龙格库塔法是一种求解常微分方程的**数值解法**，微分方程可以是**线性**也可以是**非线性**的。

$$\dot{x} = f(x, u)$$

在控制系统中，x指系统状态，u指系统输入。

四阶龙格库塔法：

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \\
K_1 &= f(x_k, u_1) \\
K_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}K_1, u2) \\
K_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}K_2, u3) \\
K_4 &= f(x_k + h * K_3)
\end{aligned}
$$

u_1, u_2, u_3, u_4为对应时刻的系统输入，当微分方程中存在输入信号u时，求解步长h不能取太大，否则误差将很大。

从微分方程的形式$\dot{x} = f(x, u)$**可以看出，这是一个一阶微分方程，对于高阶微分方程如何求解？**

一个n阶微分方程可以化为n个一阶微分方程，相当于一个n阶控制系统，通过选取n个状态向量，从而得到n个一阶微分方程。例如，

$$\ddot{z} + \dot{z} + z = u$$

取状态向量$x_1 = z, x_2 = \dot{z}$，得

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= \dot{z} = x_2 \\
\dot{x_2} &= \ddot{z} = -z - \dot{z} + u = -x_1 - x_2 + u
\end{aligned}
$$

代码示例：

以一个二阶非线性微分方程为例，通过取状态向量，化为2个一阶微分方程：

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2 \\
\dot{x_2} &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1
\end{aligned}
$$

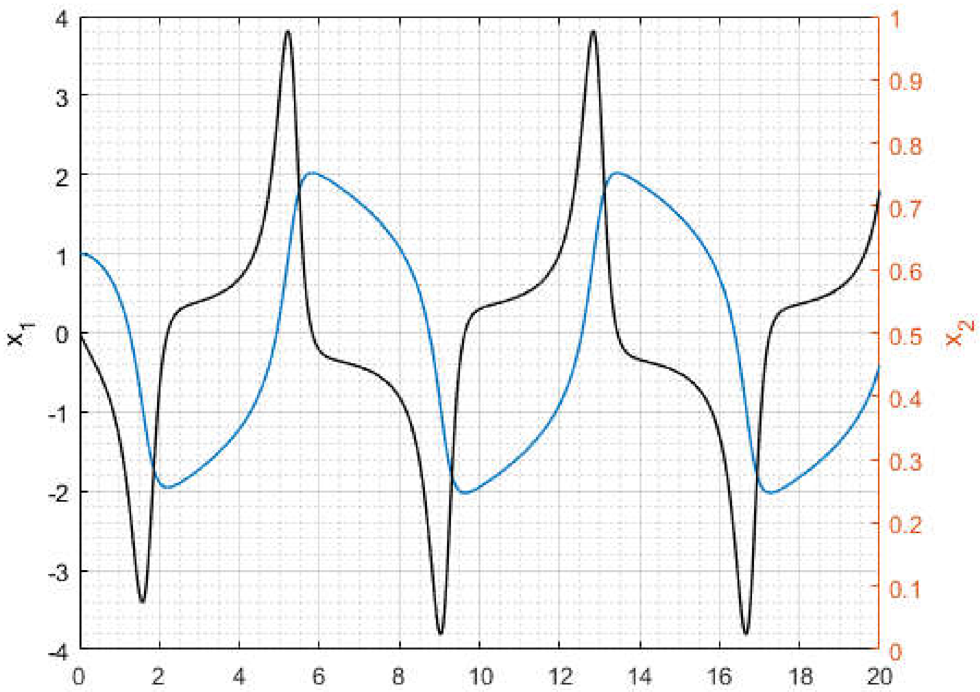
```
clc
clear all
close all

h = 0.01;
Tmax = 20;
T=[0:h:Tmax];    % 龙格库塔法求解区间[0,Tmax] 步长为h
X0=[1;0];        % 微分方程初始条件

% 龙格库塔法求解[0,Tmax]微分方程的解
[T_labrk4,x_labrk4] = lab_ode_rk4(@non_linear_d_func,T,X0);


plot(T_labrk4,x_labrk4(1,:),'LineWidth',1);
yyaxis left
ylabel('x_1');
hold on
plot(T_labrk4,x_labrk4(2,:),'LineWidth',1);
```

```
yyaxis right
ylabel('x_2');
hold off
grid on
grid minor
```



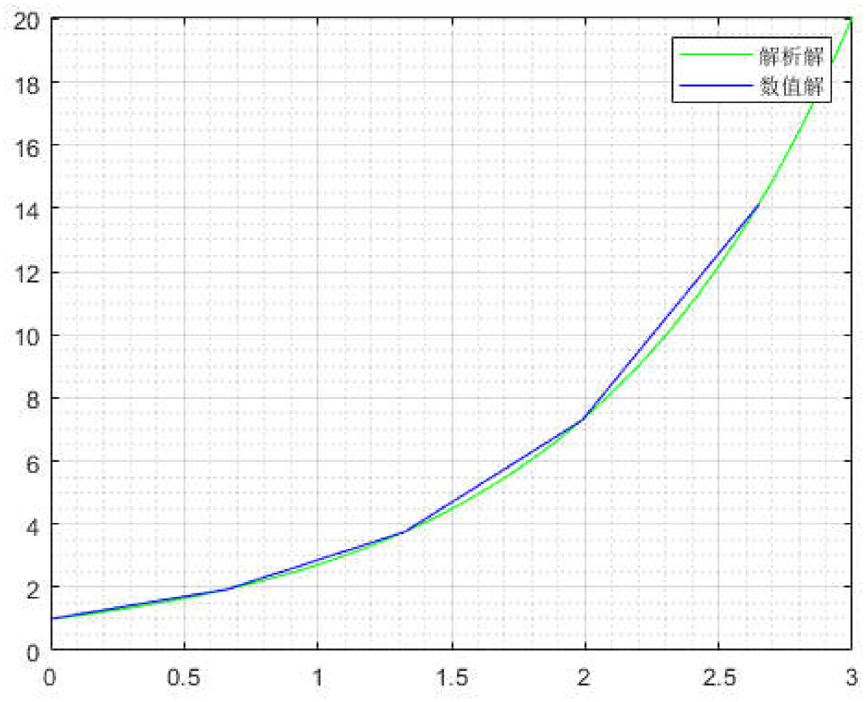
代码示例：

假设 $x = e^t$，则 $\dot{x} = e^t = x$(对比解析解和数值解)

```
Tmax = 3;
t = 0:0.001:Tmax;
x = exp(t);
h = 0.663;
T = [0:h:Tmax];
X0 = 1;

[T_labrk4,x_labrk4] = lab_ode_rk4(@exp_diff,T,X0);

figure()
plot(t, x, 'g')
hold on
plot(T_labrk4, x_labrk4, 'b')
hold off
legend("解析解", "数值解")
grid on
grid minor
```



调节h的大小，可以看到数值解的精度在发生变化，h越小，精度越高。

```
function dx = non_linear_d_func(t,x)
    mu = 2.0;
    dx=zeros(2,1);
    dx(1) = x(2);
    dx(2) = mu*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1);
end

function dx = exp_diff(t,x)
    dx = x;
end
```