

本科毕业论文

基于框架小波变换和梯度低秩先验的全色 锐化算法研究

RESEARCH ON PANSHARPENING ALGORITHM WITH FRAMELET TRANSFORM AND GRADIENT LOW-RANK PRIOR

尹鹏皓

哈尔滨工业大学

2025 年 5 月

摘 要

高分辨率多光谱遥感图像因其具备多波段和高空间分辨率的特点，在目标识别、变化检测等任务中展现出显著优势，被广泛应用于农业监测、环境保护、城市规划等多个领域。然而，由于硬件条件的限制，遥感卫星传感器通常只能同时采集低分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像，因此需要通过全色锐化算法合成高分辨率多光谱图像。本文在系统分析国内外现有全色锐化算法不足的基础上，提出了一种基于框架小波变换和梯度低秩先验的全色锐化算法。通过与多种现有方法的对比实验和消融实验，本文验证了该算法的优势和合理性，为遥感图像全色锐化的研究提供了新的思路和方法。

在建模上，本文基于变分优化框架的思路，构建遥感图像全色锐化的模型。本文充分挖掘高分辨率全色图像、低分辨率多光谱图像与目标高分辨率多光谱图像之间的内在联系。通过引入掩码张量和模糊算子，本文构建了提供光谱信息的光谱一致性项；利用高分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像在框架小波域上像素分布的一致性，通过引入框架小波变换，构建了提供空间结构信息的空间一致性项。同时，本文通过引入梯度低秩先验约束，确定了重建图像的唯一性，增强了重建图像的真实性，并据此提出了完整的最优化形式的全色锐化模型。

在求解策略上，本文采用交替方向乘子法，通过引入辅助变量，将原始优化问题分解为多个可有效求解的子问题。针对各子问题，本文通过采用通用软阈值算法、奇异值收缩法与离散傅里叶变换等方法，将其逐一解决。由此，本文构建了一套高效的全色锐化迭代算法，并给出了其详细的伪代码实现。

在实验部分，本文基于多个公开遥感图像数据集，对所提方法与多种主流全色锐化算法进行了定量与定性比较。实验结果表明，相比于现有的所有方法，本文算法均具有独特优势。此外，通过消融实验，进一步验证了各建模项在最终效果中的实际贡献，从而体现了模型设计的合理性和算法的有效性。

关键词： 遥感图像；全色锐化；变分优化方法；框架小波变换；梯度低秩先验；交替方向乘子法

Abstract

High-resolution multispectral remote sensing images, characterized by multiple spectral bands and high spatial resolution, demonstrate significant advantages in tasks such as target recognition and change detection. They have been widely applied in areas such as agricultural monitoring, environmental protection, and urban planning. However, due to hardware limitations, remote sensing satellite sensors typically collect only low-resolution multispectral images and high-resolution panchromatic images simultaneously. Therefore, pan-sharpening algorithms are required to synthesize high-resolution multispectral images. Based on a systematic analysis of the limitations of existing pan-sharpening algorithms at home and abroad, this paper proposes a novel pan-sharpening method based on framelet transform and gradient low-rank prior. Through comparative experiments with various existing methods and ablation studies, the proposed algorithm is shown to be both effective and reasonable, providing new ideas and methodologies for pan-sharpening.

In terms of modeling, this study constructs the pan-sharpening model based on variational optimization framework. The intrinsic relationships among high-resolution panchromatic images, low-resolution multispectral images, and target high-resolution multispectral images are thoroughly explored. The spectral consistency term is formulated by introducing a masking tensor and blurring operator to provide spectral information. To capture spatial structural details, the spatial consistency term is constructed by leveraging the consistency of pixel distributions in the framelet domain between the high-resolution multispectral image and the panchromatic image. Additionally, the gradient low-rank prior is introduced to ensure the uniqueness of the reconstructed image and to enhance its realism. Based on the aforementioned terms, a complete optimization model for pan-sharpening is formulated.

In terms of solution, the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) is employed. By introducing auxiliary variables, the original optimization problem is decomposed into multiple sub-problems that can be efficiently solved. Each sub-problem is addressed using methods such as the generalized soft-thresholding algorithm, singular value shrinkage method, and discrete Fourier transform. This results in an efficient iterative algorithm for pan-sharpening, with detailed pseudo-code provided.

In the experimental section, the proposed method is quantitatively and qualitatively compared with several mainstream pan-sharpening algorithms using

multiple public remote sensing datasets. The results demonstrate that the proposed method offers particular advantages over existing approaches. Furthermore, ablation studies confirm the practical contribution of each modeling component to the final results, thereby validating the rationality of the model design and the effectiveness of the algorithm.

Keywords: remote sensing image, pan-sharpening, variational optimization, framelet transform, gradient low-rank prior, alternating direction method of multipliers

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	II
目 录	IV
第 1 章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究目的与意义	1
1.1.1 课题背景	1
1.1.2 研究目的和意义	2
1.2 国内外相关研究进展	2
1.2.1 基于组件替换的方法	2
1.2.2 基于多分辨率分析的方法	3
1.2.3 基于深度学习的方法	3
1.2.4 基于变分优化的方法	3
1.3 目前方法存在的不足	4
1.4 课题主要研究内容	5
1.4.1 模型构建	5
1.4.2 模型求解	5
1.4.3 结果分析	6
第 2 章 预备知识	7
2.1 引言	7
2.2 框架小波变换	7
2.2.1 框架小波基函数的构造	7
2.2.2 框架小波变换	8
2.3 交替方向乘子法	9
2.4 符号说明	10
2.5 本章小结	11
第 3 章 全色锐化模型的变分优化框架建模	12
3.1 引言	12
3.2 光谱一致性约束的设计	12

3.3 空间一致性约束的设计	13
3.4 梯度低秩先验的设计	14
3.5 变分优化框架建模	15
3.6 本章小结	16
第 4 章 基于交替方向乘子法的模型求解	17
4.1 引言	17
4.2 交替方向乘子法的迭代求解步骤	17
4.2.1 增广拉格朗日函数的构建	17
4.2.2 中间变量 u_1 的更新	17
4.2.3 中间变量 u_2 的更新	18
4.2.4 中间变量 G 的更新	19
4.2.5 中间变量 B 的更新	19
4.2.6 中间变量 u_{sm} 的更新	19
4.2.7 高分辨率多光谱图像 u 的迭代	20
4.2.8 增广拉格朗日乘子 Λ 的更新	20
4.2.9 算法流程总结	21
4.3 本章小结	22
第 5 章 实验结果与分析	23
5.1 引言	23
5.2 实验设置	23
5.3 与其他方法的性能对比	24
5.3.1 数值指标结果分析	24
5.3.2 可视化结果分析	25
5.4 消融实验	27
5.5 本章小结	29
结 论	30
参考文献	32
攻读学士学位期间取得创新性成果	37
哈尔滨工业大学本科毕业论文原创性声明和使用权限	38
致 谢	39

第1章 绪 论

1.1 课题背景及研究目的与意义

1.1.1 课题背景

高分辨率多光谱遥感图像通常具有较高的分辨率，同时包含红、绿、蓝及近红外等多个光谱波段，能够提供比普通彩色图像更为丰富的地物信息。由于具有出色的空间和光谱信息的表达能力，其被广泛应用于农业检测、环境保护、城市规划等多个领域中的众多任务。下文具体介绍了高分辨率多光谱遥感图像在变化检测[1]、目标识别[2]和分类[3]等任务中的应用。

变化检测是高分辨率多光谱遥感图像的一个重要应用任务，具体包括自然环境变化监测、城市扩展、灾害评估等内容。由于高分辨率多光谱遥感图像能够高精度地捕捉地面变化信息，其常用于监测植被覆盖变化、城市土地使用变化、森林砍伐、湿地退化等。例如，通过对比不同时期的高分辨率多光谱遥感图像，可以识别出由于洪水、火灾、土地开发等因素引起的地表变化，为环境保护、城市规划和灾后恢复提供重要数据支持。

高分辨率多光谱遥感图像在目标识别方面的应用前景同样十分广阔。由于高分辨率的影像能够精准地分辨出细小的地物特征，结合多光谱波段的丰富信息，使用者可通过其对不同类型的地物（如建筑物、道路、车辆、植被等）进行高效的识别和分类。特别是在军事侦察、安防监控、交通管理等国防与安全相关的领域，基于高分辨率多光谱遥感图像的目标识别技术可以帮助自动检测和追踪特定物体，其对于保障国家安全具有重要意义。

除此之外，基于高分辨率多光谱遥感图像的分类同样是一项重要的技术。相比于普通彩色图像，高分辨率多光谱图像能够提供更加精细的空间信息和更加丰富的光谱信息，这使得其具有更加强大的分类能力。在具体任务上，例如，研究者可以通过对高分辨率多光谱遥感图像不同波段的反射率信息，区分不同的地物和地表覆盖类型，从而实现对土地利用类型、植被类型以及其他地表特

征的精确分类。

尽管高分辨率多光谱遥感图像具有广泛的应用前景，但其在获取上仍存在不小的阻碍。由于技术的限制，包括高分二号（Gaofen-2）、快鸟（QuickBird）以及世界观测-3（WorldView-3）在内的多个遥感图像传感器只能同时采集低分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像，不能直接采集高分辨率多光谱图像，这大大限制了其应用前景。为了得到高分辨率多光谱遥感图像，过往的研究者提出了许多类型的全色锐化算法，这些算法利用卫星拍摄的低分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像，合成高分辨率多光谱图像，弥补无法直接采集的缺陷。

1.1.2 研究目的和意义

目前已经有许多不同类型的遥感图像全色锐化的算法，但这些算法普遍存在各自的局限性。因此，在现有研究基础上进一步改进算法，设计出性能更优的全色锐化方法，不仅具有重要的理论研究价值，也具有显著的现实应用意义。本研究旨在提出一种具备较高应用潜力的遥感图像全色锐化算法，其兼顾图像重建精度、模型可解释性和计算效率。同时，本研究的相关工作也期望能够为全色锐化、图像超分等相关图像处理任务带来方法上的启发。

