $\kappa(A) \leq \kappa(B)$, 则$\frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} \leq \frac{\lambda_1(B)}{\lambda_n(B)}$, 即

$$\kappa(A+B) = \frac{\lambda_1(A)+\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)+\lambda_n(B)} \leq \frac{\lambda_1(B)}{\lambda_n(B)} = \kappa(B),$$

ii.若 $\kappa(B) < \kappa(A)$, 则$\frac{\lambda_1(B)}{\lambda_n(B)} < \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)}$, 即

$$\kappa(A+B) = \frac{\lambda_1(A)+\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)+\lambda_n(B)} \leq \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} = \kappa(A),$$

综上, $\kappa(A+B) \leq \max\{\kappa(A), \kappa(B)\}$.

(2)由矩阵范数相容性,

$$\kappa(AB) = \| AB \| \| (AB)^{-1} \| = \| AB \| \| B^{-1}A^{-1} \| \leq \| A \| \| B \| \| A^{-1} \| \| B^{-1} \| = \kappa(A)\kappa(B),$$

4

$\kappa(A) =\| A \|\| A^{-1} \|=\| ABB^{-1} \|\| BB^{-1}A \|\leq\| AB \|\| B^{-1} \|\| B \|\| (AB)^{-1} \|= \kappa(B)\kappa(AB)$

$\kappa(B) =\| B \|\| B^{-1} \|=\| AA^{-1}B \|\| B^{-1}A^{-1}A \|\leq\| A^{-1} \|\| AB \|\| (AB)^{-1} \|\| A \|= \kappa(A)\kappa(AB)$,

综上,

$$\max\{\frac{\kappa(A)}{\kappa(B)}, \frac{\kappa(B)}{\kappa(A)}\} \leq \kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B).$$

□

5.设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为 n 阶Hermite矩阵, B 是 A 的一个 k 阶主子式, $(1 \leq k \leq n-1)$, 并设 A 与 B 的特征值分别为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 和 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$, 则

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-k+i}, i = 1, 2, \cdots, k. \tag{10}$$

证明. B 是 A 的 k 阶主子式, 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

令矩阵 $U = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} \in C^{n\times k}$, 则 $B = U^*AU$.

由极小极大定理, 则存在 i 维子空间 $P \subseteq \mathbb{C}^k$ 使得

$$\mu_i = \min_{x\in P,\|x\|=1} x^*Bx.$$

令 $Q = \{y = Ux|x \in P\}$, 是 $\mathbb{C}^n$ 的 i 维子空间, 有

$$\begin{aligned}\mu_i &= \min_{x\in P,\|x\|=1} x^*Bx = \min_{x\in P,\|x\|=1} x^*U^*AUx = \min_{y\in Q,\|y\|=1} y^*Ay \\ &\leq \max_{\dim S=i} \min_{y\in S,\|y\|=1} y^*Ay = \lambda_i.\end{aligned} \tag{11}$$

设 $\lambda_i(M)$ 表示 M 的第 i 大的特征值, 有

$$\lambda_j(-A) \geqslant \lambda_j(-B) = -\lambda_{k-j+1}(B)$$

令 $j = k - i + 1$ 有

$$-\lambda_{n-k+i} = \lambda_{k+1-i}(-A) \geqslant -\lambda_i(B) = -\mu_i.$$

5

即得结论. □

6.设 $A\in\mathbb{C}_p^{m\times n}$, 试求出 $A_k\in\mathbb{C}_p^{m\times n}(1\le k\le p)$ 使得

$$\| A-A_k \|_F=\min\{\| A-B \|_F : B\in\mathbb{C}_k^{m\times n}\} \tag{12}$$

如果进一步假定 A 的奇异值为 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n$, 试证:

$$\min_{rank(B)\le k}=(\sigma_{k+1}^2+\cdots+\sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

解. 设 A 的奇异值分解为

$$A=U^*\begin{bmatrix}\Sigma_p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V$$

$$\Sigma_p=\ \mathrm{diag}\,(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p),\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_p.$$

则有

$$\| A-B \|_F=\| U^*\begin{bmatrix}\Sigma_p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V-B \|_F=\| \begin{bmatrix}\Sigma_p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-UBV^* \|_F$$

令 $C=UBV^*$,

$$\| A-B \|_F^2=\sum_{i\ne j}c_{ij}^2+\sum_{j=p+1}^{\min\{m,n\}}c_{jj}^2+\sum_{j=1}^{p}(\sigma_j-c_{jj})^2$$

由此,

$$\min_{rank(B)\le k}\| A-B \|_F=(\sigma_{k+1}^2+\cdots+\sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

此时,

$$c_{ij}=\begin{cases}0, & i\ne j\\ 0, & i=j\ge p+1\\ \sigma_k, & i=j\le k\\ 0, & k+1\le i=j\le p.\end{cases}$$

即

$$A_k=U^*\begin{bmatrix}\Sigma_k & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V.$$

6

□

7.设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda(A)=\{\lambda_i\}$, $\sigma(A)=\{\sigma_i\}$, 试证: 如果 $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|, |\sigma_1|\geq|\sigma_2|\geq\cdots\geq|\sigma_n|$, 则

$$\prod_{i=1}^{k}\sigma_i \geq \prod_{i=1}^{k}|\lambda_i|, k=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

证明. 当 $k=n$ 时,

$$\prod_{i=1}^{n}\sigma_i=\det(A^*A)=|\det(A)|^2=\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|$$

当 $k<n$ 时, 设 A 的Shur分解为

$$A=U^*TU=U^*\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}U=U^*\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ 0 & T_{22}\end{pmatrix}U$$

其中 U 为酉矩阵, T 为上三角矩阵, T_{11} 为 k 阶方阵, 因此, T 的特征值和奇异值与 A 相同.

$$T^2=\begin{pmatrix}T_{11}^2 & *\\ 0 & T_{22}^2\end{pmatrix}, T^*T=\begin{pmatrix}T_{11}^*T_{11} & *\\ * & *\end{pmatrix}.$$

设 $T_{11}^*T_{11}$ 的特征值为 $\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_k^2$.
则由特征值分隔定理, $T_{11}^*T_{11}$ 是 T^*T 的主子矩阵, 因此,

$$\sigma_i^2\geq\mu_i^2.$$

再由 $\det(T_{11}^*T_{11})=|\det(T_{11}^2)|$, 有

$$\prod_{i=1}^{k}\mu_i^2=\prod_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2,$$

7

那么

$$\prod_{i=1}^{k}\sigma_i \geq \prod_{i=1}^{k}|\lambda_i|.$$

综上, 就有(14)成立. □

二、线性方程组部分(共七题)

8.考察线性方程组 $Ax=b$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 10^{-10} & 10^{-10} \\ 1 & 10^{-10} & 10^{-10} \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 2(1+10^{-10}) \\ -10^{-10} \\ 10^{-10} \end{pmatrix}$$

(1)验证: $x=(10^{10},-1,1)$ 是方程组的解, 且其条件数是 $\kappa_\infty(A)=2(10^{10}+1)\approx 2\times 10^{10}$;

(2)证明: 如果 $|E|<10^{-8}|A|$, 且 $(A+E)y=b$, 则有 $|x-y|<10^{-7}|x|$. 这表明, 即使 A 的条件数很大, A 的元素的微小扰动未必一定会引起 x 的巨大变化;

(3)定义 $D=\operatorname{diag}(10^{-5},10^{5},10^{5})$, 证明: $\kappa_\infty(DAD)\leq 5$.

证明.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 10^{-10} & 10^{-10} \\ 1 & 10^{-10} & 10^{-10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10^{10} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(1+10^{-10}) \\ -10^{-10} \\ 10^{-10} \end{pmatrix}$$

故, $x=(10^{10},-1,1)$ 是方程组的解.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}(2-10^{10}) & \frac{1}{4}(2+10^{10}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(2+10^{10}) & -\frac{1}{4}(2-10^{10}) \end{pmatrix}.$$

$\parallel A\parallel=4, \parallel A^{-1}\parallel=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(10^{10}-2)+\frac{1}{4}(2+10^{10})=5\times 10^{9}+\frac{1}{2}$.

$\kappa_\infty(A)=4(5\times 10^9+\frac{1}{2})\approx 2\times 10^{10}$.

