有限元笔记整理

2021 年 8 月 9 日

Contents

1 预备知识 **4**
1.1 历史回顾 4
1.2 有限元初探 4
1.3 误差分析 6

2 变分原理 **7**
2.1 可微二次凸泛函的极小化问题 8
2.2 Gâteaux 导数 10
2.3 Lax-Milgram 定理 11

3 Sobolev 空间 **12**
3.1 Lebesgue 积分 12
3.2 常用不等式 13
3.3 广义导数 (弱导数) 13
3.4 Sobolev 空间 14
3.5 嵌入定理 16
3.6 迹定理 19
3.7 Sobolev 空间的 Green 公式 24
3.8 等价模定理 24

4 椭圆型方程边值问题 **28**
4.1 Dirichlét 问题与 Neumann 问题 28
4.2 线弹性边值问题 33
4.3 变分不等式 34
4.3.1 障碍问题 34

4.3.2 Signorini 问题 . . . 35
4.4 四阶椭圆边值问题 . . . 36

5 有限元离散 39
5.1 有限元离散基本特性 . . . 39
5.2 三角形单元 . . . 42
5.2.1 三角形上的线性有限元 . . . 42
5.2.2 线性有限元整体计算 . . . 45
5.2.3 二次三角形 Lagrange 元 . . . 46
5.2.4 三次 Lagrange 元 . . . 47
5.2.5 受限制的三次 Lagrange 元 . . . 48
5.2.6 完全三次 Hermite 元 . . . 49
5.2.7 不完全三次 Hermite 元 (Zienkiewcz 元) . . . 51
5.3 矩形单元 . . . 52
5.3.1 双线性矩形单元 . . . 52
5.3.2 双二次矩形元 . . . 52
5.4 四阶问题的协调有限元 . . . 53
5.4.1 Argyris 三角形元 . . . 53
5.4.2 Bell 三角形元 (受限制 Argyris 元) . . . 54

6 协调有限元的误差分析 55
6.1 一般方法 . . . 55
6.2 一般情形的误差估计 . . . 60
6.2.1 有限元的仿射等价性 . . . 60
6.2.2 一般半范数之间的关系 . . . 62
6.2.3 T 上的一般插值误差估计 . . . 63
6.2.4 低阶模估计 . . . 64
6.2.5 非光滑解的收敛性 . . . 65
6.2.6 有限元空间的逆不等式 . . . 67
6.2.7 有限元的 L^∞ 估计 . . . 68

7 非协调有限元方法 69
7.1 抽象误差估计 . . . 69
7.2 二阶非协调有限元 . . . 71
7.2.1 Crouzeix-Raviart 元 (1973) . . . 72
7.2.2 Rannacher-Turek 非协调元 (1992) . . . 76
7.2.3 Wilson 矩形元 . . . 76
7.3 四阶问题的非协调有限元 . . . 79

7.3.1 Adini 元 80

Reference **85**

1 预备知识

本课程所用的教材 –《有限元方法的数学基础》, 王烈衡、许学军著。

1.1 历史回顾

Courant [1] 于 1943 年提出在三角形网格上用逐片线性函数逼近 Dirichlet 问题, 这是有限元最初的思想.

1955 年, J.H.Argyris 发表 Energy theorems and structural analysis.

1960 年, Clough [2] 有限元的名字由此而来.

1965 年, 冯康先生发表文章《基于变分原理的差分格式》，独立与西方创立了有限元方法，理论分析用到 Sobolev 空间的知识.

1968 年, Zlamal 证明了有限元的收敛性.

冯康先生把有限元归结为十六字: 裁弯取直, 化整为零, 以简驭繁, 化难为易.

学习这门课的基础知识有: PDE, 泛函, 数值逼近, Sobolev 空间.

1.2 有限元初探

考虑一维两点边值问题

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t), \text{in } (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

检验函数空间 $V = \{v \in C^1(\Omega), v(0) = 0\}$, 注意到 C^1 并不是完备的, 因为在无穷范数下考虑 $f_n(x) = \sqrt{(1/n^2) + x^2}$, 该函数列是柯西列, 但 $f_n(x) \to f(x) = |x|$ 的一阶导数并不连续, 因为在 $x = 0$ 处不可导. 对方程 (1.1) 两端同时乘以 $v \in V$ 并在 $(0,1)$ 上积分, 利用分部积分有, $\forall v \in V$

$$\int_0^1 -u''(t)v(t)dt = -u'(t)v(t)|_0^1 + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt = \int_0^1 u'(t)v'(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt$$

即求 $u(t) \in V$ 满足

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt, \forall v \in V \tag{1.2}$$

问题 (1.2) 是问题 (1.1) 的变分问题.

Theorem 1.1. *假设 $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^0(\Omega)$, 则 (1.2)$\Leftrightarrow$ (1.1)*

Proof. 只需证 (1.2)$\Rightarrow$ (1.1). 设 $u \in C^2(\Omega)$ 满足 (1.2), 则有

$$\int_0^1 (u''(t) + f(t))v(t)dt = 0, \forall v \in V$$

于是有 $u''(t)+f(t)\equiv 0$. 若不然, 设 $w(t)=u''(t)+f(t)\in C^0(\Omega)$, 则存在 $t\in(0,1)$ 使得 $w(t)\neq 0$, 不妨设 $w(t)>0$. 因为 $w(t)\in C^0(\Omega)$, 于是存在区间 $(a,b)\subseteq(0,1)$, 使得 $w(t)>0, t\in(a,b)$. 取

$$v(t)=\begin{cases}(t-a)^2(t-b)^2, & t\in(a,b)\\ 0, & others\end{cases}\in V$$

于是有

$$\int_0^1 w(t)v(t)dt=\int_a^b w(t)v(t)dt>0$$

与 (1.2) 矛盾, 故 (1.1) 方程满足.

下面验证边界条件: 由于 $u\in V$, 于是有 $u(0)=0$; 取 $v(x)=x$, 由于 $v(1)\neq 0$, 再由前面分部积分的计算公式知, $u'(1)=0$. □

令

$$a(u,v)=\int_0^1 u'(t)v'(t)dt, f(v)=\langle f,v\rangle=\int_0^1 f(t)v(t)dt$$

则变分问题等价于, 求 $u\in V$

$$a(u,v)=f(v),\forall v\in V \tag{1.3}$$

有限元方法的思想是用有限维空间 $V_h\subseteq V$, $\dim(V_h)=N$, 去替代原问题中的函数空间 V.

设 V_h 的一组基函数 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$, 变分问题 Galerkin 逼近是求 $u_h\in V_h$ 使得

$$a(u_h,v_h)=f(v_h),\forall v_h\in V_h \tag{1.4}$$

设 $u_h=\sum\limits_{i=1}^N u_i\phi_i$. 由 (1.4) 有

$$\sum_{i=1}^N u_i a(\phi_i,\phi_j)=a\left(\sum_{i=1}^N u_i\phi_i,\phi_j\right)=(f,\phi_j), j=1,2,\cdots,N$$

记 $U=(u_1,\cdots,u_N)^T$, $K=(a(\phi_i,\phi_j))$, $F=((f,\phi_1),\cdots,(f,\phi_N))^T$, 于是原线性方程组可写成矩阵形式

$$KU=F \tag{1.5}$$

Theorem 1.2. *(1.5) 存在唯一解.*

Proof. 由高等代数的知识知, 我们只需证 $KU=0$ 只有零解. 用反证法来证明, 假设有非零解 $u=(u_1,\cdots,u_N)^T$ 使得 $Ku=0$, 即

$$\sum_{i=1}^N u_i a(\phi_i,\phi_j)=0$$

令 $v=\sum\limits_{i=1}^{N}u_i\phi_i$, 则有

$$a(v,v)=0\Leftrightarrow\int_0^1|v'(t)|^2dt=0\Leftrightarrow v'(t)\equiv 0\Leftrightarrow v(t)\equiv const.$$

又因为 $v(0)=0$, 所以有 $v(t)\equiv 0,\forall t$. 又因为 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ 线性无关, 因此有 $(u_1,\cdots,u_N)^T=0$. 与非零解的选取矛盾. □

Example 1.1. 以两点边值 *ODE* 为例构造一维有限元. 考虑 $V=\{v\in C^1(\Omega),v(0)=0\}$. V_h 是 *Weierstrass* 多项式逼近.

基函数 $\{\phi_i\}$ 选取技巧: ① 保证矩阵 K 稀疏, $supp\{\phi_i\}$ 尽可能小, 比如选取小波基. ② 计算简单. ③ 精度高.

网格剖分: 对 $(0,1)$ 进行剖分, $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=1$, 网格尺寸 $h_i=t_i-t_{i-1}$.

取基函数

$$\phi_i=\begin{cases}\frac{t-t_{i-1}}{h_i}, & t\in(t_{i-1},t_i)\\ \frac{t_{i+1}-t_i}{h_{i+1}}, & t\in(t_i,t_{i+1})\\ 0, & others\end{cases}$$

$$\phi_0(t)=\begin{cases}\frac{t_1-t}{h_1}, & t\in(0,t_1)\\ 0, & others\end{cases},\phi_N=\begin{cases}\frac{t-t_{N-1}}{h_N}, & t\in(t_{N-1},t_N)\\ 0, & others\end{cases}$$

则 $\phi_i(t_i)=1$, $\phi_i(t_j)=0,j\neq i$. 且 $\phi_i\notin C^1$, 因此 $V_h\not\subseteq V$. 后面要把它完备化成 *Sobolev* 空间.

$$K_{ij}=a(\phi_i,\phi_j)=\int_0^1\phi_i'(t)\phi_j'(t)dt=\begin{cases}0, & |i-j|>1\\ \frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}, & i=j\\ -\frac{1}{h_i}, & i=j+1\\ -\frac{1}{h_{i+1}}, & i=j-1\end{cases}$$

1.3 误差分析

考虑 $e(t)=u(t)-u_h(t)$, $u_h(t)=\sum\limits_{i=1}^{N}u_i\phi_i(t)$, 有

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|^2=&\|e\|^2:=a(e,e)=\int_0^1|e'(t)|^2dt=a(u-u_h,u-u_h)\\ =&a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h-u_h)\\ =&a(u-u_h,u-v_h)+a(u,v_h-u_h)-a(u_h,v_h-u_h)\\ =&a(u-u_h,u-v_h)+(f,v_h-u_h)-(f,v_h-u_h)=a(u-u_h,u-v_h)\\ \leqslant&\|u-u_h\|\|u-v_h\|\end{aligned}$$

这里用到了 (1.3) 和 (1.4). 因此有 $\|u-u_h\| \leqslant \|u-v_h\|$. 取 $v_h = I_h u$ 是 u 的分段线性 Lagrange 插值, 有 $I_h u(t_i) = u(t_i), i = 0, \cdots, N$, 此时插值误差

$$
\begin{aligned}
\|e\|^2 \leqslant & \|u - I_h u\|^2 = \int_0^1 |(u - I_h u)'|^2(t)dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(t) - (I_h u)'(t)|^2 dt \\
:= & \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |w'(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |w'(t) - w'(\xi_i)|^2 dt \\
= & \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{\xi_i}^t |w''(\eta)| d\eta \right)^2 dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{\xi_i}^t |u''(\eta)| d\eta \right)^2 dt, \text{由于} (I_h u)'' = 0 \\
\leqslant & \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)| d\eta \right)^2 dt = \sum_{i=1}^N h_i \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)| d\eta \right)^2 \\
\leqslant & \sum_{i=1}^N h_i \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)|^2 d\eta \right) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} 1^2 d\eta \right) = \sum_{i=1}^N h_i^2 \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |u''(\eta)|^2 d\eta \right) \\
= & \sum_{i=1}^N h_i^2 \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |f|^2 d\eta \right) \leqslant h^2 \int_0^1 |f(\eta)|^2 d\eta = O(h^2)
\end{aligned}
$$

其中 $h = \max\limits_i h_i$. 这里用到了 Rolle 定理, 由于 $w(t_i) = 0, i = 0, \cdots, N$, 因此在每个区间 $(t_i, t_{i+1}), i = 0, \cdots, N-1$ 上, 都会存在 $\xi_i, i = 0, \cdots, N-1$, 使得 $w'(\xi_i) = 0$. 所以我们得到结论 $\|e\| \leqslant Ch$, 一阶收敛性.

前面的内容中, $V = \{v \in C^1(\Omega), v(0) = 0\}$ 实际上是不完备的, 后面会引入 Sobolev 空间, 这是需要改进的. 我们还要证明变分问题与原问题等价.

2 变分原理

考虑抽象的变分问题, 约定如下记号:

- V: 赋范向量空间, 范数记为 $\|\cdot\|$,
- $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ 双线性型, 即 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{cases}
a(\alpha_1, u_1 + \alpha_2, u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v), & \forall u_1, u_2, v \in V \\
a(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 a(u, v_1) + \beta_2 a(u, v_2), & \forall u, v_1, v_2 \in V
\end{cases}
$$

- 称双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 如果存在 $M = const > 0$, 使得

$$
|a(u,v)| \leqslant M \|u\| \|v\|
$$

- $\ell : V \to \mathbb{R}$ 连续 (有界) 线性泛函, 或记作 $\ell \in V'$, 其中 V' 是 V 的对偶空间, 对偶积记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- $K : K \subseteq V$ 非空子集.

2.1 可微二次凸泛函的极小化问题

考虑二次泛函极小化问题:

$$\begin{cases} 求 u \in K \\ J(u) \leqslant J(v), \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

求 $u \in K$ 满足 $J(u) \leqslant J(v), \forall v \in K$. 其中 $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \ell, v\rangle$. 通常 $\langle \ell, v\rangle$ 也记为 $\ell(v)$.

Theorem 2.1. *假定有以下四条成立:*
① V *是 Banach 空间;*
② $K \subseteq V$ *是非空闭凸子集;*
③ $a(\cdot,\cdot)$ *是连续对称双线性型;*
④ *存在* α*=const>0, 使得* $\alpha\|v\|^2 \leqslant a(v,v), \forall v \in V$.
则问题 (2.1) 存在唯一解.

Proof. 由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的, 所以可定义一种内积. 又因为 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 椭圆的, 所以由内积 $a(\cdot,\cdot)$ 诱导出的范数与原来的范数 $\|\cdot\|$ 等价. 因为 V 在范数 $\|\cdot\|$ 下是完备的, 因此在范数 $|||\cdot|||$ 下也是完备的. 所以 V 在内积 $a(\cdot,\cdot)$ 下是 Hilbert 空间, 由 Rietz 表示定理, 存在 Rietz 映射 $\sigma : V' \to V$, 使得对 $\ell \in V'$, 有 $\sigma\ell \in V$ 且有

$$\langle \ell, v\rangle = a(\sigma\ell, v), \forall v \in V$$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 的对称性,

$$\begin{aligned} J(v) =& \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \ell, v\rangle = \frac{1}{2}a(v,v) - a(\sigma\ell, v) \\ =& \frac{1}{2}a(v-\sigma\ell, v-\sigma\ell) - \frac{1}{2}a(\sigma\ell,\sigma\ell) \\ =& \frac{1}{2}|||v-\sigma\ell|||^2 - \frac{1}{2}|||\sigma\ell|||^2 \end{aligned}$$

这里 $|||\sigma\ell|||$ 可以看成是常数. 问题 (2.1) 可以看成是求源素 $\sigma\ell$ 到子集 K 的最小距离, 即求 $\sigma\ell \in V$ 在 K 上的投影. 因为 K 是非空闭集, V 是 Hilbert 空间, 由投影定理知投影一定存在.

再由 K 的凸性可知, 解是唯一的. 用反证法证明, 假设 u_1, u_2 均为 (2.1) 的解, 因为 K 是凸集, 所以

$$w_t := tu_2 + (1-t)u_1 \in K, \forall t \in (0,1)$$

且有

$$\begin{aligned} J(u_1) \leqslant& J(w_t) = J(u_1 + t(u_2 - u_1)) \\ &= J(u_1) + t\{a(u_1, u_2-u_1) - \langle \ell, u_2 - u_1\rangle\} + \frac{t^2}{2}a(u_2-u_1, u_2-u_1) \end{aligned}$$

这里不等式用到了 u_1 是极小解. 因此有

$$t\{a(u_1,u_2-u_1)-\langle\ell,u_2-u_1\rangle\}+\frac{t^2}{2}a(u_2-u_1u_2-u_1)\geqslant 0,\forall t\in(0,1)$$

两端消去 t, 再令 $t\to 0^+$, 有

$$a(u_1,u_2-u_1)\geqslant\langle\ell,u_2-u_1\rangle$$

交换一下 u_1 与 u_2 的顺序, 有

$$a(u_2,u_1-u_2)\geqslant\langle\ell,u_1-u_2\rangle$$

两式相加, 得

$$a(u_1-u_2,u_1-u_2)\leqslant 0$$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 的椭圆性知 $\|u_1-u_2\|=0$. 所以 $u_1=u_2$. □

下面给出与泛函极小问题 (2.1) 等价的变分问题

Theorem 2.2. *在定理2.1的假设下, u 是极小问题 (2.1) 的解, 当且仅当 u 是下述变分问题的解: 求 $u\in K$ 使得*

$$a(u,v-u)\geqslant\langle\ell,v-u\rangle,\forall v\in K \tag{2.2}$$

Proof. 问题 (2.1)⇒ 问题 (2.2): 由定理2.1的唯一性证明即得.

问题 (2.2)⇒ 问题 (2.1): 设 u 是问题 (2.2) 的解, 则 $\forall v\in K$, 有

$$J(v)=J(u+(v-u))=J(u)+(a(u,v-u)-\langle\ell,v-u\rangle)+\frac{1}{2}|||v-u|||^2$$

其中不等号成立是因为问题 (2.2) 的约束条件以及 $a(\cdot,\cdot)$ 的椭圆性. □

Remark 2.1. *问题 (2.2) 的约束条件等价于 $a(\sigma\ell-u,v-u)\leqslant 0,\forall v\in K$. 从几何上看, 最优解 u 满足 $\forall v\in K$, $\sigma\ell-u$ 与 $v-u$ 成钝角 (在内积 $a(\cdot,\cdot)$ 的意义下).*

Corollary 2.1. *假设定理 (2.1) 中条件都成立, 则问题 (2.2) 存在唯一解.*

当 K 具有特殊的性质时, 问题 (2.2) 中的约束条件也可以刻画地更加清晰.

Example 2.1. *若 K 为以原点为顶点的闭凸锥: $\forall v\in K,\forall\lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda v\in K$; $v_1,v_2\in K\Rightarrow v_1+v_2\in K$. 则问题 (2.2) 可写成: 求 $u\in K$ 使得*

$$\begin{cases} a(u,v)\geqslant\langle\ell,v\rangle,\forall v\in K\\ a(u,u)=\langle\ell,u\rangle\end{cases} \tag{2.3}$$

Proof. 问题 (2.3)⇒ 问题 (2.2): 两式相减即可.

问题 (2.2)⇒ 问题 (2.3):

- $\forall\lambda \geqslant 0, w\in K$, 在 (2.2) 中取 $v=u+\lambda w$, 有 $a(u,w)\geqslant\langle\ell,w\rangle,\forall w\in K$, 故 (2.3) 中的不等式成立.

- 分别取 $v=2u,0$, 得到 (2.3) 中的等式.

□

Example 2.2. *若 K 是闭子空间 (特别的 $K=V$), 则 (2.3) 可以写成: 求 $u\in K$ 满足*

$$a(u,v)=\langle\ell,v\rangle,\forall v\in K \tag{2.4}$$

Proof. 闭子空间是特殊的闭凸锥, 而且有 $\forall v\in K\Rightarrow -v\in K$, 代入 (2.3) 得到 $-a(u,v)\geqslant-\langle\ell,v\rangle$, 又因为 $a(u,v)\geqslant\langle\ell,v\rangle$, 因此有 $a(u,v)=\langle\ell,v\rangle,\forall v\in K$ □

2.2 Gâteaux 导数

对泛函 $J(u)\in V'$, 我们定义其在一点 u 处的一阶与二阶 Gâteaux 导数 (简称为 G-导数):

$$J'(u)(v):=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{J(u+tv)-J(u)\}=a(u,v)-\langle\ell,v\rangle$$

$$\begin{aligned}J''(u)(v,w):&=(J'(u)(w))'(v)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{J'(u+tv)(w)-J'(u)(w)\}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{a(u+tv,w)-a(u,w)\}=a(v,w)\end{aligned}$$

在计算二阶 Gâteaux 导数时, 用到了一阶 Gâteaux 导数的结论.

- 若 u 是极小化问题 (2.1) 的解, 则问题 (2.2)

$$J'(u)(v-u)\geqslant 0,\forall v\in K\Leftrightarrow a(u,v-u)-\langle\ell,v-u\rangle\geqslant 0,\forall v\in K$$

- 若 u 是问题 (2.2) 的解, 由 Taylor 公式, $\forall v\in K$

$$\begin{aligned}J(v)-J(u)=&J'(u)(v-u)+\frac{1}{2}J''(u)(v-u,v-u)\\=&\{a(u,v-u)-\langle\ell,v-u\rangle\}+\frac{1}{2}a(v-u.v-u)\geqslant 0\end{aligned}$$

因此从 Gâteaux 导数的角度看, 极小化问题与变分不等式等价.

若 K 是闭子空间, 则例2.2的结论等价于 $J'(u)(v)=0,\forall v\in K$. 所以线性泛函 $J'(u)$ 在 K 中为 0, 使得 $J'(u)=0$ 的解 $u\in K$ 就是变分问题的解.

2.3 Lax-Milgram 定理

当 V 是 Hilbert 空间时, 我们仍有定理2.1的结论, 此时可以不要求 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的.

Theorem 2.3 (Lax-Milgram 定理)**.** *设 $a(\cdot,\cdot)$ 是有界, 椭圆双线性型, V 是 Hilbert 空间, $\ell \in V'$, 则变分问题: 求 $u \in V$ 满足*

$$a(u,v) = \langle \ell, v\rangle, \forall v \in V \tag{2.5}$$

存在唯一解.

Proof. ①若 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的, 则可定义内积 $(\cdot,\cdot)_a = a(\cdot,\cdot)$. 由 Rietz 引理, 存在唯一 $\sigma\ell \in V$ 使得

$$(\sigma\ell, v)_a = \langle \ell, v\rangle, \forall v \in V$$

于是

$$(2.5) \Leftrightarrow (u,v)_a = (\sigma\ell, v)_a, \forall v \in V$$

这表明 $u = \sigma\ell$.

② 若 $a(\cdot,\cdot)$ 非对称, 对 $\forall u \in V$, 定义 $Au : V \to \mathbb{R}$, 满足

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v), \forall u, v \in V$$

进而有

$$\|Au\| = \sup_{0\neq v\in V} \frac{\|\langle Au, v\rangle\|}{\|v\|} = \sup_{0\neq v\in V} \frac{\|a(u,v)\|}{\|v\|} \leqslant \sup_{0\neq v\in V} \frac{M\|u\|\|v\|}{\|v\|} = M\|u\|$$

这说明 $Au \in V'$. 由 Rietz 引理, 存在唯一的 $\sigma Au, \sigma\ell \in V$ 使得

$$\langle \sigma Au, v\rangle = \langle Au, v\rangle,\ \langle \sigma\ell, v\rangle = \langle \ell, v\rangle, \forall v \in V,\ \|\sigma Au\| = \|Au\|$$

则问题 (2.5) 有唯一解等价于算子方程

$$\sigma Au = \sigma\ell$$

在 V 中有唯一解. 下面用压缩映射证明. 令 $T(v) := v - \rho(\sigma Av - \sigma\ell)$, 其中 $0 < \rho < 1$ 待定常数. 我们想要说明存在 ρ 使得 T 为一压缩算子, 从而存在唯一的不动点 u, 即为 (2.5) 的解. 下面估计 T 的范数:

$$\begin{aligned}
\|v - \rho\sigma Av\|^2 =& \|v\|^2 + \rho^2\|\sigma Av\|^2 - 2\rho\langle \sigma Av, v\rangle \\
\leqslant& \|v\|^2 + \rho^2\|\sigma Av\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2, \text{椭圆性} \\
=& \|v\|^2 + \rho^2\|Av\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2, \text{Rietz 引理} \\
\leqslant& \|v\|^2 + \rho^2M^2\|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2, \text{有界性} \\
=& (M^2\rho^2 - 2\rho\alpha + 1)\|v\|^2
\end{aligned}$$

要使其成为压缩算子, 必须满足 $(M^2\rho^2 - 2\rho\alpha + 1) < 1$, 即 $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$. 因此我们证明了, 只要 $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$, 算子 T 都是压缩算子. □

3 Sobolev 空间

在考虑等价变分问题和有限元解时, 我们需要确定 V 和 V_h. 此时会出现一些问题, 例如

- V 是 Hilbert 空间或 Banach 空间. 具体应当如何选取? 如果选取不当, 是没有等价性的.
- 若仅有 $V_h \subseteq C^0(\Omega)$, 我们是无法定义导数的, 这时再定义导数就不再是普通意义的导数, 而是广义导数.

3.1 Lebesgue 积分

设区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一非空可测集, f 为 Ω 上的可测函数. 记 $\int_\Omega f(x)dx$ 为 Lebesgue 积分, 下面介绍几个常用的函数空间以及它们上面的范数.

- 引入记号 $\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p \leqslant \infty.$

  定义空间 $L^p(\Omega) := \{f : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}, 1 \leqslant p \leqslant \infty$
- 引入记号 $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\{a \in \mathbb{R}, \mu\{x : |f(x)| > a\} = 0\}.$

Example 3.1. *考虑*

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in Q \\ \arctan x, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

则 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{\pi}{2}, \sup |f(x)| = \infty$

Example 3.2. *Dirichlet 函数*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}, \|D\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$$

函数 f 和 g 在 $L^p(\Omega)$ 中视为同一函数, 如果 $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} = 0$, 比如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \ g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

只在零测集上不同, 因此在 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < \infty)$ 中视为同一函数, 或称为等价类.

3.2 常用不等式

① Minkowski 不等式: $1 \leqslant p \leqslant \infty, f, g \in L^p(\Omega)$, 则 $\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$;

② Hölder 不等式: $1 \leqslant p, q \leqslant \infty, 1/p+1/q=1, f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

③ Schwarz 不等式: 当 $p=q=2$ 时, Hölder 不等式为

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Theorem 3.1. *对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间.*

Theorem 3.2. *对于 $1 \leqslant p < \infty$, $C_0^\infty(\Omega)$ 在 L^p 中稠密.*

注意, 在第二个定理中无穷是取不到的.

3.3 广义导数 (弱导数)

为表示多重求导, 引入多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, 其中 α_i 为非负整数, $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. 记求导算子 $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$. 例如 $D^{(2,2,1)}u = \frac{\partial^t u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3}$.

Definition 3.1. *定义 $suppu := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ 为 u 在区域 Ω 上的支集. 若 Ω 是开集且 $suppu \subseteq \Omega$, 称 u 在 Ω 上具有紧支集, 记作 $suppu \subset\subset \Omega$. 意味着 u 在 $\partial\Omega$ 的邻域为 0.*

由于紧支集函数在边界取值为 0, 所以导数在边界取值也为 0.

Definition 3.2. *无穷次可微的紧支集函数. $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty : suppu \subset\subset \Omega\}$, 有时候也用 $\mathcal{D}(\Omega)$ 记 $C_0^\infty(\Omega)$. $\mathcal{D}(\Omega)$ 的对偶空间为 $\mathcal{D}'(\Omega)$, 也称为分布空间, 由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 这个空间很小, 实际上广义函数空间 $\subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Definition 3.3. *局部可积函数 $L_{loc}^1(\Omega) : \{u \in L^1(D), \forall$紧集$D \subseteq \Omega\}$, 显然有 $L_{loc}^1(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, 而且是真包含. 如果 $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, 则 f 等同于一个分布*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x), \forall \varphi \in D(\Omega)$$

局部可积函数空间其实比较大.

Definition 3.4 (广义导数)**.** *称 $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ 为 f 的广义导数 $D^\alpha f$, 若*

$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x) \cdot \partial^\alpha\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

以上定义与狭义导数的定义是相容的. 这种广义导数推广的很弱.

Example 3.3. 设 $\Omega=(-1,1)$, $f(x)=\begin{cases} ax, & -1\leqslant x<0 \\ bx, & 0\leqslant x<1 \end{cases}$, 在传统意义下, f 不可导, 但是它具有广义导数.

- 一阶广义导数: $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx=\int_{-1}^{0} ax\varphi'(x)dx+\int_{0}^{1} bx\varphi'(x)dx$$
$$=-a\int_{-1}^{0}\varphi(x)dx-b\int_{0}^{1}\varphi(x)dx=-\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx$$

  其中 $g(x)=\begin{cases} a, & -1<x<0 \\ b, & 0<x<1 \end{cases}$

  因此 $g(x)=D^1 f(x)$.

- 二阶广义导数: $\int_{-1}^{1} D^2 f(x)$

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi'(x)dx=\int_{-1}^{0} a\varphi'(x)dx+\int_{0}^{1} b\varphi'(x)dx$$
$$=(a-b)\varphi(0)=(a-b)\int_{-1}^{1}\delta(x)\varphi(x)dx$$

  若 $a=b$, 则 $D^2 f(x)=0$; 若 $a\neq b$, 则 $D^2 f(x)=(b-a)\delta(x)\notin L^1_{loc}(-1,1)$.

3.4 Sobolev 空间

$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n, m\geqslant 0$ 是指标, $1\leqslant p\leqslant\infty$. 定义 Sobolev 空间

$$W^{m,p}(\Omega):=\{v: D^\alpha v\in L^p(\Omega),\forall|\alpha|\leqslant m\}$$

给它装配范数

$$1\leqslant p<\infty: \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}:=\left(\sum_{|\alpha|=0}^{m}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{|\alpha|=0}^{m}\int_\Omega|D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$:=\|u\|_{m,p,\Omega}$$

$$p=\infty: \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}: \max_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}:=\|u\|_{m,\infty,\Omega}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ 是 m 阶广义可导, p 次幂可积的 L^p 空间, 对应连续函数空间 $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$: m 阶可导, α 次 Hölder 连续的函数, 定义为 $\exists C>0,\forall u\in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}),\forall|\beta|\leqslant m$

$$|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha$$

比如 $m=0,\alpha=1$ 是常用的 Lipschitz 连续函数. 装备范数

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})}:=\max_{|\beta|\leqslant m}\sup_{x,y\in\bar{\Omega},x\neq y}\frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}+\|u\|_{m,\infty,\Omega}$$

p 越大, 表示函数类越光滑.

Theorem 3.3. *Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$(装配范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$) 是 Banach 空间.*

Proof. $W^{m,p}(\Omega)$ 是赋范线性空间, 只需要证明其完备性. 设 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, $u_j \in W^{m,p}(\Omega)$, 有 $u_j \in L^p(\Omega)$, 所以 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ 也为 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列. 因为 $L^p(\Omega)$ 是完备的, 故存在 $v \in L^p(\Omega)$, 使得 $u_j \to v$ in $L^p(\Omega)$, 即 $\lim\limits_{j\to\infty} \|u_j - v\|_{L^p} = 0$. 下证 $u_j \to v$ in $W^{m,p}(\Omega)$.

由 $u_j \in W^{m,p}(\Omega)$ 知, $\forall \alpha : |\alpha| \leqslant m$, $\{D^\alpha u_j\}_{i=j}^{\infty}$ 也是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, 故存在 $v^\alpha \in L^p(\Omega)$, 使得 $D^\alpha u_i \to v^\alpha$ in $L^p(\Omega)$. 下面只需验证 $D^\alpha v = v^\alpha$.

由于强收敛蕴含弱收敛, 按照广义导数的定义: $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v D^\alpha \phi dx = &\lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j D^\alpha \phi dx \text{ 弱收敛} \\ =&(-1)^{|\alpha|} \lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_j \phi dx \text{ 广义导数定义} \\ =&(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v^\alpha \phi dx \text{ 弱收敛}\end{aligned}$$

故 $D^\alpha v = v^\alpha$, 因此有

$$\|u_j - v\|_{m,p,\Omega}^p = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u_j - D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u_j - v^\alpha\|_{L^p(\Omega)}^p \to 0$$

□

Theorem 3.4. *假设 Ω 满足线性性质, 则 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中是稠密的.*

常用的 Ω 都是 Lipschitz 边界区域 (边界 Lipschitz 连续, 而不是 C^1. 如果边界外法向是连续的, 那么边界是光滑的.), 例如多边形区域, 都满足线性性质.

