Семинар 4. «Закон сохранения энергии в механике»

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Закон сохранения импульса	$m\vec{\upsilon} = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \text{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \dfrac{I\omega^2}{2}$
Полная энергия тела, катящегося с высоты h			
$mgh = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$			

Работа сил упругости

$$A = \int dA = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2},$$

Виды потенциальных энергий

1. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2:

$$U_{\text{грав}} = -G\frac{m_1 m_2}{R} + C \qquad (1)$$

2. Потенциальная энергия тела массой m на высоте h: $U_{\text{тяж}} = mgh + C$

3. Потенциальная энергия упругих деформаций:

$$U(r) = W_{\text{пот.упр}} = \frac{kr^2}{2} + const \qquad (2)$$

4. Объемная плотность энергии упругой деформации (растяжения или сжатия):

$$\omega = \frac{W_{\text{пот.упр}}}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \qquad (3)$$

Здесь:

$E = \frac{kl}{S}$ - модуль упругости материала пружины,

ε – относительная деформация пружины (упругого элемента)

Связь между потенциальной энергией и консервативной силой:

$$\vec{F} = -grad\,W = \nabla(W) \text{ или } \vec{F} = -grad\,U = \nabla(U) \qquad (4)$$

В выражении (4) $grad(\ \ ) = \nabla(\ \ )$ - векторно-дифференциальный оператор, читающийся соответственно, как “градиент” и “набла”.

В развернутом виде, например, в декартовых координатах, правая часть выражения (14) имеет вид:

$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad (5)$$

В выражении (5) $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ - единичные вектора по соответствующим осям.

Закон сохранения механической энергии: ***Если на тело или в системе тел действуют только <u>консервативные</u> силы, то механическая энергия тела или системы тел остается постоянной и не изменяется во времени:***

$$W_{\text{КИН\_КОНЕЧ}} + W_{\text{ПОТ\_КОНЕЧ}} = W_{\text{ПОТ\_НАЧ}} + W_{\text{КИН\_НАЧ}} \qquad (6)$$

$$W_{\text{МЕХ\_КОНЕЧ}} = W_{\text{МЕХ\_НАЧ}} \qquad (7)$$

1. № 1.158 Тело массы *m* бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти среднюю мощность, развиваемую силой тяжести за все время движения тела, и мгновенную мощность этой силы как функцию времени.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

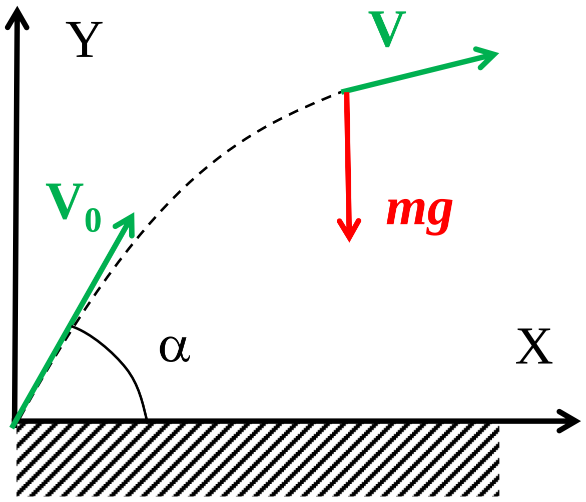


Рис. 1.

Решение:

Средняя мощность силы тяжести равна отношению работы силы к интервалу времени:

$$P_{CP} = \frac{m(\vec{g}\Delta\vec{h})}{\Delta t}, \quad (1)$$

в течение которого эта работа была совершена. Здесь Δh - изменение высоты тела.

