Часть А

необходимо ответить хотя бы на 1 вопрос и решить не менее 3 задач;
оценка 21 балл

Теория

1. Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства.

2. Сформулировать теорему о существовании для самосопряжённого оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид.

Задачи

3. Вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты $(-1, 1)^T$ в базисе $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1)^T$. Найти его координаты в базисе $\boldsymbol{b}_1 = (2, 5)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2)^T$.

4. Базис $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ получается из правого ортонормированного базиса $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ пространства V_3 поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{j}$. Базис $\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'', \boldsymbol{k}''\}$ получается из базиса $\mathcal{B}'$ поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг вектора $\boldsymbol{k}'$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}''$.

5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} -9 & -25 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

6. С помощью критерия Сильвестра определить, является ли квадратичная форма $-x_1^2 + 6x_1x_4 - 3x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$ положительно определённой, отрицательно определённой, неопределённой.

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 5–14 баллов

Теория

7. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Задача

8. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $-x^2 - y^2 - 7z^2 + 16xy - 8xz - 8yz$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование координат.

Маляев Иван ИУ6-22Б

① Дать определение скалярного произведения и евклидова пространства:

Линейное пространство E наз. евклидовым пространством если в этом пр-ве задано скалярное произведение, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре векторов $\overline{x}, \overline{y} \in E$ поставлено в соответствие действительное число $(\overline{x}, \overline{y})$, называемое скалярным произведением, при этом выполняются следующие аксиомы скалярного произведения:

а) $(\overline{x},\overline{y})=(\overline{y},\overline{x})$; б) $(\overline{x}+\overline{y},\overline{z})=(\overline{x},\overline{z})+(\overline{y},\overline{z})$; в) $(\lambda\overline{x},\overline{y})=\lambda(\overline{x},\overline{y}), \lambda\in R$

г) $(\overline{x},\overline{x})\geq 0$, причем $(\overline{x},\overline{x})=0 \Leftrightarrow x=0$

② Сформулировать теорему о существовании для самосопряженного оператора ортонормированного базиса, в котором его матрица имеет простой вид:

Если собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ самосопряженного оператора A, действующего в n-мерном евклидовом пространстве E, попарно различны, то в E $\exists$ ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора A имеет диагональный вид, причем диагональными элементами такой матрицы явл. собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

③ $[\overline{C}_a]=(-1,1)^T$; $\overline{a}_1=(1,1)^T$; $\overline{a}_2=(1,-1)^T$; $\overline{b}_1=(2,5)^T$; $\overline{b}_2=(1,2)^T$

$[\overline{C}_b]=?$

$[\overline{C}_b]=T_{b\to a}\cdot[C]_a$

$$\overline{b}_1=\alpha_{11}\overline{a}_1+\alpha_{21}\overline{a}_2=\alpha_{11}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_{21}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\overline{b}_2=\alpha_{12}\overline{a}_1+\alpha_{22}\overline{a}_2=\alpha_{12}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_{22}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\frac12&+\frac12\\+\frac12&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+3,5\\-1,5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1/2&+1/2\\+1/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

$$T_{a\to b}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+3,5&+1,5\\-1,5&-0,5\end{pmatrix};\ T_{b\to a}=T_{a\to b}^{-1}=2\begin{pmatrix}-0,5&-1,5\\+1,5&+3,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3\\+3&+7\end{pmatrix}$$

$$[\overline{C}_b]=\begin{pmatrix}-1&-3\\+3&+7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\+4\end{pmatrix}$$ – ответ

(4.) B' получается из B поворотом против часовой на $90°$ вокруг $\bar{j}$

B'' получается из B' поворотом на $90°$ против часовой вокруг $\bar{k}$

Решение: $T_{B\to B''} = T_{B\to B'}\cdot T_{B'\to B''}$ $\qquad$ $T_{B\to B''}$ — ?