Definition 3.5. *$\forall v \in W^{m,p}(\Omega)$, 定义 v 的半范数 (半模)*

$$|v|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{0,p,\Omega}^p \right\}^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty$$

$$|v|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty}$$

有的书也会定义成 $|v|_{m,\infty,\Omega} = \sum\limits_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty}$, 哪个对呢? 与范数相比, 半范数只能取 $|\alpha| = m$ 的项, 不考虑 $|\alpha| < m$ 的项.

$p = 2$ 时, $W^{m,2}(\Omega)$ 记作 $H^m(\Omega)$, 范数简记为 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$. 特别地, $H^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 其中内积[1]定义为

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v} dx$$

[1] 内积要满足正定性, 对称性, 线性.

$\overline{D^\alpha v}$ 表示共轭. 由于 $C^\infty(\Omega) \subseteq H^m(\Omega)$ 且稠密, 定义

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$$

或者更一般地

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

即 $H_0^m(\Omega)$ 是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 的闭包. $H_0^m(\Omega)$ 和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 可以被认为是 $C_0^\infty(\Omega)$ 分别在 $H^m(\Omega)$ 和 $W^{m,p}(\Omega)$ 范数意义下完备化后得到的空间.

引入 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶空间

$$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$$

范数为 $\forall f \in H^{-m}(\Omega)$,

$$\|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{0 \neq v \in H_0^m(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{m,\Omega}}$$

Theorem 3.5 (Poincaré 不等式). *Ω 为 Lipschitz 边界区域, $m > 0$, 则对 $\forall u \in H_0^m(\Omega)$, 有*

$$\|u\|_{m,\Omega} \leqslant C|u|_{m,\Omega}. \tag{3.1}$$

Poincaré 不等式告诉我们, 在 $H_0^m(\Omega)$ 中, 半范数 $|\cdot|_{m,\Omega}$ 也是范数, 且与范数 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 等价 ($|u|_{m,\Omega} \leqslant \|u\|_{m,\Omega} \leqslant C|u|_{m,\Omega}$).

3.5 嵌入定理

嵌入定理给出了精细的刻画. 设 X, Y 是两个赋范线性空间,

Definition 3.6. *称 X 嵌入 (连续地) 到 Y, 记作 $X \hookrightarrow Y$, 如果*

① $X \subseteq Y$

② *X 到 Y 具有连续内射: 恒等映射 $I : X \to Y$ 有界算子, 存在 C =const>0, 满足*

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \forall x \in X$$

进一步地, ③ 如果 I 为紧算子 (把有界集映成紧集), 则称 X 紧嵌入到 Y, 记作 $X \Subset Y$ 或 $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. 紧集有个好处, 可以抽取收敛子列.

Theorem 3.6 (嵌入定理). *Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界连通开集, Lipschitz 连续边界, $m \geqslant 0$(不一定是整数), 则有*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} C(\bar{\Omega}), & mp > n \\ L^q(\Omega), \forall 1 \leqslant q < \infty, & mp = n \\ L^{q^*}, \forall 1 \leqslant q^* \leqslant \frac{np}{n-mp}, & mp < n \end{cases}$$

其中当 $mp=n$ 且 $p=1$ 时, q 可取 ∞. 当 $mp>n$ 时, 可分为三种情况

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases}C^{0,m-n/p}(\bar{\Omega}), & \frac{n}{p}<m<\frac{n}{p}+1\\ C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}),\forall 0\leqslant\alpha<1, & m=\frac{n}{p}+1\\ C^{0,1}(\bar{\Omega}), & m>\frac{n}{p}+1\end{cases}$$

总而言之, mp 越大, $W^{m,p}(\Omega)$ 就能嵌入到越小的空间中.

Theorem 3.7 (紧嵌入定理)**.** 在嵌入定理的假设条件下, 有

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow\begin{cases}C(\bar{\Omega}), & mp>n\\ L^q(\Omega),\forall 1\leqslant q<\infty, & mp=n\\ L^{q^*},\forall 1\leqslant q^*<\frac{np}{n-mp}, & mp<n\end{cases}$$

下面举一些常用的特殊情形:

- 对一切的 n 都有, $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega), 1\leqslant r<\frac{np}{n-p}$. 证明过程见《Sobolev Spaces》2nd Adams **P170 6.8.** (Rellich-Kondrachov 定理)
- 对一切的 n 都有, $W^{k+1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$. 证明过程见《Sobolev Spaces》2nd Adams **P168 PART I** and **PART II** (Rellich-Kondrachov 定理)
- $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{\ell,p}(\Omega), m\geqslant\ell$. 事实上, $\|x\|_{\ell,p,\Omega}\leqslant\|x\|_{m,p,\Omega},\forall x\in W^{m,p}(\Omega)$.
- $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), p\geqslant q$. $p=q$ 显然成立. 事实上, 我们只需证 $L^p(\Omega)\subseteq L^q(\Omega), p>q$:

  当 $p=\infty$ 时, 显然有 $L^\infty(\Omega)\subseteq L^q(\Omega)$. 当 $q<p<\infty$ 时, 取 $r=\frac{p}{q}>1$, r' 是 r 的共轭指数, 满足 $1/r+1/r'=1$. 对 $f\in L^p(\Omega)$, 由 Hölder 不等式, 有

  $$\begin{aligned}\int_\Omega|f(x)|^q dx=\int_\Omega|f(x)|^q\cdot 1dx&\leqslant\left(\int_\Omega|f(x)|^{qr}dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Omega 1^{r'}dx\right)\frac{1}{r'}\\&=m(\Omega)^{\frac{1}{r'}}\left(\int_\Omega|f(x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\end{aligned}$$

  即 $\|f\|_q\leqslant m(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_p$
- $p=2$ 时, $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})=C(\bar{\Omega}), m>1/2$. 特别地,
  - 当 $n=1$ 时有, $H^1(\Omega)\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$;
  - 当 $n=2$ 时 (即 Ω 是二维区域时) 有, $H^2(\Omega)\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ 且 $H^2(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$. $n=2$ 时 $H^1(\Omega)$ 不能嵌入到 $C^0(\Omega)$.

Example 3.4. 区域 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2<1/2\}$, 考虑函数 $f(x)=\log|\log|x||$. 当 $0<r<1/2$ 时, 令 $\rho(r)=\log|\log r|=\log(-\log r)\notin C^0(\Omega)$, $\rho'(r)=-\frac{1}{r\log r}$, 从而

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f'(x)|^p dx=\int_0^{\frac{1}{2}}|\rho'(r)|^p r^{n-1}dr&=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(\log r)^p}r^{n-p-1}dr\\&=\int_{+\infty}^{\log 2}\frac{e^{-(n-p-1)t}}{(-t)^p}(-e^{-t})dt,\ r=e^{-t}\\&=\int_{\log 2}^{+\infty}\frac{e^{-(n-p)t}}{(-t)^p}dt\end{aligned}$$

当 $p\leqslant n$ 时, $f'(x)\in L^p(\Omega)$, 从而 $f(x)\in W^{1,p}(\Omega)$; 当 $p=n=1$ 时, 由嵌入定理知 $f(x)\in W^{1,1}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. 当 $p=n=2$ 时, $f(x)\in H^1(\Omega)$, 但由于 $f(x)\notin C^0(\bar\Omega)$, 所以 $H^1(\Omega)\not\hookrightarrow C^0(\Omega)$.

Example 3.5. 在一维情形下有 $W^{1,1}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Proof. 由于 $C^\infty(\bar\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 只需对 $u\in C^\infty(\bar\Omega)$ 证明即可.

$\forall x,y\in\Omega:=(0,1)$, 由牛顿莱布尼兹公式 $u(x)=u(y)+\int_y^x\frac{\partial u}{\partial t}dt$. 两端对 y 从 0 到 1 积分可得 $u(x)=\int_0^1 u(y)dy+\int_0^1\int_y^x\frac{\partial u}{\partial t}dtdy$. 因此有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=&\inf\{a\in\mathbb{R}:\mu(\{x:|u(x)|>a\})=0\}\leqslant\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\\\leqslant&\left|\int_0^1u(y)dy\right|+\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dtdy\\\leqslant&\int_0^1|u(y)|dy+\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dt=\|u\|_{1,1,\Omega}\end{aligned}$$

因此有 $W^{1,1}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. □

Example 3.6. 在二维情形下, 有 $W^{2,1}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Proof. 同样, 只需对 $u\in C^\infty(\bar\Omega)$ 进行证明. $\forall(x,y),(x_0,y_0)\in\Omega:=(0,1)^2$, 有

$$\begin{aligned}u(x,y)=&u(x_0,y)+\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial\xi}d\xi\\=&u(x_0,y_0)+\int_{y_0}^y\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial\eta}d\eta+\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial\xi}d\xi+\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y\frac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}d\eta d\xi\end{aligned}$$

上式对 x_0,y_0 在 $(0,1)^2$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\iint_\Omega u(x_0,y_0)dx_0dy_0+\iint_\Omega\int_{y_0}^y\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial\eta}d\eta dx_0dy_0\\&+\iint_\Omega\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial\xi}d\xi dx_0dy_0+\iint_\Omega\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y\frac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}d\eta d\xi dx_0dy_0\end{aligned}$$

因此有

$$|u(x,y)| \leqslant \int_0^1\int_0^1 |u(x_0,y_0)|dx_0dy_0 + \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial \eta}\right|dx_0d\eta$$
$$+\left|\int_0^1\int_0^1 dx_0dy_0\int_{x_0}^x \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}d\xi\right|$$

由于

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy_0\int_{x_0}^x \frac{\partial u(\xi,y)}{\partial \xi}d\xi &= \int_0^1 dy_0\int_{x_0}^x \frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}d\xi + \int_0^1 dy_0\int_{x_0}^x \left(\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial \xi} - \frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}\right)d\xi \\ &= \int_0^1 dy_0\int_{x_0}^x \frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}d\xi + \int_0^1 dy_0\int_{x_0}^x d\xi\left(\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial\eta}d\eta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 dx_0\int_0^1 dy_0\int_{x_0}^x \frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}d\xi\right| &\leqslant \int_0^1 dx_0\int_0^1 dy_0\int_0^1 \left|\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}\right|d\xi \\ &= \int_0^1 dy_0\int_0^1 \left|\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}\right|d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 dx_0\int_0^1 dy_0\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial\eta}d\eta d\xi\right| &\leqslant \int_0^1 dx_0\int_0^1 dy_0\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial\eta}\right|d\xi d\eta \\ &= \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial\eta}\right|d\xi d\eta\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega}|u(x,y)| \\ &\leqslant \iint_\Omega |u(x_0,y_0)|dx_0dy_0 + \iint_\Omega \left|\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial\eta}\right|d\eta dx_0 + \iint_\Omega \left|\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}\right|d\xi dy_0 \\ &\quad + \iint_\Omega \left|\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial\eta}\right|d\xi d\eta \\ &\leqslant \|u\|_{2,1,\Omega}\end{aligned}$$

因此有 $W^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. □

3.6 迹定理

迹定理 –边界上留下一些痕迹. 对 $u(x) \in W^{m,p}(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \partial\Omega$ 是边界, $u(x)|_{\partial\Omega}$ 应当如何定义呢? 对于 $mp > n$ 的情形, 由嵌入定理 $u(x) \in C(\bar{\Omega})$, 所以 $u|_{\partial\Omega}$ 有意义; 当 $mp \leqslant n$ 时, 在二维情形, 我们举了例3.4说明 $H^1(\Omega)$ 不能嵌入到 $C(\bar{\Omega})$. 想法是: 因为 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密, 利用 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 中的收敛序列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty \to u$, 若 $u_j|_{\partial\Omega}$ 有意义, 且 $\{u_j|_{\partial\Omega}\}$ 收敛, 那么我们就可以定义 $u|_{\partial\Omega}$.

Example 3.7. 记 $\Gamma_0 = \{(x,y) : x = 1, 0 < y < 1\}$, $\Gamma_1 = \{(x,y) : y = 0, 0 < x < 1\}$, $\Gamma_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < 1\}$, $\Gamma_3 = \{(x,y) : y = 1, 0 < x < 1\}$. 则 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

Proof. 考虑 $\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{0,\partial\Omega}$

一方面, 由莱布尼兹公式有

$$u^2|_{\Gamma_3} = u^2(x,1) = u^2(x,y) + \int_y^1 \frac{\partial u^2(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta = u^2(x,y) + 2\int_y^1 u(x,\eta)\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

两边对区域 Ω 积分, 有

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega u^2|_{\Gamma_3} dxdy =& \iint_\Omega u^2(x,y)dxdy + 2\iint_\Omega \int_y^1 u(x,\eta)\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta dxdy \\
\leqslant& \|u\|_{0,\Omega}^2 + 2\iint_\Omega \int_0^1 |u(x,\eta)|\left|\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\right| d\eta dxdy \\
=& \|u\|_{0,\Omega}^2 + 2\int_0^1 \int_0^1 |u(x,\eta)|\left|\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\right| d\eta dx \\
\leqslant& \|u\|_{0,\Omega}^2 + 2\|u\|_{0,\Omega}|u|_{1,\Omega},\ \text{Cauchy 不等式} \\
\leqslant& \|u\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{1,\Omega}^2 \\
\leqslant& 2\|u\|_{1,\Omega}^2
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\iint_\Omega u^2|_{\Gamma_3} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 u^2(x,1)dxdy = \int_0^1 u^2(x,1)dx = \|u\|_{0,\Gamma_3}^2.$$

因此有 $\|u\|_{0,\Gamma_3}^2 \leqslant 2\|u\|_{1,\Omega}^2$. 同理有 $\|u\|_{0,\Gamma_i}^2 \leqslant 2\|u\|_{1,\Omega}^2, i = 0,1,2$. 因此

$$\|u\|_{0,\partial\Omega}^2 \leqslant 8\|u\|_{1,\partial\Omega}^2 \Rightarrow \|u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant 2\sqrt{2}\|u\|_{1,\Omega}$$

若 $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subseteq C^\infty(\bar{\Omega}) : u_j \to u \in H^1(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$, 由于收敛列都是 Cauchy 列, 因此有 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的 Cauchy 列. 由 $\|u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant 2\sqrt{2}\|u\|_{1,\Omega}$ 知, $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 也是 $L^2(\partial\Omega)$ 中的 Cauchy 列. 再由 $L^2(\partial\Omega)$ 的完备性知, $\exists v \in L^2(\partial\Omega)$ 使得 $u_j|_{\partial\Omega} \to v$ in $L^2(\partial\Omega)$. 记 v 是 u 的迹 (trace), 记作 $\gamma_0 u = v$. □

Theorem 3.8 (迹定理)**.** *存在常数 $C > 0$, 使得*

$$\|\gamma_0 u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,\Omega}, \forall u \in H^1(\Omega)$$

该定理中的 C 是依赖于区域的, 特殊的区域可以求出具体的 C. 该定理告诉我们, 边界上的 L^2 范数由区域内范数控制.

Proof. 只对 Ω 是单位圆的情形证明, 由于 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 因此只要对光滑函数证明即可. 设 $\Omega = \{(r,\theta) : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta < 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$, 则 $\partial\Omega = \{(r,\theta) : r = 1, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$. $\|u\|_{0,\partial\Omega}^2 = \int_0^{2\pi} |u^2(1,\theta)|d\theta$.

注意到:

$$\begin{aligned}|u^2(1,\theta)| =&|1^2u^2(1,\theta)-0^2u^2(0,\theta)| = \left|\int_0^1 \frac{\partial r^2u^2(r,\theta)}{\partial r}dr\right|, \text{莱布尼兹公式}\\ =&\left|2\int_0^1 ru(r,\theta)\left[u(r,\theta)+r\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right]dr\right|\\ \leqslant&\int_0^1 2r|u^2(r,\theta)|dr+2\int_0^1 r^2|u(r,\theta)|\left|\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right|dr,\ \text{三角不等式}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,\partial\Omega}^2 \leqslant&2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r|u^2(r,\theta)|drd\theta+2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2|u(r,\theta)|\left|\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right|drd\theta\\ \leqslant&2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r|u^2(r,\theta)|drd\theta+2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r|u(r,\theta)|\left|\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right|drd\theta\\ =&2\|u\|_{0,\Omega}^2+2\iint_\Omega |u(x,y)||\nabla u(x,y)\cdot\vec{r}|dxdy,\ \text{球坐标化平面坐标}\\ \leqslant&2\|u\|_{0,\Omega}^2+2\iint_\Omega |u(x,y)||\nabla u(x,y)|dxdy\\ \leqslant&2\|u\|_{0,\Omega}^2+2\|u\|_{0,\Omega}\|\nabla u\|_{0,\Omega},\ \text{Cauchy 不等式}\\ \leqslant&2\|u\|_{0,\Omega}^2+\|u\|_{0,\Omega}^2+\|\nabla u\|_{0,\Omega}^2\\ \leqslant&3\|u\|_{1,\Omega}^2\end{aligned}$$

其中 $\vec{r}$ 表示沿半径方向的单位向量, $|\vec{r}|=1$. $\nabla u(x,y)\cdot\vec{r}=|\nabla u(x,y)|\cdot|\vec{r}|\cdot\cos\langle\nabla u(x,y),\vec{r}\rangle$. □

由迹定理3.8, 可以定义 $H^1(\Omega)$ 中函数的边值, 即对 $\forall u\in H^1(\Omega),\exists\{u_j\}_{j=1}^\infty\subseteq C^\infty(\bar{\Omega})$, 使得 $u_j\to u$ in $H^1(\Omega)$, 即 $\|u_j-u\|_{1,\Omega}\to 0, j\to\infty$. 由于收敛列都是 Cauchy 列, 因此 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, 即 $\|u_n-u_m\|_{1,\Omega}\to 0$, 当 $n,m\to\infty$ 时. 由迹定理3.8知,

$$\|\gamma_0u_n-\gamma_0u_m\|_{0,\partial\Omega}\leqslant C\|u_n-u_m\|_{1,\Omega}\to 0,\ n,m\to\infty$$

因此 $\{\gamma_0u_i\}$ 是 $L^2(\partial\Omega)$ 上的 Cauchy 列, 由 $L^2(\partial\Omega)$ 的完备性知, 存在 $v\in L^2(\partial\Omega)$, 使得

$$\|\gamma_0u_i-v\|_{0,\partial\Omega}\to 0, n\to\infty$$

这样可定义 $\gamma_0u=v$ 为 u 在 $\partial\Omega$ 上的迹, 其中 $\gamma_0:H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$ 为迹算子 (也称为边界值算子), 连续 (有界) 线性算子[2], 但不是满射. 记 $\gamma_0H^1(\Omega)=H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\subseteq L^2(\partial\Omega)$. 于是 $\gamma_0:H^1(\Omega)\to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是有界满射.

Theorem 3.9 (迹定理 -第二形式)**.** *存在常数 $C>0$, 使得 $\forall u\in H^1(\Omega)$, 有*

$$\|\gamma_0u\|_{0,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}$$

该定理是比迹定理3.8更精细的刻画.

[2]由迹定理, $\|\gamma_0u\|_{0,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{1,\Omega},\forall u\in H^1(\Omega)$, 即 $\gamma_0\in\mathcal{L}(H^1(\Omega);L^2(\partial\Omega))$

Proof. 由迹定理3.8的证明过程

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,\partial\Omega}^2 \leqslant & 2\|u\|_{0,\Omega}^2 + 2\|u\|_{0,\Omega}\|\nabla u\|_{0,\Omega} \\ = & 2\|u\|_{0,\Omega}(\|u\|_{0,\Omega} + \|\nabla u\|_{0,\Omega}) \\ = & 2\|u\|_{0,\Omega}\|u\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

即 $\|u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}$ □

Theorem 3.10 (迹定理的一般形式)**.** *对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 存在常数 $C > 0$, 使得 $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, 有*

$$\|\gamma_0 u\|_{0,p,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{0,p,\Omega}^{1-\frac{1}{p}} \cdot \|u\|_{1,p,\Omega}^{\frac{1}{p}}$$

Proof. 当 $p \geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}|u^p(1,\theta)| = & |1^p u^p(1,\theta) - 0^p u^p(0,\theta)| = \left|\int_0^1 \frac{\partial r^p u^p(r,\theta)}{\partial r} dr\right|, \text{莱布尼兹公式} \\ = & \left|p\int_0^1 \left[r^{p-1}u^p(r,\theta) + r^p u^{p-1}(r,\theta)\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right] dr\right| \\ \leqslant & p\int_0^1 r^{p-1}|u^p(r,\theta)|dr + p\int_0^1 r^p|u^{p-1}(r,\theta)|\left|\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right| dr, \ \text{三角不等式}\end{aligned}$$

由于 $p \geqslant 2$, 有 $p-1 \geqslant 1$, 又因为 $0 < r < 1$, 因此

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,p,\partial\Omega}^p \leqslant & p\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{p-1}|u^p(r,\theta)|drd\theta + p\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^p|u^{p-1}(r,\theta)|\left|\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right| drd\theta \\ \leqslant & p\iint_\Omega |u(x,y)|^p dxdy + p\iint_\Omega |u(x,y)|^{p-1}|\nabla u \cdot \vec{r}|dxdy \\ \leqslant & p\iint_\Omega |u(x,y)|^p dxdy + p\iint_\Omega |u(x,y)|^{p-1}|\nabla u|dxdy \\ \leqslant & p\|u\|_{0,p,\Omega}^p + p\left(\iint_\Omega |u|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\iint_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \text{Hölder 不等式} \\ \\ = & p\|u\|_{0,p,\Omega}^p + p\left(\iint_\Omega |u|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\iint_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ = & p\|u\|_{0,p,\Omega}^p + p\|u\|_{0,p,\Omega}^{p-1}\|\nabla u\|_{0,p,\Omega} \\ = & p\|u\|_{0,p,\Omega}^{p-1}(\|u\|_{0,p,\Omega} + \|\nabla u\|_{0,p,\Omega}) \\ = & p\|u\|_{0,p,\Omega}^{p-1}\|u\|_{1,p,\Omega}\end{aligned}$$

于是有

$$\|u\|_{0,p,\partial\Omega} \leqslant \sqrt[p]{p}\|u\|_{0,p,\Omega}^{1-\frac{1}{p}}\|u\|_{1,p,\Omega}^{\frac{1}{p}}$$

若 $1 \leqslant p < 2$??; 若 $p = \infty$?? □

Theorem 3.11. 设区域 Ω 具有线段性质, 则

① $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$,

② γ_0 的值域 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是 $L^2(\partial\Omega)$ 的一个稠密子空间.

$\forall \mu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, 定义

$$\|\mu\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf_{v\in H^1(\Omega),\gamma_0 v=\mu} \|v\|_{1,\Omega} \tag{3.2}$$

$\|\cdot\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}$ 是 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 上的一个范数, 且在此范数下 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是一个 Banach 空间. 记 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 的对偶空间为

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))'$$

$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 中的范数定义为 $\forall \mu^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\|\mu^*\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} = \sup_{\mu\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \frac{\langle \mu^*, \mu\rangle}{\|\mu\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}}$$

由不等式 $\|\gamma_0 u\|_{0,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,\Omega}, \forall u \in H^1(\Omega)$ 知, 前面定义的 $H_0^1(\Omega) = \overline{(\mathcal{D}(\Omega))}^{H^1(\Omega)}$ 与下述定义等价

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0 u = 0\}$$

后面这种定义方式是经常要用到的, 以后在不产生歧义的前提下省略 γ_0 不写, 直接记 $u|_{\partial\Omega} = 0$.

下面定义高阶迹算子. 令 $n = (n_1, n_2)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位切向, 高阶迹算子定义为: 对 $\forall u \in H^2(\Omega)$, 在 $\partial\Omega$ 上, 从迹的角度定义

$$\gamma_1 u := \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^{2} \left(\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \cdot n_i$$

同样有 $\gamma_1 \in \mathcal{L}(H^2(\Omega); H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, 以及 $H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : \gamma_0 u = 0, \gamma_1 u = 0\}$. 这里 $\gamma_0 u$ 是切向, $\gamma_1 u$ 是法向. γ_1 称为法向迹算子.

一般地, 若 $u \in H^m(\Omega)$, 则 $\gamma_0 u \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \gamma_1 u \in H^{m-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$. 对于 $\mu \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, 其范数定义为

$$\|\mu\|_{m-\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf_{u\in H^m(\Omega),\gamma_0 u=\mu} \|u\|_{m,\Omega}$$

Theorem 3.12 (广义迹定理)**.** $\forall k \geqslant 2, \{\gamma_0, \gamma_1\} : H^k(\Omega) \to H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\times H^{k-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ 是有界线性满射, 即对 $\forall u \in H^k(\Omega)$, 存在 $C_1, C_2 \geqslant 0$, 使得

$$\|\gamma_0 u\|_{k-\frac{1}{2},\partial\Omega} \leqslant C_1\|u\|_{k,\Omega},\ \|\gamma_1 u\|_{k-\frac{3}{2},\partial\Omega} \leqslant C_2\|u\|_{k,\Omega}$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum\limits_{i=1}^{2} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i} \tau_i$, 定义高阶导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} := \sum_{i,j=1}^{2} \left(\gamma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) \cdot \tau_i \tau_j,\ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n} := \sum_{i,j=1}^{2} \left(\gamma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) \cdot \tau_i n_j$$

3.7 Sobolev 空间的 Green 公式

设 $x=(x_1,\cdots,x_m),\vec{n}=(n_1,\cdots,n_m)$, $\vec{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向,

①: 利用 $C^1(\bar{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的稠密性以及迹定理3.8, 有

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u\cdot v\cdot n_i ds, i=1,\cdots,m, \forall u,v\in H^1(\Omega)$$

②: 把①中的 $i=1,\cdots,m$ 这 m 个式子加起来, 记 $\vec{u}=(\underbrace{u,\cdots,u}_{m个})$, 即 m 个相同的 u 拼起来的行向量, 有

$$\int_\Omega (div\vec{u})vdx = -\int_\Omega \vec{u}\cdot\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (\vec{u}\cdot\vec{n}^T)vds$$

其中 $\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial v}{\partial x_m})^T$

③: 取②中的 $\vec{u}$ 为 ∇u, 有

$$\int_\Omega \Delta u\cdot v dx = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)vds$$

④: 把③中的 u,v 调换位置, 然后相减得

$$\int_\Omega (\Delta u\cdot v - \Delta v\cdot u)dx = \int_{\partial\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)v - \left(\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\right)u\right)ds$$

⑤: 把④中的 u 换成 Δu 得

$$\int_\Omega (\Delta^2 u\cdot v - \Delta v\cdot \Delta u)dx = \int_{\partial\Omega}\left(\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial\vec{n}}\right)v - \left(\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\right)\Delta u\right)ds$$

Lemma 3.1. *$\forall u\in H_0^2(\Omega)$, 有 $\|\Delta u\|_{0,\Omega}=|u|_{2,\Omega}$.*

Proof. 证明留作习题. □

由该引理和 Poincaré 不等式 (3.1) 知

$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant C|u|_{2,\Omega}=C\|\Delta u\|_{0,\Omega}$$

因此 $\|\Delta\cdot\|_{0,\Omega}$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 中的模.

3.8 等价模定理

等价模定理在有限元的误差分析中作用很大.

Theorem 3.13 (等价模定理 (Norm Equivalence))**.** *设 $P_k(\Omega), k\geqslant 0$ 是 Ω 上次数不超过 k 的多项式全体, 即 $P_k(\Omega)=span\{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}}x_n^{k_n}\}, k_1+\cdots+k_n\leqslant k$. 令 $N:=\dim(P_k(\Omega))$, 比如二维情形下, $N=(k+1)(k+2)/2$. 设*

$f_i \in (W^{k+1,p}(\Omega))', i = 1, \cdots, N, p \in [1, \infty]$, 即 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 上的线性泛函, 使得当 $f_i(q) = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant N, q \in P_k(\Omega)$ 时, 就有 $q = 0$. 则存在常数 $C_\Omega > 0$, 使得对 $\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$

$$C_1\left(|v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v)|\right) \leqslant \|v\|_{k+1,p,\Omega} \leqslant C_2\left(|v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v)|\right)$$

Proof. 首先证明第一个不等式: 因为 $f_i \in (W^{k+1,p}(\Omega))'$, 所以存在 $C_i^* > 0$ 使得

$$|f_i(v)| \leqslant C_i^* \|v\|_{k+1,p,\Omega}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i(v)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} C_i^*\right) \|v\|_{k+1,p,\Omega}$$

下证第二个不等式: 用反证法, 假设结论不成立, 即对 $\forall n \geqslant 1, \exists v_n \in W^{k+1,p}(\Omega)$, 使得

$$\|v_n\|_{k+1,p,\Omega} \geqslant n\left(|v_n|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v_n)|\right)$$

记 $w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{k+1,p,\Omega}}$, 从而 $\|w_n\|_{k+1,p,\Omega} = 1$. 在上式两端同时除以 $\|v_n\|_{k+1,p,\Omega}$ 有

$$1 \geqslant n\left(|w_n|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(w_n)|\right)$$

即

$$|w_n|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(w_n)| \leqslant \frac{1}{n}$$

由于 $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$, $S := \{w | \|w\|_{k+1,p,\Omega} = 1\}$ 是 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 上的有界集, 所以 S 为 $W^{k,p}(\Omega)$ 上的紧集, 从而在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中, S 存在收敛子列不妨记为 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, 因收敛列都是 Cauchy 列, 故

$$\|w_n - w_m\|_{k,p,\Omega} \to 0, (n, m \to \infty).$$

由假设条件 $|w_n|_{k+1,p,\Omega} + \sum\limits_{i=1}^{N} |f_i(w_n)| \leqslant \frac{1}{n}$ 知, $|w_n|_{k+1,p,\Omega} \leqslant \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$. 因此

$$|w_n - w_m|_{k+1,p,\Omega} \leqslant |w_n|_{k+1,p,\Omega} + |w_m|_{k+1,p,\Omega} \to 0, \quad n, m \to \infty$$

因为当 $n, m \to \infty$ 时,

$$\|w_n - w_m\|_{k+1,p,\Omega} = \|w_n - w_m\|_{k,p,\Omega} + |w_n - w_m|_{k+1,p,\Omega} \to 0$$

因此 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, 因为 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 是完备的, 因此存在 $w \in W^{k+1,p}(\Omega)$, 使得 $w_n \to w$ in $W^{k+1,p}(\Omega)$. 由 $|w_n|_{k+1,p,\Omega} \leqslant \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$

知, $|w|_{k+1,p,\Omega}=0$, 所以 $w\in P_k(\Omega)$.
由条件 $|w_n|_{k+1,p,\Omega}+\sum\limits_{i=1}^{N}|f_i(w_n)|\leqslant\frac{1}{n}$, 两边取 $n\to\infty$, 有

$$|w|_{k+1,p,\Omega}+\sum_{i=1}^{N}|f_i(w)|=0\Rightarrow|f_i(w)|=0,\ \forall i=1,\cdots,N$$

由 $|f_i(w)|=0,i=1,\cdots,N$ 和定理中的条件 (当 $f_i(q)=0,\forall 1\leqslant i\leqslant N,q\in P_k(\Omega)$ 时, 就有 $q=0$) 知, $w\equiv0$. 这与 $\|w_n\|_{k+1,p,\Omega}=1$ 矛盾. □

等价模定理3.8表明, 全范数可以由半范数控制.

Remark 3.1. *由等价模定理3.8可以证明 Poincaré 不等式 (3.1). 令 $k=m-1$, $p=2$, $N=\dim(P_k(\Omega))$, 对 $\forall\alpha:|\alpha|=m-1$, $f_\alpha(v)=\int_{\partial\Omega}D^\alpha vds$. $\forall v\in H_0^1$, 有 $f_\alpha(v)=0$. 因此等价模定理3.8中的条件均满足, 故全范数可以由半范数控制, Poincaré 不等式得证.*

Corollary 3.1 (Friedrichs 不等式)**.** *对 $\forall u\in H^1(\Omega)$, 存在只依赖于区域 Ω 的常数 $C>0$, 使得*

$$\|u\|_{0,\Omega}\leqslant\|u\|_{1,\Omega}\leqslant C\left(|u|_{1,\Omega}+\left|\int_{\partial\Omega}uds\right|\right)\tag{3.3}$$

Proof. 这就是等价模定理3.8的 $k=0,p=2$ 的特例, 此时 $N=1$. 所以只需要找出一个满足等价模定理条件的泛函.