Мгновенная мощность силы тяжести равна скалярному произведению вектора силы тяжести $m\vec{g}$ и вектора скорости тела $\vec{v}$:

$$P = (m\vec{g}, \vec{v}) \quad (2)$$

В прямоугольной системе координат (Рис. 1), в которой ось X направлена горизонтально, а ось Y – вертикально вверх, координаты вектора скорости и высота тела (от точки бросания) зависят от времени:

$$v_x = v_0 cos\alpha \quad (3)$$

$$v_y = v_0 sin\alpha - gt \quad (4)$$

$$h = (v_0 sin\alpha)t - g\frac{t^2}{2} \quad (5)$$

Поэтому согласно (1) ***средняя мощность силы тяжести*** равна:

$$P_{\text{СР}} = -mg\frac{h}{t} \qquad (6)$$

или с учетом (5):

$$P_{\text{СР}} = -mg\left(v_0 sin\alpha - g\frac{t}{2}\right) \qquad (7)$$

За все время полета ($t_{\text{пол}} = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}$) изменение высоты тела будет равным нулю:

$$\Delta h = 0,$$

Поэтому ***средняя мощность силы тяжести*** тоже будет равна нулю:

$$P_{\text{СР}} = 0$$

Согласно (2) и (4) ***мгновенная мощность силы тяжести*** равна:

$$P = -mg(v_0 sin\alpha - gt) \qquad (8)$$

Ответ: $P_{\text{СР}} = 0$ Вт; $P = -mg(v_0 sin\alpha - gt)$

2. № 1.180 Гладкая упругая нить длины *L* и жесткости *k* подвешена одним концом к точке О. На нижнем конце имеется невесомый упор. Из точки О начала падать небольшая муфта массы *m*.

Найти: а) максимальное растяжение нити;

б) убыль механической энергии системы к моменту установления равновесия (из-за сопротивления воздуха).

Решение:

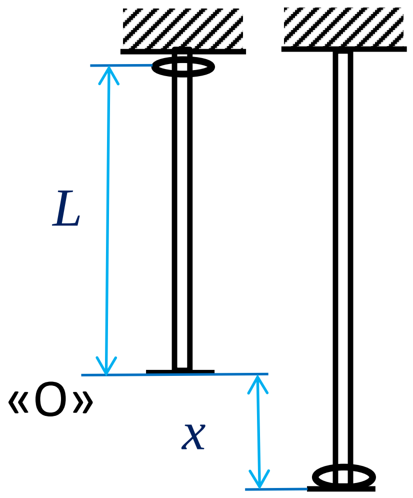


Рис. 1

Рассмотрим момент времени, когда муфта упала на упор и движется вместе с ним со скоростью *v*, а нить растянулась на величину *x* (рис.1).

Т.к. трение отсутствует (силой сопротивления воздуха можно пренебречь), то закон сохранения энергии имеет вид:

$$mgL = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + mg(-x) \qquad (1)$$

При максимальном растяжении нити скорость будет равна нулю $v = 0$, поэтому:

$$mgL = \frac{kx^2}{2} + mg(-x) \qquad (2)$$

Из (2) получаем квадратное уравнение:

$$\frac{kx^2}{2} - mgx - mgL = 0, \qquad (3)$$

которое имеет следующие корни:

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgL}}{k} \qquad (4)$$

Для растяжения нити выбираем знак плюс:

$$x = \frac{mg+\sqrt{(mg)^2+2kmgL}}{k} \qquad (5)$$

После прекращения колебаний муфта остановится в положении равновесия, когда растяжение нити будет равным: $x_0 = \dfrac{mg}{k}$ (6)

Изменение механической энергии системы:

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}}, \quad \text{где} \quad W_{\text{нач}} = mgL, \text{ а} \quad W_{\text{кон}} = -mgx_0 + \frac{kx_0^2}{2}$$

Тогда: $\Delta W = \dfrac{kx_0^2}{2} - mg(L + x_0)$ (7). С учетом (6) $\Delta W = -mg\left(L + \dfrac{mg}{2k}\right) < 0$ (8)

Потери механической энергии системы – убыль механической энергии:

$$|\Delta W| = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = mg(L + x_0) - \frac{kx_0^2}{2} \qquad (9)$$

при подстановке (6) в (9) получаем **ответ:** $|\Delta W| = mg\left(L + \dfrac{mg}{2k}\right)$ (10)

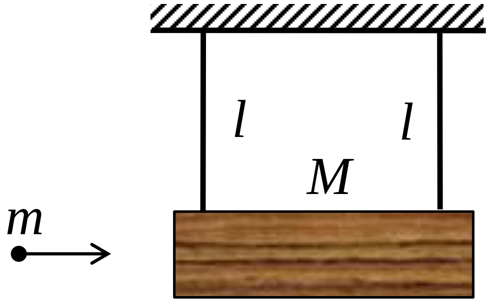


Рис.1.

