数值线性代数题选：

Part I 精选精练：

问题1. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$A^2=A$，若 $N(A)$ 不是 $R(A)^\perp$ 的子空间，则 $\|A\|_2>1$.

证明. $\|A\|_2=\|A^2\|_2\le\|A\|_2^2$，故 $\|A\|_2=0$ 或 $\|A\|_2\ge1$

若 $\|A\|_2=0$，即 $A=0$，则 $N(A)=\mathbb{R}^n=R(A)^\perp$ 矛盾

故 $\|A\|_2\ge1$.

又因为 $N(A)$ 不是 $R(A)^\perp$ 的子空间，故 $\exists x\in N(A), y\in R(A)$, s.t. $x^Ty\ne0$

不妨设 $x^Ty<0$，故 $\|A(x+y)\|_2=\|Ay\|_2=\|y\|_2$

$\|x+y\|_2^2=\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2x^Ty$.

取 $f(\theta)=\|\theta x+y\|_2^2=\theta^2\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\theta x^Ty$

存在 θ，使得：$f(\theta)<\|y\|_2^2$

$$\frac{\|A(\theta x+y)\|_2}{\|\theta x+y\|_2}=\frac{\|y\|_2}{\|\theta x+y\|_2}>\frac{\|y\|_2}{\|y\|_2}=1$$

故 $\|A\|_2>1$.

□

问题2. (1) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是 n 阶非负矩阵，$\rho(A)$ 为 A 谱半径，

$A=(a_{ij})$，记 $C_j=\sum_{k=1}^n a_{kj}$，$j=1,\cdots,n$ 为第 j 个列和，

证明：$\min\limits_{1\le j\le n} C_j\le\rho(A)\le\max\limits_{1\le j\le n} C_j$.

A 不可约，则 (1) 中“=”成立列和相等.

(2) (1) 成立下有以下关系成立：

$$\min_i\frac{(Ax)_i}{x_i}\le\rho(A)\le\max_i\frac{(Ax)_i}{x_i}$$

证明: $A\geq 0,\ \rho(A)\geq 0,\ \exists x\geq 0, x\neq 0$ s.t. $Ax=\rho(A)x$.

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, 设 $A=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$

$\|\rho(A)x\|_1=\rho(A)\|x\|_2$

又: $\rho(A)x=Ax=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1\eta_1+\cdots+x_n\eta_n$.

$\Rightarrow \|\rho(A)x\|_1=\|Ax\|_1=\|x_1\eta_1+\cdots+x_n\eta_n\|_1$ ①

因为 $\|\cdot\|_1$ 为列模和, 又: $x_i\geq 0$, $\eta_i\geq 0$.

故: ① $=\|x_1\eta_1\|_1+\cdots+\|x_n\eta_n\|_1$

$=x_1\|\eta_1\|_1+\cdots+x_n\|\eta_n\|_1$

设 $\min\limits_j c_j=a$, $\max\limits_j c_j=b$.

$\Rightarrow x_1a+x_2a+\cdots+x_na\leq$ ① $\leq b(x_1+\cdots+x_n)$

$\Rightarrow a\|x\|_1\leq\|\rho(A)x\|_1\leq b\|x\|_1$

$\Rightarrow a\leq\rho(A)\leq b$.

若 A 不可约 则 $\exists x>0$, $Ax=\rho(A)x$

$\Rightarrow a\|x\|_1\leq\|\rho(A)x\|_1\leq b\|x\|_1$

"=" 成立 $\Leftrightarrow c_1=c_2=\cdots=c_n$.

问题3、设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 如果 $|A|\leq B$, 证明
$$\rho(A)\leq\rho(|A|)\leq\rho(B)$$

Hint: 利用书中 P28 定理

证明: 书中 P28 定理介绍了谱半径的单调性:

"设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 如果 $|A|\leq B$, 则 $\rho(A)\leq\rho(B)$.

该定理的证明如下:

若命题不真, 则: $\rho(A)>\rho(B)$. 令 $r=\dfrac{\rho(A)+\rho(B)}{2}$,

则 $\rho(A) > r > \rho(B)$，再令 $\tilde{A} = \frac{A}{r}$，$\tilde{B} = \frac{B}{r}$.

则：$\rho(\tilde{A}) = \frac{\rho(A)}{r} > 1$，$\rho(\tilde{B}) = \frac{\rho(B)}{r} < 1$.

故由定理3.8，即 = " $\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$ " 可知：

$\lim_{k\to\infty} \tilde{B}^k = 0$.

而 $|A| \le B$ 又蕴含着 $|\tilde{A}^k| \le |\tilde{A}|^k \le \tilde{B}^k$，对一切自然数 k 成立，

从而有 $\lim_{k\to\infty} \tilde{A}^k = 0$. 再应用定理3.8知 $\rho(\tilde{A}) < 1$.

这与 $\rho(\tilde{A}) > 1$ 矛盾. 故 $\rho(A) \le \rho(B)$ 成立.

□

问题4、设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，证明：$\rho(I_n + A) \le 1 + \rho(A)$，其中 I_n 表示 n 阶单位矩阵. 特别地，如果 A 为非负矩阵，则 $\rho(I_n + A) = 1 + \rho(A)$

证明：
$$\begin{aligned}\rho(I_n + A) &= \max|\lambda(I_n + A)| \\ &= \max|1 + \lambda(A)| \\ &\le 1 + \max|\lambda(A)| \\ &= 1 + \rho(A).\end{aligned}$$

若 A 非负，由推论5.1，$\rho(A) \ge 0$，故：

$\max|1 + \lambda(A)| = 1 + \max|\lambda(A)| = 1 + \rho(A)$.

问题5. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为非负矩阵，如果存在某一正整数 $k \ge 1$，使得 A^k 为正矩阵，证明 $\rho(A)$ 是方阵 A 的一个单特征值.

证明：对 $A^k > 0$，用推论5.1（P32）

即：$\rho(A^k)$ 为 A^k 的单特征值

$\lambda(A^k) = (\lambda(A))^k$，故 $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$，故 $(\rho(A^k))^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

即：$\rho(A)$ 为 A 的单特征值.