(2)记 $\epsilon=10^{-8}$. 因为 $Ax=b,(A+E)y=b$, 有 $x-y=A^{-1}Ey$, 即 $x=(I+A^{-1}E)y$. 注意到 $|E|<10^{-8}|A|$,

$$|A^{-1}E|\leq 10^{-8}|A^{-1}||A|=25\begin{pmatrix} 4\times 10^{-10} & 4\times 10^{-20} & 4\times 10^{-20} \\ 2+4\times 10^{-10} & 4\times 10^{-10} & 4\times 10^{-10} \\ 2+4\times 10^{-10} & 4\times 10^{-10} & 4\times 10^{-10} \end{pmatrix}.$$

8

由 $|\lambda-4\times10^{-10}|\le 8\times10^{-20}$, 知 $\rho(10^{-8}|A^{-1}||A|)<1$, 再由谱半径单调性, 有 $\rho(|A^{-1}E|)<1$, 说明 $I+A^{-1}E$ 可逆, 那么$x-y=(I+A^{-1}E)^{-1}A^{-1}Ex$.

$$(I+A^{-1}E)^{-1}=I-(I+A^{-1}E)^{-1}A^{-1}E,$$

就有

$$|(I+A^{-1}E)^{-1}|\le I+\epsilon|(I+A^{-1}E)^{-1}||A^{-1}||A|,$$

从而有

$$(I-\epsilon|A^{-1}||A|)|(I+A^{-1}E)^{-1}|\le I.$$

即

$$|(I+A^{-1}E)^{-1}|\le(I-\epsilon|A^{-1}||A|)^{-1}.$$

因此,

$$\begin{aligned}|x-y|\le\ &\epsilon|(I+A^{-1}E)^{-1}||A^{-1}||A||x|\\ \le\ &\epsilon(I-\epsilon|A^{-1}||A|)^{-1}|A^{-1}||A||x|\end{aligned}$$

令 $H=\epsilon(I-\epsilon|A^{-1}||A|)^{-1}|A^{-1}||A|$, 经计算

$$H=\begin{pmatrix}10^{-8}&10^{-18}&10^{-18}\\50&10^{-8}&10^{-8}\\50&10^{-8}&10^{-8}\end{pmatrix}$$

因此, 有

$$\begin{aligned}|x_1-y_1|\le\ &3\times10^{-18}\le\ &10^{-7}|x_1|,\\|x_2-y_2|\le\ &2.5\times10^{-8}\le\ &10^{-7}|x_2|,\\|x_3-y_3|\le\ &2.5\times10^{-8}\le\ &10^{-7}|x_3|,\end{aligned}$$

即 $|x-y|\le10^{-7}|x|$.

(3)

$$DAD=\begin{pmatrix}2\times10^{-10}&-1&1\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},D^{-1}A^{-1}D^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac12&\frac12\\-\frac12&\frac14(1-10^{-10})&\frac14(1+10^{-10})\\\frac12&\frac14(1+10^{-10})&\frac14(1-10^{-10})\end{pmatrix}$$

9

于是, $\kappa_\infty(DAD) = \| DAD \|_\infty \| (DAD)^{-1} \|_\infty = 3 \times 1 = 3 \leq 5.$

□

9.证明:

$$\| V(x_0, x_1, \cdots, x_n)^{-1} \|_\infty \leq \max_{0\leq k\leq n} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{1+|x_i|}{x_k - x_i}, \tag{15}$$

其中 $V(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 表示 Vandermonde 矩阵.

证明. 设 $p(x) = (x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + x^n$.

先证:

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1 \leq \prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|) \tag{16}$$

由韦达定理(根与系数的关系)有:

$$\begin{cases} a_{n-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ a_{n-2} = \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j, \\ \cdots, \\ a0 = \prod_{i=1}^{n} x_i. \end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned} |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1 = & \ |\prod_{i=1}^{n} x_i| + \cdots + |\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j| + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + 1 \\ \leq & \ \prod_{i=1}^{n} |x_i| + \cdots + \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i||x_j| + (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) + 1 \\ = & \ \prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|). \end{aligned}$$

设 $A = V(x_0, x_1, \cdots, x_n)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

令 $p_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \cdots + a_{in}x^n$, 由 $AV(x_0, x_1, \cdots, x_n) = I$, 有

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

10

由 Lagrange 插值多项式有

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x - x_i)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_j - x_i)} = a_{i0} + a_{i1}x + \cdots + a_{in}x^n.$$

那么由(16), 于是

$$\begin{aligned} |a_{i0}| + |a_{i1}| + \cdots + |a_{in}| \leq & \ |\frac{1}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_j - x_i)}| \prod_{j=0,j\neq i}^{n}(1 + |x_i|) \\ \leq & \ \frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(1 + |x_i|)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}|x_j - x_i|} \end{aligned}$$

□

10.设 A 为如下的块三对角阵

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & C_2 & 0 & 0 \\ B_2 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C_s \\ 0 & 0 & B_s & D_s \end{pmatrix},$$

其中 $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ 非奇异, $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$, 试证: 对任意的 $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 有:

$$\det(D - \mu C_L - \frac{1}{\mu}C_U) = \det(D - C_L - C_U), \tag{17}$$

其中 $D = diag(D_1, D_2, \cdots, D_s)$,

$$C_L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & B_s & 0 \end{pmatrix}, C_U = -\begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 由于

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-(s-1)}I_{n_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & \mu^{-1}C_2 & 0 & 0 \\ \mu B_2 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu^{-1}C_s \\ 0 & 0 & \mu B_s & D_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{s-1}I_{n_s} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} D_1 & C_2 & 0 & 0 \\ B_2 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C_s \\ 0 & 0 & B_s & D_s \end{pmatrix}.$$

因此, $D-\mu C_L-\frac{1}{\mu}C_U$, 与 $D-C_L-C_U$ 相似. 所以

$$\det(D-\mu C_L-\frac{1}{\mu}C_U)=\det(D-C_L-C_U). \tag{18}$$

□

11.设矩阵 A 如题 10 所述, 设 $L=D^{-1}C_L, U=D^{-1}C_U$, Jacobi迭代矩阵 $J=L+U$, SOR迭代矩阵 $L_\omega=(I-\omega L)^{-1}(\omega U+(1-\omega)I)$.
证明: 当 $\omega\neq 1$ 时, $\lambda\in\lambda(L_\omega)\Leftrightarrow\exists\mu\in\lambda(J)$ 使得

$$\lambda=\frac{1}{4}(\omega\mu+(\omega^2\mu^2-4\omega+4)^{\frac{1}{2}})^2. \tag{19}$$

证明. 因为 $\omega\neq 1$, 所以

$$\det(L_\omega)=\det((I-\omega L)^{-1}(\omega U+(1-\omega)I))=(1-\omega)^n\neq 0.$$

又由 $det(I-\omega L)=1$, 那么 $0\notin\lambda(L_\omega)$.

$$\begin{aligned} & \det(\lambda I-(I-\omega L)^{-1}(\omega U+(1-\omega)I)) \\ = \ & det(I-\omega L)\det(\lambda I-(I-\omega L)^{-1}(\omega U+(1-\omega)I)) \\ = \ & \det(\lambda(I-\omega L)-(\omega U+(1-\omega)I)) \\ = \ & \det((\lambda+\omega-1)I-\omega U-\lambda\omega L) \\ = \ & (\omega\sqrt{\lambda})^n\det(\frac{\lambda+\omega-1}{\omega\sqrt{\lambda}}I-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}U-\sqrt{\lambda}L) \end{aligned}$$

12

利用第 10 题结论,

$$\det(\frac{\lambda+\omega-1}{\omega\sqrt{\lambda}}I-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}U-\sqrt{\lambda}L)=\det(\frac{\lambda+\omega-1}{\omega\sqrt{\lambda}}I-(U+L)).$$

令 $\mu=\dfrac{\lambda+\omega-1}{\omega\sqrt{\lambda}}$, 则

$$\lambda+\omega-1=\omega\mu\lambda^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

于是利用求根公式,

$$\lambda=\frac{1}{4}(\omega\mu\pm(\omega^2\mu^2-4\omega+4)^{\frac{1}{2}})^2. \tag{21}$$

由第 10 题, μ 取 -1, 因为 $\det(\mu I-L-U)=\det(\mu I+L+U)=(-1)^n\det(-\mu I-L-U)$, 所以, 若 μ 是 J 的特征值, 则 $-\mu$ 也是 J 的特征值.