3. № 1.194. Летевшая горизонтально пуля массы *m* попала в тело массы *M*, которое подвешено на двух одинаковых нитях длины *L* (рис.1), и застряла в нём. В результате нити отклонились на угол θ. Считая *m*<<*M*, найти:

а) скорость пули перед попаданием в тело;

б) относительную долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию.

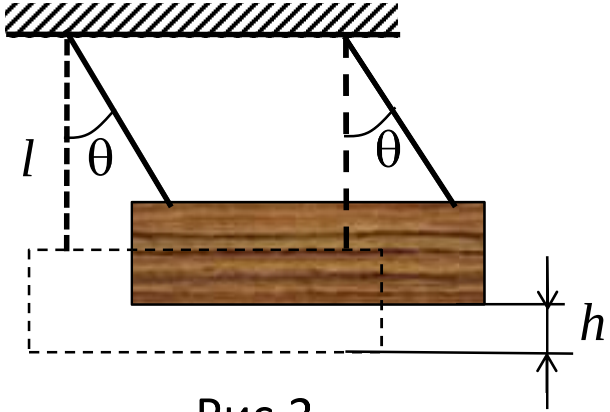


Рис.2.

Решение: При попадании пули в тело сохраняется **вектор импульса системы пуля-тело** (т.к. удар – это быстропротекающий процесс, поэтому импульсом внешних сил за время удара можно пренебречь):

$$m\vec{v}_0 = (m+M)\vec{v} \quad (1)$$

где $\vec{v}_0$ – вектор скорости пули пред ударом, $\vec{v}$ – вектор скорости тела с застрявшей пулей после попадания пули.

Таким образом, скорость тела после удара будет направлена горизонтально.

Т.к. удар абсолютно неупругий, то механическая энергия при ударе не сохраняется. Но после удара при движении тела в поле силы тяжести механическая энергия сохраняется. Тело движется поступательно так, что каждая точка, двигаясь по окружности, совершает одинаковое перемещение.

Тело приподнимется на высоту h (рис.2), определяемую из закона сохранения энергии:

$$(m+M)\frac{v^2}{2} = (m+M)gh \qquad (2)$$

или **скорость тела после удара:** $v = \sqrt{2gh}$ (3)

Однако, высота подъема тела: $h = l(1 - cos\theta)$ (4)

В итоге, с учетом (1), (3) и (4) получаем: $\frac{mv_0}{m+M} = \sqrt{2gl(1 - cos\theta)}$ (5)

Считая в (5) $m \ll M$, получаем ***начальную скорость пули:*** $v_0 = \frac{M}{m}\sqrt{2gl(1 - cos\theta)}$ (6)

Убыль механической энергии при ударе: $|\Delta W| = m\frac{v_0^2}{2} - (m+M)\frac{v^2}{2}$ (7)

Учитывая скорость тела после удара v (см. (1)), получаем убыль механической энергии при ударе:

$$|\Delta W| = m\frac{v_0^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) \qquad (8)$$

Относительная доля первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию:

$$\varepsilon = \frac{|\Delta W|}{\left(m\frac{v_0^2}{2}\right)} \qquad (9)$$

из (8) и (9) следует : $\varepsilon = 1 - \frac{m}{m+M}$ (10)