1.2 国内外相关研究进展

作为计算机视觉的一个重要任务，国内外对遥感图像全色锐化已有较多的研究积累。目前流行的遥感图像全色锐化的方法主要可以分成四类，分别为基于组件替换的方法（Component Substitution, CS）、基于多分辨率分析的方法（Multi-resolution Analysis, MRA）、基于深度学习的方法（Deep Learning, DL）和基于变分优化的方法（Variational Optimization, VO）。

1.2.1 基于组件替换的方法

在基于组件替换的全色锐化方法中，低分辨率多光谱图像的空间信息通过光谱变换分离出来，并使用高分辨率全色图像进行替换。这一类方法具有较低

的计算复杂度，参数调优较为简单，且具有较强的泛化能力。常见的基于组件替换的方法包括基于主成分分析的方法(PCA)[4]、亮度-色调-饱和度方法(IHS)[5]、Gram-Schmidt 自适应方法(GSA)[6]、波段相关空间细节方法(BDSD)[7]和部分替代自适应组件替换方法(PRACS)[8]等。

1.2.2 基于多分辨率分析的方法

在基于多分辨率分析的全色锐化方法中，高分辨率全色图像的空间信息被分离出来，并通过多尺度分解的方法注入到上采样之后的低分辨率多光谱图像中。与基于组件替换的方法类似，基于多分辨率分析的方法同样具有较低的计算复杂度，参数调优较为简单，且能够较好地泛化到不同数据集上。因此这两类方法常常作为全色锐化领域的基准。常见的基于多分辨率的方法主要有“a-trous”小波变换方法(ATWT)[9]、加性小波亮度比例方法(AWLP)[10]和基于平滑滤波器的强度调制方法(SFIM)[11]等。

1.2.3 基于深度学习的方法

随着深度学习技术的快速发展，基于深度学习的全色锐化方法不断涌现。例如，许多基于卷积神经网络的方法，例如基于细节注入卷积神经网络的方法(DI)[12]、基于数据驱动模型的卷积神经网络回归方法(DDM)[13]、双侧激活机制方法(BAM)[14]、显式光谱-空间卷积方法(SSCONV)[15]、深度多尺度细节网络方法(DMDN)[16]和基于级联卷积神经网络的方法(CCNN)[17]均被设计用于全色锐化。由于神经网络强大的拟合能力，这一类的方法在图像的特征提取和非线性映射的学习方面表现出非常突出的优势。因此，这些方法在其训练数据集上的性能通常大大优于传统方法。

1.2.4 基于变分优化的方法

基于变分优化的全色锐化方法在传统的基于组件替换的方法、基于多分辨率分析的方法与基于深度学习的方法之间取得了良好的平衡。该方法不仅具备较优的图像重建性能，同时在计算效率方面也保持了较高水平。此外，基于

变分优化的方法还展现出较强的泛化能力与良好的可解释性，为遥感图像全色锐化提供了一类兼具性能与实用性的解决方案。此前的研究者们已经提出了许多基于变分优化的方法，例如具有局部梯度约束的变分优化方法（LGN）[18]、针对 $p+xs$ 图像融合的变分方法（P+XS）[19]、超拉普拉斯惩罚方法（HLP）[20]、贝叶斯方法（BAYES）[21]、基于可重复核希尔伯特空间和 Heviside 函数的变分泛锐化方法（RKHS-HF）[22]、基于自适应场景的高斯混合分布方法（SAGM）[23]、基于张量稀疏建模和超拉普拉斯先验的方法（TBSM-HLP）[24] 和基于近端深度注入和梯度强度相似度的方法（PDI-GIS）[25]。这些方法将全色锐化问题建模为一个关于低分辨率多光谱图像、高分辨率全色图像和待重建的高分辨率多光谱图像的病态优化问题。它们通过设计合理的光谱一致性保真项、空间一致性保真项和先验约束项，构建以高分辨率多光谱图像为优化目标的变分模型，并通过求解该优化问题以获得最终重建结果。若能充分考虑各传感器的成像特性，并合理建模不同图像之间的耦合关系，基于变分优化的方法往往能够取得令人满意的重建效果。

1.3 目前方法存在的不足

尽管当前已有多多种全色锐化方法，但各类方法仍存在不同程度的局限性。

基于组件替换的方法通常通过光谱变换从低分辨率多光谱图像中提取光谱信息，并注入至高分辨率全色图像中。然而，由于光谱变换过程本身的限制，这类方法往往会引入较为明显的光谱失真。相较而言，基于多分辨率分析的方法通过多尺度分解提取高分辨率全色图像的空间细节，并将其融合至上采样后的多光谱图像中，但由于多尺度分解精度有限，该方法易导致空间结构的模糊或畸变。

基于神经网络的方法虽然在重建精度上表现突出，但其往往依赖大量的计算资源和训练数据，限制了在实际应用中的效率和灵活性。此外，这一类方法通常在训练数据集上存在严重的过拟合现象，导致其泛化能力不足，难以适应不同传感器或不同采集区域的数据分布。

对于基于变分优化框架的全色锐化方法，目前在光谱一致性项、空间一致性项以及先验项的建模上仍有进一步提升的空间。通过引入更具表达能力的数学工具，对目标函数中的各类约束项进行更合理的建模，有望进一步提升模型性能和重建质量。

1.4 课题主要研究内容

为了进一步提升遥感图像全色锐化的精度，同时保证算法的运行效率、可泛化性和可解释性，本文基于传统的变分优化框架，希望通过对框架中的光谱一致性项、空间一致性项和低秩先验进行改进，从而提升模型的效果。

为了解决这一问题，本文制定出以下研究方案。该研究主要分为模型构建、模型求解和结果分析三个步骤。下面将分别介绍每个步骤的具体任务。

1.4.1 模型构建

基于变分优化方法的遥感图像全色锐化模型主要由光谱一致性项、空间一致性项和低秩先验项组成。本文将根据遥感图像本身的特性，利用框架小波变换和梯度低秩先验等数学工具，优化模型中每一项的构造，从而构建出性能更好的全色锐化模型。

1.4.2 模型求解

对于所构建的基于变分优化方法的遥感图像全色锐化模型，本文使用交替方向乘子法进行求解。首先，本文通过引入辅助变量，对部分出现在最优化目标函数多个项中的变量进行替换，从而达到解耦合的效果，使所有变量在优化时都具有简单解。然后，本文利用目标函数和等式约束，构造出对应的增广拉格朗日函数。最后，根据增广拉格朗日函数，本文对各变量进行交替极小化，并更新拉格朗日乘子。由此本文可求解得到迭代算法形式的遥感图像全色锐化模型。

1.4.3 结果分析

使用基于上述模型求解得到的算法，本文可以重建出高分辨率多光谱遥感图像。对于得到的图像，本文需要将其与真实图像进行对比，计算出相应图像评价指标，从而比较不同模型的全色锐化效果。本项目使用的图像评价指标及其物理意义如下表所示：

表 1-1 本项目使用的图像评价指标及其物理意义

图像评价指标	物理意义
峰值信噪比（PSNR）	两幅图像的均方误差，数值越大说明误差越小
结构相似性（SSIM）	两幅图像亮度、对比度和结构的综合相似度
光谱角制图（SAM）	两幅图像的光谱差异度
空间相关系数（SCC）	两幅图像空间分布上的相似度
归一化全局误差（ERGAS）	反映合成高分辨率全色图像的误差
多光谱图像质量指数（Q4）	两幅图像在光谱和空间信息上的综合相似度

在上述评价指标中，PSNR、SSIM、SCC 和 Q4 的数值越大，表示重建图像质量越高；而 SAM 和 ERGAS 的数值越小，则表明重建图像质量越高。

此外，由于图像评价指标与人眼感受并不完全一致，本文还绘制出各方法合成的高分辨率全色锐化图像、真实图像及其差值的热力图进行对比，以更直观地评估不同遥感图像全色锐化模型的效果。

第 2 章 预备知识

2.1 引言

在正式介绍本文工作之前，有必要介绍一些相关的预备知识，具体包括框架小波变换和增广拉格朗日函数法。此外，还有必要对本文中所使用的记号做必要的说明，便于读者对本文的理解。

2.2 框架小波变换

框架小波变换 (Framelet Transform) 是一种冗余的小波变换，其可以将信号表示成冗余的小波基函数的线性组合，从而提取出信号在不同时间和频率尺度下的特征。下面将详细介绍框架小波变换的计算机实现方法。

2.2.1 框架小波基函数的构造

一个在 Lebesgue 平方可积函数空间 $L_2(\mathbb{R})$ 上的紧框架 X 定义为满足如下条件上的一个可数的函数集：

$$f = \sum_{g \in X} \langle f, g \rangle g, \forall f \in L_2(\mathbb{R}), \quad (2-1)$$

其中 $\langle f, g \rangle$ 为函数 f 和 g 的内积。

对于 $L_2(\mathbb{R})$ 上给定的一个有限的函数集合 $\Psi := \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r\}$ ，将各个元素经过伸缩和位移变换之后，可得到一个新集合 $X(\Psi) := \{2^{\frac{j}{2}} \psi_l(2^j - k) : 1 \leq l \leq r; j, k \in \mathbb{Z}\}$ 。若 $X(\Psi)$ 是一个紧框架，则称其为一个紧小波框架， $\psi_l, 1 \leq l \leq r$ 被称为紧小波框架基函数。

在构造紧小波框架时，通常来说，首先需要选取一个满足如下细分方程的紧支撑函数 $\psi(x)$ ：

$$\psi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \xi_0(l) \psi(2x - l), \quad (2-2)$$

其中 $\xi_0 \in L_2(\mathbb{Z})$ 为一个低通滤波器（也被称作细分函数掩模）。然后，利用一组

高通滤波器（也被称作小波框架基函数掩模） $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\} \subseteq L_2(\mathbb{Z})$ ，可以按照如下方法构造小波框架基函数 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ ：

$$\psi_j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \xi_j(l) \psi(2x - l), j = 1, 2, \dots, r. \quad (2-3)$$

根据上述分析，如何选定合适的低通滤波器和高通滤波器成为了构造小波基函数的核心问题。单位扩展原理（Unitary Extention Principle, UEP）^[26]提出，低通滤波器 ξ_0 和高通滤波器 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ 需要几乎处处满足如下条件：

$$\zeta_{\xi_0}(\omega) \overline{\zeta_{\xi_0}(\omega)(\omega + \gamma\pi)} + \sum_{j=1}^r \zeta_{\xi_j}(\omega) \overline{\zeta_{\xi_j}(\omega)(\omega + \gamma\pi)} = \delta(\gamma), \gamma = 0, 1, \quad (2-4)$$