定义

$$f(u)=\int_{\partial\Omega}uds$$

因为

$$\begin{aligned}|f(u)|=&\left|\int_{\partial\Omega}uds\right|\leqslant\left(\int_{\partial\Omega}1^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial\Omega}u^2ds\right)^{\frac{1}{2}},\ \text{Cauchy 不等式}\\ =&|\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{0,\partial\Omega}:=C_\Omega\|u\|_{0,\partial\Omega}\\ \leqslant&C\|u\|_{1,\Omega},\ \text{迹定理}\end{aligned}$$

因此 $f\in(H^1(\Omega))'$. 如果 $u\in P_0(\Omega)\Rightarrow u=$const 且 $f(u)=0$, 即 $0=\int_{\partial\Omega}uds=|\partial\Omega|u$. 因此有 $u\equiv0$. 满足等价模定理的条件, 证毕. □

Remark 3.2.

- *若 $\Gamma\subseteq\partial\Omega$, 并且 Γ 的测度大于 0, 则有*

$$\|u\|_{1,\Omega}\leqslant C\left(|u|_{1,\Omega}+\left|\int_\Gamma uds\right|\right)$$

但对于单点集并没有这样的性质. 比如对于点 $A\in\partial\Omega$, $u(A)=0$, 要使 $0=f_i(A)=u(A)$, 并不能得到 $f_i\in(H^1(\Omega))'$

- $\forall u \in H^1_\Gamma(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma = 0\}$, $\|u\|_{0,\Omega} \leqslant C|u|_{1,\Omega}$, 因此 $|\cdot|_{1,\Omega}$ 是 $H^1_\Gamma(\Omega)$ 上的范数.

Corollary 3.2 (Poincaré-Friedrichs 不等式)**.** 对 $\forall u \in H^1(\Omega)$, 存在只依赖于 Ω 的常数 $C > 0$, 使得

$$\|u\|_{1,\Omega} \leqslant C\left(|u|_{1,\Omega} + \Big|\int_\Omega u dx\Big|\right)$$

Proof. 在等价模定理中取 $k = 0, p = 2$, $f_1(u) = \int_\Omega u dx$ □

下面介绍商空间等价模定理. 考虑商空间 $W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$, 其元素 $\dot{v}$ 是下述一类函数, 称为 v(代表元) 的等价类: 称 $\dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$, 若

$$\dot{v} = \{w \in W^{k+1,p}(\Omega) : (w - v) \in P_k(\Omega)\}.$$

在商空间中定义范数为

$$\|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega} = \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v + q\|_{k+1,p,\Omega}$$

在该范数下, $W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$ 是个 Banach 空间. 定义半范数

$$|\dot{v}|_{k+1,p,\Omega} := |v|_{k+1,p,\Omega}$$

易得 $|\dot{v}|_{k+1,p,\Omega} \leqslant \|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega}, \forall \dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$.

下面的商空间等价模定理表明, 商空间中的半范数和范数是等价的 (此结果最先由 Deny 和 Lions 于 1953-1954 年给出证明)

Theorem 3.14 (商空间等价模定理 (Norm Equivalence in Quotient Space))**.** 令 $k \geqslant 0, p \in [1, +\infty]$, 则存在 $C_\Omega > 0$, 使得 $\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$

$$\|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega} = \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v + q\|_{k+1,p,\Omega} \leqslant C_\Omega |v|_{k+1,p,\Omega}$$

Proof. 首先寻求满足等价模定理 (3.8) 中的 $f_i \in (W^{k+1,p}(\Omega))'$, 使得

①: $\forall q \in P_k(\Omega)$, 满足 $\|v + q\|_{k+1,p,\Omega} \leqslant C\left(|v + q|_{k+1,p,\Omega} + \sum\limits_{i=1}^N |f_i(v + q)|\right)$

②: 存在 $q \in P_k(\Omega)$, 使得

$$\sum_{i=1}^N |f_i(v + q)| = 0$$

设 $\{q_i\}_{i=1}^N$ 为 $P_k(\Omega)$ 中的一组基, q 为满足条件②的多项式, $q = \sum\limits_{j=1}^N \alpha_j q_j$. 为了找 f_i 满足 $f_i(v + q) = 0$ 且 f_i 是线性泛函, 即

$$0 = f_i(v + q) = f_i(v) + \sum_{i=1}^N \alpha_j f_i(q_j)$$

则 f_i 需满足 $\sum\limits_{j=1}^{N} f_i(q_j)\alpha_j = -f_i(v), i = 1, \cdots, N$. 进一步, ③如果取 $f_i(q_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \cdots, N$, 那么仅需取 $\alpha_j = -f_j(v)$. 此时满足条件②的 q 可以构造为 $q = -\sum\limits_{j=1}^{N} f_j(v)q_j$.

下面构造满足条件①和③的 $\{f_i\}_{i=1}^N$: 取 Legendre 多项式 (或任意一组正交多项式)$L_1, \cdots, L_N$ 为 $P_k(\Omega)$ 的正交基, 即

$$\int_\Omega L_i L_j dx = \delta_{ij}$$

令 $f_i(u) := \int_\Omega u L_i dx, i = 1, \cdots, N$. 由 Hölder 不等式, 易知

$$|f_i(u)| \leqslant \|u\|_{0,p,\Omega}\|L_i\|_{0,q,\Omega} \leqslant \tilde{C}\|u\|_{0,p,\Omega} \leqslant \tilde{C}\|u\|_{k+1,p,\Omega}$$

因此 $f_i \in (W^{k+1,p}(\Omega))', i = 1, \cdots, N$. 另一方面, 对 $\forall u \in P_k(\Omega)$, 若 $f_i(u) = \int_\Omega u L_i dx = 0, i = 1, \cdots, N \Rightarrow u \equiv 0$, 由等价模定理知, 满足条件①; 由 $f_i(L_j) = \delta_{ij}$ 知, f_i 满足条件③.

$p = \infty$ 的情形? □

Theorem 3.15 (Bramble-Hilbert 定理)**.** *设 Ω 是 Lipschitz 区域, $f \in (W^{k+1,p}(\Omega))'$, 满足 $\forall q \in P_k(\Omega)$, $f(q) = 0$. 则有*

$$|f(v)| \leqslant C_\Omega |v|_{k+1,p,\Omega}$$

Proof. 因为 $f \in (W^{k+1,p}(\Omega))'$, 对 $\forall q \in P_k(\Omega)$, $|f(v)| = |f(v+q)|$. 从而

$$|f(v)| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega),\mathbb{R})}\|v+q\|_{k+1,p,\Omega}$$

由 q 的任意性知

$$|f(v)| \leqslant C \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v+q\|_{k+1,p,\Omega} \leqslant \tilde{C}|v|_{k+1,p,\Omega}$$

最后一个不等式是商空间等价模定理3.14. □

4 椭圆型方程边值问题

4.1 Dirichlét 问题与 Neumann 问题

- 齐次 Dirichlét 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + bu = f, & in\ \Omega \\ u = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $0 \leqslant b \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$. 取检验函数空间 $V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) | v|_{\partial\Omega} = 0\}$(这是根据边界条件 $u = 0$ on $\partial\Omega$ 选取的, $v|_{\partial\Omega}$ 应该理解成迹.), $\forall v \in V$, 在方程两端同时乘以 v 并在 Ω 上积分, 有

$$\int_\Omega (-\Delta u + bu) v dx = \int_\Omega f v dx$$

左端根据 Green 公式以及边值条件 ($v|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} v ds = 0.$) 有

$$\int_\Omega (-\Delta u + bu) v dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + buv) dx$$

记

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega buv dx,\ f(v) := \int_\Omega f v dx$$

因此若 u 是问题 (4.1) 的解, 那么 u 必满足下述变分问题:

$$\begin{cases} \text{求} u \in H_0^1(\Omega) = V, s.t. \\ a(u, v) = f(v), \forall v \in V \end{cases} \tag{4.2}$$

反之, 若 u 为问题 (4.2) 的解, 则由 Green 公式可得

$$\int_\Omega (-\Delta u + bu - f) v dx = 0, \forall v \in V$$

因为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密, 所以 $-\Delta u + bu - f$ in $(\mathcal{D}(\Omega))'$, 即问题 (4.1) 在分布意义下成立:

$$-\Delta u + bu = f \text{ in } H^{-1}(\Omega) \text{ sense}$$

其中 $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$. 所以从广义解的意义上[3], (4.1) 等价于 (4.2). 直接考虑 (4.1) 解的存在唯一性是困难的, 根据原问题与变分问题等价, 我们考虑 (4.2) 解的存在唯一性.

- $a(\cdot, \cdot)$ 是对称双线性型, 且满足椭圆性:

  由 Poincaré 不等式以及 $b \geqslant 0$ 可知

  $$a(v, v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega b|v|^2 dx \geqslant \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = |v|_{1,\Omega}^2 \geqslant C\|v\|_{1,\Omega}^2$$

- $a(\cdot, \cdot)$ 连续:

  $$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leqslant \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx + \int_\Omega |buv| dx \\ \text{Cauchy 不等式} &\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \max_{x \in \Omega} |b(x)| \cdot \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|b\|_{0,\infty,\Omega} \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leqslant (1 + \|b\|_{0,\infty,\Omega}) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} := M\|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

[3] 因为 u 的取值空间是广义函数空间. $C_0^\infty(\Omega)$ 中考虑的解是强解.

- $f \in V'$:

$$|f(v)| = \left|\int_\Omega fvdx\right| \leqslant \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leqslant C\|v\|_{1,\Omega}$$

第一个不等式是 Cauchy 不等式, 最后一个不等式是因为 $f \in L^2(\Omega)$.

于是由 Lax-Milgram 定理可知变分问题的解存在且唯一.

- 非齐次 Dirichlét 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + bu = f, & in\ \Omega \\ u = g, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

其中 $0 \leqslant b \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega), g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, 由广义迹定理3.12, $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是连续满射. 故对 $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \exists u_g \in H^1(\Omega)$ 使得 $\gamma_0 u_g = g$ on $\partial\Omega$, 且 $\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leqslant C\|u_g\|_{1,\Omega}$.

令 $w = u - u_g \in H^1(\Omega)$, 由于 $(u-u_g)|_{\partial\Omega}$, 所以 $w \in H_0^1(\Omega)$. 代入问题 (4.3), 有

$$\begin{cases} -\Delta w + bw = f - (-\Delta u_g + bu_g), & in\ \Omega \\ w = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

该问题等价于变分问题: 求 $w \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(w,v) = f(v) - a(u_g, v), \forall v \in V = H_0^1(\Omega) \tag{4.5}$$

其中 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega buvdx$. 下面证明问题 (4.5) 存在唯一解. $a(\cdot,\cdot)$ 的连续性, 椭圆性在前面都已经证明过. 定义映射 $\ell : V \to \mathbb{R}$ 为

$$\ell(v) := f(v) - a(u_g, v), \forall v \in V$$

从而

$$|\ell(v)| \leqslant \|f\|_{-1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + M\|u_g\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} = \Big(\|f\|_{-1,\Omega} + M\|u_g\|_{1,\Omega}\Big)\|v\|_{1,\Omega}$$

想要证明 $\ell \in V'$, 需要说明 $\|u_g\|_{1,\Omega}$ 可以被 $\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}$ 反向控制住. 由 γ_0 得到的 u_g 并不一定唯一, 但是可以证明存在唯一的 $u_g \in H^1(\Omega)$, 使得 $\|u_g\|_{1,\Omega} = \|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}$.

令 $K := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = g\}$. K 是 $H^1(\Omega)$ 中的非空闭凸集. 定义

$$\bar{a}(u,v) := 2\Big(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uvdx\Big)$$

考虑二次泛函 $J(v) := \frac{1}{2}\bar{a}(v,v)$ 的极小化问题

$$J(u) := \inf_{v \in K} J(v) = \inf_{v \in K} \|v\|_{1,\Omega}^2$$

由变分原理2.1, 该二次泛函极小化问题存在唯一解 u_g, 且

$$\|u_g\|_{1,\Omega}^2 = J(u_g) = \inf_{v\in K} J(v) = \inf_{v\in K} \|v\|_{1,\Omega}^2 = \|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}^2$$

最后一个等式是由于 (3.2). 取这样的 u_g, 有

$$|\ell(v)| \leqslant \Big(\|f\|_{-1,\Omega} + M\|u_g\|_{1,\Omega}\Big)\|v\|_{1,\Omega} = \Big(\|f\|_{-1,\Omega} + M\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}\Big)\|v\|_{1,\Omega}$$

所以 $\|\ell\|_{-1,\Omega} \leqslant \|f\|_{-1,\Omega} + M\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}$ 即 $\ell \in V'$. 由 Lax-Milgram 定理, 问题 (4.5) 存在唯一解 w, 从而 $u = w + u_g$ 也是问题 (4.3) 的唯一解,

$$a(u-u_g, v) = a(w,v) = f(v) - a(u_g, v) = \ell(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 椭圆性和 $\ell \in V'$, 取 $v = u - u_g \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\beta\|u-u_g\|_{1,\Omega}^2 \leqslant |a(u-u_g, u-u_g)| = |\ell(u-u_g)| \leqslant \|\ell\|_{-1,\Omega}\|u-u_g\|_{1,\Omega}$$

即

$$\|u-u_g\|_{1,\Omega} \leqslant C\|\ell\|_{-1,\Omega} \leqslant C(\|f\|_{-1,\Omega} + M\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega})$$

由 $\|u_g\|_{1,\Omega} = \|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}$, 所以有稳定性 (未知量由已知量控制)

$$\|u\|_{1,\Omega} \leqslant C(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}) + \|u_g\|_{1,\Omega} \leqslant C(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega})$$

即 u 连续依赖于 f, g.

- Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.6}$$

其中 $f \in L^2(\Omega), g \in H^{-\frac{1}{2}(\partial\Omega)}$. 该问题等价的变分形式是: 求 $u \in H^1(\Omega)$, 使得

$$a(u,v) = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds, \forall v \in H^1(\Omega) \tag{4.7}$$

其中 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$. 若令 $v \equiv 1 \in H^1(\Omega)$, 则

$$\int_\Omega f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0 \tag{4.8}$$

称 (4.8) 为 (4.7) 的相容性条件, 即存在解的必要条件.

Neumann 问题的解不是唯一的, 如果 u 是 Neumann 问题的解, 那么 $u + P_0(\Omega)$ 也是 Neumann 问题的解. 为得到解的唯一性, 我们在商空间 $H^1(\Omega)/P_0(\Omega)$ 讨论. 令 $V = H^1(\Omega)/P_0(\Omega)$, 则 Neumann 问题的变分问题可以写为: 求 $\dot{u} \in V$ 使得

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \ell(\dot{v}), \forall \dot{v} \in V \tag{4.9}$$

其中 $a(\dot{u},\dot{v})$, $\ell(\dot{v})=\int_\Omega fvdx+\int_{\partial\Omega}gvds$. 注意到 $\ell(\dot{v})$ 的取值并不受 $\dot{v}$ 代表元的影响, 这是因为 f,g 满足相容性条件 (4.8): 比如 $w=v+q, q\in P_0(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}\int_\Omega fwdx+\int_{\partial\Omega}gwds&=\int_\Omega f(v+q)dx+\int_{\partial\Omega}g(v+q)ds\\&=\int_\Omega fvdx+\int_{\partial\Omega}gvds+q(\int_\Omega fdx+\int_{\partial\Omega}gds)\\&=\int_\Omega fvdx+\int_{\partial\Omega}gvds\end{aligned}$$

下面证明 (4.9) 的解存在唯一, 需要验证以下三条:

① $a(\cdot,\cdot)$ 满足椭圆性: $\forall\dot{v}\in V$,

$$a(\dot{v},\dot{v})=a(v,v)=|v|_{1,\Omega}^2\geqslant C\|v\|_{1,\Omega}^2$$

不等号成立是根据商空间等价模定理3.14.

② $a(\cdot,\cdot)$ 连续: $\forall\dot{u},\dot{v}\in V$, 有 $|a(\dot{u},\dot{v})|\leqslant\|\dot{u}\|_{1,\Omega}\|\dot{v}\|_{1,\Omega}$;

③ ℓ 连续: $\forall\dot{v}\in V$, 有

$$\begin{aligned}|\ell(\dot{v})|=&\left|\int_\Omega fvdx+\int_{\partial\Omega}gvds\right|\\\leqslant&\|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}+\|g\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega}\|v\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}\ \text{Cauchy 不等式}\\\leqslant&\|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}+C\|g\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega}\|v\|_{1,\Omega}\ \text{迹定理}\\=&(\|f\|_{0,\Omega}+C\|g\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega})\|v\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

所以

$$\|\ell\|_{V'}\leqslant(\|f\|_{0,\Omega}+C\|g\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega})$$

$\ell\in V'$. 再由 Lax-Milgram 定理可得, 变分问题 (4.9) 的解存在唯一.

Remark 4.1 (PDE 正则性理论)**.** 设区域 Ω 是凸区域, 则边值问题有解 $u\in H^2(\Omega)$, 且

$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant\begin{cases}C\{\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{\frac{3}{2},\partial\Omega}\}, & \textit{Dirichlét}\\C\{\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}\}, & \textit{Neumann}\end{cases}$$

若区域足够光滑, 则有 $u\in H^m(\Omega)$ 且

$$\|u\|_{m,\Omega}\leqslant\begin{cases}C\{\|f\|_{m-2,\Omega}+\|g\|_{m-\frac{1}{2},\partial\Omega}\}, & \textit{Dirichlét}\\C\{\|f\|_{m-2,\Omega}+\|g\|_{m-\frac{3}{2},\partial\Omega}\}, & \textit{Neumann}\end{cases}$$

4.2 线弹性边值问题

设 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)^T,\vec{f}=(f_1,f_2,f_3)^T,\vec{g}=(g_1,g_2,g_3)^T$. 考虑线弹性边值问题 (linear elasticity boundary value problem)

$$\begin{cases} -div\sigma(\vec{u})=\vec{f}, & in\ \Omega \\ \vec{u}=0, & on\ \Gamma_0(\text{位移边值}) \\ \sigma_{ij}(\vec{u})\cdot n_j=g_i, i=1,2,3, & on\ \Gamma_1(\text{应力边值}) \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_{ij}(\vec{u})=\varepsilon_{ji}(\vec{u})=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$ 为应变张量, $\sigma_{ij}(\vec{u})=\sigma_{ji}(\vec{u})=\lambda\varepsilon_{kk}(\vec{u})\delta_{ij}+2\gamma\varepsilon_{ij}(\vec{u})$ 为应力张量. $\varepsilon(\vec{u})=\frac{1}{2}(\nabla\vec{u}+(\nabla\vec{u})^T),\sigma(\vec{u})=\lambda tr(\varepsilon(\vec{u}))\delta+2\gamma\varepsilon(\vec{u})$. 上述应力与应变的关系式为本构关系 (Hook 定理). $\Gamma_0\cup\Gamma_1=\partial\Omega,\lambda\in(0,+\infty),\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2],0<\gamma_1<\gamma_2$ 为弹性材料常数.

当 $\Gamma_1=\varnothing$ 时, $\partial\Omega=\Gamma_0$, 原问题为纯位移平面弹性问题:

$$\begin{cases} -\gamma\Delta\vec{u}-(\lambda+\gamma)\nabla div\vec{u}=\vec{f}, & in\ \Omega \\ \vec{u}=0, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

当区域为凸区域时, 有 $\|\vec{u}\|_{2,\Omega}+\lambda\|div\vec{u}\|_{1,\Omega}\leqslant C\|\vec{f}\|_{0,\Omega}$. 变分为:

$$a(\vec{u},\vec{v})=\gamma\int_\Omega\nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{v}dx+(\lambda+\gamma)\int_\Omega div\vec{u}\cdot div\vec{v}dx$$

带应力时, 令 $\ell(\vec{v}):=(\vec{f},\vec{v})+(\vec{g},\vec{v})_{\Gamma_1}$, 则变分问题为: 求 $\vec{u}\in V:=\{\vec{v}\in\vec{H}^1(\Omega):\vec{v}|_{\Gamma_0}=0\}$ 满足

$$a(\vec{u},\vec{v})=\ell(\vec{v}),\forall\vec{v}\in V$$

Theorem 4.1 (Korn 不等式)**.** *存在常数 $C_\Omega>0$, 使得对 $\vec{v}\in(H^1(\Omega))^3$, 有*

$$\|\vec{u}\|_{1,\Omega}\leqslant C_\Omega\bigg(\sum_{i,j=1}^{3}\|\varepsilon_{ij}(\vec{u})\|_{0,\Omega}^2+\|\vec{u}\|_{0,\Omega}^2\bigg)^{\frac{1}{2}}$$

Korn 不等式类似于 Poincaré 不等式

Corollary 4.1. *若 $\Gamma_0\subseteq\partial\Omega$, Γ_0 的测度大于 0, 且 $\vec{v}|_{\Gamma_0}=0$, 则*

$$\|\vec{v}\|_{1,\Omega}\leqslant C_\Omega\bigg(\sum_{i,j=1}^{3}\|\varepsilon_{ij}(\vec{u})\|_{0,\Omega}^2\bigg)^{\frac{1}{2}}$$

Proof. 证明过程见《有限元方法的数学基础》-王烈衡，许学军 P58 定理 3.2.3 □

Lemma 4.1. *设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ 为凸区域, 则存在常数 $C>0$, 使得 $\forall q\in L^2(\Omega)$, $\int_\Omega qdx=0$. 存在 $\vec{v}\in(H_0^1(\Omega))^2$ 满足 $div\vec{v}=q$, 且*

$$\|\vec{v}\|_{1,\Omega}\leqslant C\|q\|_{0,\Omega}$$

记 $L_0^2(\Omega)=\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega qdx=0\}$. 该引理是说, div: $(H_0^1(\Omega))^2\to L_0^2(\Omega)$ 是有界线性满射.

4.3 变分不等式

4.3.1 障碍问题

考虑障碍问题 (obstacle problem)

$$\min_{v\in K} J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$$

等价的变分不等式：

$$\begin{cases} \text{求}u \in K, \text{使得} \\ a(u, v-u) \geqslant f(v-u), \forall v \in K \end{cases} \tag{4.10}$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, f(v) = \int_\Omega f v dx$$
$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : \text{在}\Omega\text{中几乎处处有}v \geqslant \psi\}$$

$\psi \in H^2(\Omega) : \psi \leqslant 0 \text{ on } \partial\Omega$ 是障碍函数, $f \in L^2(\Omega)$. 由于 K 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的非空闭凸集. 下面导出变分问题的数学模型. 由 Green 公式知, 障碍问题的约束等价于

$$\int_\Omega (\Delta u + f)(v-u)dx \leqslant 0, \forall v \in K \tag{4.11}$$

一方面: ① 取 $v \in u + W \subseteq K$, 其中 $W := \{w \in C_0^i nfty(\Omega) : w \geqslant 0\}$, 代入 (4.11) 得

$$\int_\Omega (\Delta u + f) w dx \leqslant 0, \forall w \in C_0^\infty(\Omega) : w \geqslant 0$$

因为 $\overline{(C_0^\infty(\Omega))}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, 所以可得

$$\int_\Omega (\Delta u + f) w dx \leqslant 0, \forall w \in H_0^1 : w \geqslant 0$$

所以在 $H^{-1}(\Omega)$ 的意义下,

$$\Delta u + f \leqslant 0 \Rightarrow -\Delta u \geqslant f$$

另一方面: ② $\forall \theta(x) \in \mathcal{D}(\Omega), \theta(x) \in [0,1]$, 取 $v = \theta(x)\psi(x) + (1-\theta(x))u(x) \in K$, 代入 (4.11) 得

$$\int_\Omega (\Delta u + f)\theta(\psi - u)dx \leqslant 0 \tag{4.12}$$

令 $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\}, \Omega^0 := \{x \in \Omega : u(x) = \psi(x)\}$ 分别称为非接触区域和接触区域.

- 在 Ω^+ 中, 因为 $u > \psi$ a.e., 由 $\theta(x)$ 的任意性以及 (4.12) 可知, $\Delta u + f \geqslant 0$. 再由①的结论 (在 H^{-1} 的意义下 $\Delta u + f \leqslant 0$) 可知, 在 $H^{-1}(\Omega)$ 的意义下, $\Delta u + f = 0$ in Ω^+.

- 在 Ω^0 上, $u=\psi$, 由①的结论知, $\Delta u+f\leqslant 0$

因此障碍不等式问题对应的变分问题可以写成

$$\begin{cases} -\Delta u=f, & in\ \Omega^+ \\ -\Delta u\geqslant f, & in\ \Omega^0 \\ u\geqslant\psi, & in\ \Omega \\ u=0, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

简化后可得到障碍问题对应的数学模型:

$$\begin{cases} -\Delta u-f(u-\psi)=0, & in\ \Omega \\ u=0, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

该模型是一个非线性方程.

4.3.2 Signorini 问题

如果将障碍问题中的 K 取成

$$K:=\{v\in H^1(\Omega):v|_{\Gamma_0}=0,v|_{\Gamma_1}\geqslant 0\},$$

其中 $\Gamma_0\cup\Gamma_1=\partial\Omega$(注意到 K 是个闭凸锥), 此时障碍问题也成为 Signorini 问题(或单边接触问题). 事实上, 取不同的 K, 可以得到不同的力学问题.

下面推导 Signorini 问题的数学模型. 同样由 Green 公式可得

$$\int_\Omega(-\Delta u-f)(v-u)dx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds\geqslant 0 \tag{4.13}$$

①: 对 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 显然有 $u+\phi\in K$, 取 $v=u+\phi$ 代入 (4.13) 式有

$$\int_\Omega(-\Delta u-f)\phi dx\geqslant 0$$

因为 $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}=H_0^1(\Omega)$, 所以在 $H^{-1}(\Omega)$ 的意义下, $-\Delta u-f=0$. 此时 (4.13) 式变成

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds\geqslant 0,\forall v\in K \tag{4.14}$$

② 取 $v=u+\psi$, 其中 $\psi|_{\Gamma_1}\geqslant 0$, 代入 (4.14) 有

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}\psi ds\geqslant 0$$

所以在 Γ_1 上, 在 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 的意义下, $\frac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0$.

③ 取 $v=0$ 代入 (4.14) 可得

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}uds\leqslant 0$$

因为 $u \in K$, 所以 $u|_{\Gamma_1} \geqslant 0$. 结合②有 $u\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ on Γ_1.

综上, Signorini 问题的数学模型为

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega, \\ u = 0, & on\ \Gamma_0, \\ u \geqslant 0, \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0, u\frac{\partial u}{\partial n} = 0, & on\ \Gamma_1. \end{cases}$$

该模型也是非线性的.

4.4 四阶椭圆边值问题

Example 4.1. *考虑双调和方程 (biharmonic equation) 或固支板弯曲问题:*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & in\ \Omega, \\ u = 0, & on \partial\Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.15}$$

其中 $f \in H^{-2}(\Omega)$. 下面对问题 (4.15) 进行变分.

设 $V := \{v \in H^2(\Omega) : v = 0 = \frac{\partial v}{\partial n}$ on $\partial\Omega\}$. 由 Green 公式, 对 $\forall v \in V$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta^2 uvdx &= -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\cdot\nabla vdx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}vds = \int_\Omega \Delta u\Delta vdx - \int_{\partial\Omega}\Delta u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}ds \\ &= \int_\Omega \Delta u\Delta vdx \end{aligned}$$

于是

$$a(u,v) := \int_\Omega \Delta u\Delta vdx = \int_\Omega fvdx := f(v), \forall v \in V$$

$a(\cdot,\cdot)$ 对称性显然, 椭圆性是由 Poincaré 不等式以及 $\forall u \in H_0^2(\Omega)$, 有 $\|\Delta u\|_{0,\Omega} = |u|_{2,\Omega}$ 得到

$$a(v,v) = \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 = |v|_{2,\Omega}^2 \geqslant C\|v\|_{2,\Omega}^2$$

又因为 $f \in H^{-2}(\Omega)$, 因此由 Lax-Milgram 定理可知变分问题有唯一解 $u \in H_0^2(\Omega)$, 且易知解具有正则性. 事实上, 取 $v = u$, 有 $a(u,u) = f(u)$. 由椭圆性可知

$$\alpha\|u\|_{2,\Omega}^2 \leqslant |a(u,u)| = |f(u)| \leqslant C\|f\|_{-2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega}$$

即 $\|u\|_{2,\Omega} \leqslant C\|f\|_{-2,\Omega}$. 特别地, 若 Ω 是凸区域, 则 $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ 且 $\|u\|_{3,\Omega} \leqslant C\|f\|_{0,\Omega}$.

Example 4.2. *薄板弯曲问题 (plate bending problem):*

$$J(u) = \min_{v\in H_0^2(\Omega)} J(v) := \min_{v\in H_0^2(\Omega)}(\frac{1}{2}a(v,v) - f(v))$$

其中

$$a(u,v) := \int_\Omega \Delta u \Delta v dx + (1-\sigma)\int_\Omega (2\partial_{12}u\partial_{12}v - \partial_{11}u\partial_{22}v - \partial_{22}u\partial_{11}v)dx$$

$0 < \sigma < \frac{1}{2}$ 为材料泊松比, 展开可得

$$a(u,v) = \sigma \int_\Omega \Delta u \Delta v dx + (1-\sigma)\int_\Omega (2\partial_{12}u\partial_{12}v + \partial_{22}u\partial_{22}v + \partial_{11}u\partial_{11}v)dx$$

于是由 *Poincaré* 不等式以及 $\|\Delta v\|_{0,\Omega} = |v|_{2,\Omega}$

$$a(v,v) = \sigma\|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 + (1-\sigma)|v|_{2,\Omega}^2 = \sigma|v|_{2,\Omega}^2 + (1-\sigma)|v|_{2,\Omega}^2 \geqslant C\|v\|_{2,\Omega}^2$$

因此 $a(\cdot,\cdot)$ 满足椭圆性, 由 *Lax-Milgram* 定理可知解存在唯一.

Example 4.3. 简支板弯曲问题 *(simply supported plate bending problem):*

考虑

$$a(u,v) := \int_\Omega \Delta u \Delta v dx + (1-\sigma)\int_\Omega (2\partial_{12}u\partial_{12}v - \partial_{11}u\partial_{22}v - \partial_{22}u\partial_{11}v)dx$$

$V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \Rightarrow v|_{\partial\Omega} = 0 = \frac{\partial v}{\partial s}|_{\partial\Omega}$. 与前面不同的是, 这里没有条件 $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$, 变分问题为 $a(u,v) = f(v)$. 由 *Green* 公式以及课本 *P42* 的结论

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta^2 uvdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} vds + \int_{\partial\Omega} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds + (1-\sigma)\int_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n}\frac{\partial v}{\partial s}\right)ds \tag{4.16}$$

再由 $a(u,v) = f(v)$ 知

$$\int_\Omega (\Delta^2 u - f)vdx + \int_{\partial\Omega}\left(\Delta u - (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\frac{\partial v}{\partial n} ds = 0, \forall v \in V$$

取 $\tilde{V} := H_0^2(\Omega) \subseteq V$, 有 $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, 上式可化为

$$\int_\Omega (\Delta^2 u - f)vdx = 0, \forall v \in \tilde{V}$$

由 v 的任意性知 $\Delta^2 u = f$. 于是有

$$\int_{\partial\Omega}\left(\Delta u - (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\frac{\partial v}{\partial n} ds = 0, \forall v \in V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

所以 $\Delta u - (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$ *on* $\partial\Omega$. 最终我们得到简支板弯曲模型

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & in\ \Omega \\ u = 0, & on\ \partial\Omega \\ \Delta u - (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

Example 4.4. 考虑自由板问题*:*

考虑

$$a(u,v) := \int_\Omega \Delta u \Delta v dx + (1-\sigma)\int_\Omega (2\partial_{12}u\partial_{12}v - \partial_{11}u\partial_{22}v - \partial_{22}u\partial_{11}v)dx$$

这里 $V = H^2(\Omega)$. 由 *Green* 公式得到

$$\int_\Omega (\Delta^2 u - f)vdx + \int_{\partial\Omega}(\Delta u - (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2})\frac{\partial v}{\partial n}ds + (1-\sigma)\int_{\partial\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial n}\frac{\partial v}{\partial s}ds - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial \Delta u}{\partial n}vds = 0$$

因为 $\partial\Omega$ 是封闭曲线, 故

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial n}\frac{\partial v}{\partial s}ds + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial n})vds = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial n}v)ds = 0$$

所以 $\forall v \in H^2(\Omega)$

$$\int_\Omega (\Delta^2 u - f)vdx + \int_{\partial\Omega}(\Delta u - (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2})\frac{\partial v}{\partial n}ds - \int_{\partial\Omega}(\frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial n}))vds = 0$$

分别考虑 $v \in H_0^2(\Omega), H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), H^2(\Omega)$, 可得模型

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & in\ \Omega, \\ \Delta u - (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0, & on\ \partial\Omega, \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial n}\right) = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

自由板问题的解并不唯一. 设 $u \in H^2(\Omega)$ 是问题的解, 那么 $u + P_1(\Omega)$ 也是问题的解. 因此考虑取商空间 $V := H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$. 则变分为

$$a(\dot{u},\dot{v}) = (f,\dot{v}), \forall \dot{v} \in V$$

为此, f 还需满足相容性条件*:*

$$(f,q) = 0, \forall q \in P_1(\Omega).$$

比如如果是二维区域, 就有三个限制条件*:* $(f,1) = (f,x) = (f,y) = 0$.