$\Leftarrow$) 若 μ 是 J 的特征值, 则 $\lambda=\frac{1}{4}(\omega\mu+(\omega^2\mu^2-4\omega+4)^{\frac{1}{2}})^2$ 满足 $\mu=\dfrac{\lambda+\omega-1}{\omega\sqrt{\lambda}}$, 有

$$\det(\lambda I-L_\omega)=0,$$

因此, λ 是 L_ω 的特征值.

$\Rightarrow$) 若 λ 是 L_ω 的特征值, 有 $\mu=\dfrac{\lambda+\omega-1}{\omega\sqrt{\lambda}}$ 是 J 的特征值, 则 $-\mu$ 也是 J 的特征值. 因此, 由(21)必然存在 $\mu\in\lambda(J)$, 使得 $\lambda=\frac{1}{4}(\omega\mu+(\omega^2\mu^2-4\omega+4)^{\frac{1}{2}})^2$. □

12.设 A 同题 10、11, 对应的 Jacobi 迭代矩阵 J 的特征值均为实数,并假定 $\rho(J)<1$, 则

(1) $R(L_1)=2R(J)$;

(2) $\rho(L_{\omega_b})=\inf\limits_{0<\omega<2}\rho(L_\omega)=\omega_b-1$, 其中 $\omega_b=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$.

证明.(1) 第 11 题是针对 $\omega\neq 1$ 的分析, 即对 $\lambda\neq 0$ 的分析, 那么抛开这个条件.

若 μ 是 J 的特征值, $\lambda\neq 0$满足(20)可知 λ 是 L_ω 的特征值. 若 $\lambda=0$, 满足(20), 则 $\omega=1$, 可知 $\det(L_\omega)=0$, 因此 $\lambda=0$ 是 L_ω 的特征值.

反之, 设 λ 是 L_ω 的特征值, 若 $\lambda=0$, 则 $\omega=1$, 因此, J 的任何一个特征值都满足(20); 若 $\lambda\neq 0$, 则存在 $\mu\in\lambda(J)$ 满足(20).

综上, 对于 J 的特征值 μ, 若 λ 满足(20), 则 λ 是 L_ω 的一个特征值, 反之, 若 λ 是 L_ω 的特征值, 则必存在 $\mu\in\lambda(J)$ 满足(20).

$\omega=1$, 依然有(20)成立, $\lambda=\mu^2$, 因此,

$$R(L_1)=-Ln(\rho(L_1))=-2Ln(\rho(J))=R(J).$$

(2) 设 μ 是 J 的一个特征值, 则方程(20)的两个根可写成:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(\omega|\mu| + (\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4)^{\frac{1}{2}})^2,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(\omega|\mu| - (\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4)^{\frac{1}{2}})^2.$$

若 $\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4 < 0$, 则 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\omega - 1|$.
若 $\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4 \geq 0$, 则 λ_1, λ_2 是非负实根, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2$.
令 $\overline{\mu} = \rho(J) < 1$, 定义函数

$$\Gamma(\omega, \mu) = \frac{1}{4}|\omega|\mu| + (\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4)^{\frac{1}{2}}|^2,$$

显然, $\Gamma(\omega, \mu) = |\lambda_1| \geq |\lambda_2|$.

由 11 题有 $\rho(L_\omega) = \max\limits_{\mu \in \lambda(B)} \Gamma(\omega, \mu)$, 现证明 $\rho(L_\omega) = \Gamma(\omega, \overline{\mu})$.
若 $\omega^2\overline{\mu}^2 - 4\omega + 4 < 0$, 则 $\omega > 1$, 对 $|\mu| \geq \overline{\mu}$, 有

$$\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4 < 0,$$

从而对 $|\mu| \geq \overline{\mu}$, 有 $\Gamma(\omega, \mu) = \omega - 1 = \Gamma(\omega, \overline{\mu})$.
若 $\omega^2\overline{\mu}^2 - 4\omega + 4 \geq 0$. 令

$$\mu_c^2 = \begin{cases} \frac{4(\omega-1)}{\omega}, & 1 \leq \omega < 2; \\ 0, & 0 < \omega < 1. \end{cases}$$

若 $\mu^2 \leq \mu_c^2$, 则当 $\omega \geq 1$ 时, $\omega^2\overline{\mu}^2 - 4\omega + 4 \leq 0$, 因此

$$\Gamma(\omega, \mu) = \omega - 1 \leq \Gamma(\omega, \overline{\mu}),$$

当 $\omega < 1$ 时, $\mu = 0$, 因此

$$\Gamma(\omega, \mu) = 1 - \omega \leq \Gamma(\omega, \overline{\mu}).$$

若 $\mu_c^2 \leq \mu^2 \leq \overline{\mu}^2$, $\omega^2\overline{\mu}^2 - 4\omega + 4 \geq 0$, 易知 $\Gamma(\omega, \mu)$ 是 $|\mu|$ 的增函数.

综上, 对 $|\mu| \leq \overline{\mu}$, 有 $\Gamma(\omega, \mu) \leq \Gamma(\omega, \overline{\mu})$.
由于 J 的特征值全为实数, $\overline{\mu}$ 或 $-\overline{\mu}$ 是 J 的一个特征值, 则 $\overline{\mu}, \overline{\mu}$ 都是 J 的特征值, 因此

$$\rho(L_\omega) = \max_{\mu \in \lambda(J)} = \Gamma(\omega, \overline{\mu}).$$

通过求导可知函数 $4(\omega - 1)/\omega^2$ 是在区间 $(0, 2)$ 内的增函数, 由于 ω_b 是 ω 的二次方程

$$\omega^2 \overline{\mu}^2 - 4(\omega - 1) = 0$$

在区间 $(0, 2)$ 内的唯一一个根, 即有 $4(\omega_b - 1) = \overline{\mu}^2 \omega_b^2$,
因此,若 $\omega_b \leq \omega < 2$, 则

$$\overline{\mu}^2 \leq \frac{4(\omega - 1)}{\omega^2},$$

从而, $\rho(L_\omega) = \omega - 1$. 若 $0 < \omega_b \leq \omega$, 则

$$\overline{\mu}^2 \geq \frac{4(\omega - 1)}{\omega^2},$$

有 $\rho(L_\omega) = \frac{1}{4}(\omega \overline{\mu} + (\omega^2 \overline{\mu}^2 - 4\omega + 4)^{\frac{1}{2}})^2$.

当 $\omega_b \leq \omega < 2$ 时, 显然 $\rho(L_\omega)$ 是增函数, 当 $0 < \omega_b \leq \omega$ 时, $\omega^2 \overline{\mu}^2 - 4(\omega - 1) > 0$, 经求导验证, $\rho(L_\omega)$ 是减函数, 故 $\rho(L_\omega)$ 在 ω_b 处取最小值, 最小值为 $\omega_b - 1$. □

13.对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 给出对应的点迭代矩阵 $J, L_1, L_\omega, S_\omega$, 并确定对应的 SOR 迭代 L_ω 和 SSOR 迭代 S_ω 的最优松弛因子 ω, 然后比较它谱半径的大小.