其中 $\zeta_{\xi}(\omega) = \sum_l \xi(l) e^{il\omega}$ ， $\delta(\gamma)$ 是狄拉克 δ 函数（Dirac delta function）。

2.2.2 框架小波变换

框架小波变换（framelet transform）指的是将函数分解成一组框架小波基函数的线性组合，其关键在于求解各个基底的系数。在图像处理等计算机数值计算的应用中，由于函数通常用向量来表示，框架小波变换可以用一个矩阵 W 来表示。文章[27]等许多文献给出了构造框架小波变换矩阵的具体细节，其中一种方法介绍将在下面简要介绍。

对于一组给定的滤波器 $h = \{h(j)\}_{j=-J}^J$ ，定义矩阵 $S(h)$ 为滤波器 h 在纽曼对称边界条件（Neumann symmetric boundary condition）下的卷积算子。 $S(h)$ 的构造方法如下：

$$S(h) = \begin{bmatrix} h(0) & \cdots & h(-J) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(J) & \ddots & \ddots & \ddots & h(-J) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h(J) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h(1) & h(2) & \cdots & h(J) & 0 \\ h(2) & \ddots & \ddots & \ddots & h(-J) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(J) & \ddots & \ddots & \ddots & h(-2) \\ 0 & h(-J) & \cdots & h(-2) & h(-1) \end{bmatrix}. \quad (2-5)$$

基于 2.2.1 构造出的滤波器 $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ ，给定 $H_i^{(l)} \equiv S(\xi_i^{(l)})$ ，其中 $\xi_i^{(l)} = \{\underbrace{\xi(-J), 0, \dots, 0}_{2^{l-1}-1}, \underbrace{\xi(1-J), 0, \dots, 0, \xi(0), 0, \dots, 0, \xi(J-1), 0, \dots, 0, \xi(J)}_{2^{l-1}-1}\}$ ，可以构造出框

架小波变换矩阵 W 如下：

$$W = \begin{bmatrix} \prod_{l=0}^{L-1} H_0^{(L-l)} \\ H_1^{(L)} \prod_{l=1}^{L-1} H_0^{(L-l)} \\ \vdots \\ H_r^{(L)} \prod_{l=1}^{L-1} H_0^{(L-l)} \\ \vdots \\ H_1^{(1)} \\ \vdots \\ H_r^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (2-6)$$

构造出框架小波变换矩阵 W 之后，给定一个向量表示的函数 f ，其经过框架小波变换后得到的系数可表示为 Wf 。此外，单位扩展原理保证了框架小波变换是可逆的，即 $W^T W = I$ 。 W^T 为框架小波逆变换。

2.3 交替方向乘子法

交替方向乘子法（Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM）^[28]是一类求解具有多个优化变量的等式约束优化问题的方法。由于不要求被求解的函数是凸函数，且具有收敛速度快、收敛效果好等显著优势，交替方向乘子法被广泛用于图像处理、信号处理等各个工程领域中。

交替方向乘子法求解问题的一般形式为：

$$\min_{x,z} f(x) + g(z), s.t. Ax + Bz = c, \quad (2-7)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n$ 为待优化变量， $A \in \mathbb{R}^{p \times m}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 为系数矩阵， $c \in \mathbb{R}^p$ 为常数。

为了求解该问题，首先需要构造增广拉格朗日函数：

$$L_\rho(x, z, u) = f(x) + g(z) + u^T(Ax + Bz - c) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|_2^2, \quad (2-8)$$

在上式中， $u \in \mathbb{R}^p$ 称为增广拉格朗日乘子， ρ 称为罚参数。

利用增广拉格朗日函数法的求解步骤^[29]，本文得到用于求解上述问题的迭

代更新步骤如下：

$$\begin{cases} x^{(k)} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} L_{\rho}(x, z^{(k-1)}, u^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \underset{z}{\operatorname{argmin}} L_{\rho}(x^{(k)}, z, u^{(k-1)}) \\ u^{(k)} = u^{(k-1)} + \rho(Ax^{(k)} + Bz^{(k)} - c) \\ \rho^{(k)} = \min\{\gamma\rho^{(k)}, \rho_{\max}\} \end{cases} \quad (2-9)$$

令 $w = \frac{u}{\rho}$ ，增广拉格朗日函数 2-8 可进一步简化为如下形式：

$$L_{\rho}(x, z, w) = f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c + w\|_2^2 - \frac{\rho}{2} \|w\|_2^2. \quad (2-10)$$

最后一项 $-\frac{\rho}{2} \|w\|_2^2$ 与待优化变量无关，可以省略。根据公式 2-9，迭代更新步骤可进一步优化如下：

$$\begin{cases} x^{(k)} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz^{(k-1)} - c + w^{(k-1)}\|_2^2 \\ z^{(k)} = \underset{z}{\operatorname{argmin}} g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax^{(k)} + Bz - c + w^{(k-1)}\|_2^2 \\ w^{(k)} = w^{(k-1)} + Ax^{(k)} + Bz^{(k)} - c \\ \rho^{(k)} = \min\{\gamma\rho^{(k)}, \rho_{\max}\} \end{cases} \quad (2-11)$$

在实际使用时， γ 通常在 $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 中选取，以确保算法的收敛性。

2.4 符号说明

由于本文中出现了大量的数学公式和记号，为了方便读者理解，本文在此进行各类符号含义的说明，具体如表 2-1 所示。

表 2-1 本文出现过的各类符号含义

符号	含义
花体大写英文字母，例如 \mathcal{U}	三维张量
大写英文字母，例如 W	二维矩阵
小写英文字母，例如 x	一维向量
希腊字母，例如 α	常量
$\ \cdot\ _F$	F 范数，即弗罗贝尼乌斯（Frobenius）范数
$\ \cdot\ _p$	l_p 范数
$\ \cdot\ _*$	核范数
\odot	逐元素相乘
$*$	卷积
$./$	逐元素相除

2.5 本章小结

本章首先介绍了框架小波变换，具体包括框架小波基函数和框架小波变换矩阵的构造方法。然后，本章介绍了交替方向乘子法，其在第四章的模型求解中具有重要应用。本章最后给出了相关符号的说明，为读者理解文章内容提供了有效帮助。

第 3 章 全色锐化模型的变分优化框架建模

3.1 引言

绪论中提到，基于变分优化方法的全色锐化模型主要分为三部分，即光谱一致性约束、空间一致性约束和先验项。本章将从这三部分分别出发，介绍每一项的具体设计思路和具体形式。基于上述推导，本章将构造完整的基于变分优化框架的全色锐化模型。

3.2 光谱一致性约束的设计

为了使全色锐化得到的高分辨率多光谱图像在光谱上与真实图像一致，需要利用低分辨率多光谱图像的光谱信息。因此，本研究根据二者之间的关联，设计了合适的光谱一致性项。

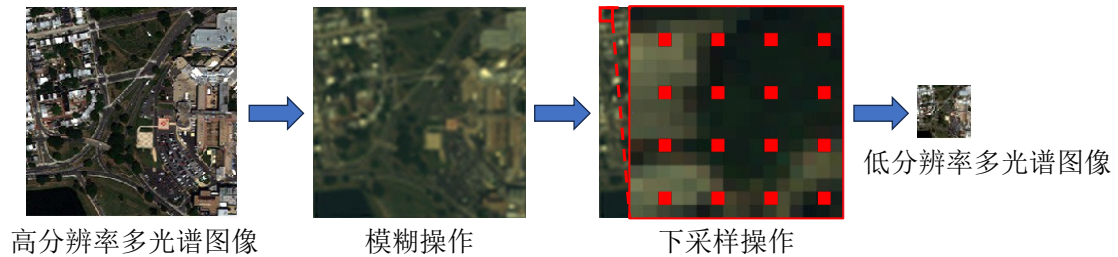


图 3-1 高分辨率多光谱图像和低分辨率多光谱图像的关系

如图 3-1 所示，低分辨率多光谱图像可视为高分辨率多光谱图像经过高斯模糊和下采样处理的结果。为模拟这一过程，本研究采用高斯模糊、0-1 掩码张量和 0 值填补操作。首先，根据高低分辨率多光谱图像之间的采样率，使用 0 值填补低分辨率图像，得到与高分辨率图像相同形状的张量。接着，基于填补结果构建 0-1 掩码张量，其中填补部分值为 0，其他部分值为 1。最后，利用该掩码张量，通过高斯模糊处理后的高分辨率图像与低分辨率图像在非 0 处的像素值相等的性质，使用 F 范数，可以构造光谱一致性项如下：

$$E_1 = \|\mathcal{M}_{sk} \odot (\mathcal{U} * \mathcal{S} - \mathcal{M}_{pad})\|_F^2. \quad (3-1)$$

式中 \mathcal{M}_{sk} ——0-1 掩码张量；
 \mathcal{U} ——待求解的高分辨率多光谱图像；
 \mathcal{S} ——高斯模糊核；
 \mathcal{M}_{pad} ——0 值填补后的低分辨率多光谱图像；
 若设采样率为 $\frac{1}{r}$ ， \mathcal{M}_{sk} 和 \mathcal{M}_{pad} 的计算方式如下：

$$\mathcal{M}_{sk_{i,j,k}} = \begin{cases} 1, & \frac{i}{r} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \frac{j}{r} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (3-2)$$

$$\mathcal{M}_{pad_{i,j,k}} = \begin{cases} \mathcal{M}_{i - \frac{1}{r}, j - \frac{1}{r}}, & \frac{i}{r} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \frac{j}{r} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (3-3)$$

3.3 空间一致性约束的设计

与光谱一致性约束类似，为了确保全色锐化得到的高分辨率多光谱图像在空间结构上与真实图像一致，同样也需要利用高分辨率全色图像的空间信息，构建空间一致性约束。基于现有数据集，本文对高分辨率多光谱图像与经直方图匹配处理后的高分辨率全色图像进行了分析。具体而言，在通道维度上对图像进行框架小波变换后，本文统计了它们的像素值分布及其差值的分布情况，结果如图 3-2 所示。