还可以推广到非齐次四阶问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & in\ \Omega \\ u = g_1, & on\ \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $f \in H^{-2}(\Omega), g_1 \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), g_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. 由广义迹定理知, 存在 $u_g \in H^2(\Omega)$, 使得 $\gamma_0 u_g = g_1, \gamma_1 u_g = g_2$.

5 有限元离散

5.1 有限元离散基本特性

考虑变分问题: 求 $u \in V$ 满足

$$a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V \tag{5.1}$$

其中 V 为无穷维 Banach 空间, $a(\cdot,\cdot)$ 是满足 Lax-Milgram 定理的双线性型. 变分问题的有限维逼近是: 构造 V 的有限维子空间 $V_h \subseteq V$, 考虑 Galerkin 逼近

$$\begin{cases} 求 u_h \in V_h, s.t. \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{5.2}$$

根据 Lax-Milgram 定理, (5.2) 存在唯一解. 如果 $a(\cdot,\cdot)$ 还是对称的, 则问题 (5.1) 等价于

$$\begin{cases} 求 u \in V, s.t. \\ J(u) = \inf\limits_{v \in V} J(v) \end{cases}$$

问题 (5.2) 等价于

$$\begin{cases} 求 u_h \in V_h, s.t. \\ J(u_h) = \inf\limits_{v_h \in V_h} J(v_h) \end{cases}$$

该极小化问题称为 Ritz 方法, 其中 $J(v) = \frac{1}{2}a(\cdot,\cdot) - \ell(v)$. 由于问题 (5.2) 等价的极小化问题的解是问题 (5.1) 等价的极小化问题解的子空间, 所以问题 (5.2) 等价的极小化问题的解存在唯一.

根据前面的讨论知, 对于 2 阶问题, 我们往往要求 V 满足 $H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega)$, 而对于 4 阶问题, 则形如 $H_0^2(\Omega) \subseteq V \subseteq H^2(\Omega)$.

Definition 5.1 (有限元三要素)**.**

- *网格剖分: 将区域 $\bar{\Omega}$ 剖分成有限个子区域, 其中任一子区域记为 T, 称为单元, 其全体记为 T_h, 称为网格剖分. 满足如下约定:*
  - *对每个 $T \in T_h, T$ 是闭集, 且内部非空、连续;*
  - *单元边界 ∂T 是 Lipschitz 连续的. 常见的诸如三角形、四边形等;*
  - *$\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{T \in T_h} T$;*
  - *$\forall T_1, T_2 \in T_h$ 且 $T_1 \neq T_2$, 有 $intT_1 \cap intT_2 = \varnothing$(即不重叠);*
  - *$\forall T \in T_h, \partial T$ 或为 $\partial\Omega$ 的一部分, 或为相邻单元 T 的边 (即无悬点). 悬点在几何上看就是某个单元的顶点在另一个单元的边上.*
- *分片多项式 P_T: 对 $T \in T_h$, $P_T := \{$ 定义在 T 上某种多项式全体 $\}$, 满足*

  - 当网格尺寸 $h\to 0$ 时, 保持有限元解得某种收敛性;
  - 保持边界连续性;
  - 计算简单.

- 单元自由度 Σ_T

以上有限元三要素简写为 (T,P_T,Σ_T), 相应的有限元空间 $V_h=\{v_h\in V: v_h|_T\in P_T\}$.

一般自由度选取在顶点、中点上. 节点数决定了有限元离散的规模. 例如对于三角形网格 T_h, 设顶点个数为 N_0, 网格个数为 N_1, 边的个数为 N_2, 考虑内角和, 应有 $N_1\times 180°\approx N_0\times 360°$, 因此 $N_0:N_1\approx 1:2$; 对于三角形单元, 一个单元有 3 条边, 一条边有 2 个单元用, 所以 $3N_1\approx 2N_2$, 故 $N_1:N_2\approx 2:3$. 因此对于三角形网格来说, $N_0:N_1:N_2\approx 1:2:3$.

考虑离散问题 (5.2). 设 V_h 的基函数 $\{\phi_i\}_{i=1}^N, u_h=\sum\limits_{i=1}^N u_i\phi_i$, 分别取 $v_h=\phi_i, i=1,\cdots,N$, 则问题 (5.2) 等价于

$$\sum_{j=1}^N a(\phi_i,\phi_j)u_j=\ell(\phi_i), i=1,\cdots,N$$

写成矩阵形式就是 $KU=F$, 其中 $K=(a_{ij})_{i,j=1}^N:=(a(\phi_i,\phi_j))_{i,j=1}^N, F=(\ell(\phi_i))_{i=1}^N$. 易知若 $\mathrm{supp}\phi_i\cap\mathrm{supp}\phi_i\cap=\varnothing$, 则 $a(\phi_i,\phi_j)=0$, 这为设计基函数使得矩阵 K 稀疏提供了思路.

当前的问题在于 V_h 怎么选. 为保证离散问题 (5.2) 的解存在唯一, 我们要求 $V_h\subseteq V$, 这种有限元方法称为协调元方法. 对于 2 阶问题, 我们需要 $V_h\subseteq H^1(\Omega)$. 这需要 1 阶广义导数存在. 而在高维时, 这一目标很难实现. V_h 是逐片多项式空间, 问题是逐片多项式函数在剖分的每条边上满足何种条件, 才能保证其属于 $H^1(\Omega)$?

Theorem 5.1. *设 $v\in H^1(T),\forall T\in T_h$ 且 $v\in C^0(\bar\Omega)$, 则 $v\in H^1(\Omega)$.*

该定理是说, 分片多项式函数如果在整个空间上 C^0, 那么它在整个空间上是 $H^1(\Omega)$ 的. 在 Sobolev 嵌入中, $C^0(\bar\Omega)$ 与 $H^1(\Omega)$ 互不嵌入.

Proof. $\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 只需证明 $D^\alpha=D^{(1,0)}=\frac{\partial}{\partial x_1}$ 的情形, 即 $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ 存在且 $\frac{\partial v}{\partial x_1}\in L^2(\Omega)$. 由 Green 公式可知

$$\int_\Omega v\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx=\sum_{T\in T_h}\int_T v\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx=-\sum_{T\in T_h}\int_T\frac{\partial v}{\partial x_1}\phi dx+\sum_{T\in T_h}\int_{\partial T}v\cdot n_1\phi ds$$

下面只需证 $\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 有 $\sum\limits_{T\in T_h}\int_{\partial T}v\cdot n_1\phi ds=0$. 对每个 $T\in T_h$, ∂T 要么是 $\partial\Omega$ 的一部分, 要么是相邻单元 T' 的边.

- 若 $\gamma \subseteq \partial T \subseteq \partial\Omega$, 由于 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 故 $\int_\gamma v \cdot n_1 \phi ds = 0$.
- 若 $\gamma \subseteq \partial T$ 是相邻单元 T' 的公共边, 即 $\gamma = T \cap T'$, 则在 γ 上有 $v\phi|_T = v\phi|_{T'}$, 同时 $n_1|_{\partial T} = -n_1|_{\partial T'}$, 因此
$$\int_\gamma v \cdot n_1 \phi|_T ds + \int_\gamma v \cdot n_1 \phi|_{T'} ds = 0$$

综合上述两种情形, 有 $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$
$$\sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} v \cdot n_1 \phi ds = 0$$

因此
$$\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx = -\sum_{T\in T_h} \int_T \frac{\partial v}{\partial x_1} \phi dx$$
记 $g|_T = \frac{\partial v}{\partial x_1}\big|_T$(这是因为 $v \in H^1(T)$), $\forall T \in T_h$, 则 $g \in L^2(\Omega)$ 且在整个 Ω 上 $g = \frac{\partial v}{\partial x_1}$, 所以 $v \in H^1(\Omega)$. 这里用到了分片 L^2 直接可以推出整体 L^2, 因为 L^2 与有限个点处的取值无关. □

该定理告诉我们要使得 v 在整体上具有 1 阶广义导数, 只需要在每一个单元上 1 阶广义可导, 并在整体上连续即可. 而连续的要求要比 1 阶广义可导要低得多.

Theorem 5.2. *若 $v|_T \in C^0(\bar{T}), \forall T \in T_h, v \in H^1(\Omega)$, 则 $v \in C^0(\bar{\Omega})$. 也就是说分片 $C+$ 整体 H^1 可以推出整体 C.*

Proof. 用反证法证明. 若 $v \notin C^0(\bar{\Omega})$, 则 v 在某两个相邻单元 T, T' 上不连续. 换言之, v 在公共边 $T \cap T'$ 上不连续, 从而存在一点 $x \in T \cap T'$, 使得 $v(x)|_T - v(x)|_{T'} \neq 0$. 不妨设 $v(x)|_T - v(x)|_{T'} > 0$. 于是存在小邻域 Ω_r, 使得 $v(x)|_T - v(x)|_{T'} > 0, \forall x \in \gamma := \Omega_r \cap (T \cap T')$.

- 一方面, 作函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 满足 $\mathrm{supp}\varphi \subseteq \Omega_r$ 且在 $\mathrm{supp}\varphi \cap \gamma$ 中 $\varphi > 0$, 有
$$\sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} v\varphi n_1 ds = \int_\gamma v\varphi n_1|_T ds + \int_\gamma v\varphi n_1|_{T'} ds = \int_\gamma (v|_T - v|_{T'})\varphi n_1 ds > 0$$
- 另一方面: 由 Green 公式,
$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} \varphi dx = \sum_{T\in T_h} \int_T \frac{\partial v}{\partial x_1} \varphi dx = -\sum_{T\in T_h} \int_T v \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx + \sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} v\varphi n_1 ds$$

  下证:
$$\sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} v\varphi n_1 ds = 0$$

若 ∂T 的一部分 $\gamma \subseteq \partial\Omega$, 由于 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 于是

$$\int_{\gamma\subseteq\partial\Omega} v\varphi \cdot n_i ds = 0$$

若 ∂T 的一部分 γ 是 T 与相邻单元 T' 的公共边界, 由 $v \in C^0(\bar{\Omega})$, 在公共边界 γ 上, $v\phi|_T = v\phi|_{T'}, n_i^T = -n_i^{T'}$. 因此

$$\int_\gamma v\varphi n_i|_T ds + \int_\gamma v\varphi n_i|_{T'} ds = 0$$

所以

$$\sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} v\varphi n_1 ds = 0$$

二者矛盾. □

Remark 5.1. 由嵌入定理可知, 在二维情形下, $H^1(\Omega) \not\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$. 但对于分片 C^0 函数, 上面的定理告诉我们这样的嵌入是成立的, 因此对于有限元函数 $H^1(\Omega) \Leftrightarrow C^0(\bar{\Omega})$

Corollary 5.1. 对 $\forall v \in H^2(T), \forall T \in T_h, v \in C^1(\bar{\Omega}) \Rightarrow v \in H^2(\Omega)$; 对 $\forall v \in C^1(T), \forall T \in T_h, v \in H^2(\Omega) \Rightarrow v \in C^1(\bar{\Omega})$.

Theorem 5.3. 设 Ω 是多边形区域, 定义在 Ω 上的分片多项式函数, 则 $v \in H^k(\Omega) \Leftrightarrow v \in C^{k-1}(\Omega)$.

5.2 三角形单元

5.2.1 三角形上的线性有限元

首先确定有限元三要素 (T, P_T, Σ_T), 其中 $P_T = P_1(T) = span\{1, x, y\}$, 给定一个三角形 T, 其三个顶点的坐标为 $a_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$. 在 T 上构造一次插值多项式. Σ_T 为三个顶点的函数值, 即 $\Sigma_T = \{u(a_i), i = 1, 2, 3\}$.

设 $u \in P_1(T)$ 满足 Lagrange 插值条件 $u(a_i) = u_i, i = 1, 2, 3$. 设 $u = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y$. 于是有方程

$$\begin{cases} u_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 \\ u_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 y_2 \\ u_3 = \beta_0 + \beta_1 x_3 + \beta_2 y_3 \end{cases}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2|T| \neq 0$$

若 T 取正向, 有 $|T|>0$. 则

$$\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=D^{-1}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$$

于是

$$u(x,y)=(1,x,y)\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=(1,x,y)D^{-1}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=u_1\lambda_1(x,y)+u_2\lambda_2(x,y)+u_3\lambda_3(x,y)$$

其中 $\lambda_i, i=1,2,3$ 为局部基函数 (分别对应节点 a_i). 计算可得

$$\lambda_1(x,y)=\frac{(x_2y_3-y_2x_3)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y}{2|T|}:=\frac{w_1+\eta_1x-\xi_1y}{2|T|}$$

$\eta_i:=y_j-y_k, \xi_i:=x_j-x_k, w_i:=x_jy_k-x_ky_j, (i,j,k)$ 为 $(1,2,3)$ 的轮换. 类似地,

$$\lambda_2(x,y)=\frac{\eta_2x-\xi_2y+w_2}{2|T|}, \lambda_3(x,y)=\frac{\eta_3x-\xi_3y+w_3}{2|T|}$$

可以用统一的记号

$$\lambda_i(x,y)=\frac{w_i+\eta_ix-\xi_iy}{2|T|},\ \lambda_i(a_j)=\delta_{ij}$$

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{3}u(a_i)\lambda_i(x,y), \forall u\in P_1(T)$$

局部插值函数 $\Pi_Tu=\sum_{i=1}^{3}u(a_i)\lambda_i(x,y)$, λ_i 是插值接点 a_i 对应的基函数. 若 $u\in P_1(T)$, 则 $\Pi_Tu=u$. 分别取 $u=1,x,y$, 可得

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3=x\\ \lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3=y\end{cases}$$

解得

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix}1&x&y\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}}=\frac{2|\triangle_{Oa_2a_3}|}{2|T|}=\frac{|T_1|}{|T|} \tag{5.3}$$

用统一的记号

$$\lambda_i=\frac{|T_i|}{|T|}, i=1,2,3$$

称 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 为三角形 T 的面积坐标[4], 即任给一点 $O=(x,y)\in T$, 可按 $\lambda_i=\frac{|T_i|}{|T|}$ 确定 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$; 反之, 给定 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3):\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, 可以按照 (5.3) 的方式求. 这就建立了直角坐标和面积坐标之间的关系:

$$T\ni(x,y)\leftrightarrow\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}:\lambda_i\geqslant 0,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

且满足 $\lambda_i(a_j)=\delta_{ij}$. 在面积坐标下, 三个顶点坐标为

$$a_1=(1,0,0),a_2=(0,1,0),a_3=(0,0,1)$$

重心坐标 $a_0=\frac{1}{3}(1,1,1)$. 在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上 $\lambda_1=0$; 在 $\overrightarrow{a_1a_3}$ 上 $\lambda_2=0$; 在 $\overrightarrow{a_1a_2}$ 上 $\lambda_3=0$; 分别取 $\overrightarrow{a_2a_3}$, $\overrightarrow{a_1a_3}$, $\overrightarrow{a_1a_2}$ 的中点为 $\vec{a_5},\vec{a_6},\vec{a_4}$. 因为 $\overrightarrow{a_4a_6}\parallel\overrightarrow{a_2a_3}$, 所以 λ_1 在 $\overrightarrow{a_4a_6}$ 上是常数, $\lambda_1=1-\frac{|\overrightarrow{a_4a_6}|}{|\overrightarrow{a_2a_3}|}$, 因为 a_4,a_6 都是中点, 所以 $\lambda_1|_{\overrightarrow{a_4a_6}}=\frac{1}{2}$. $a_4=\frac{1}{2}(1,1,0),a_5=\frac{1}{2}(0,1,1),a_6=\frac{1}{2}(1,0,1)$.

下面考虑从 (λ_1,λ_2) 到 (x,y) 平面的线性变换. 因为

$$\lambda_i=\frac{\eta_i x-\xi_i y+w_i}{2|T|}, i=1,2$$

且考虑到面积坐标的实际含义, 所以该变换将 (x,y) 平面的三角形变成 (λ_1,λ_2) 平面的标准三角形, 因为 $\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}=\frac{\eta_i}{2|T|},\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}=\frac{-\xi_i}{2|T|}$, 所以

$$|J_F|=\det\left(\frac{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial(x,y)}\right)=\frac{1}{2|T|},|J_{F^{-1}}|=\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right)=2|T|$$

面积坐标可以带来积分计算上的便利. 例如我们要计算 $\int_T\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\lambda_3^{p_3}dxdy$, 由变量替换,

$$\begin{aligned}
\int_T\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\lambda_3^{p_3}dxdy=&\int_{\hat{T}}\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}(1-\lambda_2-\lambda_3)^{p_3}\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right)d\lambda_1d\lambda_2\\
=&2|T|\int_0^1d\lambda_2\int_0^{1-\lambda_2}\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}(1-\lambda_2-\lambda_3)^{p_3}d\lambda_1\\
=&2|T|\int_0^1d\lambda_2\int_0^{1-\lambda_2}\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}(1-\lambda_2)^{p_3}(1-\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2})^{p_3}d\lambda_1\\
(t:=\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2})=&2|T|\int_0^1d\lambda_2\int_0^1(1-\lambda_2)^{p_1}t^{p_1}\lambda_2^{p_2}(1-\lambda_2)^{p_3}(1-t)^{p_3}(1-\lambda_2)dt\\
=&2|T|\int_0^1(1-\lambda_2)^{p_1+p_3+1}\lambda_2^{p_2}d\lambda_2\int_0^1t^{p_1}(1-t)^{p_3}dt\\
(Euler\text{积分})=&2|T|\frac{(p_1+p_3+1)!p_2!}{(p_1+p_2+p_3+2)!}\cdot\frac{p_1!p_3!}{(p_1+p_3+1)!}\\
=&2|T|\frac{p_1!p_2!p_3!}{(p_1+p_2+p_3+2)!}
\end{aligned}$$

[4]实际上很多软件包都是计算参考元, 而不会直接算原来的元.

5.2.2 线性有限元整体计算

设内部网格节点为 $A_1,\cdots,A_N$, 边界上的节点为 $A_{N+1},\cdots,A_{N+M}$. 自由度为 $u(A_i),i=1,\cdots,N+M$, 整体插值表示为 $u_h=\sum\limits_{i=1}^{N+M}u(A_i)\phi_i$, 其中 $\mathrm{supp}\phi_i=\bigcup\limits_{T\in T_h},A_i\in T$.

以顶点为插值节点的三角形单元最早由 Courant 在 1943 年提出. 因为两点可以决定唯一一元线性函数, 所以由每个三角形顶点为自由度决定的分片一次函数是 C^0 元. 将上述协调元用于非齐次边值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & in\ \Omega\\ u=g, & on\ \partial\Omega\end{cases}$$

对应的变分问题

$$\begin{cases}\text{求}u\in H^1(\Omega):u=g\text{ on }\partial\Omega,\text{ 满足}\\ \int_\Omega\nabla u\cdot\nabla vdx=\int_\Omega fvdx,\forall v\in H_0^1(\Omega).\end{cases}$$

其中 Ω 是多边形区域, 设 T_h 是 Ω 的三角形剖分, 有限元空间

$$\begin{aligned}V_h:=\{&v_h:v_h|_T\in P_1(T),\forall T\in T_h,v_h\text{跨过单元内部顶点连续}^5,\\ &v_h(A_i)=g(A_i),i=N+1,\cdots,N+M\}\\ \Leftrightarrow V_h=\{&v_h:v_h|_T\in P_1(T),\forall T\in T_h,\forall T\in T_h,v_h\in C^0(\bar\Omega),\\ &v_h|_{A_i}=g(A_i),i=N+1,\cdots,N+M\}\\ \Leftrightarrow V_h=\{&v_h:v_h|_T\in P_1(T),\forall T\in T_h,\forall T\in T_h,v_h\in H^1(\Omega),\\ &v_h|_{A_i}=g(A_i),i=N+1,\cdots,N+M\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_h^0:=&\{v_h:v_h|_T\in P_1(T),\forall T\in T_h,v_h\in C^0(\bar\Omega),\\ &v_h|_{A_i}=0,i=N+1,\cdots,N+M\}\\ =&\{v_h:v_h|_T\in P_1(T),\forall T\in T_h,v_h\in C^0(\bar\Omega),v_h|_{\partial\Omega}=0\}\end{aligned}$$

上述问题的有限元逼近为

$$\begin{cases}\text{求}u_h\in V_h,s.t.\\ \int_\Omega\nabla u_h\cdot\nabla v_hdx=\int_\Omega fv_hdx,\forall v_h\in V_h^0\end{cases}$$

设 $u_h=\sum\limits_{i=1}^{N}u(A_i)\phi_i+\sum\limits_{i=N+1}^{N+M}g(A_i)\phi_i$, 其中未知量为 N 个内部的节点值. 逼近问题可写成

$$\sum_{j=1}^{N}u_j\int_\Omega\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_jdxdy+\sum_{j=N+1}^{N+M}g(A_j)\int_\Omega\nabla\phi_j\cdot\nabla\phi_idx=\int_\Omega f\phi_idx,i=1,\cdots,N$$

设 $K_{ij}:=\int_\Omega\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_jdx,i,j=1,\cdots,N$. 若 $\mathrm{supp}\phi\cap\mathrm{supp}\phi_j=\varnothing$, 则 $K_{ij}=0$; 换言之, 若 A_i,A_j 共用单元时, $K_{ij}\neq0$.

5.2.3 二次三角形 Lagrange 元

对椭圆问题, 二次或三次有限元比 DG 方法更好, DG 方法是有限元方法 6 倍自由度.

- T 为三角形;
- $P_T = P_2(T)$ =span$\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ =span$\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \lambda_2\lambda_3\}$, 其中 $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = 1, \dim P_T = 6$.
- $\Sigma_T = \{u(a_i), i = 1, 2, 3; u(a_{ij}), i \neq j\}, \dim \Sigma_T = 6$.

首先考虑 (T, P_T, Σ_T) 的适定性, 有两种方式判别:

①: 设 $\Pi_T u = \sum\limits_{i=1}^{3} \beta_i \lambda_i^2 + \sum\limits_{i\neq j} \beta_{ij}\lambda_i\lambda_j$, 利用 $\forall u \in P_2(T), \Pi_T u = u$, 联立方程

$$\begin{cases} u(a_i) = \Pi_T u(a_i), i = 1, 2, 3, \\ u(a_{ij}) = \Pi_T u(a_{ij}), i \neq j \end{cases}$$

待定系数法求出 β_i, β_{ij}. 需要证明插值矩阵的行列式非零, 从而插值存在唯一.

② 对 $\forall u \in P_2(T)$, 令方程的右端常数项为 0 即 $\Sigma_T = 0$, 证明只有零解. 因为 $u|_{\overrightarrow{a_2a_3}} \in P_2(\overrightarrow{a_2a_3})$ 且有 $u(a_2) = u(a_3) = u(a_{23}) = 0$, 所以 $u|_{\overrightarrow{a_2a_3}} \equiv 0$. 因为 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上 $\lambda_1 = 0$, 由 Bezout 定理, u 比含 λ_1 因子. 同理可证 u 必含 λ_2, λ_3 因子. 于是 $u = a\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 又因为 $u \in P_2(T)$, 所以 $u \equiv 0$.

下面具体求基函数: 设 $\Pi_T u = \sum\limits_{i=1}^{3} u(a_i)\phi_i + \sum\limits_{i\neq j} u(a_{ij})\phi_{ij}$.

- $\phi_i, i = 1, 2, 3$: 以 $i = 1$ 为例, 令 $\phi_1(a_1) = 1$, $\phi_1(a_2) = \phi_1(a_3) = \phi_1(a_{ij}) = 0, i \neq j$. 因为 $\phi_1(a_2) = \phi_1(a_3) = \phi_1(a_{23}) = 0$, 所以 $\phi_1 \in \lambda_1 P_1(T)$. 又因为 $\phi_1(a_{12}) = \phi_1(a_{13}) = 0$, 且在 $\overrightarrow{a_{12}a_{13}}$ 上 $\lambda_1 \equiv \frac{1}{2}$, 因此 $\phi_1|(\overrightarrow{a_{12}a_{13}}) \in \frac{1}{2}P_1(T)$ 且 $\phi_1|_{\overrightarrow{a_{12}a_{13}}} \equiv 0$. 因此 ϕ_1 必含 $(\lambda_1 - \frac{1}{2})$ 因子, 所以 $\phi_1 = a\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{2})$, 又因为 $\phi_1(a_1) = 1$, 因此有 $a = 2$. 故

  $$\phi_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

  同理 $\phi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), i = 2, 3$.

- $\phi_{ij}, i \neq j$, 以 ϕ_{12} 为例. 令 $\phi_{12}(a_{12}) = 1, \phi_{12}(a_{13}) = \phi_{12}(a_{23}) = \phi_{12}(a_i) = 0, i = 1, 2, 3$. 因为 $\phi_{12}|_{\overrightarrow{\lambda_i=0}} = 0$, 故 ϕ_{12} 必含 $\lambda_i, i = 1, 2$ 因子. 于是 $\phi_{12} = a\lambda_1\lambda_2$. 又因为 $\phi_{12}(a_{12}) = 1$, 所以 $a = 4$, 故 $\phi_{12} = 4\lambda_1\lambda_2$. 同理 $\phi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, i \neq j$.

  由自由度的选取以及 $P(T) = P_2(T)$ 知, 该元是整体 $H^1(\Omega)$ 的, 从而也是整体 $C^0(\bar{\Omega})$ 的.

最后考虑总体离散规模. 设有 N 个网格, 那么

- 一次元: 因为自由度都在顶点上, 所以未知量个数 $\approx N_v = \frac{N}{2}$;
- 二次元: 除了顶点上的自由度, 每条边上都有一个未知量, 所以未知量个数 $\approx N_v + N_E \approx \frac{N}{2} + \frac{N}{3} = 2N$. 顶点都只用了一次, 一个中点用一条边.

5.2.4 三次 Lagrange 元

- T 为三角形;
- $P_T = P_3(T), \dim P_3(T) = 10$;
- $\Sigma_T = \{u(a_i), i = 1,2,3; u(a_{iij}), i,j = 1,2,3, i \neq j; u(a_0)\}$, a_0 是三角形的重心. a_{iij} 是边 $\overrightarrow{a_i a_j}$ 上的靠近 a_i 的三等分点. $\dim \Sigma_T = \frac{(3+1)*(3+2)}{2} = 10$.

其中三次多项式可表示为

$$P_3(T) = span\{\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_1^2\lambda_2, \lambda_1\lambda_2^2, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3^2, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_2\lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}.$$

首先验证其适定性. 对 $\forall u \in P_3(T)$, 令 $\Sigma_T = 0$, 因为 $u(a_2) = u(a_3) = u(a_{223}) = u(a_{332}) = 0$. 所以 u 必含 λ_1 因子. 同理, u 必含 λ_2, λ_3 因子. 又因为 $u(a_0) = 0, a_0$ 是重心. 所以 $a = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

再求插值基函数. 设 $\Pi_T u = \sum_{i=1}^{3} u(a_i)\phi_i + \sum_{i\neq j}^{3} u(a_{iij})\phi_{iij} + u(a_0)\phi_0$

- $\phi_i, i = 1,2,3$: 以 $i = 1$ 为例. 令 $\phi_1(a_1) = 1, \phi_1(a_0) = \phi_1(a_2) = \phi_1(a_3) = 0, \phi_1(a_{iij}) = 0, \forall i \neq j$. 因为在 $\overrightarrow{a_2 a_3}$ 上有 4 个点取值为 0, 所以 ϕ_1 必含 λ_1 因子, $\phi \in \lambda_1 P_2(T)$. 又因为在 $\overrightarrow{a_{221} a_{331}}$ 上有 3 个点取值为 0, 所以 ϕ_1 必含 $(\lambda_1 - \frac{1}{3})$ 因子. 类似地, 可以证明 ϕ_1 必含 $(\lambda_1 - \frac{2}{3})$ 因子. 所以 $\phi_1 = a\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})(\lambda_1 - \frac{2}{3})$, 由 $\phi_1(a_1) = 1$ 得到 $a = \frac{9}{2}$. 所以 $\phi_1 = \frac{9}{2}\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{3})(\lambda_1 - \frac{2}{3})$. 类似有
$$\phi_i = \frac{9}{2}\lambda_i(\lambda_i - \frac{1}{3})(\lambda_i - \frac{2}{3}), i = 2, 3.$$
- $\phi_{iij}, i \neq j$: 以 ϕ_{112} 为例, 令 $\phi_{112}(a_{112}) = 1, \phi_{112}(a_i) = 0, \forall i = 1,2,3$. $\phi_{112}(a_{iij}) = 0, \forall i \neq j$, 并且 $i = 1$ 时, $j \neq 2$. 可以得到 $\phi_{112} = a\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \frac{1}{3})$. 由 $\phi_{112}(a_{112}) = 1$, 所以 $a = \frac{27}{2} \Rightarrow \phi_{112} = \frac{27}{2}\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \frac{1}{3})$. 同理
$$\phi_{iij} = \frac{27}{2}\lambda_i\lambda_j(\lambda_i - \frac{1}{3}), i \neq j$$
- ϕ_0: 类似可得 $\phi_0 = a\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 因为 $\phi_0(a_0) = 1$, 所以 $a = 27$. 故 $\phi_0 = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 由自由度的选取以及 $P(T) = P_3(T)$ 可知, 该元是整体 $H^1(\Omega)$ 的, 从而也是整体 $C^0(\Omega)$.

最后考虑计算规模. 自由度有 (1) 所有顶点; (2) 每条边上有两个; (3) 每个单元有一个重心. 因此未知量个数 $\approx N_v + 2N_E + N \approx 4.5N$.

5.2.5 受限制的三次 Lagrange 元

受限制 (不完全) 的三次 Lagrange 元和三次 Lagrange 元的区别在于去掉形心自由度 a_0, 使得未知量个数 $\approx \frac{7}{2}N$. 这样一个单元 T 上的自由度就是 9 个.