解.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15

$$J = L + U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, L_1 = (I-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

$$L_\omega = (I-\omega L)^{-1}(\omega U+(1-\omega)I) = \begin{pmatrix} 1-\omega & \frac{1}{4}\omega & 0 \\ \frac{1}{4}\omega(1-\omega) & \frac{1}{16}\omega^2-\omega+1 & \frac{1}{4}\omega \\ \frac{1}{16}\omega^2(1-\omega) & \frac{1}{43}\omega^3+\frac{1}{4}(1-\omega)\omega & \frac{1}{16}\omega^2-\omega+1 \end{pmatrix}$$

$$U_\omega = (I-\omega U)^{-1}(\omega L+(1-\omega)I) = L_\omega^T, S_\omega = L_\omega U_\omega.$$

$$\rho(J) = 0.3536, \rho(L_1) = 0.125.$$

SOR 最佳松弛因子为 $\omega_{SOR} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}} = 1.0334, \rho(L_\omega) = 0.0334.$
经计算机验证, SSOR 最佳松弛因子为 $\omega_{SSOR} = 1.0717, \rho(L_\omega) = 0.0718.$
因而, $\rho(L_\omega) < \rho(S_\omega) < \rho(L_1) < \rho(L).$ □

14.设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, $b \in \mathbb{R}^n$, 若 x_k 为共轭梯度法产生的迭代序列, $\kappa = \kappa_2(A)$, 则

$$\| x_k - A^{-1}b \|_2 \le 2\sqrt{\kappa}(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1})^k \| x_0 - A^{-1}b \|_2 . \qquad (22)$$

证明. 设 λ_1, λ_n 分别为 A 的最大和最小特征值, 那么

$$\lambda_n \| x \|_2^2 = \lambda_n x^T x \le X^T A x = \| x \|_A^2 = x^T A x \le \lambda_1 x^T x, \forall x \in \mathbb{R}^n = \lambda_1 \| x \|_2^2 .$$

再由共轭梯度法的收敛速度 $\| x_k - A^{-1}b \|_A \le 2(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1})^k \| x_0 - A^{-1}b \|_A$,

$$\sqrt{\lambda_n} \| x_k - A^{-1}b \|_2 \le \| x_k - A^{-1}b \|_A \le 2(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1})^k \| x_0 - A^{-1}b \|_A \le 2\sqrt{\lambda_1}(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1})^k \| x_0 - A^{-1}b \|_2 .$$

于是, 利用$\kappa = \lambda_1/\lambda_n$, 即有所证不等式. □

15.证明：如果 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优的, 则 A 有 RILU 分解.
证明. 只要证明消去过程中产生的矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ 都是严格对角占优即可.
当 $k = 1$ 时, $A_1 = A$, 由条件知, A_1 是严格对角占优.

假设 A_k 是严格对角占优矩阵, 设 $A_k=\begin{pmatrix}A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)}\\ 0 & A_{22}^{(k)}\end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned}
|a_{ii}^{(k)}| &> \sum_{j=k,j\neq i}^{n}|a_{ij}^{(k)}| = \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}|a_{ij}^{(k)}|+|a_{ik}^{(k)}|, \quad i=k+1,k+2,\cdots,n,\\
|a_{kk}^{(k)}| &> \sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}^{(k)}| = \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}|a_{kj}^{(k)}|+|a_{ki}^{(k)}|, \quad i=k+1,k+2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

那么就有

$$\begin{aligned}
|a_{ii}^{(k)}-l_{ik}a_{ki}^{(k)}| \geq\ & |a_{ii}^{(k)}|-|\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}a_{ki}^{(k)}|\\
>\ & \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}|a_{ij}^{(k)}|+|a_{ik}^{(k)}|-|\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}|(|a_{kk}^{(k)}|-\sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}|a_{kj}^{(k)}|)\\
=\ & \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}|a_{ij}^{(k)}|+|\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}|\sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}|a_{kj}^{(k)}|\\
=\ & \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}(|a_{ij}^{(k)}|+|l_{ik}||a_{kj}^{(k)}|)\\
\geq\ & \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n}|a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)}|.
\end{aligned}$$

对于 A_{k+1} 而言, 其前 k 行与 A_k 一样, 只需证明 $A_{22}^{(k+1)}$ 严格对角占优即可. 由迭代公式, 有

$$a_{ij}^{(k+1)}\begin{cases}a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)}, & (i,j)\in T,\\ 0, & (i,j)\notin T, i\neq j,\\ a_{ii}^{(k)}-l_{ik}a_{ki}^{(k)}+\omega\sum_{p\in P(k,i)}(a_{ip}^{(k)}-l_{ik}a_{kp}^{(k)}), & i=j.\end{cases}$$

17

于是

$$
\begin{aligned}
|a_{ii}^{(k+1)}| = &\ |a_{ii}^{(k)} - l_{ik}a_{ki}^{(k)} + \omega \textstyle\sum_{p\in P(k,i)}(a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)})| \\
\geq &\ |a_{ii}^{(k)} - l_{ik}a_{ki}^{(k)}| - \omega \sum_{p\in P(k,i)} |a_{ip}^{(k)} - l_{ik}a_{kp}^{(k)}| \\
> &\ \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n} |a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}| - \sum_{j\in P(k,i)} |a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}| \\
= &\ \sum_{j=k+1,j\neq i}^{n} |a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}| - \sum_{j\in P(k,i)} |a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}| \\
= &\ \sum_{j=k+1,j\neq i,(i,j)\in T}^{n} |a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}| \\
= &\ \sum_{j=k+1,j\neq i} |a_{ij}^{(k+1)}|.
\end{aligned}
$$

因此, $A^{(k+1)}$ 是严格对角占优的, 所以 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, 故 A 有 RILU 分解. □

16.考虑系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的线性方程组 证明:

(1)共轭梯度法应用到此方程组上, 对任意初值至多迭代 3 次就可得到方程组的精确解;

(2)如果初始向量 x_0, 使得剩余向量 $r_0 = (1, 1, -2, 1)^T$, 则此时只需迭代一次就可得到方程组的精确解.

证明. (1)$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^2(\lambda^2 - 8\lambda - 2)$

取 $\overline{q}_3(\lambda) = \frac{1}{8}(\lambda - 4)(\lambda^2 - 8\lambda - 2)$, 满足 $\overline{q}_3(\lambda)|_{\lambda\in\lambda(A)} = 0$ 且 $\overline{q}_3(0) = 1$.

由共轭梯度法第 k 步产生的误差向量满足:

$$\| u_k \|_A \leq \min_{q_k\in P_k^{(0)}} \max_{\lambda\in\lambda(A)} |q_k(\lambda)| \| u_0 \|_A,$$

其中 $P_k^{(0)}$ 表示 $q_k(0) = 1$ 的次数不超过 k 的实系数多项式全体.

于是,

$$\| u_3 \|_A \leq \min_{q_3\in P_3^{(0)}} \max_{\lambda\in\lambda(A)} |q_3(\lambda)| \| u_0 \|_A \leq \max_{\lambda\in\lambda(A)} |q_3(\lambda)| \| u_0 \|_A = 0.$$

于是对任意初始向量至多迭代 3 次就可得到方程组的精确解.

(2)$p_0=-r_0$, $x_1=x_0+\alpha_0 p_0$, $\alpha_0=\frac{r_0^T r_0}{p_0^T A p_0}=0.25$, 则

$$Ax_1-b=Ax_0+\alpha_0 Ap_0-b=r_0+\alpha_0 Ap_0=0,$$

即迭代一次可得方程组的精确解. □

三、最小二乘问题(共三题)

17.假定 $x,r,\hat{x},\hat{r}$ 满足

$$\| Ax-b \|_2=\min, r=b-Ax,$$

$$\| (A+\delta A)\tilde{x}-(b+\delta b) \|_2=\min, \tilde{r}=(b+\delta b)-(A+\delta A)\tilde{x},$$

其中 $A,\delta A\in\mathbb{R}_n^{m\times n}$, 且 $m\ge n$, $0\ne b,\delta b\in\mathbb{R}^n$, 如果

$$\epsilon=\max\{\frac{\| \delta A \|_2}{\| A \|_2},\frac{\| \delta b \|_2}{\| b \|_2}\}<\frac{\sigma_{\min}(A)}{\sigma_{\max}(A)},\sin\theta=\frac{\rho_{LS}}{\| b \|_2}\ne 1,$$

其中 $\rho_{LS}=\| Ax_{LS}-b \|_2$, 则

$$\frac{\| \tilde{x}-x \|_2}{\| x \|_2}\ge\epsilon\{\frac{2\kappa_2(A)}{\cos(\theta)}+\tan\theta\kappa_2(A)^2\}+o(\epsilon^2),$$

其中 $\kappa_2(A)$ 表示 A 的谱条件数.

证明. 设 $E=\dfrac{1}{\epsilon}\delta A, f=\dfrac{1}{\epsilon}\delta b$, 由 $\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}<\dfrac{\sigma_{\min}(A)}{\sigma_{\max}(A)}, \|A\|=\sigma_{\max}(A)$,

得到 $\sigma_{\max}(\delta A)<\sigma_{\min}(A)$.