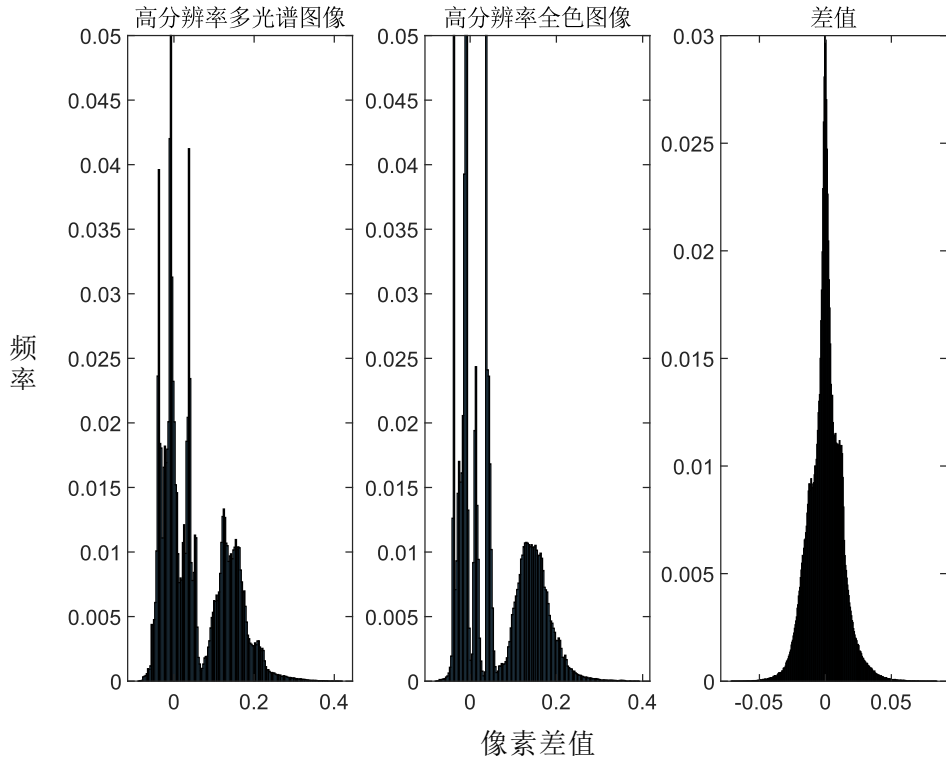


图 3-2 框架小波变换后高分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像像素及差值直方图

根据上述结果，在经过框架小波变换后，高分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像的像素值的分布具有较强的相似性，且二者差值集中在 0 的附近，具有较强的稀疏性。因此，本研究基于框架小波域上的一致性，使用 1 范数来构造空间一致性项，如公式 3-4 所示。

$$E_2 = \|WL(U - \mathcal{P}_{his})\|_1, \quad (3-4)$$

式中 W ——框架小波变换矩阵；

L ——展开算子，将 $m \times n \times p$ 的张量展开成 $p \times mn$ 的矩阵；

\mathcal{P}_{his} ——在通道维度上复制后，与低分辨率多光谱图像各通道分别进行直方图匹配后的高分辨率全色图像。

3.4 梯度低秩先验的设计

由于遥感图像的全色锐化是一个病态的问题，需要加入合适的先验项对解

空间加以约束。文章[30]中介绍了一种梯度低秩先验项，下面将介绍其构造原理。



图 3-3 高分辨率多光谱遥感图像各通道切片

如图 3-3 所示，遥感图像各个通道表示同一场景在不同波段的光谱强度，它们具有较强的相似性。因此将遥感图像张量中各通道的图片展开成向量，所得到的展开矩阵通常都具有低秩的特性。基于上述低秩的特性可以进一步探索。由于矩阵是低秩的，将其沿着通道方向做任何线性变换不会改变矩阵的秩，因此对其沿着通道方向差分，得到的矩阵也是低秩的。该低秩特性可用核范数进行约束。综上，构造出梯度低秩先验项如下：

$$E_3 = \|L\nabla_z \mathcal{U}\|_*, \quad (3-5)$$

式中 ∇_z ——通道方向的差分算子。

3.5 变分优化框架建模

结合 3.2-3.4 中的光谱一致性约束、空间一致性约束和梯度低秩先验，可建模完整的变分优化框架如下所示：

$$\mathcal{U} = \underset{\mathcal{U}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathcal{M}_{sk} \odot (\mathcal{U} * \mathcal{S} - \mathcal{M}_{pad})\|_F^2 + \alpha \|WL(\mathcal{U} - \mathcal{P}_{his})\|_1 + \beta \|L\nabla_z \mathcal{U}\|_* \quad (3-6)$$

式中 \mathcal{U} ——待求解的高分辨率多光谱图像；

α ——空间一致性约束权重；

β ——光谱一致性约束权重。

利用合适的算法求解上述最优化问题，即可得到以低分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像为输入，合成高分辨率多光谱图像的全色锐化算法。

3.6 本章小结

本章首先基于高分辨率多光谱图像和低分辨率多光谱图像之间的关系，利用高斯模糊算子和 0-1 掩码张量设计了光谱一致性项。然后，本章利用高分辨率多光谱图像和直方图匹配后的高分辨率全色图像在框架小波域的一致性，使用 1 范数设计了空间一致性项。本章还利用高分辨率多光谱图像在通道维度上的展开矩阵的低秩特性，利用核范数设计了梯度低秩先验项。最后，结合上述各项，本章给出了最优化目标函数形式的遥感图像全色锐化模型。

第 4 章 基于交替方向乘子法的模型求解

4.1 引言

在第 3 章中, 本文提出了最优化目标函数形式的遥感图像全色锐化模型。如公式 3-6 所示。本章将采用交替方向乘子法, 推导出该模型的完整迭代求解算法, 从而为后续计算机仿真实验奠定算法基础。

4.2 交替方向乘子法的迭代求解步骤

4.2.1 增广拉格朗日函数的构建

为了解除待优化变量之间的耦合性, 通过引入辅助变量 $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}, \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}, G = WL(\mathcal{U}_1 - \mathcal{P}_{his}), B = L\nabla_z \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_{sm} = \mathcal{U} * \mathcal{S} - \mathcal{M}_{pad}$, 公式 3-6 可改写为如下形式:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathcal{U}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathcal{M}_{sk} \odot \mathcal{U}_{sm}\|_F^2 + \alpha \|G\|_1 + \beta \|B\|_*, \\ & s.t. \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}, \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}, G = WL(\mathcal{U}_1 - \mathcal{P}_{his}), B = L\nabla_z \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_{sm} = \mathcal{U} * \mathcal{S} - \mathcal{M}_{pad}. \end{aligned} \quad (4-1)$$

基于公式 4-1 中的目标函数和等式约束, 可构造增广拉格朗日函数如下:

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, G, B, \mathcal{U}_{sm}, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5) \\ &= \frac{1}{2} \|\mathcal{M}_{sk} \odot \mathcal{U}_{sm}\|_F^2 + \alpha \|G\|_1 + \beta \|B\|_* + \frac{\gamma_1}{2} \|\mathcal{U}_1 - \mathcal{U} + \Lambda_1\|_F^2 \\ &+ \frac{\gamma_2}{2} \|\mathcal{U}_2 - \mathcal{U} + \Lambda_2\|_F^2 + \frac{\gamma_3}{2} \|G - WL(\mathcal{U}_1 - \mathcal{P}_{his}) + \Lambda_3\|_F^2 \\ &+ \frac{\gamma_4}{2} \|B - L\nabla_z \mathcal{U}_2 + \Lambda_4\|_F^2 + \frac{\gamma_5}{2} \|\mathcal{U}_{sm} - \mathcal{U} * \mathcal{S} + \mathcal{M}_{pad} + \Lambda_5\|_F^2. \end{aligned} \quad (4-2)$$

下面将交替对各个变量进行更新, 通过不断迭代, 使目标函数收敛到最优解。

4.2.2 中间变量 \mathcal{U}_1 的更新

根据公式 4-2, \mathcal{U}_1 的更新等价于求解下面的最优化问题:

$$\underset{\mathcal{U}_1}{\operatorname{argmin}} \frac{\gamma_1}{2} \|\mathcal{U}_1 - \mathcal{U} + \Lambda_1\|_F^2 + \frac{\gamma_3}{2} \|G - WL(\mathcal{U}_1 - \mathcal{P}_{his}) + \Lambda_3\|_F^2. \quad (4-3)$$

由于张量展开的操作并不会影响其 F 范数的值, 将上式第一项中各个张量

用展开算子 L 展开成矩阵，上述问题可改写如下：

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{U}_1} \frac{\gamma_1}{2} \|L\mathcal{U}_1 - L\mathcal{U} + L\Lambda_1\|_F^2 + \frac{\gamma_3}{2} \|G - WL(\mathcal{U}_1 - \mathcal{P}_{his}) + \Lambda_3\|_F^2. \quad (4-4)$$

将上式对 $L\mathcal{U}_1$ 求梯度并令梯度为 0，利用框架小波变换矩阵的正交性，即 $W^T W = I$ ，可得 $L\mathcal{U}_1$ 的更新步骤如下：

$$L\mathcal{U}_1^{(k+1)} = \frac{\gamma_1(L\mathcal{U}^{(k)} - L\Lambda_1^{(k)}) + \gamma_3 W^T(G^{(k)} + WL\mathcal{P}_{his}^{(k)} + \Lambda_3^{(k)})}{\gamma_1 + \gamma_3}. \quad (4-5)$$

利用

$$\mathcal{U}_1^{(k+1)} = L^{-1}L\mathcal{U}_1^{(k+1)}, \quad (4-6)$$

即可得到 \mathcal{U}_1 的更新步骤。

4.2.3 中间变量 \mathcal{U}_2 的更新

根据公式 4-2， \mathcal{U}_2 的更新等价于求解下面的最优化问题：

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{U}_2} \frac{\gamma_2}{2} \|\mathcal{U}_2 - \mathcal{U} + \Lambda_2\|_F^2 + \frac{\gamma_4}{2} \|B - L\nabla_z \mathcal{U}_2 + \Lambda_4\|_F^2. \quad (4-7)$$