我们首先要对二次多项式能够精确插值[6]. 二次多项式一般可表示为

$$P_2(T) \ni p = b_1\lambda_1^2 + b_2\lambda_2^2 + b_3\lambda_3^2 + b_4\lambda_1\lambda_2 + b_5\lambda_1\lambda_3 + b_6\lambda_2\lambda_3$$

$$\begin{aligned}
\text{由于}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1) =&(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)p \\
=&b_1\lambda_1^3 + (b_1+b_4)\lambda_1^2\lambda_2 + (b_1+b_5)\lambda_1^2\lambda_3 \\
&+ b_2\lambda_2^3 + (b_2+b_6)\lambda_2^2\lambda_3 + (b_2+b_4)\lambda_1\lambda_2^2 \\
&+ b_3\lambda_3^3 + (b_3+b_5)\lambda_1^2\lambda_3^2 + (b_3+b_6)\lambda_2\lambda_3^2 \\
&+ (b_4+b_5+b_6)\lambda_1\lambda_2\lambda_3.
\end{aligned}$$

假设一般的受限制插值函数 $\Pi_T u \in P_3(T)$ 有表达式

$$\begin{aligned}
\Pi_T u =& a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_2^3 + a_3\lambda_3^3 \\
&+ a_4\lambda_1^2\lambda_2 + a_5\lambda_1^2\lambda_3 + a_6\lambda_1\lambda_2^2 + a_7\lambda_1\lambda_3^2 + a_8\lambda_2^2\lambda_3 + a_9\lambda_2\lambda_3^2 + a_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}$$

若 $u \in P_2(T)$, 则要求 $\Pi_T u = u$, 即有

$$\begin{cases}
a_1 = b_1, \\
a_2 = b_2, \\
a_3 = b_3, \\
a_{10} = b_4 + b_5 + b_6, \\
a_4 = b_1 + b_4, \\
a_5 = b_1 + b_5, \\
a_6 = b_2 + b_4, \\
a_7 = b_3 + b_5, \\
a_8 = b_2 + b_6, \\
a_9 = b_3 + b_6,
\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_4 + a_5 + \cdots + a_9 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_{10}) \tag{5.4}$$

这样我们就得到除了 9 个自由度之外的第 10 个条件. 求插值函数时就要求

$$\begin{cases}
\Pi_T u(a_i) = u(a_i), i = 1,2,3, \\
\Pi_T u(a_{iij}) = u(a_{iij}), i \neq j \\
(5.4)\text{式}
\end{cases}$$

考虑受限三次 Lagrange 元的适定性. 设 $u \in P_3(T), \Sigma_T = 0$, 且 (5.4) 成立. 由于 u 在三条边上分别有四个点为 0, 所以 $u = a\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 再由 (5.4) 式知 $a = 0$. 因此 $u = 0$.

[6]有限元的精髓在于插值 Π_T 对尽可能高次多项式成立.

由自由度的选取以及 $P(T)=P_3(T)$, 可知该元是整体 $H^1(\Omega)$ 的, 从而整体 $C^0(\bar{\Omega})$. 下求插值基函数. 设 $\Pi_T u=\sum_{i=1}^{3} u(a_i)\phi_i^*+\sum_{i\neq j} u(a_{iij})\phi_{iij}^*$

- $\phi_i^*, i=1,2,3$: 以 $i=1$ 为例, 令 $\phi_1^*(a_1)=1, \phi_1^*(a_i)=1, i=2,3, \phi_1^*(a_{iij})=0, \forall i\neq j$. 我们宣称 ϕ_1^* 可由完全三次 Lagrange 元对应的基函数以及 (5.4) 式确定. 由于 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 在三条边上为 0, 所以可以加入校正, 设

$$
\begin{aligned}
\phi_1^* =&\frac{9}{2}\lambda_1(\lambda_1-\frac{1}{3})(\lambda_1-\frac{2}{3})+a\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\
=&\frac{1}{2}\lambda_1(3\lambda_1-1)(3\lambda_1-2)+a\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\
=&\frac{1}{2}\lambda_1(2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3)+a\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\
=&\lambda_1^3+\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_3^2-\frac{5}{2}\lambda_1^2\lambda_2-\frac{5}{2}\lambda_1^2\lambda_3+(2+a)\lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}
$$

  显然这样的 ϕ_i^* 已经满足前 9 个条件. 再由 (5.4) 式可得 $a=-\frac{9}{2}\Rightarrow \phi_1^*=\phi_1-\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 同理

$$
\phi_i^*=\phi_i-\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3, i=2,3.
$$

- $\phi_{iij}^*, i\neq j$: 以 ϕ_{112}^* 为例, 设

$$
\begin{aligned}
\phi_{112}^* =&\phi_{112}+b\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{27}{2}\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\frac{1}{3})+b\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\
=&\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1-1)+b\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+b\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\
=&9\lambda_1^2\lambda_2-\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2^2-\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3+b\lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}
$$

  显然 ϕ_{112}^* 已经满足前 9 个条件. 再由 (5.4) 式, 可得 $b=\frac{27}{4}\Rightarrow \phi_{112}^*=\phi_{112}+\frac{27}{4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 同理

$$
\phi_{iij}^*=\phi_{iij}+\frac{27}{4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3
$$

5.2.6 完全三次 Hermite 元

Lagrange 元与 Hermite 元的区别在于, 后者自由度中含有导数信息. 由于三角形网格顶点: 单元: 边 $\approx 1:2:3$, 因此边上的 1 个自由度相当于 3 个顶点的自由度, Lagrange 元显然不划算. 而 Hermite 元仅以顶点为插值节点, 计算量较小, 但相对而言基函数的表示就比较麻烦.

设 $P_T=P_3(T)$, $\Sigma_T=\{u(a_i), \frac{\partial u}{\partial x}(a_i), \frac{\partial u}{\partial y}(a_i), i=1,2,3; u(a_0)\}$. 于是未知量个数 $\approx 3N_v+N\approx\frac{5}{2}N$ (相比而言同样次数的 Lagrange 元是 $\frac{9}{2}N$, 但二者精度却是一样的).

考虑完全三次 Hermite 元的适定性. 当 $u\in P_3(T), \Sigma_T=0$ 时, 要证明 $u\equiv 0$.

- 由 $\lambda_3 = 1-\lambda_1-\lambda_2$ 知, 考虑 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上, $u|_{\overrightarrow{a_2a_3}} = u|_{\lambda_1=0} \in P_3(\lambda_2)$. 由 $u(a_2) = u(a_3) = 0$ 知, $u(\lambda_2 = 0) = u(\lambda_2 = 1) = 0$, 所以在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上, $u|_{\overrightarrow{a_2a_3}}$ 必含 $\lambda_2, (1-\lambda_2)$ 因子.

- 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}(a_2) = \frac{\partial u}{\partial y}(a_2) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_3) = \frac{\partial u}{\partial y}(a_3) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \lambda_2} \in P_2(\lambda_2)$ 所以

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_2}(a_i) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_2}(a_i) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda_2}(a_i) = 0, i = 2, 3$$

  即 $\frac{\partial u}{\partial \lambda_2}\big|_{\overrightarrow{a_2a_3}}(a_2) = \frac{\partial u}{\partial \lambda_2}\big|_{\overrightarrow{a_2a_3}}(a_3) = 0 = \frac{\partial u}{\partial \lambda_2}\big|_{\overrightarrow{a_2a_3}}(\lambda_2 = 0) = \frac{\partial u}{\partial \lambda_2}\big|_{\overrightarrow{a_2a_3}}(\lambda_2 = 1)$, 所以在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上, $\frac{\partial u}{\partial \lambda_2}|_{\overrightarrow{a_2a_3}}$ 必含 $\lambda_2, (1-\lambda_2)$ 因子. 故在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上, $u|_{\overrightarrow{a_2a_3}}$ 必含 $\lambda_2^2, (1-\lambda_2)^2$ 因子. 因此 $u|_{\overrightarrow{a_2a_3}} = a\lambda_2^2(1-\lambda_2)^2$, 又因为 $u|_{\overrightarrow{a_2a_3}} \in P_3(\lambda_2)$, 故 $u|_{\lambda_1=0} \equiv 0$, 即 u 必含 λ_1 因子. 同理 u 必含 λ_2, λ_3 因子. 故 $u = a\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

- 又因为 $u(a_0) = 0$, 因此有 $a = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

由自由度的选取以及 $P(T) = P_3(T)$, 可知该元是整体 $H^1(\Omega)$ 的, 从而也是整体 C^0 的.

下面求插值基函数: 设

$$\begin{aligned}\Pi_T u =& a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_2^3 + a_3\lambda_3^3 \\ &+ a_4\lambda_1^2\lambda_2 + a_5\lambda_1\lambda_2^2 + a_6\lambda_2^2\lambda_3 + a_7\lambda_2\lambda_3^2 + a_8\lambda_3^2\lambda_1 + a_9\lambda_3\lambda_1^2 + a_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = -\xi_2\frac{\partial}{\partial x} - \eta_2\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda_2} = \xi_1\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial}{\partial y}$$

原来的导数插值条件可以改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \lambda_1}(a_i) =& -\xi_2\frac{\partial u}{\partial x}(a_i) - \eta_2\frac{\partial u}{\partial y}(a_i) \\ =& -\xi_2\frac{\partial \Pi_T u}{\partial x}(a_i) - \eta_2\frac{\partial \Pi_T u}{\partial y}(a_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \lambda_2}(a_i) =& \xi_1\frac{\partial u}{\partial x}(a_i) + \eta_1\frac{\partial u}{\partial y}(a_i), i = 1, 2, 3 \\ =& \xi_1\frac{\partial \Pi_T u}{\partial x}(a_i) + \eta_1\frac{\partial \Pi_T u}{\partial y}(a_i), i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

又因为插值精确成立, 有 $\Pi_T u(a_i) = u(a_i), i = 0, 1, 2, 3$.

基于以上 10 个方程, 就可以求出 $a_1, \cdots, a_{10}$, 再重新组合可以得到基函数.

$$\Pi_T u = \sum_{i=1}^{3}\left(u(a_i)Q_i + \frac{\partial u}{\partial \lambda_1}(a_i)R_i\frac{\partial u}{\partial \lambda_2}(a_i)S_i\right) + u(a_0)Q_c$$

其中

$$Q_i = \lambda_i^2(3-2\lambda_i) - 7\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ Q_c = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$
$$R_1 = \lambda_1^2(\lambda_1 - 1) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ R_2 = \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ R_3 = \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$
$$S_1 = \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ S_2 = \lambda_2^2(\lambda_2 - 1) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ S_3 = \lambda_3^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

用面积坐标与直角坐标的变换, 可以得到直角坐标下的基函数

$$\tilde{Q}_i = Q_i.i = 1,2,3,\ \tilde{Q}_c = Q_c,$$
$$\tilde{R}_i = -\xi_2 R_i + \xi_1 S_i,\ \tilde{S}_i = -\eta_2 R_i + \eta_1 S_i, i = 1,2,3,$$
$$\Pi_T u = \sum_{i=1}^{3}\left(u(a_i)\tilde{Q}_i + \frac{\partial u}{\partial x}(a_i)\tilde{R}_i + \frac{\partial u}{\partial y}\tilde{S}_i\right) + u(a_0)\tilde{Q}_c$$

5.2.7 不完全三次 Hermite 元 (Zienkiewcz 元)

$\Sigma_T = \{u(a_i), \frac{\partial u}{\partial x}(a_i), \frac{\partial u}{\partial y}(a_i), i = 1,2,3\}$, 并且满足 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_{10})$. $P_T = P_3(T)$, 此时未知量的个数 $\approx \frac{3}{2}N$, 约为同次数的完全 Lagrange 元的 $\frac{1}{3}$.

考虑不完全三次 Hermite 元的适定性 (类似于完全三次 Hermite 元). 对 $\forall u \in P_3(T)$, 当 $u(a_i) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_i) = \frac{\partial u}{\partial y}(a_i) = 0, i = 1,2,3$ 时, 可推出 $u = a\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 由 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_{10})$ 可得 $a = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

由自由度的选取以及 $P(T) = P_3(T)$, 可知该元是整体 $H^1(\Omega)$ 的, 从而整体 C^0.

下面求插值基函数. 我们根据式 $a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9 = 2(a_1+a_2+a_3+a_{10})$ 校正完全三次 Hermite 元中的 Q_i, R_i, S_i 中 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 的系数即可. 设不完全三次 Hermite 元插值函数为

$$\Pi_T u = \sum_{i=1}^{3} u(a_i)\hat{Q}_i + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial \lambda_1}(a_i)\hat{R}_i + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial \lambda_2}(a_i)\hat{S}_i$$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 称为泡函数, 设 $\hat{Q}_1 = Q_1 + a\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 其中 a 待定.(因为 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 在 a_i 处为 0, 且 $\frac{\partial(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)}{\partial\lambda_i}(a_i) = 0.$) 计算可得 $\hat{Q}_1 = \lambda_1^3 + 3\lambda_1^2\lambda_2 + 3\lambda_1^2\lambda_3 + (a-7)\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 再由 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_{10})$ 可知 $a = 9 \Rightarrow \hat{Q}_1 = Q_1 + 9\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1^2(3-2\lambda_1) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 同理 $\hat{Q}_i = \lambda_i^2(3-2\lambda_i) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3, i = 2,3$. 用类似的方法, 可以得到

$$\hat{R}_1 = \lambda_1^2(\lambda_1 - 1) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ \lambda_1\lambda_2^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ \hat{R}_3 = \lambda_1\lambda_3^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$
$$\hat{S}_1 = \lambda_1^2\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ \hat{S}_2 = \lambda_2^2(\lambda_2 - 1) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ \hat{S}_3 = \lambda_3^2\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

再通过直角坐标与面积坐标的变换公式, 得到 (x, y) 坐标下的基函数表达式. 不完全三次 Hermite 元的优点在于可以用来求解四阶问题, 且整体自由度仅有 $\frac{3}{2}N$.

5.3 矩形单元

5.3.1 双线性矩形单元

设矩形单元 $T=\square_{a_1a_2a_3a_4}$, 其中 $a_i=(x_i.y_i), i=1,2,3,4$, 重心为 (x_0,y_0). 参考元 $\hat{T}=[-1,1]^2$. 线性双射 $F_T:\hat{T}\to T$ 定义为 $x=h_1\xi+x_0, y=h_2\eta+y_0$. 我们仅在参考元 $\hat{T}$ 上构造与分析四边形单元, 之后再通过 F_T 转换到一般单元 T 上.

考虑双线性元. 自由度为 $\hat{\Sigma}=\{\hat{u}_i:=\hat{u}(\hat{a}_i), i=1,2,3,4\}$, 形函数空间 $Q_1(\hat{T})=span\{1,\xi,\eta,\xi\eta\}$. 一般的双 k 次函数空间为 $Q_k=span\{\xi^i\eta^j, 0\leqslant i,j\leqslant k\}$. 注意 P_k 与 Q_k 的不同, $\dim P_k=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, $\dim Q_k=(k+1)^2$.

下面求插值基函数. 设 $\hat{\Pi}\hat{u}=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta$. 由插值条件, 得方程

$$\begin{cases}\hat{u}_1=a_1-a_2-a_3+a_4,\\ \hat{u}_2=a_1+a_2-a_3-a_4,\\ \hat{u}_3=a_1+a_2+a_3+a_4,\\ \hat{u}_4=a_1-a_2+a_3-a_4,\end{cases}$$

解出 $a_i, i=1,2,3,4$ 即可. 事实上, 我们也可以根据这个元的特点直接计算基函数. 记 $\hat{a}_1=(-1,-1), \hat{a}_2=(1,-1), \hat{a}_3=(1,1), \hat{a}_4=(-1,1)$. 设 $\hat{\Pi}\hat{u}=\sum\limits_{i=1}^{4}\hat{u}_i\hat{\phi}_i$, 其中 $\hat{\phi}_i(\hat{a}_j)=\delta_{ij}$. 将 $\hat{\phi}_3$ 限制在 $\overrightarrow{\hat{a}_3\hat{a}_4}$, $\phi_1\in Q_1(\xi)$, 由 $\phi_1(\hat{a}_3)=\phi_1(\hat{a}_4)=0$ 知, $\phi_1|_{\eta=1}=0$, 所以 ϕ_1 必含 $(1-\eta)$ 因子. 同理, 在 $\overrightarrow{\hat{a}_2\hat{a}_3}$ 上, 由 $\phi_1(\hat{a}_2)=\phi_1(\hat{a}_3)=0$ 知, $\phi_1|_{\xi=1}=0$, 所以 ϕ_1 必含 $(1-\xi)$ 因子. 所以 $\phi_1=a(1-\xi)(1-\eta)$. 由 $\phi_1(\hat{a}_1)=1$, 知 $a=\frac{1}{4}$. 所以 $\phi_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$.

同理可得

$$\hat{\phi}_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \hat{\phi}_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \hat{\phi}_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

而在一般矩形上, 通过变换可得 $\Pi u=\sum\limits_{i=1}^{4}u(a_i)\phi_i(x,y)$, 其中

$$\phi_1(x,y)=\frac{(x-x_2)(y-y_4)}{(x_1-x_2)(y_1-y_4)}, \phi_2(x,y)=\frac{(x-x_1)(y-y_4)}{(x_2-x_1)(y_2-y_4)}$$

$$\phi_3(x,y)=\frac{(x-x_4)(y-y_1)}{(x_3-x_4)(y_3-y_1)}, \phi_4(x,y)=\frac{(x-x_2)(y-y_1)}{(x_4-x_2)(y_4-y_1)}$$

该元是 C^0 的, 因为两个相邻单元重合的边上是线性函数, 端点函数值相同, 所以边界上处处相同.

5.3.2 双二次矩形元

双二次矩形元自由度比三角形多, 精度高.

记 $\hat{a}_1=(-1,-1), \hat{a}_2=(1,-1), \hat{a}_3=(1,1), \hat{a}_4=(-1,1), \hat{a}_5=(0,-1), \hat{a}_6=(1,0), \hat{a}_7=(0,1), \hat{a}_8=(-1,0), \hat{a}_9=(0,0)$. 设 $\hat{\Sigma}=\{\hat{u}(\hat{a}_i), i=1,2,\cdots,9\}$, $Q_2(\hat{T})$=span$\{1,\xi,\eta,\xi\eta,\xi^2,\eta^2,\xi^2\eta,\xi\eta^2,\xi^2\eta^2\}$.

考虑该元适定性. 设 $\hat{u}\in Q_2(\hat{T})$, 且 $\hat{\Sigma}=0$. 则 $\hat{u}$ 必含 $(1\pm\xi),(1\pm\eta)$ 因子, 于是 $\hat{u}=a(1-\xi^2)(1-\eta^2)$. 又因 $\hat{u}(\hat{a}_9)=0$, 所以 $\hat{u}\equiv 0$.

由自由度的选取以及 $P(T)=P_3(T)$, 可知该元是整体 $H^(\Omega)$ 的, 从而也整体 C^0.

下面求插值基函数. 设 $\hat{\Pi}\hat{u}\sum_{i=1}^{9}\hat{u}(\hat{a}_i)\hat{\psi}_i(\xi,\eta)$. 因为 $\hat{\psi}(\hat{a}_1)=1,\hat{\psi}(\hat{a}_i)=0,i=2,3,\cdots,9$, 所以 $\hat{\psi}_1=a(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$, 再代入 $\hat{a}_1$ 可得 $a=\frac{1}{4}$, 于是 $\hat{\psi}_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$. 同理可得

$$\begin{gathered}\hat{\psi}_2=\tfrac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1-\eta),\hat{\psi}_3=\tfrac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1+\eta),\hat{\psi}_4=-\tfrac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1+\eta)\\ \hat{\psi}_5=-\tfrac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1-\eta),\hat{\psi}_6=\tfrac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2),\hat{\psi}_7=\tfrac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1+\eta)\\ \hat{\psi}_8=-\tfrac{1}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta^2),\ \hat{\psi}_9=(1-\xi^2)(1-\eta^2).\end{gathered}$$

考虑计算规模. 因为矩形元自由度比例约为 $N_v:N_T:N_E\approx 1:1:2$, 所以双线性元整体自由度 $\approx N_v\approx N_T$; 双二次元整体自由度 $\approx N_v+N_E+N_T\approx 4N_T$; 双 k 次元整体自由度 $\approx N_v+(k-1)N_E+(k-1)^2N_T$.

5.4 四阶问题的协调有限元

协调元要求有限元空间 $V_h\subseteq H^2(\Omega)\Leftrightarrow V_h\subseteq C^1(\bar{\Omega})\Leftrightarrow V_h\subseteq C^0(\bar{\Omega})$ 且 v_h 的法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 连续. $V_h\subseteq C^1(\bar{\Omega})$, 非常难做到, 最简单的都得是 P_5.

四阶问题倾向于非协调元, 有限元很难提高光滑性, 所以四阶问题很少.

5.4.1 Argyris 三角形元

Argyris 三角形元是最低阶的 $H^2(\Omega)$ 协调元. 给定三角形 $\triangle_{a_1a_2a_3}$, 分别去 a_1a_2,a_2a_3,a_1a_3 的中点为 a_4,a_5,a_6. 记边 a_1a_2 为 ℓ_3, 边 a_1a_3 为 ℓ_2, 边 a_2a_3 为 ℓ_1.

- T 为三角形
- $P_T=P_5(T),\dim P_5(T)=\frac{(5+1)(5+2)}{2}=21$;
- $\Sigma_T=\{u(a_i),\frac{\partial u}{\partial x}(a_i),\frac{\partial u}{\partial y}(a_i),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a_i),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a_i),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(a_i),i=1,2,3;\frac{\partial u}{\partial n}(a_i),i=4,5,6\}$.

考虑适定性. 设 $\Sigma_T=0,u\in P_5(T)$. 因为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\Rightarrow u|_{\lambda_1=0}\in P_5(\lambda_2)$, 且

$$u|_{\lambda_1=0}(\lambda_2=0)=u|_{\lambda_1=0}(\lambda_2=1)=0$$

故 $u|_{\lambda_1=0}$ 必含 $\lambda_2,1-\lambda_2$ 因子. 由

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda_2}(\lambda_2=0)=\frac{\partial u}{\partial x}(\lambda_2=0)\frac{\partial x}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial u}{\partial y}(\lambda_2=0)\frac{\partial y}{\partial\lambda_2}$$

所以

$$\frac{\partial u|_{\lambda_1=0}}{\partial \lambda_2}(\lambda_2=0)=\frac{\partial u|_{\lambda_1=0}}{\partial \lambda_2}(\lambda_2=1)=0$$

故 $u|_{\lambda_1=0}$ 必含 $\lambda_2^2,(1-\lambda_2)^2$ 因子. 又因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda_2^2}(\lambda_2=0)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda_2=0)\big(\frac{\partial x}{\partial \lambda_2}\big)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda_2=0)\big(\frac{\partial y}{\partial \lambda_2}\big)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(\lambda_2=0)\frac{\partial x}{\partial \lambda_2}\frac{\partial y}{\partial \lambda_2}$$

故

$$\frac{\partial^2 u|_{\lambda_1=0}}{\partial \lambda_2^2}(\lambda_2=0)=\frac{\partial^2 u|_{\lambda_1=0}}{\partial \lambda_2^2}(\lambda_2=1)=0$$

故 $u|_{\lambda_1=0}$ 必含 $\lambda_2^3,(1-\lambda_2)^3$ 因子, 又因为 $u|_{\lambda_1=0}\in P_5(T)$, 故 $u|_{\lambda_1=0}\equiv 0$, 因此 u 必含 λ_1 因子. 类似可得 u 必含 λ_2,λ_3 因子.

由于在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上为常数 0, 因此 $\frac{\partial u}{\partial \tau_1}|_{\lambda_1=0}=0$, 其中 τ_1 是 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 的切向.

下证 $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\lambda_1=0}=0$, 其中 n_1 是 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 的法向.

- 由于 $u|_{\lambda_1=0}\in P_5(\lambda_2)$, 所以 $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\lambda_1=0}\in P_4(\lambda_2)$(五次多项式求一次导数变成四次.). 记 $r(\lambda_2)=\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\overrightarrow{a_2a_3}}$. 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}(a_3)=\frac{\partial u}{\partial y}(a_3)=0$, 由复合函数求导的链式法则, $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\lambda_1=0}(\lambda_2=0)=0$. 同理 $\frac{\partial u}{\partial x}(a_2)=\frac{\partial u}{\partial y}(a_2)=0$, 由复合函数求导的链式法则, $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\lambda_1=0}(\lambda_2=1)=0$. 由自由度的选取知 $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\lambda_1=0}(\lambda_2=\frac{1}{2})=0$.
- 再由复合函数的求导链式法则知, $\frac{\partial r}{\partial \lambda_2}|_{\lambda_1=0}(\lambda_2=0)=\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda_2\partial n_1}(\lambda_2=0)=0$. 同理 $\frac{\partial r}{\partial \lambda_2}|_{\lambda_1=0}(\lambda_2=1)=0$

结合上述两条可知, $r(\lambda_2)\equiv 0$, 即在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上 $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\lambda_1=0}\equiv 0$. 又因为 $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\tau_1=0}\equiv 0$, 因此有 $\frac{\partial u}{\partial \lambda_1}|_{\lambda_1=0}\equiv 0$.

由 $u|_{\lambda_1=0}\equiv 0$ 和有 $\frac{\partial u}{\partial \lambda_1}|_{\lambda_1=0}\equiv 0$ 知, u 必含 λ_1^2 因子, 同理 u 必含 λ_2^2,λ_3^2 因子, 即 $u=a\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$. 因为 $u\in P_5(T)$, 所以 $u\equiv 0$, 即适定性成立.

Argytis 元总体自由度约为 $6N_v+N_E\approx\frac{9}{2}N_T$, 由于一个边的规模是三个点的规模, 若去掉边上的自由度, 会节省计算量.

5.4.2 Bell 三角形元 (受限制 Argyris 元)

考虑把 Argyris 元中的 $\frac{\partial u}{\partial n}(a_i), i=4,5,6$ 去掉, 增加如下约束条件:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\ell_i}\in P_3(\ell_i), i=1,2,3. \tag{5.5}$$

此时自由度为 $\Sigma_T=\{u(a_i),\frac{\partial u}{\partial x}(a_i),\frac{\partial u}{\partial y}(a_i),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a_i),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a_i),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(a_i),i=1,2,3\}$.

考虑适定性. 与 Argyris 元类似, 我们可得 u 必含 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 因子, 且 $\frac{\partial u}{\partial \tau_1}|_{\ell_1}=0$. 此时 $\frac{\partial u}{\partial n_1}$ 在 ℓ_1 上是三次多项式, 且满足

$$\frac{\partial u}{\partial n_1}(a_2)=\frac{\partial u}{\partial n_1}(a_3)=\frac{\partial^2 u}{\partial n_1\partial \tau_1}(a_2)=\frac{\partial^2 u}{\partial n_1\partial \tau_1}(a_3)=0$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial n_1}|_{\ell_1=0}\equiv 0\&\frac{\partial u}{\partial \tau_1}|_{\ell_1=0}\equiv 0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial \lambda_1}|_{\ell_1=0}\equiv 0\Rightarrow u$ 必含 λ_1^2 因子, 同理 u 必含 λ_2^2,λ_3^2 因子. 又因为 $u\in P_5(T)$, 所以 $u\equiv 0$.

Theorem 5.4. *Argyris 元与 Bell 元均为 C^1 连续元, 即对四阶问题, 它们都是协调元. 前面验证 C^0 是通过求出插值函数, 若插值函数在边上的取值只依赖于边, 则是 C^0 的.*

Proof. 设 $E = T_1 \cap T_2, q_1(t) = \Pi_{T_1}u, q_2(t) = \Pi_{T_2}u, q(t) := q_1(t) - q_2(t) \in P_5(E)$. 下证 $q(t)|_E = 0$.

因为

$$\begin{cases} q(a_2) = q(a_3) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \tau}(a_2) = \frac{\partial q}{\partial \tau}(a_3) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial \tau}(a_2) = \frac{\partial q}{\partial \tau}(a_3) = 0 \end{cases}$$

所以有 $q \equiv 0$, 所以是 C^0 元.

记 $r_1(t) = \frac{\Pi_{T_1}u}{\partial n}|_E, r_2(t) = \frac{\Pi_{T_2}u}{\partial n}|_E$. 记 $m(t) = r_1(t) - r_2(t) \in P_4(E)$, 且有

$$\begin{cases} m(a_2) = m(a_3) = 0 \\ m(\frac{a_2+a_3}{2}) = 0 \\ \frac{\partial m}{\partial \tau}(a_2) = \frac{\partial m}{\partial \tau}(a_3) = 0 \end{cases}$$

其中 τ 是 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 的切向. 因此 $m(t) \equiv 0$. 所以 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上连续, $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Bell 元的证明类似. 此时 $r \in P_3(t)$. $\square$

Remark 5.2. *Argyris 元和 Bell 元实际上是最低阶的 C^1 协调元. 因为过于复杂, 所以实际四阶问题的求解中很少使用. 一般我们使用非协调元, 即 $V_h \not\subseteq H^2(\Omega)$.*

Example 5.1 (Bogner-Fox-Schmit 元 (BFS 元))**.** *矩形 $\square_{a_1a_2a_3a_4}$, $P_T = Q_3(T)$, $\dim P_T = 4^2 = 16$. $\Sigma_T = \{u(a_i), \frac{\partial u}{\partial x}(a_i), \frac{\partial u}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1,2,3,4\}$. 这里 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 实际上是一个切向, 一个法向. 可以证明 BFS 为 C^1 元, 这比 Argyris 元和 Bell 元简单.*

6 协调有限元的误差分析

6.1 一般方法

协调元空间是指 $V_h \subseteq V$. 考虑一般的变分问题

$$\begin{cases} \text{求} u \in V, \text{ s.t.} \\ a(u,v) = f(v), \forall v \in V \end{cases} \tag{6.1}$$

其中 V 为 Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot)$ 为双线性形式, $f \in V'$. 设 T_h 为 Ω 的一个网格剖分, $\bar{\Omega} = \sum_{T \in T_h} T$. $\operatorname{diam} T = h_T$ 为 T 的尺寸, 一般取 T 的外接圆直径或最长边的长度, 或者 $\sqrt{|T|}$. 总网格尺寸定义为 $h := \max_{T \in T_h} h_T$. 有限元三要素

为 $\{T,P_T,\Sigma_T\}.V_h=\{v_h\in V:v_h|_T\in P_T,\forall T\in T_h,$加上某种边界条件$\}$ 为有限元(逼近) 空间. 问题 (6.1) 对应的有限元逼近为

$$\left\{\begin{array}{l}\text{求}u_h\in V_h,\ \text{s.t.}\\ a\left(u_h,v_h\right)=f\left(v_h\right),\forall v_h\in V_h\end{array}\right. \tag{6.2}$$

一个自然的问题是, u,u_h 之间的误差 $\|u-u_h\|_V$ 有多大? 下面的 Céa 引理给出分析这一问题的一般框架.

Theorem 6.1 (Céa 引理)**.** *设双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 连续, V 椭圆, 即存在 $M,\alpha>0$, 使得*

$$|a(u,v)|\leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,a(u,u)\geq\alpha\|u\|_V^2,\forall u,v\in V$$

设 u,u_h 分别为问题 (6.1) 和 (6.2) 的解, 则存在常数 $C>0$, 使得

$$\|u-u_h\|_V\leq C\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V$$

其中右端项 $\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V$ 称为逼近误差. Céa 引理即是说, u_h 是在 $\|u-v_h\|_V$ 的误差意义下, 使用子空间 V_h 时近似最佳 (quasi-optimal). Céa 引理不需要 $a(\cdot,\cdot)$ 满足对称性, 因此估计比较粗糙. 一般地 V 取 $H^1(\Omega)$ 或 $H^2(\Omega)$.

Proof. 对 $v_h\in V_h\subseteq V,a(u,v_h)=f(v_h)$. 又 $a(u_h,v_h)=f(v_h)$. 两式相减有

$$a(u-u_h,v_h)=0,\forall v_h\in V_h. \tag{6.3}$$

由椭圆性,

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|_V^2&\leqslant a(u-u_h,u-u_h)\\&=a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h-u_h)\ \text{根据(6.3)式, 第二项为0}\\&\leqslant M\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V\end{aligned}$$

即 $\alpha\|u-u_h\|_V\leqslant M\|u-v_h\|$, 再由 v_h 的任意性得证. □

Remark 6.1. *如果 $a(\cdot,\cdot)$ 对称, 则 $a(\cdot,\cdot)$ 可以写成内积 $a(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_a$. 则 (6.3) 式等价于*

$$(u-u_h,v_h)_a=0,\forall v_h\in V_h\Leftrightarrow u-u_h\perp V_h$$

于是有 $\|u-u_h\|_a\leqslant\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_a$, 即有限元解 u_h 就是 u 在 V_h 上的在范数 $\|\cdot\|_a$ 下的最佳逼近.

Céa 引理将有限元误差的考量转化为讨论有限元空间的逼近性, 因此可以转化为估计具体的插值误差. 定义插值函数 $\Pi_h:C^\infty(\bar{\Omega})\to V_h$, 在每一个 $T\in T_h$ 上, $\Pi_hu|_T:=\Pi_Tu$, 其中 Π_T 为 u 在 T 上的插值算子. 此时有上界估计

$$\|u-u_h\|_V\leq C\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V\leq C\|u-\Pi_hu\|_V=C(\sum_{T\in T_h}\|u-\Pi_hu\|_{V,T}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\|u-\Pi_hu\|_V$ 称为有限元插值误差.