因为 $\|(A+\delta A)x\|\ge\|Ax\|-\|\delta Ax\|$, 就有

$$\sigma_{\min}(A+\delta A)=\min_{x\ne0}\frac{\|(A+\delta A)x\|}{\|x\|}\ge\min_{x\ne0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}-\max_{x\ne0}\frac{\|\delta Ax\|}{\|x\|}=\sigma_{\min}(A)-\sigma_{\max}(\delta A)>0.$$

因此, $\forall t\in[0,\epsilon], rank(A+tE)=n$. 于是

$$(A+tE)^T(A+tE)x(t)=(A+tE)^T(b+tf) \tag{23}$$

的解对任意 $t\in[0,\epsilon]$ 连续可微.

显然 $x(0)=x, x(\epsilon)=\tilde{x}$, 则 $\tilde{x}=x+x^{'}(0)+o(\epsilon^2)$.

由 $b \neq 0, \sin\theta = \frac{\rho_{LS}}{\|b\|} = \frac{\|Ax_{LS} - b\|}{\|b\|} \neq 1$, 有 $x \neq 0$.
因此,
$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = \frac{\|x^{'}(0)\|}{\|x\|} + o(\epsilon^2). \tag{24}$$
为了给出 $\|x^{'}(0)\|$ 的上界估计, 对 (23) 两边对 t 求导, 并令 $t = 0$, 有

$$E^T Ax + A^T Ex + A^T Ax^{'}(0) = A^T f + E^T b.$$

则

$$x^{'}(0) = (A^T A)^{-1} A^T (f - Ex) + (A^T A)^{-1} E^T (b - Ax) = (A^T A)^{-1} A^T (f - Ex) + (A^T A)^{-1} E^T r. \tag{25}$$

因为 $\epsilon \geq \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}, \epsilon \geq \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$, 有

$$\|E\| = \frac{1}{\epsilon}\|\delta A\| \leq \|A\|, \|f\| = \frac{1}{\epsilon}\|\delta b\| \leq \|b\|.$$

那么

$$\begin{aligned} \|x^{'}(0)\| &\leq \|(A^T A)^{-1} A^T\|(\|f\| + \|E\|\|x\|) + \|(A^T A)^{-1}\|\|E\|\|x\| \\ &\leq \|(A^T A)^{-1} A^T\|(\|b\| + \|A\|\|x\|) + \|(A^T A)^{-1}\|\|A\|\rho_{LS} \end{aligned}$$

故

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \epsilon(\|A\|\|(A^T A)^{-1} A^T\|(\frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|} + 1) + \|(A^T A)^{-1}\|\|A\|^2 \frac{\rho_{LS}}{\|A\|\|x\|}) + o(\epsilon^2).$$

由于 $A^T(Ax - b) = 0$ 则 $(Ax)^T(Ax - b) = 0$, 即 Ax 与 $Ax - b$ 正交.
于是 $\|b - Ax\|^2 + \|Ax\|^2 = \|b\|^2$, 因此 $\|A\|^2\|x\|^2 \geq \|Ax\|^2 = \|b\|^2 - \|b - Ax\|^2 = \|b\| - \rho_{LS}^2$.
由于 $\|A\|^2\|(A^T A)^{-1}\| = \kappa(A)^2, \|A\|^2\|(A^T A)^{-1} A^T\| = \kappa(A)$, 就有结论

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \epsilon(\kappa(A)(\frac{1}{\cos\theta} + 1) + \kappa(A)^2 \tan\theta) + o(\epsilon^2) < \epsilon(\frac{2\kappa(A)}{\cos\theta} + \tan\theta\kappa(A)^2) + o(\epsilon^2).$$

□

18.分别用正规化方法和 Householder 正交化方法求最小二乘问题的解, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

解:正规化方法:

(1)计算法方程 $A^Ax=A^Tb$,

$$C=A^TA=\begin{pmatrix}35&44\\44&56\end{pmatrix},A^Tb=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}.$$

(2)对 A^A 进行 Cholesky 分解 $C=GG^T$

$$G=\begin{pmatrix}\sqrt{35}&0\\44/\sqrt{35}&\sqrt{24}/\sqrt{35}\end{pmatrix}.$$

(3)求解下三角方程组 $Gy=b$ 和 $G^Tx=y$ 得 $y=(9/\sqrt{35},\sqrt{24}/\sqrt{35})^T$, $x=(-1,1)^T$.

Householder 正交化方法:

取 $v_1=(1,3,5)^T+\sqrt{1^2+3^2+5^2}(1,0,0)^T=(6.9161,3,5)^T,\beta_1=2/v_1^*v_1=0.0244$, 则 $H_1=I-\beta v_1v_1^T$.

$$H1[A,b]=\begin{pmatrix}-5.9161&-7.4374&-1.5213\\0&-0.0937&-0.0937\\0&-0.8228&-0.8228\end{pmatrix}$$

取 $v_2=(-0.0937,0.8228)^T-\sqrt{0.0937^2+0.8228^2}(1,0)^T=(-0.9217,-0.8228)^T,\beta_2=2/v_2^*v_2=1.3102$, 则 $\hat{H}_2=I-\beta v_2v_2^T$.

$$H_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&\hat{H}_2\end{pmatrix},H_2H_1[A,b]=\begin{pmatrix}-5.9161&-7.4374&-1.5213\\0&0.8281&0.8281\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

计算

$$\begin{pmatrix}-5.9161&-7.4374\\0&0.8281\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-1.5213\\0.8281\end{pmatrix}$$

21

得 $x=(-1,1)^T$. □

19.试给出 Givens 变换求解满秩 LS 问题的详细算法过程.

算法 1 Givens 变换求解满秩 LS 问题

输入: 矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^n$.

输出: $Ax=b$ 的 LS 解 x.

1: $A^{(1)}=A, k=1$;

2: $j=k+1$;

3: 确定 Givens 变换矩阵 $G(j,k,\theta)$, 使得
$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{kk}^{(k)} \\ a_{jk}^{(k)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma=\sqrt{(a_{kk}^{(k)})^2+(a_{jk}^{(k)})^2}.$$
$a_{kk}^{(k+1)}=\sigma, a_{jk}^{(k+1)}=0.$

4: $$\begin{pmatrix} a_{k,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{kn}^{(k+1)} \\ a_{j,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{jn}^{(k+1)} \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ a_{j,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{jn}^{(k)} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_k^{(k+1)} \\ b_j^{(k+1)} \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_k^{(k)} \\ b_j^{(k)} \end{pmatrix};$$

5: 如果 $j<m$, 则 $j=j+1$, 转步骤 3, 否则转步骤 6;

6: 如果 $k<n$, 则 $k=k+1$, 转步骤 2, 否则转步骤 7;

7: 求解上三角方程组 $\begin{pmatrix} a_{11}^{(k+1)} & \cdots & a_{1n}^{(k+1)} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn}^{(k+1)} \end{pmatrix}x=\begin{pmatrix} b_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$, 得 LS 解 x.

□

四、特征值问题(共七题)

20.试给出求解对称特征值问题的 Jacobi 方法, 子空间迭代方法, Givens 方法, 对称 QR 方法, Lanczos 方法的详细算法过程, 并简要指出它们的优点及存在的问题.

22

算法 2 求解对称特征值问题的 Jacobi 方法

输入: 矩阵 $A \in \mathbb{SR}^{n\times n}$, 阈值 σ.

输出: A 的所有特征值 λ.