通过引入如下所示的梯度差分矩阵 A ，

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4-8)$$

公式 4-7 可改写成如下形式：

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{U}_2} \frac{\gamma_2}{2} \|L\mathcal{U}_2 - L\mathcal{U} + L\Lambda_2\|_F^2 + \frac{\gamma_4}{2} \|B - AL\mathcal{U}_2 + \Lambda_4\|_F^2. \quad (4-9)$$

与 4.2.2 的解法类似，可得 \mathcal{U}_2 的更新步骤如下：

$$L\mathcal{U}_2^{(k+1)} = (\gamma_2 I + \gamma_4 A^T A)^{-1} \left(\gamma_2 (L\mathcal{U}^{(k)} - L\Lambda_2^{(k)}) + \gamma_4 A^T (B^{(k)} + \Lambda_4^{(k)}) \right), \quad (4-10)$$

$$\mathbf{u}_2^{(k+1)} = L^{-1}L\mathbf{u}_2^{(k+1)}. \quad (4-11)$$

4.2.4 中间变量 G 的更新

根据公式 4-2, G 的更新等价于求解下面的最优化问题:

$$\operatorname{argmin}_G \alpha \|G\|_1 + \frac{\gamma_3}{2} \|G - WL(\mathbf{u}_1 - \mathcal{P}_{his}) + \Lambda_3\|_F^2. \quad (4-12)$$

对于这一类同时具有 F 范数和 1 范数的最优化问题, 其可使用软阈值算子 $\Psi^{[31]}$ 得到显式解。因此可得 G 的更新步骤如下:

$$G^{(k+1)} = \Psi_{\frac{\alpha}{\gamma_3}} \left(WL(\mathbf{u}_1^{(k+1)} - \mathcal{P}_{his}) - \Lambda_3^{(k)} \right). \quad (4-13)$$

4.2.5 中间变量 B 的更新

根据公式 4-2, B 的更新等价于求解下面的最优化问题:

$$\operatorname{argmin}_B \beta \|B\|_* + \frac{\gamma_4}{2} \|B - L\nabla_z \mathbf{u}_2 + \Lambda_4\|_F^2. \quad (4-14)$$

这一类同时具有 F 范数和核范数的最优化问题可使用奇异值收缩算法^[32]求解。通过引入奇异值收缩算法, 可得 B 的更新步骤如下:

$$B^{(k+1)} = QD_{\frac{\beta}{\gamma_4}}(\Sigma)V^T, \quad (4-15)$$

其中, $Q\Sigma V^T$ 是 $L\nabla_z \mathbf{u}_2^{(k+1)} - \Lambda_4^{(k)}$ 奇异值分解的结果, $D_{\frac{\beta}{\gamma_4}}(\Sigma) = \operatorname{diag} \left\{ \max \left(\sigma_t - \frac{\beta}{\gamma_4}, 0 \right) \right\}_{b \times b}$, $\{\sigma_t\}_{t=1}^b$ 是 $L\nabla_z \mathbf{u}_2^{(k+1)} - \Lambda_4^{(k)}$ 的奇异值。

4.2.6 中间变量 \mathbf{u}_{sm} 的更新

根据公式 4-2, \mathbf{u}_{sm} 的更新等价于求解下面的最优化问题:

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{u}_{sm}} \frac{1}{2} \|\mathcal{M}_{sk} \odot \mathbf{u}_{sm}\|_F^2 + \frac{\gamma_5}{2} \|\mathbf{u}_{sm} - \mathbf{u} * \mathcal{S} + \mathcal{M}_{pad} + \Lambda_5\|_F^2. \quad (4-16)$$

将上式左右两边对 \mathbf{u}_{sm} 求梯度并令梯度为 0, 可得 \mathbf{u}_{sm} 的更新步骤如下:

$$\mathcal{U}_{sm}^{(k+1)} = \gamma_5 (\mathcal{U}^{(k)} * \mathcal{S} - \mathcal{M}_{pad} - \Lambda_5^{(k)}) ./ [\mathcal{M}_{sk} \odot \mathcal{M}_{sk} + \gamma_5]. \quad (4-17)$$

4.2.7 高分辨率多光谱图像 \mathcal{U} 的迭代

根据公式 4-2, \mathcal{U} 的更新等价于求解下面的最优化问题:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\mathcal{U}} & \frac{\gamma_1}{2} \|\mathcal{U}_1 - \mathcal{U} + \Lambda_1\|_F^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|\mathcal{U}_2 - \mathcal{U} + \Lambda_2\|_F^2 \\ & + \frac{\gamma_5}{2} \|\mathcal{U}_{sm} - \mathcal{U} * \mathcal{S} + \mathcal{M}_{pad} + \Lambda_5\|_F^2. \end{aligned} \quad (4-18)$$

由于傅里叶变换是正交变换, 其不会改变变换前后的矩阵 F 范数的值。对上式中所有张量各通道分别做傅里叶变换, 上述最优化问题可改写如下:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\mathcal{U}} & \frac{\gamma_1}{2} \|\mathcal{F}(\mathcal{U}_1) - \mathcal{F}(\mathcal{U}) + \mathcal{F}(\Lambda_1)\|_F^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|\mathcal{F}(\mathcal{U}_2) - \mathcal{F}(\mathcal{U}) + \mathcal{F}(\Lambda_2)\|_F^2 \\ & + \frac{\gamma_5}{2} \|\mathcal{F}(\mathcal{U}_{sm}) - \mathcal{F}(\mathcal{U}) \odot \mathcal{F}(\mathcal{S}) + \mathcal{F}(\mathcal{M}_{pad}) + \mathcal{F}(\Lambda_5)\|_F^2. \end{aligned} \quad (4-19)$$

将上式对 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ 求梯度并令梯度为 0, 可得 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ 的更新形式如下:

$$\Sigma_1 = \mathcal{F}(\mathcal{S})^\dagger \odot \mathcal{F}(\mathcal{S}) + \gamma_1 + \gamma_2, \quad (4-20)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = \mathcal{F}(\mathcal{S})^\dagger \odot & \left(\mathcal{F}(\mathcal{M}_{pad}) + \mathcal{F}(\mathcal{U}_{sm}^{(k+1)}) + \mathcal{F}(\Lambda_5^{(k)}) \right) \\ & + \gamma_1 \left(\mathcal{F}(\mathcal{U}_1^{(k+1)}) + \mathcal{F}(\Lambda_1^{(k)}) \right) + \gamma_2 \left(\mathcal{F}(\mathcal{U}_2^{(k+1)}) + \mathcal{F}(\Lambda_2^{(k)}) \right), \end{aligned} \quad (4-21)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{U})^{(k+1)} = \Sigma_2 ./ \Sigma_1. \quad (4-22)$$

利用

$$\mathcal{U}^{(k+1)} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(\mathcal{U})^{(k+1)}, \quad (4-23)$$

即可得到 \mathcal{U} 的更新步骤。

4.2.8 增广拉格朗日乘子 Λ 的更新

根据交替方向乘子法的原理, 增广拉格朗日乘子 Λ_i 的更新步骤如下:

$$\begin{cases} \Lambda_1^{(k+1)} = \Lambda_1^{(k)} + \mathcal{U}_1^{(k+1)} - \mathcal{U}^{(k+1)} \\ \Lambda_2^{(k+1)} = \Lambda_2^{(k)} + \mathcal{U}_2^{(k+1)} - \mathcal{U}^{(k+1)} \\ \Lambda_3^{(k+1)} = \Lambda_3^{(k)} + G^{(k+1)} - WL(\mathcal{U}_1^{(k+1)} - \mathcal{P}_{his}) \\ \Lambda_4^{(k+1)} = \Lambda_4^{(k)} + B^{(k+1)} - L\nabla_z \mathcal{U}_2^{(k+1)} \\ \Lambda_5^{(k+1)} = \Lambda_5^{(k)} + \mathcal{U}_{sm}^{(k+1)} - \mathcal{U}^{(k+1)} * \mathcal{S} + \mathcal{M}_{pad} \end{cases} \quad (4-24)$$

4.2.9 算法流程总结

根据 4.2.1-4.2.8 中的迭代步骤, 本文整理了完整的算法流程, 如表 4-1 所示。

表 4-1 完整算法流程

算法: 基于 framelet 变换和梯度低秩的全色锐化算法

输入: 插值后的低分辨率多光谱图像 \mathcal{M}_{pad} , 直方图匹配后的高分辨率全色图像 \mathcal{P}_{his}

输出: 高分辨率多光谱图像 $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(k)}$

初始化: $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \mathcal{S}, \mathcal{M}_{sk}, Iter = 200, k = 0, \epsilon = 2 \times 10^{-5}, \mathcal{U}_{sm}^{(0)}, \mathcal{U}_1^{(0)},$

$\mathcal{U}_2^{(0)}, \mathcal{U}^{(0)}, G^{(0)}, B^{(0)}, \Lambda_1^{(0)} = 0, \Lambda_2^{(0)} = 0, \Lambda_3^{(0)} = 0, \Lambda_4^{(0)} = 0, \Lambda_5^{(0)} = 0$

for $k \leftarrow 0$ **to** $Iter - 1$ **do**

 利用公式 4-5、4-6 更新 $\mathcal{U}_1^{(k+1)}$;

 利用公式 4-10、4-11 更新 $\mathcal{U}_2^{(k+1)}$;

 利用公式 4-13 更新 $G^{(k+1)}$;

 利用公式 4-15 更新 $B^{(k+1)}$;

 利用公式 4-17 更新 $\mathcal{U}_{sm}^{(k+1)}$;

 利用公式 4-20 至 4-23 更新 $\mathcal{U}^{(k+1)}$;

 利用公式 4-24 更新 $\Lambda_i^{(k+1)}$;

end if $\frac{\|\mathcal{U}^{(k+1)} - \mathcal{U}^{(k)}\|_F}{\|\mathcal{U}^{(k)}\|_F} < \epsilon$

end

4.3 本章小结

本章利用交替方向乘子法，推导出了第 3 章提出的全色锐化算法的迭代求解算法。给定插值后的低分辨率多光谱图像和直方图匹配后的高分辨率全色图像后，通过依次迭代 u_1 、 u_2 、 G 、 B 、 u_{sm} 、 u 和 Λ_i 直到最优化目标收敛或达到最大迭代次数，即可得到重建的高分辨率多光谱图像。本章还给出了完整算法流程的伪代码，使算法更加清晰易懂。