Example 6.1. *考虑 Poisson 方程*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ \Omega \\ u = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

设 $V = H_0^1(\Omega), V_h \subseteq V$,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leqslant & C\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leqslant \tilde{C}|u - \Pi_h u|_{1,\Omega} \ \text{Poincaré 不等式} \\ = & \tilde{C}(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} |u - \Pi_T u|_{1,T}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

我们仅需估计每个 T 上的 $|u - \Pi_T u|_{1,T}$, 称为单元 T 上的插值误差. 更一般地, 我们估计 $|u - \Pi_T u|_{m,T}, m = 0, 1, 2$.

一般插值误差估计的技巧, 尺度变换 (scaling argument). 它分为三个步骤:

①: 将一般单元 T 上的插值误差变换到参考元 $\widehat{T}$(比如矩形, 三角形等) 上的插值误差;

②: 在参考元 $\widehat{T}$ 上估计插值误差 (使用等价模定理、Bramble-Hilbert 定理等) 估计出高阶半范 $|\hat{u}|_{k,\hat{T}}$;

③: 把此半范转换到一般单元 T 上 $|u|_{k,T}$.

要注意的是, 误差估计的常数不能依赖于网格.

Example 6.2. *以线性元为例. 插值函数为* $\Pi_T u = u(a_1)\lambda_1 + u(a_2)\lambda_2 + u(a_3)\lambda_3$.

首先是 T 与 $\hat{T}$ 之间的双射: $F_T : \hat{T} \to T$

$$x = \sum_i \lambda_i x_i = (x_2 - x_3)\lambda_2 + (x_1 - x_3)\lambda_1 + x_3$$

$$y = \sum_i \lambda_i y_i = (y_2 - y_3)\lambda_2 + (y_1 - y_3)\lambda_1 + y_3$$

$F_T^{-1} : T \to \hat{T}$, $\lambda_i = \frac{1}{2|T|}(\eta_i x - \xi_i y + w_i)$, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right| = 2|T|$.

下面的引理解决了①和③的需求.

Lemma 6.1. *设三角形 T 的最小角 $\theta_0 > 0$, 则有*

$$|u|_{s,T} \leq C\frac{h_T^{1-s}}{(\sin\theta_0)^{s-\frac{1}{2}}}|\hat{u}|_{s,\hat{T}}$$

$$|\hat{u}|_{s,\hat{T}} \leqslant \frac{h_T^{s-1}}{(\sin\theta_0)^{-s}}|u|_{s,T}$$

$s = 0, 1, 2$, 其中 h_T 是单元尺寸, 可取三角形最长边或 $\sqrt{|T|}$(即单元面积开平方).

Proof. 仅证明第一个式子.

- $s=0$:

$$\begin{aligned}\|u\|_{0,T}^2 &= \int_T u^2 dxdy = \int_{\hat T}\hat u^2\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\Big|d\lambda_1 d\lambda_2\\ &= 2|T|\int_{\hat T}\hat u^2 d\lambda_1 d\lambda_2\\ &= 2|T|\|\hat u\|_{0,\hat T}\\ &\leqslant Ch_T^2\|\hat u\|_{0,\hat T}^2(\because |T|\approx Ch_T^2\sin\theta_0)\end{aligned}$$

- $s=1$: 由

$$\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}\right)^2=\frac{\eta_i^2+\xi_i^2}{(2|T|)^2}\leqslant\frac{2h_T^2}{(2|T|)^2}=\frac{h_T^2}{2|T|^2}$$

知,

$$\begin{aligned}|u|_{1,T}^2 =&\int_T\left(\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u}{\partial y}\Big|^2\right)dxdy\\ =&\int_{\hat T}\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}+\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\Big)^2\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\Big|d\lambda_1 d\lambda_2\\ &+\int_{\hat T}\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}+\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\Big)^2\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\Big|d\lambda_1 d\lambda_2\\ =&2|T|\int_{\hat T}\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}+\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\Big)^2 d\lambda_1 d\lambda_2\\ &+2|T|\int_{\hat T}\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}+\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\Big)^2 d\lambda_1 d\lambda_2\\ =&\frac{1}{2|T|}\Big[\int_{\hat T}\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_1}\eta_1+\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_2}\eta_2\Big)^2 d\lambda_1 d\lambda_2+\int_{\hat T}\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_1}\xi_1+\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_2}\xi_2\Big)^2 d\lambda_1 d\lambda_2\Big]\\ \leqslant&\frac{1}{|T|}\int_{\hat T}\sum_{i=1}^2(\xi_i^2+\eta_i^2)\Big|\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_i}\Big|^2 d\lambda_1 d\lambda_2,\ \text{因为}(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)\\ \leqslant&\frac{2h_T^2}{|T|}\int_{\hat T}\left(\Big|\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_1}\Big|^2+\Big|\frac{\partial\hat u}{\partial\lambda_2}\Big|^2\right)d\lambda_1 d\lambda_2\\ \leqslant&\frac{1}{C\sin\theta_0}|\hat u|_{1,\hat T}^2\quad(\because |T|\geqslant Ch_T^2\sin\theta_0)\end{aligned}$$

- $s=2$:

$$|u|_{2,T}^2=\int_T\left(\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|^2+\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|^2+2\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|^2\right)dxdy$$

以 $\int_T|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 dxdy$ 为例,

$$\begin{aligned}\int_T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdy=&\int_{\hat T}\left[\frac{\partial^2\hat u}{\partial\lambda_1^2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2\hat u}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}+\frac{\partial^2\hat u}{\partial\lambda_2^2}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right)^2\right]^2\\ &\cdot 2|T|\mathrm{d}\lambda_1\ \mathrm{d}\lambda_2\\ &\leqslant 6|T|C\int_{\hat T}\left(\left(\frac{\partial^2\hat u}{\partial\lambda_1^2}\right)^2\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\right)^4+4\left(\frac{\partial^2\hat u}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right)^2\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right)^2\right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial^2\hat u}{\partial\lambda_2^2}\right)^2\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right)^4\right)d\lambda_1 d\lambda_2,\ (a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

由于

$$2|T|\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\right)^4 = \frac{\eta_1^4}{8|T|^3} \leq \frac{h_T^4}{C'h_T^6\sin^3\theta_0}$$

最终可得

$$|u|_{2,T} \leqslant \frac{C}{h_T\sin^{\frac{3}{2}}\theta_0}|\hat{u}|_{2,\widehat{T}}$$

一般网格条件要求最小角 $\theta_0 \geqslant \theta^* > 0 \Rightarrow \sin\theta_0 \geqslant \sin\theta^* > 0$, 称为最小角条件 (minimal angle condition). □

下一步, 考虑参考元 $\widehat{T}$ 上的插值误差估计.

Lemma 6.2. *存在 $C(\hat{T}) > 0$, 使得 $\|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{1,\widehat{T}} \leqslant C(\hat{T})|\hat{u}|_{2,\widehat{T}}, \forall\hat{u}\in H^2(\widehat{T})$. 这里 Π 表示参考元的插值.*

Proof. ①: 令 $f(\hat{u}) = \|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{1,T}$. 则 $f\in(H^2(\widehat{T}))'$:

事实上, $\widehat{\Pi}\hat{u} = \hat{u}_1\hat{\lambda}_1+\hat{u}_2\hat{\lambda}_2+\hat{u}_3\hat{\lambda}_3$. 由于 $\hat{\lambda}_i$ 是多项式, 积分之后是一个常数, 记为 β_i, 于是 $\|\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{1,\widehat{T}} = \|\sum_{i=1}^3\hat{u}(\hat{a}_i)\hat{\lambda}_i\|_{1,\hat{T}} \leqslant \sum_{i=1}^3\beta_i|\hat{u}(\hat{a}_i)|$. 因为对于二维区域有 $H^2(\hat{T})\hookrightarrow C^0(\hat{T})$, 故 $\sum_{i=1}^3\beta_i|\hat{u}(\hat{a}_i)| \leqslant C\|\hat{u}\|_{2,\hat{T}}$. 所以

$$f(\hat{u}) = \|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{1,\widehat{T}} \leqslant \|\hat{u}\|_{1,\widehat{T}} + \|\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{1,\widehat{T}} \leqslant \widetilde{C}\|\hat{u}\|_{2,\widehat{T}}$$

对 $\forall\hat{u}\in P_1(\widehat{T}), \hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}=0$(因为插值对一阶多项式精确成立), 即 $f(\hat{u})=0$, 则由 Bramble-Hilbert 定理3.15知 $\|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{1,\widehat{T}} \leq C|\hat{u}|_{2,\widehat{T}}$

②: 另一种证明方式 (用等价模定理): 令 $\ell_i(\hat{u}) = \hat{u}(\hat{a}_i)$, $|\ell_i(\hat{u})| \leqslant C\|\hat{u}\|_{2,\hat{T}}$, $\ell_i\in(H^2(\hat{T}))'$. 若 $\forall\hat{u}\in P_1(\hat{T}), \ell_i(\hat{u})=0$, 则 $\hat{u}\equiv 0$. 由等价模定理3.8,

$$\|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{1,\hat{T}} \leqslant \|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}\|_{2,\hat{T}} \leqslant \left(|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}|_{2,\hat{T}}+\sum_{i=1}^3|\ell_i(\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u})|\right) = C|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}|_{2,T} = C|\hat{u}|_{2,T}$$

这里用到了 $\forall\hat{u}\in P_1(\hat{T})$, 有 $\widehat{\Pi}\hat{u}$ 的二阶导数为 0. □

Lemma 6.3. *$\widehat{\Pi_T u} = \widehat{\Pi}_{\hat{T}}\hat{u}$, 即把 $\Pi_T u$ 变量替换到 $\widehat{T}$ 上, 等价于在 $\widehat{T}$ 上对 $\hat{u}$ 的插值函数.*

Proof. 设 $\Pi_T u = \sum_{i=1}^3 u(a_i)\lambda_i(x,y)$. 注意到 $u(a_i) = u(F_T(\hat{a}_i)) = u\circ F_T(\hat{a}_i) = \hat{u}(\hat{a}_i), \widehat{\lambda_i(x,y)} = \hat{\lambda}_i$(线性变换不改变面积坐标), 所以

$$\widehat{\Pi_T u} = \sum_{i=1}^3\widehat{u(a_i)}\widehat{\lambda_i(x,y)} = \sum_{i=1}^3\hat{u}(\hat{a}_i)\hat{\lambda}_i = \widehat{\Pi}\hat{u}$$

证毕. □

Theorem 6.2 (插值定理)**.** *设 T 的最小角 $\theta_0 \geqslant \theta^* > 0$, 则存在依赖于 θ^* 的常数 C, 使得*

$$|u-\Pi_T u|_{s,T} \leqslant Ch_T^{2-s}|u|_{2,T}, s=0,1$$

Proof.

$$\begin{aligned}|u-\Pi_T u|_{s,T} &\leqslant Ch_T^{1-s}|\widehat{u-\Pi_T u}|_{s,\widehat{T}} \quad \text{引理6.1}\\ &= Ch_T^{1-s}|\hat{u}-\widehat{\Pi}\hat{u}|_{s,\widehat{T}} \quad \text{引理6.3}\\ &\leqslant \bar{C}h_T^{1-s}|\hat{u}|_{2,\widehat{T}} \quad \text{引理6.2}\\ &\leqslant \widetilde{C}h_T^{1-s}\cdot h_T|u|_{2,T} \quad \text{引理6.1}\\ &= \widetilde{C}h_T^{2-s}|u|_{2,T}.\end{aligned}$$

证毕. □

Remark 6.2. *设 T_h 为三角形网格, 满足最小角条件, 即存在 $\theta^*>0$, 使得网格中的最小角 $\theta_0\geqslant\theta^*>0$, 则存在依赖于 θ^* 的常数 C, 使得*

$$\|u-\Pi_h u\|_{s,\Omega}\leqslant Ch^{2-s}|u|_{2,\Omega}, s=0,1$$

Proof. 仅证明 $s=1$ 的情形. $s=0$ 是完全类似的.

$$\begin{aligned}\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega}^2 &= \|u-\Pi_h u\|_{0,\Omega}^2+|u-\Pi_h u|_{1,\Omega}^2\\ &= \sum_{T\in T_h}(\|u-\Pi_T u\|_{0,T}^2+|u-\Pi_T u|_{1,T}^2)\\ &\leqslant \sum_{T\in T_h}(Ch_T^4|u|_{2,T}^2+Ch_T^2|u|_{2,T}^2) \quad \text{定理6.2}\\ &\leqslant C\sum_{T\in T_h}h_T^2|u|_{2,T}^2\\ &\leqslant Ch^2|u|_{2,\Omega}^2\end{aligned}$$

其中 $h=\max_T h_T$ □

Corollary 6.1. *设 u,u_h 分别为 Poisson 方程精确解、有限元解, 则有如下误差估计:*

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch|u|_{2,\Omega}$$

Proof. 由 Céa 引理, 取 $V_h=\Pi_h u$

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant C\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_{1,\Omega}\leqslant C\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega}\leqslant Ch|u|_{2,\Omega}$$

证毕. □

6.2 一般情形的误差估计

6.2.1 有限元的仿射等价性

有限元三要素为 (T,P_T,Σ). 一般来说, Σ 由下列线性形式组成: $u(a_i)$ (节点函数值)、$\nabla u(a_i)\xi_{ik}^{(1)}$(节点沿某一方向的一阶导数值), $\nabla^2 u(a_i)\cdot(\xi_{ik}^{(2)},\xi_{il}^{(2)})$ (节点的二阶导数值).

Definition 6.1 (仿射等价). 称有限元 $(\widehat{T},\widehat{P},\widehat{\Sigma})$ 与 (T,P,Σ) 仿射等价, 若存在一个可逆仿射变换 $F:\widehat{T}\to T, x=F(\hat{x})=B\hat{x}+b\in T, \hat{x}=F^{-1}(x), B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, 满足如下条件:

$$\begin{cases} T=F(\widehat{T}), P=\left\{p:p=\hat{p}\circ F^{-1},\hat{p}\in\widehat{P}\right\} \\ a_i^{(r)}=F(\hat{a}_i^{(r)}), r=0,1,2 \\ \xi_{ik}^{(1)}=B\hat{\xi}_{ik}^{(1)}, \xi_{ik}^{(2)}=B\hat{\xi}_{ik}^{(2)} \end{cases}$$

例如, Lagrange 元都是仿射等价的; Hermite 元有很多都是仿射等价的, 例如当 $\Sigma,\widehat{\Sigma}$ 分别取

$$\Sigma=\left\{\nabla u(a_i)\cdot(a_j-a_i), j\neq i; \nabla^2 u(a_i)\cdot(a_j-a_i,a_k-a_i)\right\}$$
$$\widehat{\Sigma}=\left\{\hat{\nabla}\hat{u}(\hat{a}_i)\cdot(\hat{a}_j-\hat{a}_i), j\neq i; \hat{\nabla}^2\hat{u}(\hat{a}_i)\cdot(\hat{a}_j-\hat{a}_i,\hat{a}_k-\hat{a}_i)\right\}$$

首先注意到

- $u(a_i)=u(F(\hat{a}_i))=u\circ F(\hat{a}_i)=\hat{u}(\hat{a}_i)$
- $a_i-a_j=F(\hat{a}_i)-F(\hat{a}_j)=B(\hat{a}_i-\hat{a}_j)$
- $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})=(\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{x}}{\partial x},\frac{\partial}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{y}}{\partial y})=(\frac{\partial}{\partial\hat{x}},\frac{\partial}{\partial\hat{y}})B^{-1}=\hat{\nabla}B^{-1}$.

由于 $u(F(\hat{a}_i))$ 是一个数, 可以和矩阵交换, 所以

$$\nabla u(a_i)\cdot(a_j-a_i)=\hat{\nabla}B^{-1}u(F(\hat{a}_i))\cdot B(\hat{a}_j-\hat{a}_i)=\hat{\nabla}B^{-1}\cdot Bu(F(\hat{a}_i))(\hat{a}_j-\hat{a}_i)=\hat{\nabla}\hat{u}(\hat{a}_i)\cdot(\hat{a}_j-\hat{a}_i)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(a_i)\cdot(a_j-a_i,a_k-a_i)&=\hat{\nabla}^2B^{-2}\hat{u}(\hat{a}_i)\cdot(B(\hat{a}_j-\hat{a}_i),B(\hat{a}_k-\hat{a}_i))\\&=\hat{\nabla}^2\hat{u}(\hat{a}_i)\cdot(\hat{a}_j-\hat{a}_i,\hat{a}_k-\hat{a}_i)\end{aligned}$$

Remark 6.3. 对于 Σ 中含有法向导数的有限元 *(例如 Argyris 元)*, 不仿射等价:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a_{ij})=\nabla u(a_{ij})\cdot n=\hat{\nabla}\hat{u}(\hat{a}_{ij})\cdot B^{-1}n\neq\hat{\nabla}\hat{u}(\hat{a}_{ij})\hat{n}$$

这是因为一般 $B^{-1}n\neq\hat{n}$. 但我们所常用的有限元均是仿射等价的. 矩形是拉伸和平移, 三角形会有旋转, 切向仿射等价, 法向仿射不等价. 仿射等价包含两层含义, 结点和基函数.

Theorem 6.3. 设 (T,P,Σ) 与 $(\widehat{T},\widehat{P},\widehat{\Sigma})$ 仿射等价, $F(\widehat{T})=T$, 则有

(i) 如果 $\{\hat{p}_i\}$ 是 $\widehat{P}$ 中的基函数, 则 $\{p_i(x)\}=\{\hat{p}_i\circ F^{-1}(x)\}$ 为 P 中的基函数;

(ii) 插值算子 Π 与 $\widehat{\Pi}$ 满足 $\widehat{\Pi u}=\widehat{\Pi}\hat{u}$.

6.2.2 一般半范数之间的关系

Theorem 6.4. 设 $\widehat{T}$ 为 T 的参考元, 即存在可逆仿射变换 $F:\widehat{T}\to T$ 满足 $x=F(\hat{x})=B\hat{x}+b\in T$, 则对 $\forall \hat{v}\in W^{m,q}(\widehat{T}), v(x)=v\circ F(\hat{x})=\hat{v}(\hat{x})$, 有

$$|\hat{v}|_{m,q,\widehat{T}}\leqslant C\|B\|^m|\det B|^{-\frac{1}{q}}|v|_{m,q,T},$$
$$|v|_{m,q,T}\leqslant C\|B^{-1}\|^m|\det B|^{\frac{1}{q}}|\hat{v}|_{m,q,\widehat{T}}$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 *Euclid* 模.

Proof. 只证明第一个不等式. 因为 $C^m(\widehat{T})$ 在 $W^{m,q}(\widehat{T})$ 中稠密, 所以我们仅需对 $\forall\hat{v}\in C^m(\widehat{T})$ 证明.

$$|\hat{v}|^q_{m,q,\widehat{T}}=\int_{\widehat{T}}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\hat{v}|^q\,\mathrm{d}\hat{x}$$
$$=\int_{\widehat{T}}\sum_{|\alpha|=m}|\hat{\nabla}^m\hat{v}(\hat{x})\cdot(e_1,\dots,e_1)(e_2,\dots,e_2)|^q\,\mathrm{d}\hat{x}\quad(\text{以2维为例})$$

这里用了张量的记号, 有α_1个e_1和α_2个e_2, 且$\alpha_1+\alpha_2=m$, 实际上就是$\dfrac{D^\alpha\hat{v}}{\partial\hat{x}_1^{\alpha_1}\partial\hat{x}_2^{\alpha_2}}$

$$\leqslant C\int_{\widehat{T}}\|\hat{\nabla}^m\hat{v}(\hat{x})\|^q\,\mathrm{d}\hat{x}$$
$$=C\|B\|^{mq}\int_T\|\nabla^m v(x)\|^q|\det B|^{-1}\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\|B\|^{mq}|\det B|^{-1}\int_T\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha v(x)|^q\,\mathrm{d}x$$
$$=C\|B\|^{mq}|\det B|^{-1}|v|^q_{m,q,T}$$

类似可以证明 $q=+\infty$ 的情形. □

Theorem 6.5. 设 $h=\operatorname{diam}T$ 为外接球直径, $\rho=\sup\{\operatorname{diam}S,\text{ 球 }S\subseteq T\}$ 为内切球直径, $\hat{h}=\operatorname{diam}\widehat{T}$. 则 $\|B\|\leq\frac{h}{\hat{\rho}}\leq Ch$, 其中 $\hat{\rho}=\sup\{\operatorname{diam}\widehat{S},\widehat{S}\subseteq\widehat{T}\}$ 是一个常数; 类似也有 $\|B^{-1}\|\leq\frac{\hat{h}}{\rho}\leq\frac{C}{\rho}$.

Proof. 由矩阵算子范数的定义, $\|B\|=\sup_{\|\xi\|=\hat{\rho}}\frac{\|B\xi\|}{\hat{\rho}}$. 对 $\forall\xi:\|\xi\|=\hat{\rho}$, 存在 $\hat{y},\hat{z}\in\widehat{T}$, 使得 $\hat{y}-\hat{z}=\xi$. 则 $F(\hat{y}),F(\hat{z})\in T$ 且 $F(\hat{y})-F(\hat{z})=B\xi$, $\|B\xi\|=|F(\hat{y})-F(\hat{z})|\leqslant h$, 所以 $\|B\xi\|\leq h\Rightarrow\|B\|\leq\frac{h}{\hat{\rho}}$. $|\det B|=\frac{|T|}{|\widehat{T}|}\leqslant\frac{Ch^2}{\pi\hat{\rho}^2}\leqslant\tilde{C}h^2$(参考元上的内切球直径 $\hat{\rho}$ 是常数). 同理 $|\det B|^{-1}\leqslant C/\rho^2$. 对于二维情形, $|\hat{v}|_{m,q,\hat{T}}\leqslant Ch^m\rho^{-\frac{2}{q}}|v|_{m,q,T}$.

B^{-1} 的证明是类似的. □

此外, $|\det B|=\frac{|T|}{|\widehat{T}|}$, 由于 $|\widehat{T}|$ 为固定数, 且存在 $\sigma_1,\sigma_2>0$, 使得 $\sigma_1\rho^2\leqslant|T|\leqslant\sigma_2h^2$, 所以存在 $c_1,c_2>0$, 使得

$$c_1\rho^2\leq|\det B|\leq c_2h^2,\quad c_1h^{-2}\leq|\det B|^{-1}\leq c_2\rho^{-2}$$

6.2.3 T 上的一般插值误差估计

Theorem 6.6. 设 $W^{k+1,p}(\widehat{T}) \hookrightarrow W^{m,q}(\widehat{T}), \widehat{\Pi}$ 为保持 k 次多项式不变的算子, 即 $\widehat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}, \forall \hat{p} \in P_k(\widehat{T}), \widehat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\widehat{T}), W^{m,q}(\widehat{T}))$. 设 T 与 $\widehat{T}$ 仿射等价, 且插值算子仿射等价, 即 $\widehat{\Pi v} = \widehat{\Pi}\hat{v}$, 则有

$$|v - \Pi v|_{m,q,T} \leqslant C(\widehat{\Pi}, \widehat{T})|T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1,p,T}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(T)$$

Proof. 由半模关系式 (定理6.4),

$$\begin{aligned} |v - \Pi v|_{m,q,T} &\leq C \left\|B^{-1}\right\|^m |\det B|^{\frac{1}{q}} |\widehat{v - \Pi v}|_{m,q,\widehat{T}} \\ &= C\|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{q}} |\hat{v} - \widehat{\Pi}\hat{v}|_{m,q,\widehat{T}} \quad \text{(仿射等价性)} \end{aligned}$$

又对 $\forall \hat{p} \in P_k(\widehat{T})$, 由 $\hat{P}i\hat{p} = \hat{p}$ 知, $\hat{v} - \widehat{\Pi}\hat{v} = \hat{v} + \hat{p} - \widehat{\Pi}(\hat{v} + \hat{p}) = (I - \widehat{\Pi})(\hat{v} + \hat{p})$, 所以

$$\begin{aligned} |\hat{v} - \widehat{\Pi}\hat{v}|_{m,q,\widehat{T}} &= \inf_{\hat{p} \in P_k(\hat{T})} |\hat{v} + \hat{p} - \hat{\Pi}(\hat{v} + \hat{p})|_{m,q,\widehat{T}} \\ &= \inf_{\hat{p} \in P_k(\hat{T})} |(I - \widehat{\Pi})(\hat{v} + \hat{p})|_{m,q,\widehat{T}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因} I, \hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\widehat{T}), W^{m,q}(\widehat{T})) &\leqslant \|I - \widehat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\widehat{T}), W^{m,q}(\widehat{T}))} \inf_{\hat{p} \in P_k(\widehat{T})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{m,q,\widehat{T}} \\ \text{因} W^{k+1,p}(\widehat{T}) \hookrightarrow W^{m,q}(\widehat{T}) &\leqslant C\|I - \widehat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\widehat{T}), W^{m,q}(\widehat{T}))} \inf_{\hat{p} \in P_k(\widehat{T})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1,p,\widehat{T}} \\ &\leqslant C(\widehat{\Pi}, \widehat{T}) \inf_{\hat{p} \in P_k(\widehat{T})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1,p,\widehat{T}} \\ &\leqslant C(\widehat{\Pi}, \widehat{T}) |\hat{v}|_{k+1,p,\widehat{T}} \quad \text{(商空间等价模定理3.14)} \end{aligned}$$

这里第一个不等式用到了嵌入 $W^{k+1,p}(\widehat{T}) \hookrightarrow W^{m,q}(\widehat{T}) \Rightarrow \|\hat{v} + \hat{q}\|_{m,q,\hat{T}} \leqslant C\|\hat{v} + \hat{q}\|_{k+1,p,\hat{T}}$, 而且嵌入保证了 $I : W^{k+1,p}(\widehat{T}) \to W^{m,q}(\widehat{T})$ 是有界的, 于是

$$\begin{aligned} |v - \Pi v|_{m,q,T} &\leq C(\widehat{\Pi}, \widehat{T})\|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{q}} |\hat{v}|_{k+1,p,\widehat{T}} \\ &\leq C(\widehat{\Pi}, \widehat{T})\|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{q}} \|B\|^{k+1} |\det B|^{-\frac{1}{p}} |v|_{k+1,p,T} \quad \text{定理6.4} \\ &\leq C(\widehat{\Pi}, \widehat{T}) \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |v|_{k+1,p,T} \end{aligned}$$

证毕. □

要应用定理6.6, 还需要具体到插值算子, 需要验证 $\mathcal{L}\left(W^{k+1,p}(\widehat{T}), W^{m,q}(\widehat{T})\right)$. 当 $\widehat{\Pi}$ 的自由度 $\widehat{\Sigma}$ 为 $\hat{u}$ 的一些线性泛函时 (例如 Lagrange 元), 往往要求 $\widehat{\Pi} : W^{k+1,p}(\widehat{T}) \hookrightarrow C^0(\widehat{T})$. 这时为了使得节点有意义, 就需要谨慎选择 $k+1$.

Definition 6.2. 称网格剖分 T_h 为正则网格剖分 *(regular mesh)*, 如果 $\exists \sigma > 0$, 使得 $\frac{h_T}{\rho_T} \leqslant \sigma, \forall T \in T_h$, 其中 h_T, ρ_T 分别为 T 的外接球直径和内切球直径.

Remark 6.4. *对于三角形剖分, 正则条件等价于最小角条件.*

Theorem 6.7. *如果网格剖分满足正则条件, 在和定理6.6同样的条件下, 有插值误差估计*

$$|u-\Pi u|_{m,q,T} \leqslant Ch_T^{k+1-m+n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}|u|_{k+1,p,T}$$
$$|u-\Pi u|_{m,q,\Omega} \leqslant Ch^{k+1-m+n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}|u|_{k+1,p,\Omega}$$

这里 $h=\max_{T\in T_h} h_T, n$ 为空间维数.

Proof. 根据正则性条件, $\rho_T \approx h_T$, 因此 $|T| \approx h_T^n$. 所以第一个不等式为定理6.6的直接推论. 在整个区域 Ω 上,

$$|u-\Pi u|_{m,q,\Omega} = \left(\sum_{T\in T_h} |u-\Pi u|_{m,q,T}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

类似可推出第二个不等式. □

Theorem 6.8. *对于 k 次有限元 $(\forall p\in P_k(T), \Pi p = p)$, 在正则网格条件下, 设 $u\in H^{k+1}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, 则有*

$$|u-u_h|_{1,\Omega} \leqslant Ch^k|u|_{k+1,\Omega}$$

Proof. 由 Céa 引理

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leqslant C\|u-\Pi u\|_{1,\Omega} \leqslant Ch^k|u|_{k+1,\Omega}$$

其中最后一个不等号是根据定理6.7, 取 $m=1, p=q=2$. □

Remark 6.5. *对于三角形网格剖分, 即使不满足正则网格条件, 也可以证明更弱条件 (如最大角条件) 下的结论.*

6.2.4 低阶模估计

仍考虑二阶 Poisson 问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其变分问题和有限元离散分别为

$$a(u,v) = f(v), \forall v\in V = H_0^1(\Omega) \tag{6.4}$$

$$a(u_h,v_h) = f(v_h), \forall v_h\in V_h \tag{6.5}$$

由 Céa 引理, 我们有

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_{1,\Omega} \leq C\|u-\Pi u\|_{1,\Omega}$$

那么如果考虑 $\|u-u_h\|_{0,\Omega}$ 呢? 这要用到对偶估计技巧.

Lemma 6.4 (Aubin-Nitsche 引理)**.** 设 u, u_h 分别为变分问题和有限元离散问题的解. 在凸区域的情形下, 存在 $C > 0$, 使得

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \|u - u_h\|_{1,\Omega}$$

Proof. 考虑辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta w = u - u_h, & \text{in } \Omega \\ w = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.6}$$

该问题的变分是求 $w \in H_0^1(\Omega) = V$, 使得 $a(w, v) = (u - u_h, v), \forall v \in V$. 有限元离散是求 $w_h \in V_h$ 使得 $a(w_h, v_h) = (u - u_h, v_h), \forall v_h \in V_h$. 因为 Ω 为凸区域, 根据 PDE 正则性理论, 问题 (6.6) 的唯一解 $w \in H^2(\Omega)$ 满足

$$\|w\|_{2,\Omega} \leq C\|u - u_h\|_{0,\Omega}$$

取 $v = u - u_h \in V$, 则有

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= a(w, u - u_h) \quad \text{变分问题}(u - u_h, v) = a(w, v) \\
&= a(u - u_h, w) \quad \text{对称性; 如果非对称, 则考虑}a(v, w) = (u - u_h, v) \\
&= a(u - u_h, w - w_h) \quad \text{正交性: } a(u - u_h, w_h) = 0 \\
&\leq C\|u - u_h\|_{1,\Omega}\|w - w_h\|_{1,\Omega} \quad \text{有界性} \\
&\leq C\|u - u_h\|_{1,\Omega} \cdot h|w|_{2,\Omega} \quad \text{推论6.1} \\
&\leq C\|u - u_h\|_{0,\Omega}\|u - u_h\|_{1,\Omega} \quad \text{PDE 正则性理论}
\end{aligned}$$

因此

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \|u - u_h\|_{1,\Omega}$$

证毕. □

Remark 6.6. 在凸区域条件下, 对于 k 次元, $u \in H^{k+1}(\Omega)$, 则有 $\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}$.

Proof. 由定理6.2.3和引理6.4立得. □

6.2.5 非光滑解的收敛性

假设真解 $u \in H_0^1(\Omega)$, 即 $k = 0$, 此时因为 $H^1(\Omega) \not\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$, 所以一般不成立 $\|\Pi u\|_{1,\Omega} \leq C\|u\|_{1,\Omega}$. 对于 Hermite 元, 因为 $H^2(\Omega) \not\hookrightarrow C^1(\Omega)$, 所以一般也没有 $\|\Pi u\|_{1,\Omega} \leq C\|u\|_{2,\Omega}$. 根据之前的误差估计定理, 只能给出 $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C|u|_{1,\Omega}$. 这样就无法做出误差估计, 无法判断收敛性.