问题6. 考虑对称正定线性方程组 $Ax=b$，其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定，其特征值为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$. $b\in\mathbb{R}^n$，记 $r_k=Ax_k-b$.
考虑如下迭代法 $x_{k+1}=x_k-\alpha r_k$，$k=1,2,\cdots$
其中 $\alpha>0$ 常量. 试求：
(1) 常量 α 的取值区间，使得迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 对任意初始点 x_1 均收敛到方程组的解.
(2) α 为何值时，$\|v_{k+1}\|_2/\|v_k\|_2$ 对所有的 k 有最好的一致估计.

解：(1) $x_{k+1}=x_k-\alpha r_k=x_k-\alpha(Ax_k-b)$

$$=(I-\alpha A)x_k+\alpha b$$

$$x_{k+1}-\alpha b=(I-\alpha A)x_k$$

$$x_{k+1}=(I-\alpha A)\left[(I-\alpha A)x_{k-1}+\alpha b\right]$$

$$=(I-\alpha A)^k x_1+\sum_{i=0}^{k-1}(I-\alpha A)^i\alpha b\ ,\quad k\to\infty$$

$$=(I-\alpha A)^k x_1+(I-(I-\alpha A))^{-1}$$

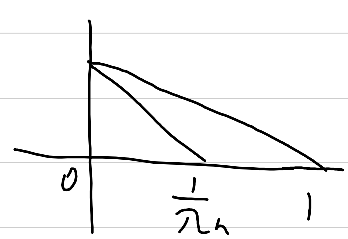
故只需 $\rho(I-\alpha A)<1$，$\max|\lambda(I-\alpha A)|<1$，$\max|1-\alpha\lambda(A)|<1$.

(2) $\dfrac{\|r_{k+1}\|_2}{\|r_k\|_2}$ 对所有的 k 有最好的一致估计

$$=\frac{\|Ax_{k+1}-b\|_2}{\|r_k\|_2}=\frac{\|Ax_k-\alpha Ar_k-b\|_2}{\|r_k\|_2}=\frac{\|r_k(I-\alpha A)\|_2}{\|r_k\|_2}\le\|I-\alpha A\|_2.$$

$\|I-\alpha A\|_2=\max\sigma(I-\alpha A)$，$I-\alpha A$ 对称，$\rho(I-\alpha A)<1$

$$=\max\lambda^2(I-\alpha A)=\rho^2(I-\alpha A)$$



$$\Leftrightarrow \min_{0<\alpha<\frac{2}{\lambda_n}}\max\lambda(I-\alpha A)$$

$$\Leftrightarrow \min_{\alpha}\max_{i}|1-\alpha\lambda_i|\qquad(\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n)$$

$$\Rightarrow 1-\alpha\lambda_i=-(1-\alpha\lambda_n)$$

$$I=\alpha(\lambda_n-\lambda_1),\ \alpha=\frac{2}{\lambda_n-\lambda_1}.$$

问题7. $B_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定，$s_k^T y_k > s_k^T B_k s_k$.

(1) 试求 v_k, s.t. 如下的秩一迭代满足 $B_{k+1} s_k = y_k$

解： $B_{k+1} s_k = (B_k + v_k v_k^T) s_k = y_k$

$$B_k s_k + v_k^T s_k v_k = y_k$$

两边同乘 s_k^T，有 $s_k^T B_k s_k + (v_k^T s_k)(s_k^T v_k) = s_k^T y_k$

$$(v_k^T s_k)^2 = s_k^T y_k - s_k^T B_k s_k$$

$$v_k = \frac{y_k - B_k s_k}{v_k^T s_k} = \frac{y_k - B_k s_k}{\sqrt{s_k^T y_k - s_k^T B_k s_k}}$$

(2) 分析 B_k 与 B_{k+1} 各个特征值大小关系，并计算 $Det(B_{k+1})$

由定理6.8. B_k, B_{k+1} 均为 Hermite 阵.

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $\mu_1, \cdots \mu_n$

$\Rightarrow \lambda_i + \varepsilon_n \le \mu_i \le \lambda_i + \varepsilon_i$

$\varepsilon_1, \varepsilon_n$: $v_k v_k^T$ 的最大特征值为 $\|v_k\|_2^2 = \dfrac{\|y_k - B_k s_k\|_2^2}{s_k^T y_k - s_k^T B_k s_k}$

$v_k v_k^T$ 的最小特征值为 0.

$B_{k+1} = B_k + v_k v_k^T$

$Det(B_{k+1}) = Det\ C$. $\quad B_k + \rho^2 (y_k - B_k s_k)(y_k - B_k s_k)^T$

$\det(\Lambda + \rho^2 z z^T)$

$z = Q^T (y_k - B_k s_k) = Q^T y_k - \Lambda Q^T s_k$.

问题8. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}_p^{mn}$，试求出 $A_k \in \mathbb{C}_k^{mn}$，$(1 \le k \le p)$. 使得 $\|A - A_k\|_F$ 达到极小. 其中 $\mathbb{C}_k^{mn}$ 为所有秩为 k 的矩阵构成的集合. $\|A\|_F = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$.

解: $\|A-A_k\|_F = \|U\begin{pmatrix}\Sigma_p & \\ & 0\end{pmatrix}V - A_k\|_F$

$$= \|\begin{pmatrix}\Sigma_p & \\ & 0\end{pmatrix} - U^* A_k V^*\|_F$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{p}(\sigma_i - \tilde{a}_{ii})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则: $\min\|A-A_k\|_F \geq \min\left(\sum_{i=1}^{p}(\sigma_i-\tilde{a}_{ii})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=k+1}^{p}(\sigma_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $1\leq k\leq p$.

上面的极小取到时有: $A_k = U\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_k & \\ & & & 0\end{pmatrix}V$.

