Лекция 5. Колебания

Колебания - движения или состояния, параметры которых повторяются во времени.

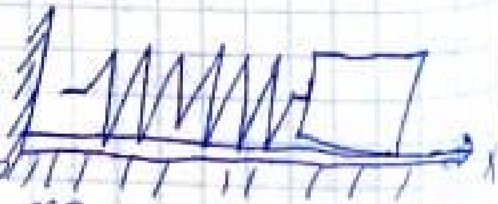
Модель для изучения механических колебаний - осциллятор

Осциллятор - мат. т-ка или система, сов. колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия.

Пример осциллятора: маятник, грузик на пружине.

Пример: груз массы m на невесомой пружине жесткости k движется по гладкой гор. пов-ти. Найти период его колебаний;

Решение: ур-ние движения в проекции на Ox:



$$mx = -F_{упр} = -kx \quad \text{или} \quad a = -\frac{k}{m}x$$

, где x - величина растяжения пружины. Т.к. $\ddot{x} = a$, то получаем ур-ние: $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$

Здесь $\omega_0^2=\frac{K}{m}$ и период кол-ий $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

Мех. энергия груза на пружине $W_{мех}=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{Kx^2}{2}$.

Ур-ние колебания для математического маятника можно вывести, используя ур-ние динамики вращ. движения: $ml^2\ddot{\varphi}=-mgl\varphi$

Приведенной длиной физ. маятника наз. длина математического маятника с таким же периодом.

$T_{мат}=T_{физ}$, $2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}$, $l_{пр}=\frac{I_z}{ml}$

Среднее значение $u(t)$:

$$\langle u\rangle=\frac{\int_{t_1}^{t_2}u(t)dt}{(t_2-t_1)}$$

Фазовая плоскость

Фазовой пл-тью наз. двумерное пространство, координатами в которой явл. координата точки и проекция импульса (обобщ. к-та и обобщ. импульс)

Фазовая траектория точки, сов. свобод. незатух. колебание, это эллипс.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот

Расс-м точку, сов. колебания по 2-м взаимно $\perp$ напр.:

$x=A_x\sin(\omega_x t)$ $y=A_y\sin(\omega_y t+\varphi)$ A_x, A_y - ~~проекции~~ амплитуда

пусть $\omega_x=\omega_y=\omega$

получим: $\frac{x}{A_x} = \sin(\omega t)$ $\frac{y}{A_y} = \sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi$

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = \sin^2\varphi$$

Это ур-ние линии 2-го порядка на пл-ти.

Если $\varphi = 0$, получим отрезок прямой

Если $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, то получаем эллипс $\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = 1$

Соотношение частот колебаний можно опр. из равенства:

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}$, где n-кол-во пер-ия фигуры и прямой, ‖ соответствующей оси.

Траектория точки, сов. одновременно 2 взаимно ⊥ колебания, при рациональном отн-нии частот колебаний наз. фигурой Лиссажу.

Условие рационального отн-ния частот означает, что отношение частот можно записать в виде рационального числа.

В этом случае траектория явл. замкнутой.