牛鹏军　210711　21374389

理论分析

3. 利用3次拉格朗日插值公式推导数值积分公式：$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{8}[f(a)+3f(c)+3f(d)+f(b)]$，其中 $c=\frac{2a+b}{3}$，$d=\frac{a+2b}{3}$ 是 $[a,\ b]$ 区间上的3等分点。

根据三次 Lagrange 插值定义.

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$$

$$\therefore\ I=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b l_k(x)\,dx\right) f(x_k)$$

$$\because\ l_k(x)=\prod_{j=0,\ j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$\therefore\ p_3(x)=\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}f(a)+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}f(b)$$
$$+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}f(c)+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}\cdot f(d)$$

$\because$ a到b均分. $c=\frac{2a+b}{3}$　$d=\frac{a+2b}{3}$

设 $\lambda_1=\int_a^b l_0(x)\,dx$　$\lambda_2=\int_a^b l_1(x)\,dx$　$\lambda_3=\int_a^b l_2(x)\,dx$　$\lambda_4=\int_a^b l_3(x)\,dx$

代入上式,得

$\lambda_1=\frac{1}{8}(b-a)$　$\lambda_2=\frac{1}{8}(b-a)$　$\lambda_3=\frac{1}{8}(3b-3a)$　$\lambda_4=\frac{1}{8}(3b-3a)$

以上是借助 matlab 略去高阶小量结果.

$$\therefore\ \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx=\frac{b-a}{8}\cdot[f(a)+f(b)+3f(c)+3f(d)]$$

利用 matlab 进行验证计算正确性：

```
syms a b x fa fb fc fd;

c=(2*a+b)/3;
d=(a+2*b)/3;

f1=(x-b)*(x-c)*(x-d)/((a-b)*(a-c)*(a-d));
lamda1= int(f1, x, a, b);
F_simplified1 = simplify(lamda1);

f2=(x-a)*(x-c)*(x-d)/((b-a)*(b-c)*(b-d));
lamda2= int(f2, x, a, b);
F_simplified2 = simplify(lamda2);

f3=(x-a)*(x-b)*(x-d)/((c-a)*(c-b)*(c-d));
lamda3= int(f3, x, a, b);
F_simplified3 = simplify(lamda3);

f4=(x-a)*(x-b)*(x-c)/((d-a)*(d-b)*(d-c));
lamda4= int(f4, x, a, b);
F_simplified4 = simplify(lamda4);

final= lamda1*fa+lamda2*fb+lamda3*fc+lamda4*fd;
final_simplified4 = simplify(final)
```

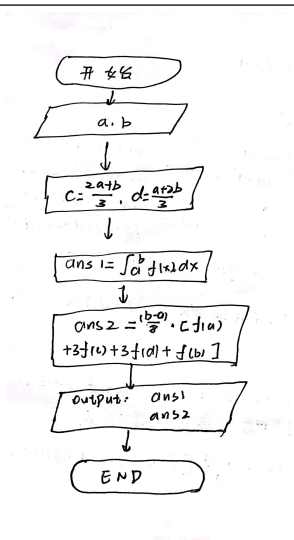
命令行窗口

```
>> charles

final_simplified4 =

-((a - b)*(fa + fb + 3*fc + 3*fd))/8
```

可见计算是正确的

算法设计

用 C 语言分别写内置函数的黎曼积分解与近似解，比较其差异。



编程实现

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>


double riemann_integral(double (*f)(double), double a, double b, int n) {
        double dx = (b - a) / n;    //  计算每个小矩形的宽度
        double sum = 0.0;
        double x;


        for (int i = 0; i < n; i++) {
                x = a + i * dx;    //  计算每个小矩形的左边界
                sum += f(x) * dx;    //  高度乘以宽度，累加到总和中
        }


        return sum;
}


double lagrange_integral(double (*f)(double),double a, double b){
      double c=(2*a+b)/3;
      double d=(a+2*b)/3;
      return (b-a)/8*(f(a)+3*f(c)+3*f(d)+f(b));
```

```
}


// 示例函数：f(x) = x^2
double example_function(double x) {
    return x * x;
}



int main() {
    double a = 0.0;    // 积分下限
    double b = 1.0;    // 积分上限
    int n = 100000;          // 小矩形的数量

    double result_riemann = riemann_integral(example_function, a, b, n);
    double result_lagrange = lagrange_integral(example_function, a, b);

    printf("riemann_result : %.4lf\n", result_riemann);
    printf("lagrange_result: %.4lf\n", result_lagrange);

    return 0;
}
```

测试分析

```
riemann_result : 0.3333
lagrange_result: 0.3333

--------------------------------
Process exited after 0.1269 seconds with return value 0
请按任意键继续. . .
```

用 $y = x^2$ 在 0 到 1 积分测试，精确值为 1/3，可见用三次拉格朗日插值的方法积分精确度尚可。

结论

3 次拉格朗日公式可推导出题目中的数值积分公式，用这种方法求近似解准确性还可以，比黎曼积分的求解步骤和时间显著缩短。