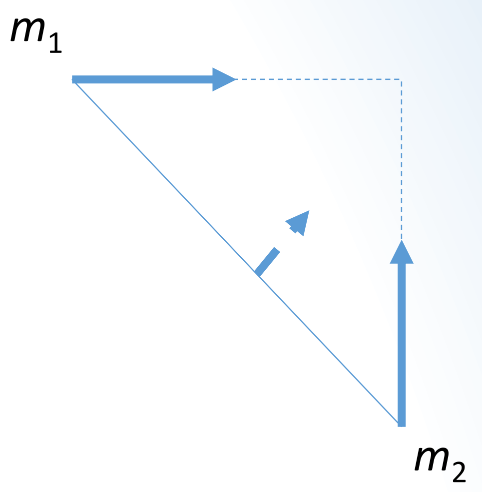
Учитывая, что $m \ll M$, получаем **ответ:** $\varepsilon = 1 - \frac{m}{M}$

4. 1.211 Замкнутая система состоит из двух частиц с массами m_1 и m_2, движущихся под прямым углом друг к другу со скоростями v_1 и v_2.

Найти в системе их центра масс:

а) импульс каждой частицы;

б) суммарную кинетическую энергию обеих частиц.



Решение:

Определение. Величина:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

называется ***приведенной массой двух частиц.***

Импульс первой частицы:

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \tag{2}$$

и ***второй частицы:***

$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 \tag{3}$$

Скорость центра масс системы:

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Вектор относительной скорости частиц:

первой $\vec{v}_{1C} = \vec{v}_1 - \vec{v}_C$ или $\vec{v}_{1C} = \dfrac{m_2 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ (5)

второй $\vec{v}_{2C} = \vec{v}_2 - \vec{v}_C$ или $\vec{v}_{2C} = \dfrac{m_1 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$ (6)

Импульсы частиц в системе их центра масс, который движется со скоростью $\vec{v}_C$ (см. (4)):

первой $\vec{p}_{1C} = m_1\vec{v}_{1C}$ или $\vec{p}_{1C} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$, т.е. $\vec{p}_{1C} = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ (7)

Второй $\vec{p}_{2C} = m_2\vec{v}_{2C}$ или $\vec{p}_{2C} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$, $\vec{p}_{2C} = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ (8)

Суммарная кинетическая энергия обеих частиц в системе их центра масс:

$$W_{\Sigma\_К\_С} = W_{1\_К\_С} + W_{2\_К\_С} \quad (9)$$

$$W_{1\_К\_С} = \frac{{p_{1C}}^2}{2m_1} \text{ или } W_{1\_К\_С} = \frac{(\vec{p}_{1C}, \vec{p}_{1C})}{2m_1} \quad (10)$$

Т.к. $(\vec{p}_{1C}, \vec{p}_{1C}) = \left(m_1 \frac{m_2\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}, m_1 \frac{m_2\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right)$, то

$$(\vec{p}_{1C}, \vec{p}_{1C}) = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad (11)$$

С учетом $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, т.е. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ (12)

$$(\vec{p}_{1C}, \vec{p}_{1C}) = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 (v_1^2 + v_2^2) \quad (13)$$

и ***кинетическая энергия первой частицы:***

$$W_{1\_К\_С} = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{(v_1^2 + v_2^2)}{2} \quad (14)$$

Аналогично, ***кинетическая энергия второй частицы в системе центра масс:***

$$W_{2\_К\_С} = \frac{p_{2C}{}^2}{2m_2} \text{ или } W_{2\_К\_С} = \frac{(\vec{p}_{2C}, \vec{p}_{2C})}{2m_2} \qquad (15)$$

$$\text{т.к. } (\vec{p}_{2C}, \vec{p}_{2C}) = \left(m_2 \frac{m_1\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}, m_2 \frac{m_1\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2}\right) \text{, то}$$

$$(\vec{p}_{2C}, \vec{p}_{2C}) = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad (16)$$

Учитывая, что -$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, т.е. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$, получаем:

$$(\vec{p}_{2C}, \vec{p}_{2C}) = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 (v_1^2 + v_2^2) \qquad (17)$$

и ***кинетическая энергия второй частицы в системе центра масс:***

$$W_{2\_К\_С} = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{(v_1^2+v_2^2)}{2} \qquad (18)$$