问题9、设 $A\in\mathbb{C}_p^{m,n}$, $A^\dagger$ 为矩阵 A 的广义逆, A^* 为 A 的共轭转置, 令 $N(A)=\{x\in\mathbb{C}^n, Ax=0\}$, 试证明:

$$N(AA^\dagger) = N(AA^*) = N(A^\dagger) = N(A^*)$$

证明: 设 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma_p & \\ & 0\end{pmatrix}V$ (SVD分解)

$A^* = V^*\begin{pmatrix}\Sigma_p & \\ & 0\end{pmatrix}U^*$, $N(A^*)=\{x\in\mathbb{C}^m, A^*x=0\}$

α $A^*x^*=0 \Rightarrow AA^*x=0$,

$AA^*x=0 \Rightarrow x^*AA^*x=0 \Rightarrow A^*x=0$.

故: $N(A^*)=N(AA^*)$

下面来看 $A^\dagger$, $A^\dagger = V^*\begin{pmatrix}\Sigma_p^{-1} & \\ & 0\end{pmatrix}U^*$

$A^*x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\Sigma_p & \\ & 0\end{pmatrix}U^*x=0$. (因为 V^* 是酉矩阵)

$A^\dagger x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\Sigma_p & \\ & 0\end{pmatrix}U^*x=0 \Leftrightarrow A^*x=0$.

故 $N(A^*)=N(A^\dagger)$.

最后, α: $A^\dagger x=0 \Rightarrow AA^\dagger x=0$

$AA^\dagger x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}U^*x=0 \Rightarrow A^\dagger x=0$.

故: $N(A^\dagger)=N(AA^\dagger)$.

问题10. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n,n}$ 是Hermite矩阵，其特征值为 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$. 又设 $U_m\in\mathbb{C}^{n,m}$. $U_m^*U_m=I_m$，其中 I_m 为 m 阶单位矩阵，证明：

$$\lambda_{n-m+1}+\cdots+\lambda_n=\min_j tr(U_m^*AU_m).$$

其中 $tr(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$

证明：（本质上极大极小原理的推广）

因为 A 是 Hermite 矩阵，故可选出其特征对，设 (λ_i,u_i) 是 A 的特征对，$u_i^*u_j=\delta_{ij}$.

令 $U_m=[u_{n-m+1},\cdots,u_n]$，$U_m^*AU_m=\begin{bmatrix}\lambda_{n-m+1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$

则 $\lambda_{n-m+1}+\cdots+\lambda_n\geq\min tr(U_m^*AU_m)$

下面来看是否有"$\min tr(U_m^*AU_m)\geq\lambda_{n-m+1}+\cdots+\lambda_n$"：

假设 $U=[v_1,\cdots,v_m]$

$tr(U^*AU)=v_1^*Av_1+v_2^*Av_2+\cdots+v_m^*Av_m$

$v_i=\sum_{j=1}^n b_{ij}u_j$

$U=[u_1,\cdots,u_n]B,\quad B=[b_{ij}]$

$B^*B=I_m$（因为 $B^*B=U^*U$）

$tr(U^*AU)=tr(B^*\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}B)$

（由分隔定理）

$\geq\lambda_{n-m+1}+\cdots+\lambda_n$

注：补充一个上课时老师讲的例子：

（推广）U_m 右边补上 $n-m-1$ 列，构成 U_{n-1}，s.t. $U_{n-1}^*U_{n-1}=I_{n-1}$

由分隔定理，$\lambda_i(A)\geq\lambda_i(U_{n-1}^*AU_{n-1})$

$\geq\lambda_i\left(\left(U_{n-2}\begin{pmatrix}I_{n-2}\\0\end{pmatrix}\right)^*\cdot A\left(U_{n-2}\begin{pmatrix}I_{n-2}\\0\end{pmatrix}\right)\right)$

$\geq\cdots\geq\lambda_i(U_m^*AU_m)$. $i=1,\cdots,m$.

$\therefore \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \geq tr(U_m^* A U_m)$. (取特定 U_m 可使等号成立).

再由分隔定理,

对于 $B = [u_{n-m+1}, \cdots, u_n]$

$\lambda_{n-m+i} \leq \lambda_i(U_{n-1}^* A U_{n-1})$

$$\therefore \lambda_{n-m+1} + \cdots + \lambda_n \leq \lambda_1(U_{n-1}^* A U_{n-1}) + \cdots + \lambda_m(U_{m}^* A U_{m})$$
$$= tr(U_m^* A V_m)$$

□.

问题11、设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, 假设 $v = p(A)u$, 其中 $p(t)$ 是一个多项式. 证明: 对每个 $k = 1, \cdots, n$, 都有 $p(A)K_k(A, u) = K_k(A, v)$, 其中 $K_k(A, v) = \text{span}\{v, Av, A^2v, \cdots, A^{k-1}v\}$

证明:
$$p(A)K_m(A, u) = p(A)\,\text{span}\{u, Au, \cdots, A^{m-1}u\}$$
(因为 A 和 $p(A)$ 可交换)
$$= \text{span}\{p(A)u, Ap(A)u, \cdots, A^{m-1}p(A)u\}$$
$$= K_m(A, v).$$

问题12、设 $A = (a_{ij}) = [\xi_1, \cdots, \xi_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其中 ξ_j 表示 A 的第 j 列. 证明: $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|\xi_j\|_2$

(提示: 利用 A 的 QR 分解及正交变换保持 2-范数)

证明:
$$A \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & * \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix} \xrightarrow{H} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & & * \\ & \tilde{a}_{22} & * \\ 0 & 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = [\xi_2', \cdots, \xi_n']$

$\|\xi_2'\|_2 \leq \|\xi_1\|_2$

$\cdots$

$$\det(A) = \|\xi_1\|_2 \cdot \|\xi_2^1\|_2 \cdots \|\xi_n^{n-1}\|_2$$
$$\le \|\xi_1\|_2 \cdots \|\xi_n\|_2$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \|\xi_j\|_2$$

问题13. 设

$$A = \frac{\tau}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

其中 τ 和 h 为给定的实数，且 $\frac{\tau}{h} \ll 1$.