1: $A^{(0)} = A, k = 1, p = 1$;

2: $q = p + 1$;

3: 如果 $|a_{pq}^{(k-1)}| < \sigma$, 转步骤 4, 否则转步骤 5;

4: $y = |a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}|$, $x = 2sign(a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)})a_{pq}^{(k-1)}$;

5: $c = (\frac{1}{2}(1 + y/\sqrt{x^2+y^2}))^{\frac{1}{2}}, s = \frac{x}{2c\sqrt{x^2+y^2}}$;

6: $a_{ip}^{(k)} = a_{pi}^{(k)} = ca_{ip}^{(k-1)} + sa_{iq}^{(k-1)}, i = 1, 2, \cdots, n, i \neq p, i \neq q$;
$a_{iq}^{(k)} = a_{qi}^{(k)} = -sa_{ip}^{(k-1)} + ca_{iq}^{(k-1)}, i = 1, 2, \cdots, n, i \neq p, i \neq q$;

7: $a_{pp}^{(k)} = c^2 a_{pp}^{(k-1)} + 2csa_{pq}^{(k-1)} + s^2 a_{qq}^{(k-1)}$;
$a_{qq}^{(k)} = s^2 a_{pp}^{(k-1)} + 2sca_{pq}^{(k-1)} + c^2 a_{qq}^{(k-1)}$;
$a_{pq}^{(k)} = a_{qq}^{(k)} = 0$;

8: 如果 $q < n$, 则 $q = q + 1$, $k = k + 1$, 转步骤 3, 否则转步骤 11;

9: 如果 $p < n - 1$, 则 $p = p + 1$, 转步骤 2, 否则转步骤12;

10: 如果 $\sigma < \epsilon$, 停止, 对角线元素为 A 的所有特征值, 否则 $\sigma = \sigma/10$, $p = 1$, 转步骤 2.

优点: 适合并行, 对于矩阵几乎是三对角时, Jacobi 方法求解高效, 对特征向量计算精确.

不足: 计算量大, 计算速度慢.

算法 3 子空间迭代方法

输入: 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, l 维子空间的一组标准正交基 Q_0 和迭代上限 M.

1: $Z_k = AQ_{k-1}$

2: $Q_k R_k = Z_k$(**QR**分解)

3: 若 $k < M$, 停止计算, 否则 $k = k + 1$, 转步骤1.

优点: 是乘幂法的推广, 可以求出特征值和不变子空间.

不足: 每次迭代都需要 QR 分解和矩阵乘, 计算量过大.

算法 4 对称 QR 方法

输入: 矩阵 $A \in \mathbb{SR}^{n\times n}$, 误差限 ϵ.

输出: A 的所有特征值 λ.

1: 三对角化 A;

计算 **Householder** 变换 $H_1, \cdots, H_{n-2}$, 使

$$(H_1, \cdots, H_{n-2})^T A(H_1, \cdots, H_{n-2}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

2: 收敛性检验;

(i) 将所有满足

$$|\beta_i| \le \epsilon(|a_i| + |a_{i+1}|)$$

的 β_i 置零;

(ii)如果 $\beta_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$, 则终止;

否则 $\beta_0 = 0$, 确定正整数 $p < q$, 使得,

$$\beta_{p-1} = 0, \beta_i \neq 0, i = p, p+1, \cdots, q,$$

$$\beta_{q+1} = \cdots = \beta_{n-1} = 0.$$

3: QR 迭代: 调用带 Wilkinson 位移的对称 QR 迭代算法,转步骤2.

优点: 计算得到的特征值相当精确, 误差不超过机器精度.

不足: 特征向量的计算不一定也有这样的精度.

算法 5 Lanczos

选择单位向量 q_1 **使得** $\|q_1\| = 1$**. 令** $\beta_1 = 0, v_0 = 0$
$\alpha_1 = q_1^T A q_1$,
For $i = 1, 2, \cdots, n-1$,
  $r_i = Aq_i - \alpha_i \beta_i - \beta_{i-1} q_{i-1} (\beta_0 q_0 = 0)$,
  $\beta_i = \|r_i\|$. **If** $\beta_i = 0$ **then Stop**
  $q_{i+1} = r_i / \beta_i$,
  $\alpha_{i+1} = q_{i+1}^T A q_{i+1}$.
endfor

优点: 保持原始矩阵 A 始终不变, 只涉及到 A 与向量乘积, 对于稀疏矩阵而言十分有利; 若 $|\beta_j|$ 很小, 则 T_j 的特征值都是 A 的特征值.

不足: 只针对对称矩阵并需要先对矩阵三对角化. □

21.证明: 若对 $H = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 进行单步位移 QR 迭代:

$$\begin{cases} H - zI = QR, \\ \hat{H} = RQ + zI. \end{cases}$$

则 $|\hat{h_{21}}| \le |y^2 x| / [(w-z)^2 + y^2]$.

证明. 设 $H - zI = \begin{pmatrix} w-z & x \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{cases} w - z = r_{11}\cos\theta, & (1) \\ x = r_{12}\cos\theta + r_{22}\sin\theta, & (2) \\ y = -r_{11}\sin\theta, & (3) \\ 0 = -r_{12}\sin\theta + r_{22}\cos\theta, & (4) \end{cases}$$

由(1)(3)知, $\tan\theta = \dfrac{y}{z-w}$, 由(2)(4)知, $r_{22} = x\sin\theta$.

再由 $\hat{H} = RQ + zI$, 有 $\hat{h}_{21} = r_{22}\sin\theta = x\sin^2\theta = \dfrac{x\tan^2\theta}{\tan^2\theta + 1} = \dfrac{xy^2}{y^2 + (w-z)^2}$.

因此, $|\hat{h_{21}}| \le |y^2 x| / [(w-z)^2 + y^2]$. □

22.证明: 若给定 $H=H_0$,且由

$$\begin{cases} H_k-\mu_k I=U_kR_k, \\ H_{k+1}=R_kU_k+\mu_k I. \end{cases}$$

产生的 $H_{k+1}, k=0,1,2\cdots$, 其中 μ_k 是常数, U_k 是正交矩阵, R_k 是上三角阵, 则

$$(U_0U_1\cdots U_j)(R_j\cdots R_0)=(H-\mu_j I)\cdots(H-\mu_0 I).$$

证明. 数学归纳法证明: 当 $j=0$ 时, 有 $U_0R_0=H_0-\mu_0I=H-\mu_0I$ 成立.
假设当 $j=k$ 时结论成立, 即 $(U_0U_1\cdots U_k)(R_k\cdots R_0)=(H-\mu_kI)\cdots(H-\mu_0I)$.
当 $j=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
& (H-\mu_{k+1}I)(H-\mu_kI)\cdots(H-\mu_0I) \\
= & (H_0-\mu_{k+1}I)(U_0U_1\cdots U_k)(R_k\cdots R_0) \\
= & (U_0R_0+\mu_0I-\mu_{k+1}I)(U_0U_1\cdots U_k)(R_k\cdots R_0) \\
= & U_0(R_0U_0+\mu_0I-\mu_{k+1}I)(U_1\cdots U_k)(R_k\cdots R_0) \\
= & U_0(H_1-\mu_{k+1}I)(U_1\cdots U_k)(R_k\cdots R_0) \\
= & \cdots \\
= & U_0U_1\cdots U_{k-1}(H_k-\mu_{k+1}I)U_k(R_k\cdots R_0) \\
= & U_0U_1\cdots U_{k-1}(U_kR_k+\mu_kI-\mu_{k+1}I)U_k(R_k\cdots R_0) \\
= & U_0U_1\cdots U_{k-1}U_k(H_{k+1}-\mu_{k+1}I)(R_k\cdots R_0) \\
= & U_0U_1\cdots U_{k-1}U_kU_{k+1}R_{k+1}R_k\cdots R_0.
\end{aligned}$$

□

23.用带 Wilkinson 位移的隐式对称 QR 方法计算矩阵
$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.01 & 4 \end{pmatrix}$ 一个特征值及其相应的特征向量, 其误差 $\leq C10^{-6}$.