对于非光滑解的情形, $u \in H^{1+s}(\Omega), s > 0$ 未必是整数, 则 $\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \leqslant Ch^s|u|_{1+s,\Omega}$. 这是因为嵌入 $H^{1+s}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$. 而 $H^1(\Omega) \not\hookrightarrow C^0(\Omega)$, 因此 $s = 0$ 并不成立.

Remark 6.7. $\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega} \not\leq C|u|_{1,\Omega}$, $\|u-\Pi_h u\|_{0,\Omega} \not\leq h|u|_{1,\Omega}$

Theorem 6.9. 若 $u \in H^1(\Omega), P_1(\widehat{T}) \subseteq \widehat{P}$, 则该有限元解 u_h 收敛到真解, 即 $\|u-u_h\|_{1,\Omega} \to 0(h \to 0)$.

Proof. 因为 u 不够光滑, 所以考虑 Πu 没有意义. 因此根据 $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的稠密性, 对 $\forall \varepsilon>0, \exists \tilde{u} \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, s.t. $\|u-\tilde{u}\|_{1,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$, 这里 C 为 Céa 引理中的常数. 则 ($\tilde{u}$ 足够光滑, 可以定义 $\Pi\tilde{u}$)

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_{1,\Omega} &\leq C \inf_{v_h \in V_h}\|u-v_h\|_{1,\Omega} \quad \text{Céa 引理} \\
&\leq C\|u-\Pi\tilde{u}\|_{1,\Omega} \quad \text{考虑}\Pi\tilde{u}\text{是有意义的} \\
&\leq C\left(\|u-\tilde{u}\|_{1,\Omega}+\|\tilde{u}-\Pi\tilde{u}\|_{1,\Omega}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+Ch|\tilde{u}|_{2,\Omega} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \text{取}h\text{足够小}
\end{aligned}
$$

这里并不是一致的误差估计, h 依赖于 ε. □

Remark 6.8. 以上证明并不能说明一致收敛. 这是因为 h 依赖于 $\tilde{u}$ 的选取。下面给出一个一致收敛性的证明. 令 $\tilde{f}=\frac{f}{\|f\|_{0,\Omega}}, \tilde{u}=\frac{u}{\|f\|_{0,\Omega}}, \tilde{u}_h=\frac{u_h}{\|f\|_{0,\Omega}}$. 则有

$$
\begin{gathered}
a(\tilde{u}, v)=(\tilde{f}, v), \forall v \in V \\
a\left(\tilde{u}_h, v_h\right)=\left(\tilde{f}, v_h\right), \forall v_h \in V_h
\end{gathered}
$$

即 $\tilde{u}_h$ 为 $\tilde{u}$ 的有限元解. 因此, 由 Céa 引理, 存在 $C>0$, 使得

$$
\|\tilde{u}-\tilde{u}_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h}\|\tilde{u}-v_h\|_{1,\Omega}
$$

下面我们只需证明: 存在 $h_1(\varepsilon)>0$, 使得对 $\forall h \in(0, h_1(\varepsilon))$, 有

$$
\int_{v_h \in V_h}\|\tilde{u}-v_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{C}.
$$

这时就有

$$
\|\tilde{u}-\tilde{u}_h\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon \Rightarrow \|u-u_h\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon\|f\|_{0,\Omega}.
$$

为此, 定义

$$
\widetilde{W}=\{\tilde{\varphi} \in V: a(\tilde{\varphi}, v)=(\tilde{g}, v), \forall v \in V, \|\tilde{g}\|_{0,\Omega}=1\}
$$

易知 $\widetilde{W}$ 为预列紧集, 则对于 $\frac{\varepsilon}{2C}$, 存在有限个函数 $\{v_i\}_{i=1}^N \subseteq V$, 满足 $\widetilde{W} \subseteq \bigcup_{i=1}^N \rho\left(v_i, \frac{\varepsilon}{2C}\right)$, 其中

$$
\rho\left(v_i, \frac{\varepsilon}{2C}\right)=\left\{v \in V:\|v-v_i\|_{1,\Omega} \leq \frac{\varepsilon}{2C}\right\}.
$$

则对每个 $v_i \in V$, 由稠密性, 存在 $v_i^* \in H^2(\Omega) \cap V$, 使得 $\|v_i - v_i^*\|_{1,\Omega} \le \frac{\varepsilon}{4C}$. 对于 v_i^*, 存在 $h_i > 0$, 使得

$$\|v_i^* - \Pi v_i^*\|_{1,\Omega} \le Ch\,|v_i^*|_{2,\Omega} \le \frac{\varepsilon}{4C}$$

注意这里 v_i^* 与 $\widetilde{W}$ 有关, 但 $\widetilde{W}$ 是固定的, 此时有

$$\|v_i - \Pi v_i^*\|_{1,\Omega} \le \|v_i - v_i^*\|_{1,\Omega} + \|v_i^* - \Pi v_i^*\|_{1,\Omega} \le \frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{4C} = \frac{\varepsilon}{2C}$$

令 $h_2 = \min h_i$, 则有一致收敛性: 对 $\forall h \in (0, h_2)$,

$$\inf_{v_h \in V_h} \|\tilde{u} - v_h\|_{1,\Omega} \le \|\tilde{u} - v_i\|_{1,\Omega} + \|v_i - \Pi v_i^*\|_{1,\Omega} \le \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{C}$$

6.2.6 有限元空间的逆不等式

前面我们提到 Poincaré 不等式:

$$\|v\|_{0,\Omega} \le C|v|_{1,\Omega}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

即低阶模可以用高阶模估计. 对于有限元空间 V_h, 可以有如下逆不等式.

Theorem 6.10. *对任意有限元空间 $V_h, v_h|_T \in P(T), \forall T \in T_h$, 则有*

$$|v_h|_{1,\Omega} \le Ch_T^{-1}\|v_h\|_{0,T}$$

其中 h_T 为 T 的单元直径; 另外,

$$\|v_h\|_{0,\infty,T} \le Ch_T^{-\frac{n}{2}}\|v_h\|_{0,T}$$

其中 n 为空间维数. 负指数并不是好东西, 因为当 h_T 很小时, $h_T^{-\frac{n}{2}}$ 很大, 不等式没作用.

Proof. 使用 Scaling argument. 由定理6.4

$$\begin{aligned}
|v_h|_{1,T} &\le C\|B_T^{-1}\||\det B_T|^{\frac{1}{2}}|\hat{v}_h|_{1,\widehat{T}} \\
&\le Ch_T^{-1}|\det B_T|^{\frac{1}{2}}|\hat{v}_h|_{1,\widehat{T}} \\
&\le Ch_T^{-1}|\det B_T|^{\frac{1}{2}}\|\hat{v}_h\|_{1,\widehat{T}} \\
&\le Ch_T^{-1}|\det B_T|^{\frac{1}{2}}\|\hat{v}_h\|_{0,\widehat{T}} \quad \text{(有限维空间中范数等价)} \\
&\le Ch_T^{-1}|\det B_T|^{\frac{1}{2}}|\det B_T|^{-\frac{1}{2}}\|v_h\|_{0,T} = Ch_T^{-1}\|v_h\|_{0,T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v_h\|_{0,\infty,T} &= \|\hat{v}_h\|_{0,\infty,\widehat{T}} \\
&\le C\|\hat{v}_h\|_{0,\hat{T}} \quad \text{(有限维空间中范数等价)} \\
&\le C|\det B_T|^{-\frac{1}{2}}\|v_h\|_{0,T} \\
&\le Ch_T^{-\frac{n}{2}}\|v_h\|_{0,T}.
\end{aligned}$$

最后一个不等式是因为 $|\det B_T| \leqslant Ch_T^n$ □

Corollary 6.2. 对 $\forall 0 < m < l < \infty$, 有 $|v_h|_{l,T} \le Ch_T^{m-l}|v_h|_{m,T}$.

Proof.

$$\begin{aligned}|v_h|_{l,T} &\le C\sum_{|\alpha|=l-1}|D^\alpha v_h|_{1,T}\\ &\le Ch_T^{-1}\sum_{|\alpha|=l-1}\|D^\alpha v_h\|_{0,T}\\ &\le Ch_T^{-1}|v_h|_{l-1,T}\\ &\le\cdots\\ &\le Ch_T^{m-l}|v_h|_{m,T}\end{aligned}$$

□

下面讨论整个区域 Ω 上的逆估计.

Definition 6.3 (剖分网格的反假设条件). 对于剖分 T_h, 如果存在常数 $C > 0$, 使得 $\frac{h}{h_T} \le C, \forall T \in T_h$, 其中 $h = \max_{T\in T_h} h_T$, 则称 T_h 满足反假设条件.

Definition 6.4 (拟一致网格). 若网格同时满足正则性条件 $(h_T/\rho_T \leqslant C_1)$ 与反假设条件 $(h/h_T \leqslant C_2)$, 则称其为拟一致网格.

Theorem 6.11. 当网格 T_h 拟一致时, 有

$$\left(\sum_{T\in T_h}|v_h|_{l,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \le Ch^{m-l}\left(\sum_{T\in T_h}|v_h|_{m,T}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $l = 1, m = 0$ 时就是 $|v_h|_{1,\Omega} \le Ch^{-1}\|v_h\|_{0,\Omega}$.

6.2.7 有限元的 L^∞ 估计

Theorem 6.12. 设 u, u_h 分别为问题 *(6.4)* 和 *(6.5)* 的解, $u \in H^2(\Omega)$, 则二维情形下有估计

$$\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega} \le Ch|u|_{2,\Omega}$$

Proof. 由三角不等式,

$$\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega} \le \|u-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega} + \|\Pi u-u_h\|_{0,\infty,\Omega}$$

第一项有插值估计

$$\|u-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega} \le Ch|u|_{2,\Omega}$$

第二项则要用到逆估计:

$$\begin{aligned}\|u_h-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega} &\le Ch^{-1}\|\Pi u-u_h\|_{0,\Omega}\\ &\le Ch^{-1}\left(\|\Pi u-u\|_{0,\Omega}+\|u-u_h\|_{0,\Omega}\right)\\ &\le Ch^{-1}(h^2|u|_{2,\Omega}+h\|u-u_h\|_{1,\Omega})\\ &\le Ch|u|_{2,\Omega}+C\|u-u_h\|_{1,\Omega} \leqslant Ch|u|_{2,\Omega}\end{aligned}$$

对于非整数 $s>0$, $\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^s|u|_{s+1,\Omega}$ □

Remark 6.9. 当 Ω 在三维空间时, 上述定理的结论就变成 $\|u-u_h\|_{0,\infty,\Omega}\leq Ch^{\frac{1}{2}}|u|_{2,\Omega}$.

Proof. 由定理6.7, 三维情形下的插值误差估计是 $\|u-\Pi u\|_{0,\infty,\Omega}\leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|u|_{2,\Omega}$. □

7 非协调有限元方法

非协调有限元的框架是考虑 $V_h\not\subseteq V$, 非协调元是协调元的扩张. 对于协调有限元, 二阶问题上, $V\subseteq H^1(\Omega)$ 就要求 $V_h\subseteq C^0(\bar{\Omega})$, 是容易构造的. 在四阶问题上, $V\subseteq H^2(\Omega)$ 就要求 $V_h\subseteq C^1(\bar{\Omega})$. 因此四阶问题的有限元非常难以构造, 最简单的如 Argyris 元, 几乎不用. 对此, 常用非协调元解决.

流体中的 Stokes 问题稳定性使用非协调元比较好.

7.1 抽象误差估计

对于协调元, 我们有 Céa 引理. 当考虑非协调元时, Céa 引理就不再适用. 考虑变分问题

$$\begin{cases}\text{求}u\in V,\ \text{s.t.}\\ a(u,v)=f(v),\quad \forall v\in V\end{cases}\tag{7.1}$$

适用非协调元方法时, 其对应的有限元离散为

$$\begin{cases}\text{求}u_h\in V_h\not\subseteq V_h,\ \text{s.t.}\\ a_h(u_h,v_h)=f(v_h),\forall v_h\in V_h\end{cases}\tag{7.2}$$

这里 a_h 是分片定义的 (a_h 可能与 a 不同):

$$a_h(u_h,v_h)=\sum_{T\in T_h}a(u_h|_T,v_h|_T)$$

$a_h(u_h,v_h)=\sum\limits_{T\in T_h}\int_T\nabla u_h\nabla v_h dx$, 不能用 $a(u,v)=\int_\Omega\nabla u\nabla v dx$ 因为 u,v 不一定是 C^1 的.

相应的范数也是分片定义的:

$$\|v_h\|_h=\left(\sum_{T\in T_h}|v_h|_{l,T}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

一般需要 check 一下 $\|\cdot\|_h$ 是范数. 对于二阶问题, $l=1$; 对于四阶问题, $l=2$. 显然, 若 $u,v\in V$, 则 $\|v\|_h=\|v\|_V, a_h(u,v)=a(u,v)$. 若 a 是有界, 椭圆的, 则可以得到 a_h 的有界性和椭圆性: 存在 $M,\alpha>0$, 使得

$$|a_h(u_h,v_h)|\leq M\|u_h\|_h\|v_h\|_h,\forall u_h,v_h\in V_h$$

$$a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_h^2, \forall v_h \in V_h$$

由 Lax-Milgram 定理, 可知离散问题 (7.2) 有唯一解. 非协调元的误差分析主要使用下面的第二 Strang 引理. 所有的有限元误差估计, 要么是 Céa 引理, 要么是第二 Strang 引理.

Theorem 7.1 (第二 Strang 引理). *设 u, u_h 分别为问题 (7.1) 和 (7.2) 的解, $\|\cdot\|_h$ 为 V_h 空间的范数, $a_h(\cdot,\cdot)$ 具有椭圆性、有界性. 则*

$$\begin{aligned} &C_1\left\{\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h+\sup_{0\neq w_h\in V_h}\frac{|a_h(u,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_h}\right\} \\ &\quad\leqslant \|u-u_h\|_h \leq C_2\left\{\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h+\sup_{0\neq w_h\in V_h}\frac{|a_h(u,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_h}\right\} \end{aligned} \tag{7.3}$$

这里 $\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h$ 是逼近误差, $\sup_{0\neq w_h\in V_h}\frac{|a_h(u,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_h}$ 是相容误差. 非协调元不相容, 所以相容误差非零.

Proof. 对 $\forall v_h \in V_h$, 由三角不等式[7]

$$\|u-u_h\|_h \leq \|u-v_h\|_h + \|v_h-u_h\|_h$$

由椭圆性,

$$\begin{aligned} \alpha\|u_h-v_h\|_h^2 &\leq a_h(u_h-v_h, u_h-v_h) \\ &= a_h(u_h-u, u_h-v_h) + a_h(u-v_h, u_h-v_h) \\ &\leq C\|u-v_h\|_h\|u_h-v_h\|_h + |a_h(u, u_h-v_h) - f(u_h-v_h)| \end{aligned}$$

这里 $\|u-v_h\|_h$ 应理解为延拓, 即 $\|u-v_h\|_h = \|u-v_h\|$. 因为 $u_h - v_h \in V_h$, 所以

$$\begin{aligned} \|u_h-v_h\|_h &\leqslant \frac{C}{\alpha}\|u-v_h\| + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{|a_h(u,u_h-v_h)-f(u_h-v_h)|}{\|u_h-v_h\|_h} \\ &\leqslant \frac{C}{\alpha}\|u-v_h\| + \frac{1}{\alpha}\cdot\sup_{0\neq w_h\in V_h}\frac{|a_h(u,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_h} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \|u-u_h\|_h &\leq \|u-v_h\|_h + \|u_h-v_h\|_h \\ &\leq (1+\frac{C}{\alpha})\|u-v_h\|_h + \frac{1}{\alpha}\sup_{0\neq w_h\in V_h}\frac{|a_h(u,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_h} \end{aligned}$$

再由 v_h 的任意性知

$$\|u-u_h\|_h \leqslant C\left\{\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h + \sup_{0\neq w_h\in V_h}\frac{|a_h(u,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_h}\right\}$$

所以右端的不等式成立.

[7]刚开始不能直接用椭圆性, 因为椭圆性只对有限元空间可用, 所以采用三角不等式.

考虑

$$|a_h(u,w_h)-f(w_h)|=|a_h(u-u_h,w_h)|\leqslant M\|u-u_h\|\cdot\|w_h\|_h$$

可见

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_h \geqslant&\frac{1}{M}\sup_{w_h\in V_h}\frac{a_h(u,w_h)-a_h(u_h,w_h)}{\|w_h\|_h}\\ =&\frac{1}{M}\sup_{w_h\in V_h}\frac{a_h(u,w_h)-f(w_h)}{\|w_h\|_h}\end{aligned}$$

又因为 $\|u-u_h\|_h\geqslant \inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|$, 由上面两个式子即得左边的不等式.

若 $W_h\subseteq V$ 则由 (7.1) 知, $a_h(u,w_h)-f(w_h)=0$, 相容误差消失, 退化为 Céa 引理. □

Remark 7.1. *(7.3) 式右端第一项与 Céa 引理完全一样, 称之为逼近误差; 多出来的第二项被称为相容 (非协调) 误差. 易知当 $w_h\in V$ 时, $a_h(u,w_h)-f(w_h)=0$, 第二项就是 0.*

7.2 二阶非协调有限元

Lemma 7.1 (精细迹不等式)**.** *设 T_h 是正则网格 (后面讲的网格都是正则网格). 对 $\forall T\in T_h, v\in H^1(T)$,*

$$\|v\|_{0,\partial T}^2\le C\left(h_T^{-1}\|v\|_{0,T}^2+h_T|v|_{1,T}^2\right)$$

其中 C 依赖于 $\frac{h_T}{\rho_T}$. 要严格来讲的话, 其实 T 是 $T_1\cup T_2$, 是两个单元上的积分.

Proof. 遵循 Scaling argument(scaling-estimate-scaling). 根据定义, $\|v\|_{0,\partial T}^2=\sum_{E\subseteq\partial T}\|v\|_{0,E}^2$.

$$\begin{aligned}\|v\|_{0,E}^2&=\int_E v^2\ \mathrm{d}s\\ &=\frac{|E|}{|\widehat{E}|}\int_{\widehat{E}}\hat{v}^2\ \mathrm{d}\hat{s}\\ &=\frac{|E|}{|\widehat{E}|}\|\hat{v}\|_{0,\widehat{E}}^2\\ &\le\frac{|E|}{|\widehat{E}|}\|\hat{v}\|_{0,\partial T}^2\\ &\le C\frac{|E|}{|\widehat{E}|}\|\hat{v}\|_{1,\widehat{T}}^2\quad \text{迹定理}\\ &\le C\frac{|E|}{|\widehat{E}|}\left(|T|^{-1}\|v\|_{0,T}^2+|T|^{-1}h_T^2|v|_{1,T}^2\right)\qquad\text{定理(6.4)}\\ (\text{注意}|\hat{E}|=1)&\le C\frac{|E|}{|\widehat{E}||T|}\left(\|v\|_{0,T}^2+h_T^2|v|_{1,T}^2\right)\\ \text{二维情形}&\le C\left(h_T^{-1}\|v\|_{0,T}^2+h_T|v|_{1,T}^2\right)\end{aligned}$$

这里正则网格时, $\frac{|E|}{|T|} \approx h_T^{-1}$ □

7.2.1 Crouzeix-Raviart 元 (1973)

Crouzeix-Raviart (CR) 元是针对 Stokes 问题提出的, 是 P_1 元, 其自由度有两种定义:

$$\Sigma^{(1)} = \{u(m_i), i = 1,2,3\}$$
$$\Sigma^{(2)} = \left\{\frac{1}{|l_i|}\int_{l_i} u \, \mathrm{d}s, i = 1,2,3\right\}$$

其中 $m_i, i = 1,2,3$ 为三边中点. 可以证明 $\Sigma^{(1)}$ 与 $\Sigma^{(2)}$ 对线性函数是等价的 (基函数相同, 所以等价.), 且是适定的. 插值函数为:

$$\Pi^{(1)}u = \sum_{i=1}^{3} u(m_i)\phi_i = \sum_{i=1}^{3} u(m_i)(1-2\lambda_i)$$
$$\Pi^{(2)}u = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{|l_i|}\int_{l_i} u \, \mathrm{d}s\right)\phi_i$$

这里比如求 ϕ_1, 因为在 $\overrightarrow{a_2a_3}$ 上 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, 所以 ϕ_1 必含 $(\lambda_1 - \frac{1}{2})$ 因子. 二者最后的表达式是一样的. 不过, 第二种插值方式具有某种正交性: 由格林公式

$$\int_T (\nabla u - \nabla\Pi^{(2)}u)\cdot\nabla v_h dxdy = \underbrace{\int_{\partial T}(u-\Pi^{(2)}u)\frac{\partial v_h}{\partial n}ds - \int_T (u-\Pi^{(2)}u)\Delta v_h dxdy}_{=0}$$

其中 $\frac{\partial v_h}{\partial n}$ 是常数, $\Delta v_h = 0$.

有限元空间可如下定义:

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ v_h|_T \in P_1(T) : v_h \text{ 跨过单元边界中点连续}, v_h \text{ 在}\partial\Omega\text{上的中点取}0 \right\} \\ &= \left\{ v_h|_T \in P_1(T) : \int_E v_h \, \mathrm{d}s \text{ 跨过边界连续}, \ \int_E v_h \, \mathrm{d}s = 0, \ \text{当} E \subseteq \partial\Omega \right\}. \end{aligned}$$

根据自由度的选取[8], 可知 CR 元是非协调元.

下面利用 CR 元求解二阶问题. 定义

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{T\in T_h}\int_T \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, \mathrm{d}x, \forall u_h, v_h \in V_h,$$
$$\|\cdot\|_h = (a_h(\cdot,\cdot))^{\frac{1}{2}}$$

a_h 相当于把 a 从 V 延拓到 V_h. 下面验证 $\|\cdot\|_h$ 是范数. 令 $\|v_h\|_h = 0$, 有 $|v_h|_{1,T} = 0, \forall T \in T_h$, 则 v_h 在 $\forall T \in T_h$ 内都是常数. 再由边界条件, 与边界接壤的单元上 v_h 就是 0. 又因为 v_h 跨过单元中点连续, 最终可得 $v_h \equiv 0$.

[8]等价性是因为 $v_h|_T \in P_1(T)$, $\int_E v_h ds = |E| v_h(m)$,$m$ 是边 E 的中点,

非协调元逼近问题为

$$\begin{cases} 求 u_h \in V_h,\ \text{s.t.} \\ a_h\left(u_h, v_h\right) = f\left(v_h\right), \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

易知 $a_h(\cdot,\cdot)$ 在 V_h 上有界且具有椭圆性:

$$\left|a_h\left(u_h, v_h\right)\right| \leq M\left\|u_h\right\|_h\left\|v_h\right\|_h, \forall u_h, v_h \in V_h$$
$$a_h\left(v_h, v_h\right) = \left\|v_h\right\|_h^2, \forall v_h \in V_h$$

根据 Lax-Milgram 定理, 逼近问题有唯一解.

下面估计 CR 元的误差. 因为 CR 元是非协调元, 所以由第二 Strang 引理 (7.3),

$$\left\|u-u_h\right\|_h \leq C\left(\inf_{v_h \in V_h}\left\|u-v_h\right\|_h + \sup_{0 \neq w_h \in V_h} \frac{\left|a_h(u, w_h) - f(w_h)\right|}{\left\|w_h\right\|_h}\right)$$

将此误差分为两部分估计:

- 估计逼近误差: 利用插值误差, 可得

$$\inf_{v_h \in V_h}\left\|u-v_h\right\|_h \leq \left\|u-\Pi^{(1)} u\right\|_h \text{ (或}^9 \left\|u-\Pi^{(2)} u\right\|_h, \left\|u-\Pi^L u\right\|_h)$$

  其中 $\Pi^L u$ 为整体连续的 P_1 元插值函数, 这是因为协调的 P_1 元为非协调 P_1 元的子空间. 于是对 $\forall T \in T_h$, 当 $u \in H^2(T)$ 时, 根据定理6.6, 有

$$\left\|u-\Pi^{(1)} u\right\|_{1,T} \leq C h_T |u|_{2,T}$$
$$\left\|u-\Pi^{(2)} u\right\|_{1,T} \leq C h_T |u|_{2,T}$$
$$\left\|u-\Pi^{L} u\right\|_{1,T} \leq C h_T |u|_{2,T}$$

  但相比之下, $\Pi^{(2)}$ 具有更好的稳定性: 当 $u \in H^1(\Omega)$ 时, 因为 $H^1(T) \leftrightarrow C^0(\bar{T})$, 所以一般没有

$$\left|\Pi^{(1)} u\right|_{1,T} \leq C|u|_{1,T}, \quad \left|u-\Pi^{(1)} u\right|_{1,T} \leq C|u|_{1,T}$$

  但对于 $\Pi^{(2)}$, 根据迹定理3.8, 有[10] $\frac{1}{l_i}\int_{l_i} u \,\mathrm{d}s \leq C\|u\|_{1,T}$, 所以 $\left|\Pi^{(2)} u\right|_{1,T} \leq C|u|_{1,T}$. 这还表明 $\Pi^{(2)} \in \mathcal{L}\left(H^1(T), H^1(T)\right)$. 进一步就有

$$\left|u-\Pi^{(2)} u\right|_{1,T} \leq C\left|\hat{u}-\widehat{\Pi}^{(2)} \hat{u}\right|_{1,\widehat{T}} \leq C|\hat{u}|_{1,\widehat{T}} \leq C|u|_{1,T}$$

  对于流体 Stokes 问题, 上述稳定性是很重要的.

[9] 协调元的话可以使用 Lagrange 插值.

[10] $\frac{1}{l_i}\int_{l_i} u ds \in (H^1(T))'$, 但 $\Pi^{(1)}, \Pi^L \notin (H^1(T))'$

总之, 对 $u \in H^2(\Omega)$, 整体上有

$$\begin{aligned}
\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h &\le \left\|u-\Pi^i u\right\|_h \quad (i=(1),(2),L)\\
&= \sum_{T\in T_h}\left(\left|u-\Pi^i u\right|_{1,T}^2\right)^{\frac12}\\
&\le Ch\left(\sum_{T\in T_h}|u|_{2,T}^2\right)^{\frac12}\\
&= Ch|u|_{2,\Omega}.
\end{aligned}$$

即逼近误差为一阶.

- 估计相容误差: 设 $E_h(u,w_h)=a_h(u,w_h)-f(w_h)$. 进一步计算可得

$$\begin{aligned}
E_h(u,w_h) &= \sum_{T\in T_h}\int_T \nabla u\cdot\nabla w_h \,\mathrm{d}x-(-\Delta u,w_h)\\
\text{分片 Green 公式} &= \sum_{T\in T_h}\left(\int_T -\Delta u\cdot w_h\,\mathrm{d}x+\int_{\partial T}\frac{\partial u}{\partial n}w_h\,\mathrm{d}s+(\Delta u,w_h)\right)\\
&= \sum_{T\in T_h}\int_{\partial T}\frac{\partial u}{\partial n}w_n\,\mathrm{d}s\\
&= \sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E\frac{\partial u}{\partial n}w_h\,\mathrm{d}s\\
&= \sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E\frac{\partial u}{\partial n}(w_h-P_{0E}w_h)\,\mathrm{d}s+\sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E\frac{\partial u}{\partial n}P_{0E}w_h\,\mathrm{d}s\\
&=: A+B
\end{aligned}$$

其中 $P_{0E}w_h=\frac{1}{|E|}\int_E w_h\,\mathrm{d}s$, $P_0: H^1(T)\to P_0$(看成常数的插值). 先来看 B. 假设 E 为 T^-,T^+ 两个单元的公共边. 因为 $P_{0E}w_h^+|_E=P_{0E}w_h^-|_E$. 而 $\frac{\partial u^+}{\partial n^+}|_E=-\frac{\partial u^-}{\partial n^-}|_E$ 所以求和中内部的边相互抵消, 而对于 $E\subseteq\partial\Omega$, 由边界条件有 $P_{0E}w_h=0$, 因此 $B=0$.

下面仅需估计 A. 进一步计算可得

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E\frac{\partial u}{\partial n}(w_h-P_{0E}w_h)\,\mathrm{d}s\\
&= \sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E\left(\frac{\partial u}{\partial n}-P_{0E}\frac{\partial u}{\partial n}\right)(w_h-P_{0E}w_h)\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E P_{0E}\frac{\partial u}{\partial n}(u-P_{0E}w_h)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

根据定义, 固定 E, $P_{0E}\frac{\partial u}{\partial n}$ 为常数, 而 $\int_E(w_h-P_{0E}w_h)\,\mathrm{d}s=\int_E w_h ds-P_{0E}w_h\int_E ds=0$, 所以

$$\sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E P_{0E}\frac{\partial u}{\partial n}(u-P_{0E}w_h)ds=0$$

因此

$$A=\sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}\int_E\left(\frac{\partial u}{\partial n}-P_{0E}\frac{\partial u}{\partial n}\right)(w_h-P_{0E}w_h)\,\mathrm{d}s$$

记 $\phi:=\frac{\partial u}{\partial n}$, 于是

$$\int_E(\phi-P_{0E}\phi)(w_h-P_{0E}w_h)\,\mathrm{d}s\le\|\phi-P_{0E}\phi\|_{0,E}\|w_h-P_{0E}w_h\|_{0,E}$$

下面估计这两项. 由精细迹不等式 (引理7.1), 因为 P_{0E} 是常数,

$$\begin{aligned}\|\phi-P_{0E}\phi\|_{0,E}^2&\le C(h_T^{-1}\|\phi-P_{0E}\phi\|_{0,T}^2+h_T|\phi-P_{0E}\phi|_{1,T}^2)\\&=C(h_T^{-1}\|\phi-P_{0E}\phi\|_{0,T}^2+h_T|\phi|_{1,T}^2).\end{aligned}$$

且有①插值估计 (定理6.6), ②Bramble-Hilbert 定理, ③Friedrichs 不等式 (3.3) 以及 $\int_E\phi-P_{0E}\phi=0$. 注意到 $\widehat{P_{0E}\phi}=P_{0\hat{E}}\hat{\phi}$,

$$\|\phi-P_{0E}\phi\|_{0,T}\leqslant|T|^{\frac12}\|\hat{\phi}-P_{0\hat{E}}\hat{\phi}\|_{0,\hat{T}}\leqslant|T|^{\frac12}|\hat{\phi}|_{1,\hat{T}}\leqslant Ch_T|\phi|_{1,T}.$$

所以, $\|\phi-P_{0E}\phi\|_{0,T}\leqslant Ch_T|\phi|_{1,T^+\cup T^-}$, $\|\phi-P_{0E}\phi\|_{0,E}\leqslant Ch_T^{\frac12}|\phi|_{1,T^+\cup T^-}$.

同理可得 $\|w_h-P_{0E}w_h\|_{0,E}\leqslant Ch_T^{\frac12}|w_h|_{1,T}$. 因此

$$\begin{aligned}|A|&\leqslant\sum_{T\in T_h}\sum_{E\subseteq\partial T}Ch_T^{\frac12}|\phi|_{1,T}h_T^{\frac12}|w_h|_{1,T}\\\text{Schwarz 不等式}&\leqslant Ch\left(\sum_{T\in T_h}|\phi|_{1,T}^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{T\in T_h}|w_h|_{1,T}^2\right)^{\frac12}\\\text{由}\frac{\partial u}{\partial n}=\phi\text{知}&\leqslant Ch\left(\sum_{T\in T_h}|u|_{2,T}^2\right)^{\frac12}\|w_h\|_h\\&\leqslant Ch|u|_{2,\Omega}\|w_h\|_h\end{aligned}$$

综合 A,B, 有

$$E_h(u,w_h)\leqslant Ch|u|_{2,\Omega}\|w_h\|_h\Rightarrow\frac{a_h(u,w_h)-f(w_h)}{\|w_h\|_h}\leqslant Ch|u|_{2,\Omega}$$

即相容误差为一阶.

综合逼近、相容误差, 就有 $\|u-u_h\|_h\le Ch|u|_{2,\Omega},\forall u\in H^2(\Omega)$. 若 $u\in H^1(\Omega),\frac{\partial u}{\partial n}\in L^2$, 在边界上无迹.