(1) 计算矩阵 A 的谱半径

(2) 令 $\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$，设 $x, y \in \mathbb{R}^n$，令 $y = \exp(A)x$，和 $y + \delta y = \exp(A+\delta A)x$，证明：$\|\delta y\|_2 \le \exp(M)\|\delta A\|_2\|x\|_2$

其中，$M = \max(\|A\|_2, \|A+\delta A\|_2)$

(3) 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$，令 $y = \exp(A)x$，假设 x 已知，设计一种线性复杂度算法近似计算 y，并分析该算法的精度.

解. (1) 三对角矩阵，求行列式，(谱半径)

(2) $\|\delta y\|_2 = \|y + \delta y - y\|_2$

$$= \|\exp(A+\delta A)x - \exp(A)x\|_2$$
$$= \left\|\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(A+\delta A)^i}{i!} - \frac{A^i}{i!}\right)x\right\|_2$$

($i=0$ 时抵消了)

$$= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(A+\delta A)^i - A(A+\delta A)^{i-1} + A(A+\delta A)^{i-1} - A^2(A+\delta A)^{i-2} + \cdots - A^i}{i!}x\right\|_2$$
$$= \left\|\delta A\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(A+\delta A)^{i-1} + A(A+\delta A)^{i-2} + \cdots + A^{i-1}}{i!}x\right\|_2$$

(三角不等式)

$$\le \|\delta A\|_2 \cdot \|x\|_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|A+\delta A\|_2^{i-1} + \cdots + \|A\|_2^{i-1}}{i!}$$

$$= \|\delta A\|_2 \cdot \|x\|_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}$$

$$= \exp(M)\|\delta A\|_2 \|x\|_2$$

(3) (计算 A^2x 先算 Ax)(计算到 N 步就停止，甩掉后面)

算法如下：① 初始 x, $y=x$ [或 $y=0$]

② For $i=1,\cdots,N$

$x := Ax$

$y = y + \frac{x}{i!}$

End.

误差：$\|\tilde{y}-y\|_2$

$$= \left\|\sum_{N+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} x\right\|$$

$$\le \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!}\|x\|_2$$

(此时计算y的复杂度：$N \cdot n$)

问题14、证明最小二乘问题

$$\begin{cases} \|AxB - C\|_F = \min \\ \|x\|_F = \min \end{cases} \quad \cdots (*) \text{的解为 } x = A^{+}CB^{+}.$$

证明：$A = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}$，$B = U\Sigma V^*$

$$\|AxB - C\|_F = \|\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* x U\Sigma - \tilde{U}^* CV\|_F = \|\tilde{\Sigma}\tilde{X}\Sigma - \tilde{C}\|_F$$

故：$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \|\tilde{\Sigma}\tilde{x}\Sigma - \tilde{c}\|_F = \min \\ \|x\|_F = \min \end{cases} \quad \cdots (\text{I})$

令 $\tilde{x} = (x_1,\cdots,x_n)$，$\tilde{c} = (c_1,\cdots,c_n)$，假设 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

(I) $\Leftrightarrow \sigma_i x_i$ 是 $\|\tilde{\Sigma}x - c_i\|_2$ 的最小范数解，$1 \le i \le r$.

$x_i = 0$，$r+1 \le i \le n$

这个的最小范数解为 $\sigma_i x_i = \tilde{\Sigma}^{+} c_i$

故：$\tilde{x} = \tilde{\Sigma}^{+}\tilde{C}\Sigma^{+}$，$x = \tilde{V}\tilde{\Sigma}^{+}\tilde{U}^* CV\Sigma^{+}U^*$.

问题15. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\lambda(A)=\{\lambda_i\}$，求证 $\inf\limits_{S\in\mathbb{C}_n^{n\times n}}\|S^{-1}AS\|_F^2=\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2$.

(inf 取到 $\Leftrightarrow$ A 是正规矩阵)

证明：若 S 可逆，$S^{-1}AS$ 是相似变换（特征值不变）

$\|S^{-1}AS\|_F^2\geq\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2\Rightarrow\inf\limits_{S\in\mathbb{C}_n^{n\times n}}\|S^{-1}AS\|_F^2\geq\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2$.

若 A 是正规的，(则可以用 Schur 分解将 A 对角化如下)

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},\quad \therefore \inf \text{ 可取得且等于 } \sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2$$

若 A 不是正规的，假设 $Q^{-1}AQ=J$（Jordan 标准形），如何构造逆呢？

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1^{*}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^{\alpha}\end{pmatrix}$$

$\lambda_i=\lambda_{i+1}$，$J_{i,i+1}=1$，$Q=(x_1,\cdots,x_n)$

$Ax_i=\lambda_i x_i$

$Ax_{i+1}=\lambda_i x_{i+1}+x_i$

令 $\tilde{x}_{i+1}=\alpha_1 x_i+\alpha_2 x_{i+1}$ （α_1,α_2 是两个待定系数）

$A\tilde{x}_{i+1}=\lambda_i(\alpha_1 x_i+\alpha_2 x_{i+1})+\alpha_2 x_i$ （令 $\alpha_2=\frac{1}{N}$）

$\alpha_2\to 0$

$\tilde{Q}=[x_1,\cdots,\tilde{x}_{i+1},\cdots,x_n]$

$\tilde{Q}^{-1}AQ=\tilde{J}$，$\tilde{J}_{i,i+1}=\frac{1}{N}$.

类似地，$S^{-1}AS=\bar{J}$，$\bar{J}\to\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

故 $\inf\limits_{S\in\mathbb{C}_n^{n\times n}}\|S^{-1}AS\|_F=\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2$.