第 5 章 实验结果与分析

5.1 引言

在第 4 章中，本文对提出的全色锐化最优化目标函数使用增广拉格朗日函数法进行求解，并给出了完整的算法流程。本章将基于这一算法，使用真实数据集，在计算机上进行遥感图像全色锐化的实验，分析该模型的效果，并验证建模的合理性。

5.2 实验设置

本研究所选取的实验数据集为高分二号遥感图像数据集 (Gaofen-2) 和世界视野三号遥感图像数据集 (World View-3, WV3)，其中每个数据集包括 20 组图片，每组图片包含一张低分辨率多光谱图像、一张高分辨率全色图像和一张高分辨多光谱图像。在上述两个数据集中，高分辨率图像尺寸均为 256×256 ，低分辨率图像尺寸均为 64×64 。上述数据集的通道维度存在差异。在高分二号遥感图像数据集中，多光谱图像的通道维度为 4；在世界视野三号遥感图像数据集中，多光谱图像的通道维度为 8。

本研究所采用的对比方法包括 EXP (直接插值法)、PRACS^[8]、BDSD-PC^[33]、AWLP^[10]、MF-HG^[34]、GLP-FS^[35]、C-GLP-R^[36]、CDIF^[37]和 NC-FSRM^[38]。对比内容包括了数值结果与可视化效果的综合比较，具体细节已在第 1.4.3 节中作了详细阐述，此处不再赘述。为表述简洁，本文所提出的方法在下文中简称为 **FT-GLP** (Pansharpening Algorithm with Framelet Transform and Gradient Low-rank Prior)。

根据公式 4-2，本研究的模型需要设置的超参数包括 α 、 β 、 γ_1 、 γ_2 、 γ_3 、 γ_4 和 γ_5 七个参数。在测试高分二号遥感图像数据集时，上述超参数的设定分别为 $\alpha = 3.5 \times 10^3$ 、 $\beta = 6.7 \times 10^1$ 、 $\gamma_1 = 6.7 \times 10^{-7}$ 、 $\gamma_2 = 2.3 \times 10^{-7}$ 、 $\gamma_3 = 7.1 \times 10^{-6}$ 、 $\gamma_4 = 7.9 \times 10^{-3}$ 和 $\gamma_5 = 2.8 \times 10^{-4}$ ；而在测试世界视野三号遥感图像数据集时，上述超参数的设定分别为 $\alpha = 6.4 \times 10^1$ 、 $\beta = 1.1 \times 10^{-2}$ 、 $\gamma_1 = 2.6 \times 10^{-7}$ 、 $\gamma_2 =$

2.0×10^{-10} 、 $\gamma_3 = 5.5 \times 10^{-3}$ 、 $\gamma_4 = 2.8 \times 10^{-3}$ 和 $\gamma_5 = 7.7 \times 10^{-5}$ 。

在实验设备上，实验所使用的计算机 CPU 型号为英特尔第十一代酷睿 i7-1165G7，内存大小为 16GB。

5.3 与其他方法的性能对比

5.3.1 数值指标结果分析

基于 5.2 所述的实验设置，本研究在高分二号遥感图像数据集和世界视野三号遥感图像数据集上的数值指标结果分别汇总于表 5-1 与表 5-2 中。其中，**粗体**数值表示所有方法中表现最优的结果，下划线数值表示次优结果，*斜体*数值表示第三优结果。

表 5-1 高分二号遥感图像数据集的数值指标结果

方法	PSNR	SSIM	SAM	SCC	ERGAS	Q4
EXP	38.02	0.9177	1.817	0.9282	1.256	0.8118
PRACS	41.3	0.9605	1.688	0.9652	1.624	0.9023
BDSD-PC	41.05	0.9574	1.696	0.9655	1.673	0.9011
AWLP	40.56	0.9455	1.933	0.9610	1.648	0.8814
MF-HG	40.57	0.9554	1.646	0.9645	1.701	0.8919
GLP-FS	41.42	0.9558	1.655	0.9661	1.597	0.8969
C-GLP-R	41.34	0.9652	1.559	0.9668	1.543	0.9212
CDIF	43.35	0.9722	1.276	0.9784	<u>1.263</u>	0.9425
NC-FSRM	<u>43.20</u>	<u>0.9692</u>	<u>1.369</u>	<u>0.9759</u>	1.297	<u>0.9337</u>
FT-GLP	<i>41.88</i>	<i>0.9671</i>	<i>1.468</i>	<i>0.9749</i>	1.393	<i>0.9236</i>

根据表 5-1 中的结果，FT-GLP 在高分二号遥感图像数据集上的各项数值指标结果均优于绝大部分传统方法，但在整体性能上仍显著劣于 CDIF 和 NC-FSRM 两种方法。与 CDIF 和 NC-FSRM 方法相比，特别是在反映图像均方误差

的指标 PSNR 上，FT-GLP 具有 1.4dB 以上的差距。根据表 5-2 中的结果，FT-GLP 在世界视野三号遥感图像数据集上的各项数值指标结果与最好的传统方法差距更小，其中 PSNR 指标与最优方法 CDIF 差距仅有 0.56dB。上述结果说明 FT-GLP 方法在遥感图像全色锐化任务上具有较好的整体性能，尤其在在不同数据集上表现出较强的适应性。

表 5-2 世界视野三号遥感图像数据集的数值指标结果

方法	PSNR	SSIM	SAM	SCC	ERGAS	Q4
EXP	29.05	0.7173	5.721	0.8469	7.059	0.6251
PRACS	31.93	0.8582	5.507	0.9197	5.186	0.7799
BDS-PC	<u>32.93</u>	<u>0.8902</u>	5.380	<u>0.9354</u>	4.633	<u>0.8228</u>
AWLP	32.67	0.8919	<u>5.162</u>	0.9351	<u>4.589</u>	0.8217
MF-HG	32.30	0.8802	5.198	0.9300	4.794	0.8152
GLP-FS	<u>32.93</u>	0.8846	5.246	<u>0.9356</u>	4.642	0.8200
C-GLP-R	31.90	0.8647	5.207	0.9236	5.015	0.7972
CDIF	33.13	<u>0.8907</u>	4.865	0.9387	4.477	<u>0.8253</u>
NC-FSRM	32.78	0.8819	<u>5.008</u>	0.9338	4.680	0.8275
FT-GLP	32.57	0.8834	5.217	0.9339	<u>4.617</u>	0.8055

5.3.2 可视化结果分析

本文绘制出了高分二号遥感图像数据集和世界视野三号遥感图像数据集上各个方法重建的高分辨率多光谱图像，以及重建图像与真实图像的残差热力图，如图 5-1 至 5-4 所示。在残差热力图中，某个像素颜色越蓝，该处重建图像的像素值与真实图像像素值越接近；颜色越红，该处重建图像的像素值与真实图像像素值差异越大。