考虑一般情形, 设 $u\in H^s(\Omega)$, 则 $\frac{\partial u}{\partial n}\in H^{s-1}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_E\in H^{s-\frac32}(\Omega)$. 因此若 $s<\frac32$, 就无法使用 Green 公式. 下面考虑 $s<\frac32$ 的情形. 设 $\Pi^C:V_h\to H_0^1(\Omega)$ 是到协调元的插值, 满足一定的插值条件 (后面会说). 则

$$\begin{aligned}a_h(u,w_h)-f(w_h)&=a_h(u,w_h-\Pi^Cw_h)+a_h(u,\Pi^Cw_h)-f(w_h-\Pi^Cw_h)-f(\Pi^Cw_h)\\&=a_h(u,w_h-\Pi^Cw_h)-f(w_h-\Pi^Cw_h)\\&=a_h(u-v_h,w_h-\Pi^Cw_h)+a_h(v_h,w_h-\Pi^Cw_h)-f(w_h-\Pi^Cw_h)\\&=:A+B+C\end{aligned}$$

对 $\forall v_h \in V_h$ 都成立. 分别估计 A, B, C :

- $$\begin{aligned}|A| &\leq C\|u-v_h\|_h\|w_h-\Pi^C w_h\|_h\\ &= C\|u-v_h\|_h\bigg(\sum_{T\in T_h}|w_h-\Pi^C w_h|_{1,T}^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\|u-v_h\|_h\|w_h\|_h \quad (\Pi^C \text{ 的性质})\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}|B| &= \sum_{T\in T_h}\int_T \nabla v_h\cdot\nabla(w_h-\Pi^C w_h)\mathrm{d}x\\ \text{Green 公式} &= \sum_{T\in T_h}\left(-\int_T \Delta v_h(w_h-\Pi^C w_h)\mathrm{d}x+\int_{\partial T}\frac{\partial v_h}{\partial n}(w_h-\Pi^C w_h)\mathrm{d}s\right)\\ &= \sum_{T\in T_h}\int_{\partial T}\frac{\partial v_h}{\partial n}(w_h-\Pi^C w_h)\mathrm{d}s\ (v_h\text{线性})\\ &= 0.\ (\Pi^C\text{的性质})\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}|C| &= \left|-(f, w_h-\Pi^C w_h)\right|\\ &\leq \|f\|_{0,\Omega}\left\|w_h-\Pi^C w_h\right\|_{0,\Omega}\\ &= \|f\|_{0,\Omega}\left(\sum_{T\in T_h}\left\|w_h-\Pi^C w_h\right\|_{0,T}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq Ch\|f\|_{0,T}\left(\sum_{T\in T_h}|w_h|_{1,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\Pi^C \text{ 的性质})\\ &= Ch\|f\|_{0,T}\left\|w_h\right\|_h.\end{aligned}$$

综上, 有
$$\frac{a_h(u,w_h)-f(w_h)}{\|w_h\|_h}\leq C\left(\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h+h\|f\|_{0,\Omega}\right)$$

7.2.2 Rannacher-Turek 非协调元 (1992)

在矩形参考元 $\hat{T}=(-1,1)^2$ 上, $P(\hat{T})=\operatorname{span}\{1,\xi,\eta,\xi^2-\eta^2\},\Sigma(\hat{T})=\left\{\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{u}\ \mathrm{d}s, i=1,2,3,4\right\}$, 其中 $\hat{l}_i$ 为矩形的四边. 误差估计与 CR 元是一模一样的, 故不再赘述.

7.2.3 Wilson 矩形元

- $P(\widehat{T})=P_2(\widehat{T})=Q_1(\widehat{T})+\operatorname{span}\{1-\xi^2,1-\eta^2\}=\{1,\xi,\eta,\xi\eta,\xi^2,\eta^2\}$

- $\widehat{\Sigma}=\left\{\hat{u}\left(\hat{a}_i\right), i=1,2,3,4; \frac{1}{|\widehat{T}|} \int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \mathrm{~d} \xi \mathrm{d} \eta; \frac{1}{|\widehat{T}|} \int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} \mathrm{~d} \xi \mathrm{d} \eta\right\}$ 这里若要求 $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \mathrm{~d} \xi \mathrm{~d} \eta$ 有意义, 需要 $\hat{u} \in H^4$

Wilson 元与 Carey 元很像[11].

先证 Wilson 元是适定的: 设 $\hat{u}=a_1+a_2 \xi+a_3 \eta+a_4 \xi \eta+a_5 \xi^2+a_6 \eta^2$. 由

$$\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \mathrm{~d} \xi \mathrm{d} \eta=0$$

知, $a_5=0$. 由

$$\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} \mathrm{~d} \xi \mathrm{d} \eta=0$$

知, $a_6=0$. 所以 $\hat{u}=a_1+a_2 \xi+a_3 \eta+a_4 \xi \eta$. 这是双线性元, 由双线性元的结果知, $\hat{u} \equiv 0$, 因此是适定的.

下面求其插值基函数. 设 $\widehat{\Pi} \hat{u}=\alpha_1+\alpha_2 \xi+\alpha_3 \eta+\alpha_4 \xi \eta+\alpha_5\left(1-\xi^2\right)+\alpha_6\left(1-\eta^2\right)=: \widehat{\Pi}^0 \hat{u}+\widehat{\Pi}^{\perp} \hat{u}$. 其中 $\widehat{\Pi}^0 \hat{u}$ 是双线性元部分, 易知为

$$\begin{aligned}
\widehat{\Pi}^0 \hat{u}= & \hat{u}\left(\hat{a}_1\right) \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}+\hat{u}\left(\hat{a}_2\right) \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}+\hat{u}\left(\hat{a}_3\right) \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\
& +\hat{u}\left(\hat{a}_4\right) \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}
\end{aligned}$$

而 $\widehat{\Pi}^{\perp} \hat{u}$ 完全由自由度中的后两个泛函决定, 易知为

$$\widehat{\Pi}^{\perp} \hat{u}=-\frac{1}{2|\widehat{T}|}\left(\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \mathrm{~d} \xi \mathrm{d} \eta\left(1-\xi^2\right)+\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2} \mathrm{~d} \xi \mathrm{d} \eta\left(1-\eta^2\right)\right)$$

Wilson 元是非常好算的[12], 它的协调部分与非协调部分不交叉.

Wilson 元的有限元空间为[13]

$$\begin{aligned}
V_h^w= & \left\{v_h \in L^2(\Omega),\left.v_h\right|_T \in P_2(T), \forall T \in T_h, v_h \text { 跨过单元顶点连续}, v_h(a)=0,\right. \\
& \left.\forall \text { 顶点} a \in \partial \Omega\right\}
\end{aligned}$$

从而 V_h^w 也可以分解成 $V_h^w=V_h^0+V_h^{\perp}$, 即协调双线性元空间和非协调部分.

有限元逼近问题为

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{求} u_h \in V_h^w, \text { s.t. } \\
a_h\left(u_h, v_h\right)=f\left(v_h\right), \forall v_h \in V_h^w
\end{array}\right.$$

注意此时, $\|\cdot\|_h=\left(\sum_{T \in T_h}|\cdot|_{1, T}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 V_h^w 上的模: 若 $\left\|v_h\right\|_h=0$, 则 $\left|v_h\right|_{1, T}=0$, 从而 $\left.v_h\right|_T$ 为一常数. 因为 $v_h(a)=0, \forall v \in \partial \Omega$, 因此 $\left.v_h\right|_T=0, \forall T: T \cap \partial \Omega \neq \varnothing$, 进而可推出 $v_h \equiv 0$.

下面估计 Wilson 元的误差. 仍然利用第二 Strang 引理 (7.3)

[11]Carey 元也是非协调的, 误差估计都类似, a_i 分别是三角形的三个顶点和中心. $P(T)=P_1(T)+span\{\lambda_1 \lambda_2+\lambda_1 \lambda_3+\lambda_2 \lambda_3\}$, $\Sigma_T=\{u(a_i), \int_T \frac{1}{|T|} \Delta u d x d y\}$

[12]取插值函数 $\widehat{\Pi} \hat{u}=b_1+b_2 \xi+b_3 \eta+b_4 \xi \eta+b_5 \xi^2+b_6 \eta^2$, 由 $\hat{\Pi} \hat{u}(\hat{a}_i)=\hat{u}(\hat{a}_i)$ 可求出 b_1, b_2, b_3, b_4, 由 $\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{\Pi} \hat{u}}{\partial \xi^2}=\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2}$ 可求 b_5, 由 $\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{\Pi} \hat{u}}{\partial \eta^2}=\int_{\widehat{T}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta^2}$ 可求 b_6

[13]并没有中点连续积分连续.

- 逼近误差:

$$
\begin{aligned}
\inf_{v_h\in V_h^w}\|u-v_h\|_h &\le \|u-\Pi u\|_h \\
&= \left(\sum_{T\in T_h}|u-\Pi u|_{1,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \begin{cases} Ch^2|u|_{3,\Omega}, & u\in H^3(\Omega) \quad (\because \Pi u\in P_2(\widehat{T})) \\ Ch|u|_{2,\Omega}, & u\in H^2(\Omega)\end{cases}
\end{aligned}
$$

- 相容误差: 设 $w_h=w_h^0+w_h^\perp$, 其中 $w_h^0\in Q_1$ 为协调部分[14], 从而连续, $w_h^\perp$ 为非协调部分.

$$
\begin{aligned}
a_h(u,w_h)-f(w_h) &= a_h\left(u,w_h^0\right)+a_h\left(u,w_h^\perp\right)-f\left(w_h^0\right)-f\left(w_h^\perp\right) \\
&= a_h\left(u,w_h^\perp\right)-f\left(w_h^\perp\right) \\
&= \sum_{T\in T_h}\left(\int_T\nabla u\cdot\nabla w_h^\perp \mathrm{d}x-\int_T f w_h^\perp\mathrm{d}x\right) \\
&=: \sum_{T\in T_h}(A_T+B_T)
\end{aligned}
$$

分别估计 A_T,B_T. 首先考虑 A_T. 二维情形

$$
A_T=\int_T\nabla u\cdot\nabla w_h^\perp\mathrm{d}x=\int_T(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial w_h^\perp}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial w_h^\perp}{\partial x_2})\mathrm{d}x =: A_{1T}+A_{2T}
$$

$$
\begin{aligned}
|A_{1T}| &= \left|\int_T\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial w_h^\perp}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_T\phi\frac{\partial w_h^\perp}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x\right| \quad (\phi:=\frac{\partial u}{\partial x_1}) \\
&\le C|T|h_T^{-1}\int_{\hat{T}}\left|\hat{\phi}\frac{\partial\hat{w}_h^\perp}{\partial\xi}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&\le C|T|h_T^{-1}\int_{\hat{T}}\left|(\hat{\phi}-P_{0\widehat{T}}\hat{\phi})\frac{\partial\hat{w}_h^\perp}{\partial\xi}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+C|T|h_T^{-1}\int_{\hat{T}}\left|P_{0\widehat{T}}\hat{\phi}\frac{\partial\hat{w}_h^\perp}{\partial\xi}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&(P_0\hat{T}\hat{\phi}=\frac{1}{|\widehat{T}|}\int_{\widehat{T}}\hat{\phi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta) \\
&= C|T|h_T^{-1}\int_{\hat{T}}(\hat{\phi}-P_0\hat{T}^{-}\hat{\phi})\frac{\partial\hat{w}_h^\perp}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\
&\le C|T|h_T^{-1}\|\hat{\phi}-P_{0\widehat{T}}\hat{\phi}\|_{0,\widehat{T}}\left\|\frac{\partial\hat{w}_h^\perp}{\partial\xi}\right\|_{0,\widehat{T}} \\
&\le C|T|h_T^{-1}\hat{C}|\hat{\phi}|_{1,\widehat{T}}|\hat{w}_h^\perp|_{1,\widehat{T}} \qquad (\text{Poincaré 不等式}) \\
&\le Ch_T|\phi|_{1,T}|w_h|_{1,T} \quad \text{因}\int_{\hat{T}}\nabla u_h^0\nabla u_h^\perp=0,\text{可以验证}|\hat{w}_h^\perp|_{1,\widehat{T}}^2+|\hat{w}_h^0|_{1,\widehat{T}}^2=|\hat{w}_h|_{1,\widehat{T}}^2 \\
&\le Ch_T|u|_{2,T}|w_h|_{1,T}
\end{aligned}
$$

[14]协调部分满足 $a(u,w_h^\circ)=f(w_h^\circ)$

这里 $\int_{-1}^{1}\xi d\xi=0$ 及 $\int_{\hat{T}}\frac{\partial\hat{w}_h^{\perp}}{\partial\xi}=\int_{\hat{T}}\beta\xi d\xi=0$, β 是自由度. 同理可证明 $A_{2T}\leq Ch_T|u|_{2,T}|w_h\|_{1,T}$. 因此

$$A\leq\sum_{T\in T_h}Ch_T|u|_{2,T}|w_h|_{1,T}\leq Ch|u|_{2,\Omega}\|w_h\|_h$$

即 A 只有一阶精度. 下面考虑 B_T.

$$\begin{aligned}B_T=\int_T fw_h^{\perp}\mathrm{d}x&\leq\|f\|_{0,T}\left\|w_h-w_h^0\right\|_{0,T}\\&=\|f\|_{0,T}\left\|w_h-\widetilde{\Pi}w_h\right\|_{0,T}\quad(\widetilde{\Pi}\text{为双线性插值})\\&\leq\|f\|_{0,T}Ch_T^2|w_h|_{2,T}\quad(\text{双线性插值没有一阶稳定性})\\&\leq Ch_T\|f\|_{0,T}\left|w_h\right|_{1,T}\quad(\text{逆不等式})\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{T\in T_h}B_T\leq\sum_{T\in T_h}Ch_T\|f\|_{0,T}\left|w_h\right|_{1,T}\leq Ch\|f\|_{0,\Omega}\left\|w_h\right\|_h$$

$$\|w_h-w_h^0\|_{0,\Omega}\leqslant Ch\|w_h\|_h,\ |f(w_h^{\perp})|\leqslant Ch\|f\|_{0,T}\|w_h\|_h$$

最后

$$\frac{a_h\left(u,w_h\right)-f\left(w_h\right)}{\left\|w_h\right\|_h}\leq Ch\left(\|u\|_{2,\Omega}+\|f\|_{0,\Omega}\right)$$

相容误差为一阶.

另外, 有一类 quasi-Wilson 元, 它的相容误差二阶, 而插值误差为一阶. 在三角形单元上的 Carey 元与 Wilson 元的分析是一模一样的. 它的

$$P(T)=\operatorname{span}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\right\}$$

自由度为

$$\Sigma(T)=\left\{u\left(a_i\right),i=1,2,3;\frac{1}{|T|}\int_T\Delta u\ \mathrm{d}x\right\}$$

7.3 四阶问题的非协调有限元

考虑固支板问题[15](双条和, 板弯曲)

$$\begin{cases}-\Delta^2u=f,&\text{in }\Omega\\u=\frac{\partial u}{\partial n}=0,&\text{on }\partial\Omega\end{cases}$$

其变分问题为

$$\begin{cases}\text{求}u\in H_0^2(\Omega)=:V,\ \text{s.t.}\\a(u,v)=f(v),\forall v\in V\end{cases}$$

[15]若要用协调元, 则需要 $V_h\subseteq C^1(\Omega)$, 这是不好构造的, 比如 Argyris 元, BFS 元, 但这两种计算很复杂. 二阶问题可用协调元, 对于四阶问题常常倾向于非协调元.

其中

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \left[\Delta u\Delta v + (1-\sigma)\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right] \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega \left[\sigma\Delta u\Delta v + (1-\sigma)\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
f(v) = \int_\Omega fv\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
$$

有限元空间为[16]

$$
V_h = \left\{ v_h|_T \in P(T), v_h, \frac{\partial v_h}{\partial n} \text{ 满足一定的连续性条件} \right\}
$$

对 $\forall u_h, v_h \in V_h$, 定义 $a_h(u_h,v_h) = \sum_{T\in T_h} a\left(u_h|_T, v_h|_T\right)$, 范数定义为 $\|\cdot\|_h = \left(\sum_{T\in T_h} |v_h|_{2,T}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

7.3.1 Adini 元

形函数空间 $P(\hat{T}) = P_3(\widehat{T}) + \operatorname{span}\{\xi^3\eta, \xi\eta^3\}$.

自由度 $\widehat{\Sigma}(\widehat{T}) = \left\{\hat{u}(\hat{a}_i), \frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}(\hat{a}_i), \frac{\partial\hat{u}}{\partial\eta}(\hat{a}_i), i=1,2,3,4\right\}$. 自由度与 Zienkiewcz 元类似 (只用顶点作为自由度, 很节省.).

适定性建议直接求插值 (因为齐次方程组判断零解的方法失效). 利用条件

$$
\begin{cases}
\hat{u}(\hat{a}_i) = \widehat{\Pi}\hat{u}(\hat{a}_i) \\
\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}(\hat{a}_i) = \frac{\partial\widehat{\Pi}\hat{u}}{\partial\xi}(\hat{a}_i) \\
\frac{\partial\hat{u}}{\partial\eta}(\hat{a}_i) = \frac{\partial\widehat{\Pi}\hat{u}}{\partial\eta}(\hat{a}_i)
\end{cases}
$$

Adini 元是 C^0 元, 但因为法向导数不连续, 所以非协调. 这也说明 Adini 元用在二阶问题上式协调元.

有限元空间为[17]

$$
\begin{aligned}
V_h = &\left\{ v_h|_T \circ F_T \in P(\widehat{T}), v_h(a), \frac{\partial v_h}{\partial x}(a), \frac{\partial v_h}{\partial y}(a) \text{ 在节点}a\text{上连续}; \right. \\
&\left. \qquad \text{当}a\in\partial\Omega, \text{ 它们为}0 \right\}.
\end{aligned}
$$

求解二阶 Poisson 问题时, 可以证明

$$
\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_{1,\Omega} \le \|u-\Pi u\|_{1,\Omega} \le Ch^3|u|_{4,\Omega}
$$

即 Adini 元对三次多项式精确成立, 具有三阶精度, 相当于 Lagrange 元的 Q_3 矩形元和 P_3 三角元, 但它们的计算规模却差得很多:

[16]这里是非协调元.

[17]因为二阶导数没有自由度, 所以 $V_h \not\subseteq H^2(\Omega)$, 也就是 $V_h \not\subseteq C^1(\bar{\Omega})$.

- Adini: $3N_v \approx 3N$;
- $Q_3 : N_v + 2N_E + 4N \approx 9N$;
- $P_3 : N_v + 2N_E + 3N \approx 6.5N$.

因此 Adini 元达到三阶精度, 但却是最节约的.

下面考虑将 Adini 元用于四阶问题. 设 $\|\cdot\|_h = (\sum_{T\in T_h} |\cdot|_{2,T}^2)^{\frac{1}{2}}$. 下证 $\|\cdot\|_h$ 为 V_h 的一个范数. 若 $\|v_h\|_h = 0$, 则对 $\forall T \in T_h, |v_h|_{2,T} = 0 \Rightarrow v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in T_h$. 设 $T_\alpha \in T_h : T_\alpha \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, 则它有三个节点函数值[18]为 0, 又为一次多项式, 所以 $v_h|_{T_\alpha} \equiv 0$. 逐步可证明 $v_h|_T \equiv 0, \forall T \in T_h$.

设四阶问题的变分为

$$\begin{cases} 求 u_h \in V_h,\ \text{s.t.} \\ a_h(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

下面做误差估计. 由第二 Strang 引理7.3, 分为逼近误差和相容误差两部分.

- 逼近误差: 可以证明[19]

$$\inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_h \leq \|u - \Pi u\|_h = \left(\sum_{T\in T_h} |u - \Pi u|_{2,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \begin{cases} Ch^2|u|_{4,\Omega}, & u \in H^4(\Omega) \\ Ch|u|_{3,\Omega}, & u \in H^3(\Omega) \end{cases}$$

- 相容误差:

$$\begin{aligned} a(u, w_h) &= \sum_{T\in T_h} \int_T \Delta u \Delta w_h dxdy + \sum_{T\in T_h} \int_T (1-\sigma)\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w_h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2}\right) ds \\ &= \sum_{T\in T_h} \int_T \Delta u \Delta w_h dxdy - \sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s}\frac{\partial w_h}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial w_h}{\partial n}\right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(w_h) &= \sum_{T\in T_h} \int_T \Delta^2 u w_h dxdy \\ &= -\sum_{T\in T_h} \int_T \nabla \cdot \Delta u \cdot \nabla w_h dxdy + \sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} w_h ds \\ &= \sum_{T\in T_h} \int_T \Delta u \cdot \Delta w_h dxdy + \sum_{T\in T_h} \int_{\partial T} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} w_h ds \end{aligned}$$

---

[18]最边上的单元.

[19]一方面, 因为 Π 对三次多项式精确成立, $(P_3(\hat{T} \subseteq P(\hat{T}))$, 于是有 $(\sum_{T\in T_h} |u - \Pi u|_{2,T}^2)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^2|u|_{4,\Omega}$. 另一方面, 因为对三次多项式精确成立, 当然对二次多项式也精确成立, 大多数教科书都写 $C|h|_{3,\Omega}$

于是

$$\begin{aligned}a_h(u,w_h)-f(w_h)=&\sum_{T\in T_h}[\int_T \Delta u\Delta w_h+(1-\sigma)(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_h}{\partial x\partial y}\\&-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2})\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y]-(\Delta^2 u,w_h)\\:=&A+B\end{aligned}$$

分别估计 A,B. 首先由 Green 公式,

$$\begin{aligned}B&=-\sum_{T\in T_h}(-\int_T\nabla(\Delta u)\cdot\nabla w_h\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y+\int_{\partial T}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}w_h\ \mathrm{d}s)\\&=-\sum_{T\in T_h}[\int_T\Delta u\Delta w_h\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y+\int_{\partial T}(\frac{\partial\Delta u}{\partial n}w_h-\Delta u\frac{\partial w_h}{\partial n})\mathrm{d}s]\end{aligned}$$

$$A=\sum_{T\in T_h}[\int_T\Delta u\Delta w_h\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y+(1-\sigma)\int_{\partial T}(\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial s}\frac{\partial w_h}{\partial s}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial w_h}{\partial n})\mathrm{d}s]$$

所以[20]

$$\begin{aligned}A+B=&\sum_{T\in T_h}\left[\int_{\partial T}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial s}\frac{\partial w_h}{\partial s}\ \mathrm{d}s\right.\\&\left.+\int_{\partial T}\left(\Delta u-(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\frac{\partial w_h}{\partial n}\ \mathrm{d}s-\int_{\partial T}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}w_h\ \mathrm{d}s\right]\\:=&\sum_{T\in T_h}(A_1+A_2+A_3)\end{aligned}$$

因为 Adini 元 C^0, 所以 $w_h,\frac{\partial w_h}{\partial s}$ 跨过边界连续, 从而 $A_1=A_3=0$. 因此[21]

$$a_h(u,w_h)-f(w_h)=\sum_{T\in T_h}\int_{\partial T}\left(\Delta u-(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\frac{\partial w_h}{\partial n}\ \mathrm{d}s=\sum_{T\in T_h}\int_{\partial T}\psi\frac{\partial w_h}{\partial n}\ \mathrm{d}s,$$

其中 $\psi=\Delta u-(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$. 对单元 T, 记其四边 (从下边起, 逆时针方向) 为 l_1,l_2,l_3,l_4. 此时

$$a_h(u,w_h)-f(w_h)=\sum_{T\in T_h}\left(\int_{l_2}-\int_{l_4}\right)\psi\frac{\partial w_h}{\partial n}\ \mathrm{d}\sum_{T\in T_h}\left(\int_{l_3}-\int_{l_4}\right)\psi\frac{\partial w_h}{\partial n}\ \mathrm{d}x=:A_{21}+A_{22}$$

我们只估计 A_{21}, A_{22} 的估计是类似的. 进一步将 A_{21} 拆分:

$$\begin{aligned}A_{21}=&\sum_{T\in T_h}\left(\int_{l_2}-\int_{l_4}\right)\psi\left(\frac{\partial w_h}{\partial x}-\Pi_1\frac{\partial w_h}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\sum_{T\in T_h}\left(\int_{l_2}-\int_{l_4}\right)\psi\Pi_1\frac{\partial w_h}{\partial x}\ \mathrm{d}y\\:=&A_{211}+A_{212}\end{aligned}$$

[20] 四阶问题的相容误差都是 A_1,A_2,A_3 这三项. $\sum\limits_{T\in T_h}\int_{\partial T}\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}w_h ds=0$ 类比于二阶问题中的 $\int_{\partial T}\frac{\partial u}{\partial n}w_h ds=0$.

[21] $\frac{\partial w_h}{\partial s}$ 切向连续, 所以 $\sum_{T\in T_h}\int_{\partial T}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial s}\frac{\partial w_h}{\partial s}ds=0$.

其中 Π_1 是双线性插值 (即). 注意到 $\frac{\partial w_h}{\partial x}$ 跨过节点连续, 因此 $\Pi_1\frac{\partial w_h}{\partial x}\in C^0(\Omega)$. 所以 $A_{212}=0$. 我们只需要估计 A_{211} : 对于某个 T,

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{l_2}-\int_{l_4}\right)\psi\left(\frac{\partial w_h}{\partial x}-\Pi_1\frac{\partial w_h}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\\
&=h_x^{-1}h_y\left(\int_{\hat{l}_2}-\int_{\hat{l}_4}\right)\hat{\psi}\left(\frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}(\pm 1,\eta)-\widehat{\Pi}_1\frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}(\pm 1,\eta)\right)\mathrm{d}\eta\\
&=h_x^{-1}h_y\left(\int_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\right)\hat{\psi}(\pm 1,\eta)\left(I-\widehat{\Pi}_1\right)\frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}(\pm 1,\eta)\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

这里出现了 ± 1 是指, 在 $\hat{\ell}_2$ 上取 1, 在 $\hat{\ell}_4$ 上取 -1. 内部的边在相邻单元上相互抵消. 设

$$
\hat{w}_h:=\alpha_1+\alpha_2\xi+\alpha_3\eta+\alpha_4\xi\eta+\alpha_5\eta^2+\alpha_6\eta^2+\alpha_7\xi^3+\alpha_8\eta^3+\alpha_9\xi^2\eta+\alpha_{10}\xi\eta^2+\alpha_{11}\xi^3\eta+\alpha_{12}\xi\eta^3
$$

则

$$
\frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}=\alpha_2+\alpha_4\eta+2\alpha_5\xi+3\alpha_7\xi^2+2\alpha_9\xi\eta+\alpha_{10}\eta^2+3\alpha_{11}\xi^2\eta+\alpha_{12}\eta^3
$$

于是[22]

$$
\begin{aligned}
\left(I-\widehat{\Pi}_1\right)\frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}=&3\alpha_7\xi^2+\alpha_{10}\eta^2+3\alpha_{11}\xi^2\eta+\alpha_{12}\eta^3-3\alpha_7-\alpha_10\\
&-3\alpha_{11}\eta-\alpha_{12}\eta\quad\text{(双线性插值只看四个顶点的值)}\\
=&-\left[3\alpha_7\left(1-\xi^2\right)+\alpha_{10}\left(1-\eta^2\right)+3\alpha_{11}\eta\left(1-\xi^2\right)+\alpha_{12}\eta\left(1-\eta^2\right)\right]\\
=&-\left[3\left(\alpha_7+\alpha_{11}\eta\right)\left(1-\xi^2\right)+\left(\alpha_{10}+\alpha_{12}\eta\right)\left(1-\eta^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

所以 $\left(I-\widehat{\Pi}_1\right)\frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}(\pm 1,\eta)=-\left(\alpha_{10}+\alpha_{12}\eta\right)\left(1-\eta^2\right)$. 因为[23]$\alpha_{10}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}\eta,\alpha_{12}=\frac{1}{6}\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}$, 所以进一步有

$$
\begin{aligned}
A_{211}&=h_x^{-1}h_y\int_{-1}^{1}(\hat{\psi}(1,\eta)-\hat{\psi}(-1,\eta))\left(\frac{1}{2}\left(\eta^2-1\right)\frac{\partial^3\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^2}-\frac{1}{3}\left(\eta^2-1\right)\eta\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}\right)\mathrm{d}\eta\\
&=h_x^{-1}h_y\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi}(\xi,\eta)\left(\frac{1}{2}\left(\eta^2-1\right)\frac{\partial^3\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^2}-\frac{1}{3}\left(\eta^2-1\right)\eta\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

将两项分开估计:

$$
\begin{aligned}
&h_x^{-1}h_y\int_{\widehat{T}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi}(\xi,\eta)\frac{1}{2}\left(\eta^2-1\right)\frac{\partial^3\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^2}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
&=h_x^{-1}h_y\left[\int_{\widehat{T}}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\xi^2}(\xi,\eta)\left(\eta^2-1\right)\frac{\partial^2\hat{w}_h}{\partial\eta^2}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\left(\int_{\hat{l}_2}-\int_{\hat{l}_4}\right)\frac{1}{2}\left(\eta^2-1\right)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\hat{w}_h}{\partial\eta^2}\,\mathrm{d}\eta\right]
\end{aligned}
$$

---

[22]双线性插值对双线性函数精确成立. 由于 ξ^2 在四个顶点处取值为 1, 因此双线性插值在四个顶点处关于 ξ^2 的插值为 1.

[23]直接由 $\hat{w}_h$ 的定义, 关于 ξ 求一次导和对 η 求二次导得 α_{10}, 类似可得 α_{12}.

因为 $\frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2}$ 连续, 所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in T_h} h_x^{-1}h_y\left(\int_{\hat{l}_2}-\int_{\hat{l}_4}\right)\frac{1}{2}(\eta^2-1)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w_h}{\partial\eta^2}\ \mathrm{d}\eta\\
&=\sum_{T\in T_h} h_y^2\left(\int_{l_2}-\int_{l_4}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2}\frac{1}{2}(\eta(y)^2-1)\mathrm{d}y\\
&=0
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
&h_x^{-1}h_y\int_{\widehat{T}}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\xi^2}(\xi,\eta)\left(\eta^2-1\right)\frac{\partial^2\hat{w}_h}{\partial\eta^2}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
&\leq h_x^{-1}h_y|\hat{\psi}|_{2,\widehat{T}}\,|\hat{w}_h|_{2,\widehat{T}}\\
&\leq Ch^2|\psi|_{2,T}\,|w_h|_{2,T}
\end{aligned}$$

考虑另一项, 由乘积的导数公式, $\frac{d(\eta^2-1)^2}{d\eta}=2(\eta^2-1)\eta$,

$$\begin{aligned}
&-h_x^{-1}h_y\int_{\widehat{T}}\frac{1}{3}(\eta^2-1)\eta\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi}\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
=&h_x^{-1}h_y\int_{\widehat{T}}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{1}{6}\left(\eta^2-1\right)^2\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
&-h_x^{-1}h_y\left(\int_{\hat{l}_3}-\int_{\hat{l}_1}\right)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\xi}\frac{1}{6}\left(\eta^2-1\right)^2\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}\ \mathrm{d}\xi\\
=&h_x^{-1}h_y\int_{\widehat{T}}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\xi\partial\eta}\frac{1}{6}\left(\eta^2-1\right)^2\frac{\partial^4\hat{w}_h}{\partial\xi\partial\eta^3}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\quad\text{因为在}\hat{\ell}_1,\hat{\ell}_3\text{上}\eta^2=1\\
\leq&h_x^{-1}h_y|\hat{\psi}|_{2,\widehat{T}}\,|\hat{w}_h|_{4,\widehat{T}}\\
\leq&Ch_x^{-1}h_y|\hat{\psi}|_{2,\widehat{T}}\,|\hat{w}_h|_{2,\widehat{T}}\quad\text{(逆不等式)}\\
\leq&Ch^2|\psi|_{2,T}\,|w_h|_{2,T}
\end{aligned}$$

合起来就有

$$a_h\left(u,w_h\right)-f\left(w_h\right)\leq Ch^2|u|_{4,\Omega}\,\|w_h\|_h$$

总之, 若 $u\in H^4(\Omega)$, 则 Adini 元为二阶精度:

$$\|u-u_h\|_h\leq Ch^2|u|_{4,\Omega}$$

对任意矩形都可以, 只是书中写的是正方形.

[1] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 49, no. 1, 1942.

[2] R. W. Clough, "The finite element method in plane stress analysis," in *Asce Conference on Electronic Computation*, 1960.