问题16. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为正规阵，$\lambda(A)=\{\lambda_i\}_{i=1}^n$，$|\lambda_1|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$.
设 Q 为酉阵，$\lambda(AQ)=\{\alpha_i\}$

请证明：

(1) $|\lambda_1|\geq|\alpha_i|\geq|\lambda_n|$，$i=1,\cdots,n$

(2) 若 $U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}$ 为酉阵，$\mu\in\mathbb{C}$，使得：

$$\det\begin{pmatrix} U_{11}-\mu I & U_{12} \\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}=0.\ 则\ |\mu|\geq 1.$$

证明：(1) 因为 A 是正规阵

所以 $\sigma_i=|\lambda_i|$，Q^*A^*AQ 与 A^*A 相似.

所以 $\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2$ 是 Q^*A^*AQ 的特征值

所以 $|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|$ 是 AQ 的奇异值

所以 $|\lambda_1|\geq|\alpha_i|\geq|\lambda_n|$

(最大的奇异值 ≥ 特征值 ≥ 最小的奇异值)

(2) (需要用到 (1) 的结论)

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}^* \underbrace{\begin{pmatrix} U_{11}-\mu I & U_{12} \\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}}_{\widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} I-\mu U_{11} & 0 \\ \mu U_{12} & I\end{pmatrix}$$

$$\det\widetilde{Q}=\det(I-\mu U_{11})=0$$

故 $\frac{1}{\mu}$ 是 U_{11} 的特征值.

故 $|\frac{1}{\mu}|\leq 1 \Longrightarrow |\mu|\geq 1.$

□.

注：数值代数全部作业题见"数值代数作业.pdf".

问题17、设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上任一矩阵范数，证明：

$$\lim_{m\to\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} = \rho(A)$$

其中 $\rho(A)$ 是方阵 A 的谱半径。

证明：谱半径具有如下两个性质：

(1) $\rho(A) \le \|A\|$，其中 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上任意范数。

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的算子范数 $\|\cdot\|$，使得：

$$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon.$$

往证结论，设 $\|\cdot\|_*$ 为满足上述两个性质的矩阵范数，则有：

$$\rho(A) = \rho(A^m)^{\frac{1}{m}} \le \|A^m\|_*^{\frac{1}{m}} \le \rho(A^m)^{\frac{1}{m}} + \varepsilon.$$

故：

$$\lim_{m\to\infty} \|A^m\|_*^{\frac{1}{m}} = \rho(A).$$

再由范数的等价性可知：

$$\lim_{m\to\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty} \|A^m\|_*^{\frac{1}{m}} = \rho(A).$$

4.2 数值线性代数作业题及参考解答

第一章

2. 设 H_1 为正定矩阵，H_2 是与 H_1 同阶的 Hermite 矩阵. 试证 H_1+H_2 为正定矩阵的充分必要条件是 $H_1^{-1}H_2$ 的特征值均大于 -1.

Pf: "⇒" H_1+H_2 正定，设 λ 是 $H_1^{-1}H_2$ 的特征值，有 $H_1^{-1}H_2\eta=\lambda\eta$ (其中 $\eta\neq 0$), 则:

$\eta^*(H_1+H_2)\eta>0 \Rightarrow \eta^*H_2\eta>-\eta^*H_1\eta \Rightarrow \eta^*H_1(H_1^{-1}H_2\eta)>-\eta^*H_1\eta \Rightarrow \lambda\eta^*H_1\eta>-\eta^*H_1\eta$

继而由 H_1 正定有 $\eta\neq 0 \Rightarrow \eta^*H_1\eta>0$, 则 $\lambda>-1$.

"⇐" H_1 正定 $\Rightarrow \exists U\in \mathcal{U}_n$ s.t. $U^*A_1U=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\lambda_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$. $H_1^{-1}H_2$ 的特征值均大于 -1.

故 $I+H_1^{-1}H_2$ 的特征值大于 0，令 $H'=U^*\lambda'U$, 其中 $\lambda'=diag(\lambda_1^{\frac{1}{2}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2}})$,

则易知 $H'\cdot H'=H_1$，可记 $H_1^{\frac{1}{2}}=H'$, 则有 $H_1=H_1^{\frac{1}{2}}\cdot H_1^{\frac{1}{2}}$, 进而

$H_1+H_2=H_1(I+H_1^{-1}H_2)=H_1^{\frac{1}{2}}[H_1^{\frac{1}{2}}(I+H_1^{-1}H_2)H^{-\frac{1}{2}}]H_1^{\frac{1}{2}}$, 故 H_1+H_2 合同于 $H_1^{\frac{1}{2}}(I+H_1^{-1}H_2)H^{-\frac{1}{2}}$.

又: $H_1^{\frac{1}{2}}(I+H_1^{-1}H_2)H^{-\frac{1}{2}}$ 与 $I+H_1^{-1}H_2$ 相似，故 $H_1^{\frac{1}{2}}(I+H_1^{-1}H_2)H^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值均大于 0.

因此，$\forall x$, 有: $x^*(H_1+H_2)x=(H_1^{\frac{1}{2}}x)^*H_1^{\frac{1}{2}}(I+H_1^{-1}H_2)H^{-\frac{1}{2}}(H_1^{\frac{1}{2}}x)$. 令 $P:=H_1^{\frac{1}{2}}(I+H_1^{-1}H_2)H_1^{-\frac{1}{2}}$

有 $P=I+H_1^{-\frac{1}{2}}H_2H_1^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow P^*=P$, 故 $\lambda(P)>0 \Rightarrow P$ 正定 $\Rightarrow H_1+H_2$ 正定

3. 设 $V=\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times l}$ $(n>l)$ 满足 $V^*V=I$, 证明 V_1 的奇异值皆小于等于 1.

Pf: 因为 $V^*V=I_l$, 故 $V_1^*V_1+V_2^*V_2=I_l$.

此时我们考虑 $V_1^*V_1$ 的特征值，知其均为非负实数.

我们用反证法，假如 $V_1^*V_1$ 存在某个大于 1 的特征值，则由 Schur 分解，知存在酉矩阵 U: $U^*(V_1^*V_1)U=\begin{pmatrix}\Sigma r_i & \\ & 0\end{pmatrix}_{l\times l}$.

