龙格库塔法是一种求解常微分方程的数值解法，微分方程可以是线性也可以是非线性的。

$$\dot{x} = f(x, u)$$

在控制系统中，x 指系统状态，u 指系统输入。

四阶龙格库塔法：

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \\
&K_1 = f(x_k, u_1) \\
&K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}K_1, u2) \\
&K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}K_2, u3) \\
&K_4 = f(x_k + h * K_3)
\end{aligned}
$$

u_1, u_2, u_3, u_4为对应时刻的系统输入，当考虑微分方程中存在输入信号u时，求解步长h不能取太大，否则误差将很大。

从微分方程的形式$\dot{x} = f(x, u)$可以看出，这是一个一阶微分方程，对于高阶微分方程如何求解？

一个 n 阶微分方程可以化为 n 个一阶微分方程，相当于一个 n 阶控制系统，通过选取 n 个状态向量，从而得到 n 个一阶微分方程。例如，

$$\ddot{z} + \dot{z} + z = u$$

取状态向量$x_1 = z, x_2 = \dot{z}$，得

$$
\begin{aligned}
&\dot{x_1} = \dot{z} = x_2 \\
&\dot{x_2} = \ddot{z} = -z - \dot{z} + u = -x_1 - x_2 + u
\end{aligned}
$$

代码示例：

以一个二阶非线性微分方程为例，化为 2 个一阶微分方程：

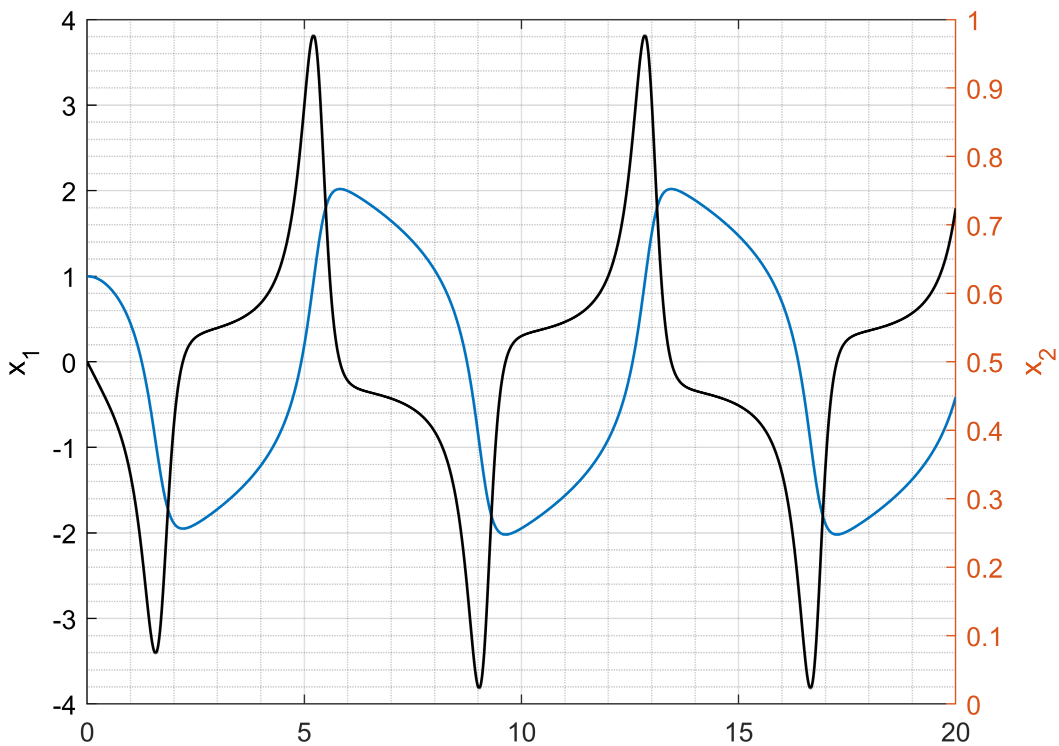
$$
\begin{aligned}
&\dot{x_1} = x_2 \\
&\dot{x_2} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1
\end{aligned}
$$

```
clc
clear all
close all
```

```
Tmax = 20;
h = 0.01;
T=[0:h:Tmax];    % 求解区间[0,Tmax] 步长 h
X0=[1;0];        % 微分方程初始条件

[T_labrk4,x_labrk4] = lab_ode_rk4(@non_linear_d_func,T,X0);


plot(T_labrk4,x_labrk4(1,:),'LineWidth',1);
yyaxis left
ylabel('x_1');
hold on
plot(T_labrk4,x_labrk4(2,:),'LineWidth',1);
yyaxis right
ylabel('x_2');
hold off
grid on
grid minor
```



代码示例：

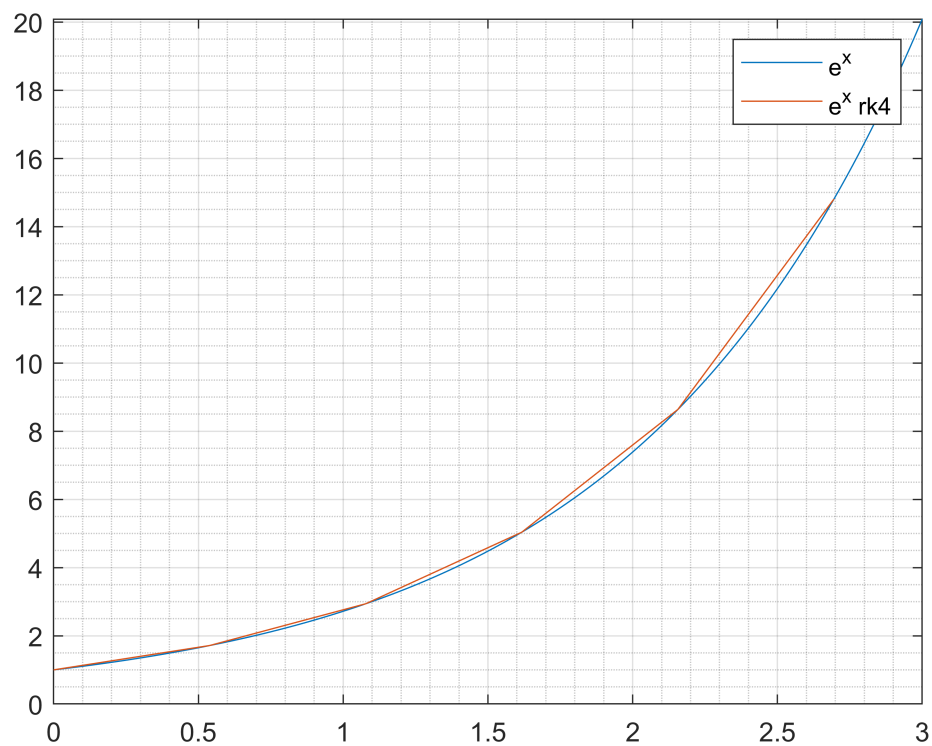
假设 $x = e^t$，则 $\dot{x} = e^t = x$

```
Tmax = 3;
t = 0:0.001:Tmax;
x = exp(t);
h = 0.539;
```

```
T = [0:h:Tmax];
X0 = 1;

[T_labrk4,x_labrk4] = lab_ode_rk4(@exp_diff,T,X0);

figure()
plot(t,x)
hold on
plot(T_labrk4,x_labrk4)
hold off
legend("e^{x}", "e^{x} rk4")
grid on
grid minor
```




```
function dx = exp_diff(t,x)
    dx = exp(t);
end
```