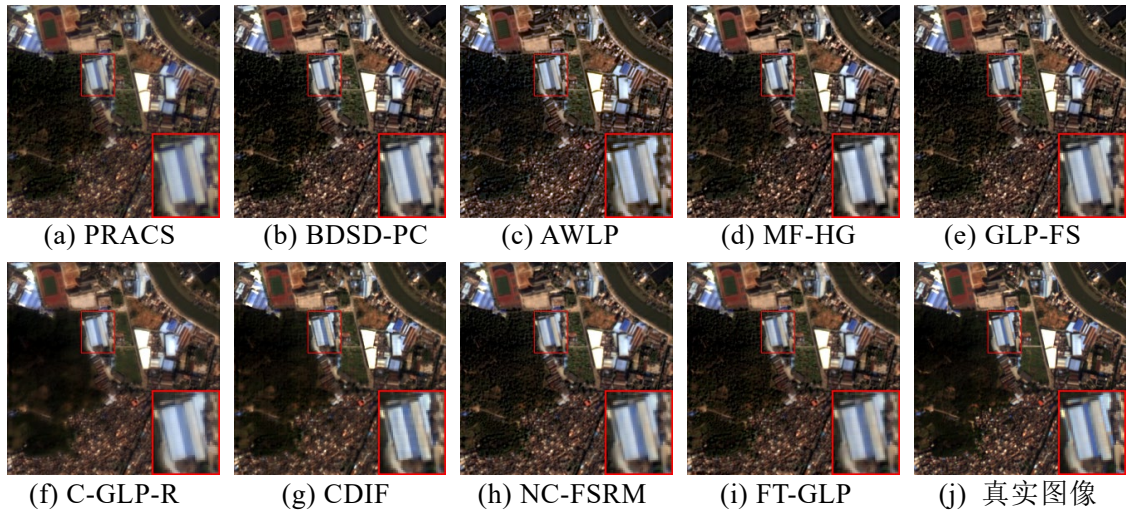


图 5-1 高分二号遥感图像数据集上各方法的重建图像

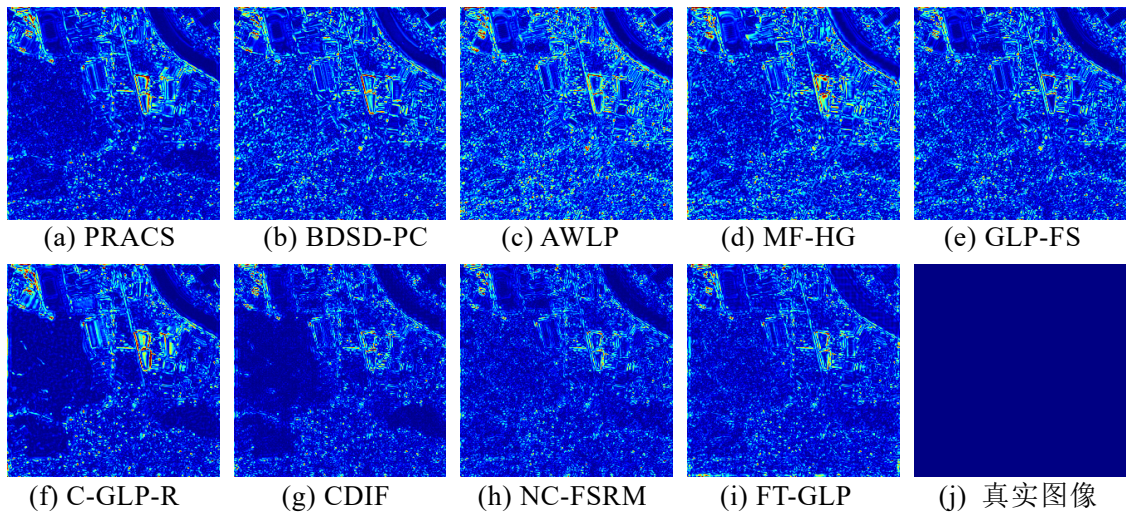


图 5-2 高分二号遥感图像数据集各方法重建图像与真实图像的残差热力图

根据图 5-1 和图 5-2,在高分二号遥感图像数据集上,相比于 PRACS、BDSD-PC、AWLP、MF-HG、GLP-PS 和 NC-FSRM 这些方法,FT-GLP 在重建图像的颜色上更接近于真实图像;相比于 C-GLP-R,FT-GLP 拥有更高的图像清晰度。而根据图 5-1,相比于具有阶梯伪影的 CDIF,FT-GLP 并未出现此类伪影,这使得该方法在实际应用上具有更强的鲁棒性和可信度。根据图 5-3 和图 5-4,在世界视野三号遥感图像数据集上,FT-GLP 与其它方法的重建结果表现较为接近。综上所述,FT-GLP 在多个方面相较于各类现有方法均展现出不同程度的优势,

表明其在遥感图像全色锐化任务中具有良好的应用潜力。

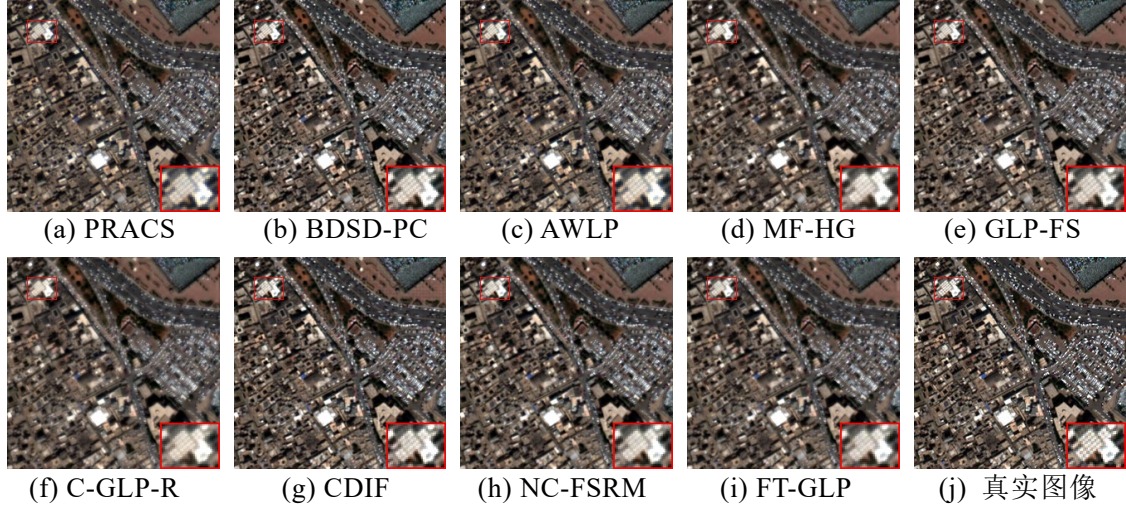


图 5-3 世界视野三号遥感图像数据集上各方法的重建图像

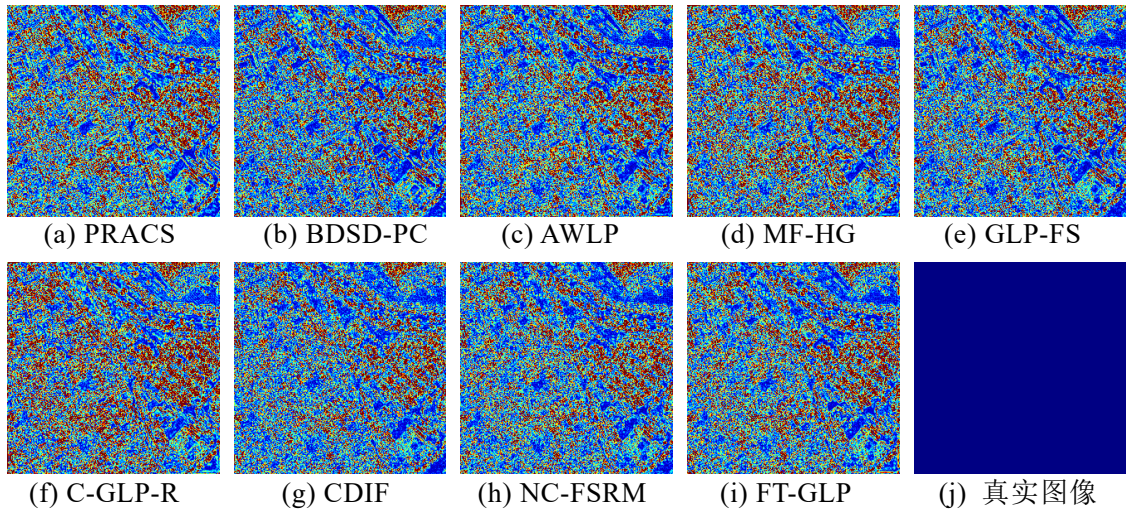


图 5-4 世界视野三号遥感图像数据集各方法重建图像与真实图像的残差热力图

5.4 消融实验

为进一步探究 FT-GLP 方法中各组成部分的作用及其重要性，本文在高分二号遥感图像数据集上设计并开展了消融实验。通过逐步移除模型中的各个关键模块，分析其对重建结果的具体影响，从而评估各组件在整体性能中的贡献。

消融实验的结果如表 5-3 和图 5-5、5-6 所示。其中，表 5-3 中以**粗体**标出的数值表示在各组实验中的最优结果。

表 5-3 消融实验的数值指标结果

消去项	PSNR	SSIM	SAM	SCC	ERGAS	Q4
光谱一致性项	26.92	0.8901	4.395	0.8225	7.803	0.6412
空间一致性项	31.02	0.6682	7.703	0.7339	5.174	0.4861
梯度先验项	41.16	0.9570	1.760	0.9691	1.517	0.8966
FT-GLP	41.88	0.9671	1.468	0.9749	1.393	0.9236

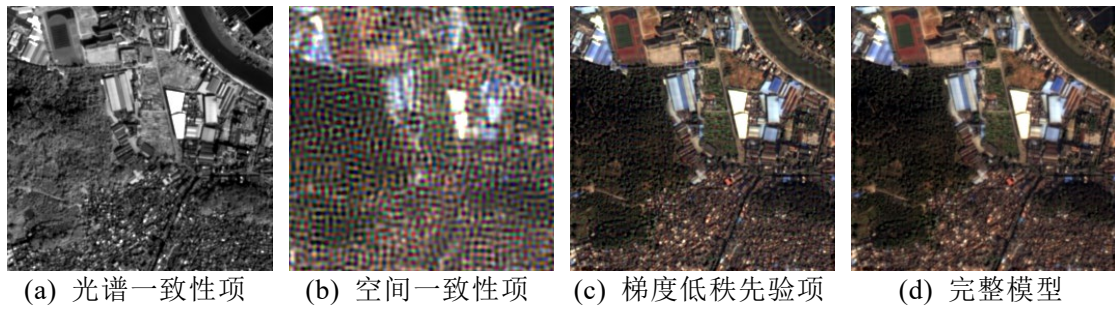


图 5-5 消融实验中消去各项之后的重建图像

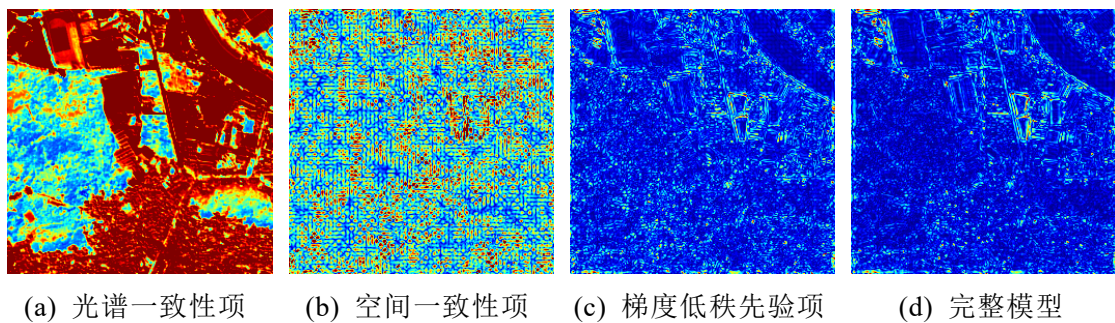


图 5-6 消融实验中消去各项之后的重建图像与真实图像的残差热力图

首先根据图 5-5 和 5-6 分析每一项的作用。根据图 5-5(a)，消去光谱一致性项的模型重建结果为全色图像，说明光谱一致性项为遥感图像重建提供了光谱信息。根据图 5-5(b)，消去空间一致性项的模型重建图像清晰度较低，且具有较

强的噪声，说明空间一致性项为重建提供了空间信息。根据 5-5(c)，消去梯度低秩先验项的模型重建图像含有大量网格状伪影，该图像并不具有低秩的特性。这说明梯度低秩先验项有效限制了模型的解空间，抑制了伪影现象，使模型能够得到更接近于真实图像的重建图像。根据上述分析，模型各项的实际效果与理论建模时的分析保持高度一致，这验证了 FT-GLP 模型设计的合理性。

此外，表 5-3 中的数值结果进一步支持这一结论。完整模型在各项评价指标上均显著优于去除任一模块后的简化模型，说明 FT-GLP 模型中的每一部分都发挥了不可替代的作用。这进一步验证了该建模过程的合理性。