于是 $U^*(V_1^*V_1+V_2^*V_2)U=I_l$.

得 $U^*V_2^*V_2U=I_l-\begin{pmatrix}\Sigma r_i & \\ & 0\end{pmatrix}$

故 $U^*V_2^*V_2U$ 的某个特征值小于 0. 而这与 $V_2^*V_2$ 为 Hermite 矩阵矛盾.

4. 设 $A\in\mathbb{C}_p^{m\times n}$，试求出 $A_k\in\mathbb{C}_k^{m\times n}$ $(1\le k\le p)$，使得：

$$\|A-A_k\|_F=\min\{\|A-B\|_F:\ B\in\mathbb{C}_k^{m\times n}\};$$

如果进一步假设 A 的奇异值为 $\sigma_1\ge\cdots\ge\sigma_n$.

试证：$\min\limits_{\mathrm{rank}(B)\le k}\|A-B\|_F=(\sigma_{k+1}^2+\cdots+\sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Pf:

由奇异值分解可知存在 $U\in\mathcal{U}_m$, $V\in\mathcal{U}_n$ 使得 $U^*AV=\Sigma$.

其中 $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$，$\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_n$，且 $\sigma_i=0$，$i\ge p+1$.

由此知 $\|A-B\|_F=\|\Sigma-U^*BV\|_F$，随即我们设 B 的奇异值 $\tau_1\ge\tau_2\ge\cdots\ge\tau_n$

又知 $\mathrm{rank}(B)=k$，故当 $i\ge k+1$ 有 $\tau_i=0$. 再由推论 6.3 可知

$$\|A-B\|_F=\sum_{i=1}^{k}(\sigma_i-\tau_i)^2+\sum_{i=k+1}^{p}\sigma_i^2\ge\sum_{i=k+1}^{n}\sigma_i^2$$

故有 $\min\limits_{\mathrm{rank}(B)=k}\|A-B\|_F^2\ge\sum\limits_{i=k+1}^{n}\sigma_i^2$

取 $U^*A_kV=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_k,0,\cdots,0):=\tilde{\Sigma}$

即 $A_k=U\tilde{\Sigma}V^*$ 时，有 $\|A-A_k\|_F=\min\limits_{\mathrm{rank}(B)=k}\|A-B\|_F=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

对任意 $l\ge k$ 正整数有：

$$\min_{\mathrm{rank}(B)=k}\|A-B\|_F=\left(\sum_{i=k+1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{i=l+1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\min_{\mathrm{rank}(B)=l}\|A-B\|_F.$$

因此 $\min\limits_{\mathrm{rank}(B)\le k}\|A-B\|_F=\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n}\sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

5. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的两个同维数的线性子空间.

证明：$\mathrm{dist}(\mathcal{X},\mathcal{Y})=\|(I-P_{\mathcal{X}})P_{\mathcal{Y}}\|_2=\|(I-P_{\mathcal{Y}})P_{\mathcal{X}}\|_2$

Pf: 设 $\mathcal{X}=R(X_1)$，即有 $P_{\mathcal{X}}=X_1X_1^*$. $\mathcal{Y}=R(Y_1)$，$P_{\mathcal{Y}}=Y_1Y_1^*$.

其中 $X_1,Y_1\in\mathbb{C}^{n\times k}$.

又：
$$\begin{aligned}(I-P_{\mathcal{X}})P_{\mathcal{Y}}&=(I-X_1X_1^*)Y_1Y_1^*\\&=X^*[Y_1Y_1^*-X_1X_1^*Y_1Y_1^*]Y\\&=\begin{bmatrix}X_1^*\\X_2^*\end{bmatrix}Y_1Y_1^*Y-\begin{bmatrix}I_k\\0\end{bmatrix}X_1^*Y_1[I_k\ 0]\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1^* y_1 & 0 \\ x_2^* y_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^* y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_2^* y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

则有 $\|(I-P_x)P_y\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_2^* y_1 & 0 \end{bmatrix}\right\|_2$

$$= \max\{\sigma_{max}(x_2^* y_1)\}$$

$$= \|P_x - P_y\|_2 = dist(x, y) \quad \square.$$

6. 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明:

$$|\det(A)|^2 \le \min\left\{\prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n |a_{ij}|^2\right), \prod_{i=1}^n\left(\prod_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)\right\}$$

Pf: $|\det(A)|^2 = \det(A^*)\det(A) = \det(A^*A) = \lambda_1\cdots\lambda_n$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$A^*A$特征值

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots, & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & & \\ \overline{a_{1n}}, & \cdots, & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = (A^*A)_{ii}$$

往证 $\lambda_1\cdots\lambda_n \le \prod_{i=1}^n (A^*A)_{ii}$ $\qquad A^*A\in S_+^n$

设H是任意n阶半正定阵，往证 $\lambda_1\cdots\lambda_n \le h_{11}\cdots h_{nn}$,

H正定时, n=1时, $\lambda_1=h_{11}$显然成立. 假设结论对$n\le k-1$成立, $n=k+1$时,

设 $H=\begin{pmatrix} H_{k-1} & \alpha \\ \alpha^* & h_{kk}\end{pmatrix}$ 由Schur公式 H相似于 $\begin{pmatrix} H_{k-1} & 0 \\ 0 & h_{kk}-\alpha^* H_{k-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}$

由归纳法, $\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\le h_{11}\cdots h_{k-1,k-1}$, 又 $\lambda_k = h_{kk}-\alpha^* H_{k-1}^{-1}\alpha \le h_{kk}$

$\lambda_1\cdots\lambda_k \le h_{11}\cdots h_{kk}$ 结论成立

H半正定, 有特征根时, $\lambda_1\cdots\lambda_k=0$, $h_{ii}\ge 0$ 亦成立.