Кинетическая энергия обеих частиц в системе их центра масс:

$$W_{\Sigma\_К\_С} = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{(v_1^2+v_2^2)}{2} + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{(v_1^2+v_2^2)}{2}$$

$$W_{\Sigma\_К\_С} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \frac{(v_1^2+v_2^2)}{2} \qquad (19)$$

т.е. кинетическая энергия системы из двух частиц в системе их центра масс - **ответ**:

$$W_{\Sigma\_К\_С} = \frac{\mu(v_1^2+v_2^2)}{2} \qquad (20)$$

5. № 1.310(б) Двум одинакового радиуса дискам сообщили одну и ту же угловую скорость ω_0 (рис.1), а затем их привели в соприкосновение, и система через некоторое время пришла в новое установившееся состояние движения (рис.2). Оси дисков неподвижны, трения в осях нет. Моменты инерции дисков относительно их осей вращения равны I_1 и I_2. Найти:
б) убыль механической энергии системы.

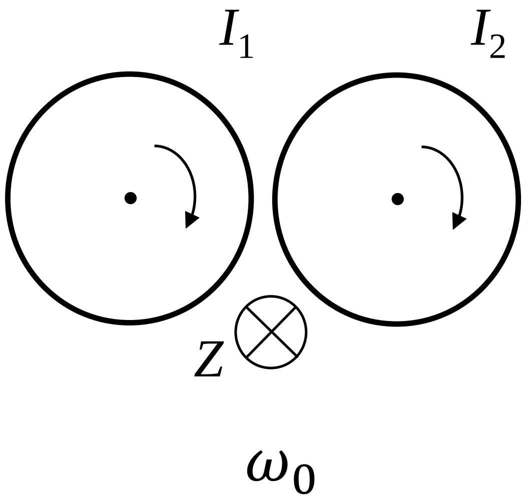


Рис. 1.

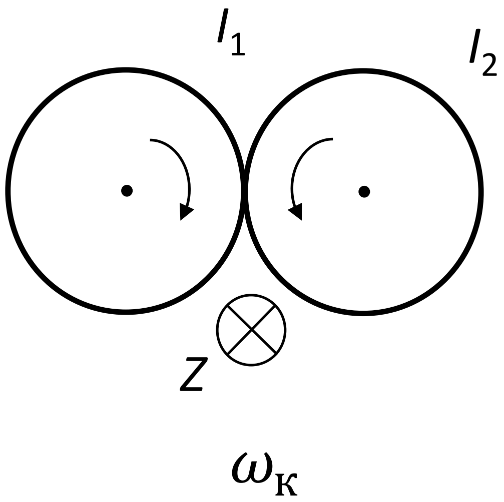


Рис. 2.

Решение:

Убыль механической энергии системы:

$$\Delta W = W_{НАЧ} - W_{КОН} \qquad (1)$$

или с учетом выражений для кинетической энергии вращательного движения:

$$\Delta W = (I_1 + I_2)\frac{\omega_0^2}{2} - (I_1 + I_2)\frac{\omega_К^2}{2} \qquad (2)$$

По результатам решения 1.310(а) (см. семинар 3) ***угловая скорость вращения*** дисков в конечном состоянии:

$$\omega_{\text{К}} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\omega_0 \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем **ответ – убыль механической энергии системы**:

$$\Delta W = \frac{(I_1 + I_2)}{2}\left(\omega_0^2 - \left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\right)^2 \omega_0^2\right) \qquad (4)$$

или

$$\Delta W = \frac{2 I_1 I_2 \omega_0^2}{I_1 + I_2} \qquad (5)$$

Изменение механической энергии системы:

$$\Delta W = W_{\text{КОН}} - W_{\text{НАЧ}} = -\frac{2 I_1 I_2 \omega_0^2}{I_1 + I_2} < 0 \qquad (6)$$

Домашнее задание

Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998 - 2001,

Дома: ОЛ-4 № 1.149, 1.169 или ОЛ-5 № 1.142, 1.157;
ОЛ-6 № 2.76, 2.87.

4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Бином, 1998÷2001.

5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике.- М.: Наука, 1988.

6. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике.- М.: Высшая школа, 2003, 1988.

Спасибо за внимание