解.
$\delta=\frac{1}{2}(\alpha_3-\alpha_4)=-\frac{1}{2}$,
$\mu=\alpha_4-\dfrac{\beta_3^2}{\delta+sign\delta\cdot\sqrt{\delta^2+\beta_3^2}}=4.00009999.$

26

$x=\alpha_1=\alpha_1-\mu=-3.00009999.y=\beta_1=1.$
$G_1=G(1,2,\theta), s=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-0.31621828, c=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.948686459, \sigma=3.162372519.$

$$G_1^TAG_1=\begin{pmatrix} -0.50001 & 0.50002000 & -0.31621828 & 0 \\ 0.50002000 & 2.49998998 & 0.94868646 & 0 \\ -0.31621828 & 0.94868646 & 3 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.01 & 4 \end{pmatrix}.$$

$G_2=G(2,3,\theta_2), G_3=G(3,4,\theta_3).$

$$G_3^TG_2^TG_1^TAG_1G_2G_3=\begin{pmatrix} -0.5000 & 0.5916 & 0 & 0 \\ 0.5916 & 1.785 & 0.1808 & 0 \\ 0 & 0.1808 & 3.714 & 0.0000044 \\ 0 & 0 & 0.0000044 & 4.002497 \end{pmatrix}$$

近似的有 $\lambda=4.0002497$,
反乘幂法做一次迭代, 取 $z=(1,1,1,1)^T$ 解 $(A-\lambda I)x=z$
得 $v_1=(-37.845372,-10.36306145,-15.96746232,-464.42716188)^T$. □

24.证明实 Schur 分解: 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则存在正交矩阵 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得:

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{mm} \end{pmatrix},$$

其中 R_{ii} 或者是一个单元素, 或者是一个具有一对复共轭特征值的二阶矩阵.
证明.首先证明引理, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}, B\in\mathbb{R}^{p\times p}$, 若存在列满秩矩阵 $X\in\mathbb{R}^{n\times p}$ 使得 $AX=XB$, 则存在正交矩阵 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $Q^TAQ=T=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \end{array}$, 且 $\lambda(T_{11})=\lambda(A)\cap\lambda(B)$.
设 $X=Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $R\in\mathbb{R}^{p\times p}$ 是 X 的一个 QR 分解, 由与 X 列满秩, 因此

27

R 非奇异.

记 $Q^TAQ=T=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$, 由 $AX=XB$, 有 $Q^TAQ\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}=Q^TQ\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}B$,

即 $\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}B$, 于是 $T_{11}R=RB$, $T_{21}R=0$.

由于 R 非奇异, $T_{11}=RBR^{-1}$, $T_{21}=0$, 则 $\lambda(T_{11})=\lambda(B)$, $Q^TAQ=\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ 0 & T_{22}\end{pmatrix}$.

于是 $\lambda(A)=\lambda(T_{11})\cup\lambda(B)$, 故 $\lambda(T_{11})=\lambda(A)\cap\lambda(B)$.

下面证明原定理.

由于 A 的实矩阵, 其特征多项式是实系数多项式, 因此, 如有复根, 就共轭成对存在. 设 k 为共轭复根的对数, 用数学归纳法进行证明.

当 $k=0$ 时, 设 λ 为 A 的特征值, 则 $(\lambda I-A)x=0$ 的解可以是实向量, 因此, 存在正交阵 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使结论成立.

假设 $k=n$ 成立. 当 $k=n+1$ 时, 若 $\lambda=r+is\in\lambda(A), s\neq 0$, 那么存在 $y,z\in\mathbb{R}^n$, 使得 $A(y+iz)=(r+is)(y+iz)$, 即 $A[y,z]=[y,z]\begin{pmatrix}r & s\\ -s & r\end{pmatrix}$.

由 $s\neq 0$, 知 y 和 z 张成 A 的一个不变子空间.

由引理知, 存在正交矩阵 $U\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $U^TAU=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}R_{11} & T_{12}\\ 0 & T_{22}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}2\\ n-2\end{array}$, 且 $\lambda(R_{11})=\{\lambda,\bar{\lambda}\}$.

由归纳假设存在正交矩阵 $\tilde{U}\in\mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$, 使得

$$\tilde{U}^TT_{22}\tilde{U}=\begin{pmatrix}R_{22} & R_{23} & \cdots & R_{2m}\\ 0 & R_{33} & \cdots & R_{3m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & R_{mm}\end{pmatrix},$$

其中 R_{ii} 或者是一个单元素, 或者是一个具有一对复共轭特征值的二阶矩阵.

令 $Q = U\,\mathrm{diag}\,(I_2, \tilde{U})$, 则

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{mm} \end{pmatrix}.$$

□

25.设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称矩阵, $q_1 \in \mathbb{R}^n$ 的 2-范数为 1, 则 Lanczos 迭代可以执行到 $j = m$, 此处 $m = rank(q_1, Aq_1, \cdots, A^{n-1}q_1)$, 且对于 $j = 1, 2, \cdots, m$, 有 $AQ_j = Q_jT_j + r_je_j^T$, 其中

$$T_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{j-1} \\ 0 & \cdots & \beta_{j-1} & \alpha_j \end{pmatrix}$$

和 $Q_j = (q_1, \cdots, q_j)$, 它是列正交的, 且 $R(Q_j) = \kappa(A, q_1, j)$.

证明.由 Lanczos 迭代过程,$\alpha_1 = q_1^T Aq_1$,

$$\begin{cases} r_j = Aq_j - \alpha_jq_j - \beta_{j-1}q_{j-1}(\beta_0q_0 = 0), \\ \beta_j =\| r_j \|_2, \\ q_{j+1} = r_j/\beta_j(\beta_j \neq 0), \\ \alpha_{j+1} = q_{j+1}^T Aq_{j+1}, \end{cases} , j = 1, 2, \cdots, m-1.$$

进行到第 j 步时, 有 $Aq_i = \beta_{i-1}q_{i-1} + \alpha_iq_i + \beta_iq_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, j-1$, 其中 $\beta_0q_0 = 0$,
$Aq_j = \beta_{i-j}q_{j-1} + \alpha_jq_j + (Aq_j - \beta_{i-j}q_{j-1} - \alpha_jq_j) = \beta_{i-j}q_{j-1} + \alpha_jq_j + r_j$,
即 $AQ_j = Q_jT_j + r_je_j^T$.
由P309定理1.1, 有: $\beta_j \neq 0$, $R(Q_j) = \kappa(A, q_1, j)$, $j = 1, 2, \cdots, m-1$, $Q_j^TQ_j = I_k$. □

26.写出 Arnoldi 算法过程, 并证明 Arnoldi 向量是正交的.

算法 6 Arnoldi 算法

输入: 非奇异矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 右端项 b, 初始向量 x_0.
输出: 方程组 $Ax=b$ 的解 x.

1: $r_0 = b - Ax_0$, $q_1 = r_0 / \parallel r_0 \parallel_2$, $j=1$;
2: $h_{ij} = q_i^T A q_j, i = 1, 2, \cdots, j,$

$$\hat{q}_{j+1} = Aq_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij} q_j,$$

$h_{j+1,j} = \parallel \hat{q}_{j+1} \parallel_2,$

3: 如果 $h_{j+1,j} = 0$, 则转步骤 **5**, 否则 $q_{j+1} = \hat{q}_{j+1}/h_{j+1,j}$, $j = j+1$, 转步骤 **3**;
4: 求解 $H_j y_j = \parallel r_0 \parallel_2 e_1$ 得 y_j, $x = x_0 + Q_j y_j$, 输出 x_j.

下面用数学归纳法证明: q_j 标准正交.

$j=1$时, $\parallel q_1 \parallel_2 = 1$, 成立. 假设 $j \le k$ 时, 成立, 即 $q_s^T q_t = \delta_{st} = \begin{cases} 1, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}, s, t \le k.$

$j = k+1$时, 对于 $t \le k$ 有

$$\begin{aligned}
q_t^T q_{k+1} = {} & h_{k+1,k}^{-1} q_t^T (Aq_k - \sum_{i=1}^{k} h_{ik} q_i) \\
= {} & h_{k+1,k}^{-1} q_t^T (Aq_k - \sum_{i=1}^{k} h_{ik} q_i) \\
= {} & h_{k+1,k}^{-1} (q_t^T A q_k - \sum_{i=1}^{k} h_{ik} q_t^T q_i) \\
= {} & h_{k+1,k}^{-1} (q_t^T A q_k - h_{tk} q_t^T q_t) \\
= {} & h_{k+1,k}^{-1} (q_t^T A q_k - h_{tk}) \\
= {} & h_{k+1,k}^{-1} (q_t^T A q_k - q_t^T A q_k) \\
= {} & 0
\end{aligned}$$

$$\parallel q_{k+1} \parallel_2 = \parallel \hat{q}_{k+1} \parallel_2 / h_{k+1,k} = \parallel \hat{q}_{k+1} \parallel_2 / \parallel \hat{q}_{k+1} \parallel_2 = 1.$$

因此, q_j 标准正交. □

Chapter 5

有限元

5.1 有限元知识点总结

有限元方法
(重点选摘，详细内容见笔记)

• 关于几何剖分与分片插值：

三角形剖分：$N_0 : N_1 : N_2$ (三角形剖分)