则 $|\det(A)|^2 \le \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2\right)$, 对$AA^*$同样处理, 可得 $|\det(A)|^2\le \prod_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)$

故 $|\det(A)|^2 \le \min\left\{\prod_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2\right), \prod_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)\right\}$

7. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 有奇异值 $\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_n\geq 0$，证明

$$\sigma_i=\max_{\substack{\mathscr{X}\\ \dim\mathscr{X}=i}}\min_{\substack{x\in\mathscr{X}\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\min_{\substack{\mathscr{X}\\ \dim\mathscr{X}=n-i+1}}\max_{\substack{x\in\mathscr{X}\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

特别有：$\sigma_1=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$，$\sigma_n=\min\dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$.

Pf：由题知 A^*A 为Hermite矩阵，且 σ_i^2 为矩阵 A^*A 的特征值.
则根据 Courant-Fisher 极小极大定理可知：

$$\sigma_i^2=\max_{x\in G_i^n}\min_{u\in S(x)}u^*A^*Au=\max_{x\in G_i^n}\min_{\substack{u\in S(x)\\ u\neq 0}}\frac{u^*A^*Au}{u^*u}=\max_{x\in G_i^n}\min_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}}\frac{\|Au\|_2^2}{\|u\|_2^2}$$

同理，由 $\sigma_i^2=\min\limits_{x\in G_{n-i+1}^n}\max\limits_{\substack{u\in\mathscr{X}\\ u\neq 0}}u^*A^*Au$ 可得：

$$\sigma_i=\min_{x\in G_{n-i+1}^n}\max_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}}\frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2}$$

$$=\min_{\substack{\mathscr{X}\\ \dim\mathscr{X}=n-i+1}}\max_{\substack{x\in\mathscr{X}\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

且特别有 $\sigma_1=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$，$\sigma_n=\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_n$，证明

$$\min_{\pi\in J_n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_{\pi(i)})^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)^2$$

因为
$(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_s-\beta_{\pi(s)})^2$
$=\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_s^2+\beta_{\pi(1)}^2$
$-2\alpha_1\beta_1$
$-2\alpha_s\beta_{\pi(1)}$

Pf：设 $\pi(s)=1$. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_{\pi(i)})^2=\sum_{\substack{i\neq 1\\ i\neq s}}(\alpha_i-\beta_{\pi(i)})^2+(\alpha_1-\beta_{\pi(1)})^2+(\alpha_s-\beta_1)^2$

$=\cdots+\alpha_1^2+\alpha_s^2+\beta_{\pi(1)}^2+\beta_1^2-2\alpha_1\beta_{\pi(1)}-2\alpha_s\beta_1$

$=\cdots+(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_s-\beta_{\pi(1)})^2-2\alpha_1(\beta_{\pi(1)}-\beta_1)-2\alpha_s(\beta_{\pi(1)}-\beta_1)$

$$= \cdots + (\alpha_1-\beta_1)^2 + (\alpha_s-\beta_{\pi(1)})^2 - 2\overbrace{(\alpha_1-\alpha_s)}^{\le 0}\overbrace{(\beta_{\pi(1)}-\beta_1)}^{\ge 0}$$

$$\geq \cdots + (\alpha_1-\beta_1)^2 + (\alpha_s-\beta_{\pi(1)})^2$$

可以定义 π'，$\pi(1)=1$，$\pi(s)=\pi(1)$，其余不变，循环做下去。

9. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\lambda(A)=\{\lambda_i\}$，$\sigma(A)=\{\sigma_i\}$，试证：
如果 $|\lambda_1|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$，$\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_n$
则：$\prod_{i=1}^{k}\sigma_i\geq\prod_{i=1}^{k}|\lambda_i|$，$k=1,2,\cdots,n$

Pf：当 $k=n$ 时，$\prod_{i=1}^{n}\sigma_i=\det(A^*A)=|\det(A)|^2=\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|$

当 $k<n$ 时，设 A 的 Schur 分解为

$$A=U^*TU=U^*\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n\end{pmatrix}U=U^*\begin{pmatrix}T_{11} & T_{12}\\ 0 & T_{22}\end{pmatrix}U$$

其中 U 为酉矩阵，T 为上三角矩阵，T_{11} 为 k 阶方阵，因此，T 的特征值和奇异值与 A 相同，

$$T^2=\begin{pmatrix}T_{11}^2 & * \\ 0 & T_{22}^2\end{pmatrix},\quad T^*T=\begin{pmatrix}T_{11}^*T_{11} & * \\ * & *\end{pmatrix}$$

设 $T_{11}^*T_{11}$ 的特征值为 $\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_k^2$.

则由特征值分隔定理，$T_{11}^*T_{11}$ 是 T^*T 的主子矩阵，因此：

$$\sigma_i^2\geq\mu_i^2$$

再由 $\det(T_{11}^*T_{11})=|\det(T_{11}^2)|$，有：$\prod_{i=1}^{k}\mu_i^2=\prod_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2$

那么：$\prod_{i=1}^{k}\sigma_i\geq\prod_{i=1}^{k}|\lambda_i|$ 证毕.

10. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times m}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 试证 $|AB|\leq|A||B|$.

Pf: 矩阵 AB 的元素为 $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{m}|a_{ik}|e^{i\alpha_k}|b_{kj}|e^{-i\beta_k}$.

由引理 5.2 知: $\left|\sum_{k=1}^{m}|a_{ik}||b_{kj}|e^{i(\alpha_k+\beta_k)}\right|\leq\sum_{k=1}^{m}|a_{ik}||b_{kj}|$

(此处 $|a_{ik}|,|b_{kj}|>0$, 若等于 0 自然成立)

即:

$$\left|\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\right|\leq\sum_{k=1}^{m}|a_{ik}||b_{kj}|$$

故得: $|AB|_{ij}\leq[|A||B|]_{ij}$

由此可知 $|AB|\leq|A||B|$.

第二次作业.

1. 考虑线性方程组 $Ax=b$,

(P110.4) 其中 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 10^{-10} & 10^{-10} \\ 1 & 10^{-10} & 10^{-10} \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 2(1+10^{-10}) \\ -10^{-10} \\ 10^{-10} \end{bmatrix}$

(1) 验证 $x=(10^{-10},-1,1)$ 是方程组的解，且其条件数是 $\kappa_\infty(A)=2(10^{10}+1)\approx 2\times 10^{10}$.