5.5 本章小结

本章首先详细说明了实验的具体设置，并对多个数据集上多个对比方法的实验结果进行了分析。实验表明，本文提出的 FT-GLP 方法相对于各类现有方法均具有自身的优势，因此具有较好的应用前景。随后，本文还利用高分二号遥感图像数据集进行了消融实验。消融实验的结果表明，本文所提出模型的每一项的实际作用都符合预期，且对模型效果均具有显著贡献。该模型的设计具有较强的合理性。

结 论

本文围绕遥感图像的全色锐化问题开展了系统的理论研究，基于变分优化框架，融合框架小波变换与梯度低秩先验，提出了一种新颖的全色锐化模型。随后，本文采用增广拉格朗日函数法对所构建模型进行求解，设计了完整的全色锐化算法流程。最后，通过在多个遥感图像数据集上进行实验，本文将所提方法与多种已有算法进行了定量与定性对比，并通过消融实验验证了模型各组成部分的重要性。

本文的主要创造性工作归纳如下：

1. 利用高分辨率多光谱图像和低分辨率多光谱图像的性质，通过引入掩码张量和模糊算子，建立了二者之间的数学关系模型。在此基础上，本文构造了光谱一致性项，有效地提取了低分辨率多光谱图像的光谱信息。
2. 利用高分辨率多光谱图像和高分辨率全色图像在框架小波域上像素分布的相似性，通过引入框架小波变换，提出了空间一致性项，较好地保证了重建的高分辨率多光谱图像在空间结构上的完整性。
3. 利用高分辨率多光谱图像各通道的相似性，引入了梯度低秩先验项，有效缓解了重建图像的伪影现象，提高了重建图像的真实性。
4. 利用增广拉格朗日函数法，针对所构建的变分模型进行了高效求解，提出了完整的遥感图像全色锐化算法，并在多个数据集上验证了其有效性。

今后还应该在以下方面进行深入研究：

1. 通过消融实验可以发现，在高分二号遥感图像数据集上，引入梯度低秩先验项对模型数值结果的提升效果相对有限，这表明该先验仍有优化空间。当前设计的梯度低秩先验主要利用了通道维度上图像切片间的线性相关性，尚未充分挖掘各切片内部的低秩结构。未来研究可进一步探索各切片内部的低秩建模方式，以提升模型表现。
2. 随着深度学习技术的发展，其与传统优化方法的融合日益紧密。未来可

考虑将变分优化方法的可解释性、良好的泛化性与深度学习的强大拟合能力相结合，例如使用深度神经网络替代手工设计的先验项，以更准确地建模高分辨率多光谱图像的结构特征；或借助变分优化的迭代过程，设计可训练的端到端深度神经网络架构，实现高效且精确的遥感图像全色锐化。

参考文献

- [1] ZANETTI M, BOVOLO F, BRUZZONE L. Rayleigh-Rice Mixture Parameter Estimation via EM Algorithm for Change Detection in Multispectral Images [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(12): 5004 – 5016.
- [2] YU X, HOFF L E, REED I S, et al. Automatic Target Detection and Recognition in Multiband Imagery: A Unified ML Detection and Estimation Approach[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(1): 143 – 156.
- [3] ZHONG P, WANG R. Learning Conditional Random Fields for Classification of Hyperspectral Images [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(7): 1890 – 1907.
- [4] KWARTENG P, CHAVEZ A. Extracting Spectral Contrast in Landsat Thematic Mapper Image Data Using Selective Principal Component Analysis [J] . Photogramm. Eng. Remote Sens, 1989, 55(1): 339 – 348.
- [5] CARPER W, LILLESAND T, KIEFER R. The Use of Intensity-Hue-Saturation Transformations for Merging SPOT Panchromatic and Multispectral Image Data [J] . Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1990, 56(4): 459 – 467.
- [6] AIAZZI B, BARONTI S, SELVA M. Improving Component Substitution Pansharpening Through Multivariate Regression of MS+Pan Data [J] . IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2007, 45(10): 3230 – 3239.
- [7] GARZELLI A, NENCINI F, CAPOBIANCO L. Optimal MMSE Pan Sharpening of Very High Resolution Multispectral Images [J] . IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2007, 46(1): 228 – 236.
- [8] CHOI J, YU K, KIM Y. A New Adaptive Component-Substitution-Based Satellite Image Fusion by Using Partial Replacement [J] . IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2010, 49(1): 295 – 309.
- [9] SHENSA M J. The Discrete Wavelet Transform: Wedding the A Trous and Mallat Algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(10): 2464 – 2482.
- [10] OTAZU X, GONZÁLEZ-AUDÍCANA M, FORS O, et al. Introduction of Sensor Spectral Response into Image Fusion Methods. Application to

- Wavelet-Based Methods [J] . IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2005, 43(10): 2376 – 2385.
- [11] LIU J G. Smoothing Filter-Based Intensity Modulation: A Spectral Preserve Image Fusion Technique for Improving Spatial Details [J] . International Journal of Remote Sensing, 2000, 21(18): 3461 – 3472.
- [12] DENG L J, VIVONE G, JIN C, et al. Detail Injection-Based Deep Convolutional Neural Networks for Pansharpening [J] . IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2020, 59(8): 6995 – 7010.
- [13] ADDESSO P, VIVONE G, RESTAINO R, et al. A Data-Driven Model-Based Regression Applied to Panchromatic Sharpening [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 29: 7779 – 7794.
- [14] JIN Z R, DENG L J, ZHANG T J, et al. BAM: Bilateral Activation Mechanism for Image Fusion [C] //Proceedings of the 29th ACM International Conference on Multimedia. 2021: 4315 – 4323.
- [15] WANG Y, DENG L J, ZHANG T J, et al. SSconv: Explicit Spectral-to-Spatial Convolution for Pansharpening [C] //Proceedings of the 29th ACM International Conference on Multimedia. 2021: 4472 – 4480.
- [16] FU X, WANG W, HUANG Y, et al. Deep Multiscale Detail Networks for Multiband Spectral Image Sharpening [J] . IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 32(5): 2090 – 2104.
- [17] LU X, ZHANG J, YANG D, et al. Cascaded Convolutional Neural Network-Based Hyperspectral Image Resolution Enhancement via an Auxiliary Panchromatic Image [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2021, 30: 6815 – 6828.
- [18] FU X, LIN Z, HUANG Y, et al. A Variational Pan-Sharpening with Local Gradient Constraints [C] //Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2019: 10265 – 10274.
- [19] BALLESTER C, CASELLES V, IGUAL L, et al. A Variational Model for P+XS Image Fusion [J] . International Journal of Computer Vision, 2006, 69: 43 – 58.
- [20] JIANG Y, DING X, ZENG D, et al. Pan-Sharpening with a Hyper-Laplacian Penalty[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2015: 540 – 548.

-
- [21] WANG T, FANG F, LI F, et al. High-Quality Bayesian Pansharpening [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 28(1): 227 – 239.
 - [22] DENG L J, VIVONE G, GUO W, et al. A Variational Pansharpening Approach Based on Reproducible Kernel Hilbert Space and Heaviside Function [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 27(9): 4330 – 4344.
 - [23] TEODORO A M, BIOUCAS-DIAS J M, FIGUEIREDO M A T. A Convergent Image Fusion Algorithm Using Scene-Adapted Gaussian-Mixture-Based Denoising [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 28(1): 451 – 463.
 - [24] DENG L J, FENG M, TAI X C. The Fusion of Panchromatic and Multispectral Remote Sensing Images via Tensor-Based Sparse Modeling and Hyper-Laplacian Prior [J] . Information Fusion, 2019, 52: 76 – 89.
 - [25] WU Z C, HUANG T Z, DENG L J, et al. A New Variational Approach Based on Proximal Deep Injection and Gradient Intensity Similarity for Spatio-Spectral Image Fusion [J] . IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2020, 13: 6277–6290.
 - [26] RON A, SHEN Z. Affine Systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$: The Analysis of the Analysis Operator [J] . Journal of Functional Analysis, 1997, 148(2): 408 – 447.
 - [27] CAI J F, CHAN R H, SHEN Z. A Framelet-Based Image Inpainting Algorithm [J] . Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 24(2): 131 – 149.
 - [28] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers [J] . Foundations and Trends® in Machine Learning, 2011, 3(1): 1 – 122.
 - [29] 刘浩洋, 户将, 李勇锋, 文再文. 最优化: 建模、算法与理论 [M] . 北京: 高教出版社, 2020: 315 – 336.
 - [30] LIU P. Pansharpening with Spatial Hessian Non-Convex Sparse and Spectral Gradient Low Rank Priors [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2023, 32: 2120 – 2131.
 - [31] ZUO W, MENG D, ZHANG L, et al. A Generalized Iterated Shrinkage Algorithm for Non-Convex Sparse Coding [C] //Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2013: 217 – 224.
 - [32] CAI J F, CANDÈS E J, SHEN Z. A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion [J] . SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4):

1956 – 1982.

- [33] VIVONE G. Robust Band-Dependent Spatial-Detail Approaches for Panchromatic Sharpening[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2019, 57(9): 6421 – 6433.
- [34] RESTAINO R, VIVONE G, DALLA MURA M, et al. Fusion of Multispectral and Panchromatic Images Based on Morphological Operators [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(6): 2882 – 2895.
- [35] VIVONE G, RESTAINO R, CHANUSSOT J. Full Scale Regression-Based Injection Coefficients for Panchromatic Sharpening [J] . IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 27(7): 3418 – 3431.
- [36] VIVONE G, MARANO S, CHANUSSOT J. Pansharpening: Context-Based Generalized Laplacian Pyramids by Robust Regression [J] . IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2020, 58(9): 6152 – 6167.
- [37] XIAO J L, HUANG T Z, DENG L J, WU Z C, VIVONE G. A New Context-Aware Details Injection Fidelity with Adaptive Coefficients Estimation for Variational Pansharpening[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 1 – 15.
- [38] WU Z C, HUANG T Z, DENG L J, et al. A Framelet Sparse Reconstruction Method for Pansharpening with Guaranteed Convergence [J] . Inverse Problems and Imaging, 2023, 17(6): 1277 – 1300.