对于三角形 $K=Q_1Q_2Q_3$ 及其内点 $Q=(x,y)$，则：

$$\begin{cases} \lambda_1 = N_1(x,y) = \dfrac{\Delta QQ_2Q_3}{\Delta K} \\ \lambda_2 = N_2(x,y) = \dfrac{\Delta Q_1QQ_3}{\Delta K} \\ \lambda_3 = N_3(x,y) = \dfrac{\Delta Q_1Q_2Q}{\Delta K} \end{cases}$$

且有：

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ x = x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+x_3\lambda_3 \\ y = y_1\lambda_1+y_2\lambda_2+y_3\lambda_3 \end{cases}$$

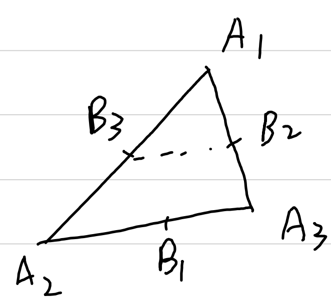
易见：(x,y) 和 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 是一一对应的。

在面积坐标下，三角形上的线性插值基函数具有最简单表达：

$$\begin{cases} N_1 = \lambda_1 \\ N_2 = \lambda_2 \\ N_3 = \lambda_3 \end{cases} \qquad I_1 = \sum_{i=1}^{3} f(Q_i)\lambda_i$$

基础三角形 Lagrange 型单元

· 三角形二次单元



$$\begin{cases} N_1 = \lambda_1(2\lambda_1-1) \\ N_2 = \lambda_2(2\lambda_2-1) \\ N_3 = \lambda_3(2\lambda_3-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = 4\lambda_2\lambda_3 \\ M_2 = 4\lambda_3\lambda_1 \\ M_3 = 4\lambda_1\lambda_2 \end{cases} \qquad I_2 f(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\left[f(A_i)N_i(x,y) + f(B_i)M_i(x,y)\right]$$

三角形二次单元有：

- 唯一可解性
- 整体连续性
- 插值逼近度
- 总体自由度 $N_0+N_1 \approx 4N_0$

三角形高次单元

$$P_k(x,y)=\alpha_1\lambda_1^k+\alpha_2\lambda_2^k+\alpha_3\lambda_3^k+\alpha_4\lambda_1^{k-1}\lambda_2+\cdots+\alpha_{n_k}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^{k-2}.$$

其中 $n_k=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ 为K上k次多项式空间基函数的个数.

$$\begin{cases} N_1=\frac{1}{2}\lambda_1(3\lambda_1-1)(3\lambda_1-2) \\ N_2=\frac{1}{2}\lambda_2(3\lambda_2-1)(3\lambda_2-2) \\ N_3=\frac{1}{2}\lambda_3(3\lambda_3-1)(3\lambda_3-2) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} M_1=\frac{9}{2}\lambda_2\lambda_3(3\lambda_2-1), & M_2=\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_3(3\lambda_3-1) \\ M=\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1-1), & M_4=\frac{9}{2}\lambda_2\lambda_3(3\lambda_3-1) \\ M_5=\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_3(3\lambda_1-1), & M_6=\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2(3\lambda_2-1) \end{cases}$$

$M_0=27\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$

三角形 Hermite 型单元

从总体自由度的角度看，增加单元边上的自由度不合算，应尽力增加顶点的自由度.

求插值函数：

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases} H_3 f(A_i) = f(A_i) \\ \frac{\partial}{\partial x} H_3 f(A_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(A_i), \quad i=1,2,3 \\ \frac{\partial}{\partial y} H_3 f(A_i) = \frac{\partial f}{\partial y}(A_i). \end{cases} \\ H_3 f(C) = f(C) \end{array}\right\}$$ 时 λ_i, $i=1,2,3$.

嵌入定理与迹定理

定理1. 若 $k>l$，则 Sobolev 空间 $H^k(\Omega)$ 紧嵌入于 Sobolev 空间 $H^l(\Omega)$，$H^k(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} H^l(\Omega)$.

该定理的三层意思 $\begin{cases} ① 恒同算子 \\ ② 有界算子 \\ ③ 紧算子 \end{cases}$

定理2. 若 $k>\frac{n}{2}$，则 $H^k(\Omega)$ 紧嵌入于 $C(\bar{\Omega})$，$H^k(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\bar{\Omega})$.

由定理知存在常数 M：$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \le M\|u\|_{k,\Omega}$.

这里 $H^k(\Omega)$ 嵌入 $C(\bar{\Omega})$ 的意义是：

一个平方可积函数若具有直到 k 阶的广义导数，那么它可以修改这个函数在零测度集上的值，使之成为 $\bar{\Omega}$ 上的连续函数。

也即：它与一个连续函数几乎处处相等。

定理3. 若有非负整数 l 满足 $k-l>\frac{n}{2}$，则 $H^k(\Omega)$ 紧嵌入 $C^l(\bar{\Omega})$：

$$H^k(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^l(\bar{\Omega}).$$

由定理知存在常数 M 使得 $\|u\|_{C^l(\bar{\Omega})} \le M\|u\|_{k,\Omega}$.

该定理表明：虽然 $H^k(\Omega)$ 中的函数不可能都有 k 阶连续导数，但它们都有 $l<k-\frac{n}{2}$ 阶的连续导数.

例如：当 $n=1$ 时，$H^1(\Omega)$ 紧嵌入于 $C(\bar{\Omega})$，但当 $n=2,3$ 时，$H^2(\Omega)$ 紧嵌入于 $C(\bar{\Omega})$，而 $H^1(\Omega)$ 却不能嵌入到 $C(\bar{\Omega})$.

定理：（迹定理）

若 τ：$\tau u = u\big|_{\partial\Omega}$ 为空间 $C^k(\bar{\Omega})$ $(k\ge 1)$ 上的线性算子且定义：$\|\tau u\|_{k-1,\partial\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{k-1}\int_{\partial\Omega}|D^\alpha u|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$.

则存在只依赖于 Ω 的常数 C，使得 $\|\tau u\|_{k-1,\partial\Omega} \le C\|u\|_{k,\Omega}$

定理：（等价模定理）

若 $H^k(\Omega)$，$k\ge 1$，上的有界线性泛函 $l_1,\cdots,l_M$ 对于次数不高于 $k-1$ 次的任何非零多项式不同时为零，则范数 $|u|_k + \sum_{i=1}^{M}|l_i(u)|$ 与范数 $\|u\|_k$ 等价，即存在正常数 α 与 β，使得对一切 $u\in H^k(\Omega)$，有：

$$\alpha\|u\|_k \le |u|_k + \sum_{i=1}^{M}|l_i(u)| \le \beta\|u\|_k.$$

由该定理可推出如下面公式：

(1) Poincaré 不等式. $\|u\|_{1,\Omega} \le C\left(|u|_{1,\Omega} + \left|\int_\Omega u\,dx\right|\right)$

(2) Friedrichs 不等式

若 $u\in H^1(\Omega)$，则存在常数 C，使得

$$\|u\|_{1,\Omega} \le C\left(|u|_{1,\Omega} + \left|\int_{\partial\Omega} u\,ds\right|\right)$$

特别当 $u \in H_0^1(\Omega)$ 时，$\|u\|_{1,\Omega} \le C|u|_{1,\Omega}$.

、协调元的误差分析

· Lax-Milgram 定理

设 H 是 Hilbert 空间，$B(u,v)$ 是 H 上的双线性泛函，且满足

$$|B(u,v)| \le M\|u\|\|v\|,$$ （连续性，有界性）

$$B(u,v) \ge \gamma\|v\|^2.$$ （V-椭圆性，强制性）

其中 M，γ 为常数，又 $F(v)$ 是 H 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $u \in H$，使得 $B(u,v)=F(v)$，$\forall v \in H$ 成立，且有估计：

$$\|u\| \le \frac{1}{\gamma}\|F\|.$$

能量模估计．

若 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$，且插值算子 Π．

$$H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega) \to S_h$$

保持 $\Pi P_k = P_k$，$\forall P_k \in \mathcal{P}_k$，其中 $\mathcal{P}_k$ 是次数不高于 k 的多项式全体，则：

$$\|u-u_h\|_a \le Ch^k\|u\|_{k+1,\Omega}, \quad k \ge 1.$$

注：作业题详见"有限元作业.pdf".