(2) 证明：如果 $|E|<10^{-8}|A|$，且 $(A+E)y=b$，则有 $|x-y|<10^{-7}|x|$，这表明即使 A 的条件数很大，A 的微小扰动未必会引起 x 的巨大变化，

(3) 定义 $D=\mathrm{diag}(10^{-5},10^{5},10^{5})$、证明：$\kappa_\infty(DAD)\le 5$.

详细证明过程见"数值代数其他习题及解答.pdf"的第8页第8题.

2. (P114.5) 设 $T_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定的Toplitz矩阵，$T_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 表示 T_n 的 k 阶顺序主子阵，设计一个计算 $\kappa_\infty(T_k)$ 的算法：

解：设计算法如下：

(1) 输入原始数据 $r_1,\cdots,r_n$.

(2) 计算 $s_k = r_1+\cdots+r_k$, $k=1,\cdots,n$

(3) $a_k = s_k$, For $i=1,\lceil \frac{k}{2} \rceil$, $k=1,\cdots,n$

若 $s_{k-i}+s_i > a_k$

$$a_k = s_{k-i}+s_i$$

(4) $\xi_1 = -r_1$, $\delta_1 = 1$, $a=-r_1$, $l=1$, $m=1$

$\delta = (1-a^2)\delta$

$a_i = -(r_{l+1}+\sum_{i=1}^{l} r_{l-i+1}\xi_i)/\delta$

$\eta_i = \xi_i + a\xi_{l-i+1}$, $i=1,\cdots,l$

$\xi_i = \eta_i$, $i=1,\cdots,l$

$\xi_{l+1} = a$

$\eta_l = (\xi_1,\cdots,\xi_{l+1})$, $l=1,\cdots,n$

$b_l = \frac{1}{\delta}(\xi_1,\cdots,\xi_{l+1})$

若 $b_l > b_{l-1}+\frac{1}{\delta}\xi_{l+1-m}$, $m=l$

否则：$b_l = b_{l-1}+\frac{1}{\delta}\xi_{l+1-m}$ (5) 输出 $a_k b_l$.

3. (P114.6) 设计一个运算量为 $O(n^2)$ 的求解方程组 $Hx=b$ 的算法. 其中 H 为上 Hessenberg 矩阵.

解:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n-1} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n-1} & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & h_{nn-1} & h_{nn} \end{pmatrix}$$

算法设计如下:

(1) $k:=1$, $L=I_n=(l_{ij})$

(2) $j=\{i \mid |h_{ki}|=\max\limits_{p=k,k+1}|h_{kp}|\}$

(3) $l_k=(h_{k,k},\cdots,h_{k,n})$, $h_{ki}=h_{ji}$, $i=k,\cdots,n$

$h_{ji}=l_k\cdot e_i \quad (i=k,\cdots,n)$

(4) $l_k=(0,0,\cdots,0,-\frac{h_{k+1k}}{h_{ik}},0,\cdots,0)^T\in\mathbb{R}^{n\times 1}$

$l_{k+1k}=\frac{h_{k+1k}}{h_{kk}}$

$$h_{k+1t}=h_{k+1t}-h_{kt}\cdot\frac{h_{k+1k}}{h_{kk}}, \quad t=k+1,\cdots,n$$

$h_{k+1t}=0, \quad t=1,\cdots,k$ (得到新H)

(5) $k<n-1$, $k=k+1$, 转至 (2) 否则下一步

(6) 求解下三角 $Ly=b$

(7) 求解上三角 $Hx=y$.

(算法计算量为 $O(n^2)$. 思路: 先选出每列对角元和对角元下方元素的最大值, 再用 Gauss 变换消掉对角线下的非零元.)

4. (P110. 8) 求证

$$\|V(x_0, x_1, \cdots, x_n)^{-1}\|_\infty \le \max_{0\le k\le n} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{1+|x_i|}{|x_k - x_i|}$$

其中 $V(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 表示 Vandermonde 矩阵.

证明过程详见"数值代数其他习题及解答.pdf"的第10页第9题.

5. (P119) 假设 $P(A+E)=LU$，其中 P是排列方阵. $L=[L_{ij}]$ 是满足 $|l_{ij}|\le 1$ 的单位下三角矩阵. $U=[u_{ij}]$ 是上三角矩阵，证明:

$$K_\infty(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|E\|_\infty + \min_i |u_{ii}|}$$

Pf: 设 i_0 为满足 $|u_{i_0 i_0}| = \min_i |u_{ii}|$ 的最小指标.

则知 $|u_{ii}|>0$ (当 $i<i_0$ 时)

我们令 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_{i_0}, 1, 0, \cdots, 0)^T$ 使得 $Ux=u_{i_0 i_0} e_{i_0}$

所以 $\|x\|_\infty \geq 1$，$\|Ux\|_\infty = |u_{i_0 i_0}|$

$\|LUx\|_\infty = |u_{i_0 i_0}|$ (因为 $|l_{ij}|\le 1$)

则:
$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{\|y\|_\infty=1} \|A^{-1}y\|_\infty \geq \frac{\|A^{-1}Ax\|_\infty}{\|Ax\|_\infty} = \frac{\|x\|_\infty}{\|Ax\|_\infty} = \frac{\|x\|_\infty}{\|PAx\|_\infty} = \frac{\|x\|_\infty}{\|LUx - PEx\|_\infty}$$
$$\geq \frac{\|x\|_\infty}{\|LUx\|_\infty + \|PEx\|_\infty} \geq \frac{\|x\|_\infty}{|u_{i_0 i_0}| + \|E\|_\infty \|x\|_\infty} \geq \frac{\|x\|_\infty}{|u_{i_0 i_0}|\,\|x\|_\infty + \|E\|_\infty \|x\|_\infty} = \frac{1}{\|E\|_\infty + \min_i |u_{ii}|}$$