$$T_{B\to B'}\underset{(\text{вокруг } \bar{j})}{(+90°)} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix}} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \cos 90 & 0 & \sin 90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90 & 0 & \cos 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{B'\to B''}\underset{(\text{вокруг } \bar{k})}{(+90°)} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B\to B''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \text{ ~~ответ~~ } = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ — ответ}$$

(5.) Найти собств. числа и векторы лин. оператора $A: R^2 \to R^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} -9 & -25 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} = A$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -9-\lambda & -25 \\ 4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (-9-\lambda)(11-\lambda) - (-25)\cdot 4 = -99 + 9\lambda - 11\lambda + \lambda^2 + 100 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \underline{\lambda = 1} \text{ — корень кратности 2}$$

$\bullet\ \lambda_1 = 1:\ (A - \lambda_1 E) = 0$

$$\begin{pmatrix} -9-1 & -25 \\ 4 & 11-1 \end{pmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -10 & -25 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{5}{2}x_2 \end{matrix}$$

$x_2 = c;\ x_1 = -\frac{5}{2}c;$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}c \\ c \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} c \text{ — собственный вектор, соотв. знач } \lambda_1$$

(6.) С помощью критерия Сильвестра определить, явл. ли кв. форма $-x_1^2 + 6x_1x_4 - 3x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$ пол. опр-нной, отр. опр-ной, неопр.

~~Ответ~~: Решение:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 6x_1x_4 - 3x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$. Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix};\quad \Delta_1 = -1 < 0;\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 > 0;\quad \Delta_4 = \det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 < 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0; \Rightarrow \text{кв. форма } \underline{\text{неопределена}}$$

Миляев Иван ИУ6-22Б ~~11~~ (продолжение)

(7) Вывести формулу преобразования матрицы кв. формы при переходе к новому базису.

Пусть дана кв. форма $x^T A x$, где $x = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$. В n-мерном линейном пр-ве L с фикс. базисом b она определяет ф-ю $F(x) = X_b^T A X_b$, заданную через к-ты X_b вектора x в базисе b. Найдем представление этой же ф-ии в некотором другом базисе e. Пусть U - матрица перехода от b к e. Тогда к-ты X_b вектора x в старом базисе b и к-ты X_e того же вектора в новом базисе e будут связаны соотношением $X_b = U X_e$ (*)

Ф-я F(x) в новом базисе будет выражаться через новые к-ты вектора x след. образом: $X_b^T A X_b = (U X_e)^T A (U X_e) = X_e^T (U^T A U) X_e = X_e^T A' X_e$

Итак, ф-я F в новом базисе также записывается при помощи кв. формы, причем матр. A' этой кв. формы связана с матр. A исх. кв. формы соотношением: $\boxed{A' = U^T A U}$

Преобразование матр. кв. формы вызывается заменой переменных (переходом от пер-х X_b к пер-м X_e) в соответствии с формулой (*).

(8.) Методом ортогональных преобразований привести кв. форму $-x^2 - y^2 - 7z^2 + 16xy - 8xz - 8yz$ к каноническому виду. Указать соотв. преобразование координат.

Решение: $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 & -4 \\ 8 & -1-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$$(-1-\lambda)((-1-\lambda)(-7-\lambda)-16)-8(8(-7-\lambda)-16)-4(-32+4(-1-\lambda))=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3+9\lambda^2-81\lambda-729=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-9)(\lambda+9)^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=9\\ \lambda_2=-9\end{array}\right.$$

• $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix}-10 & 8 & -4\\ 8 & -10 & -4\\ -4 & -4 & -16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}-10x+8y-4z=0 & (1)\\ 8x-10y-4z=0 & (2)\\ -4x-4y-16z=0 & (3)\end{cases}$$

$$(1)-(2):\ -9x+9y=0$$

$$x=y=C \Rightarrow (3):\ -2c-2c-8z=0$$

$$z=-\tfrac{1}{2}c$$

$$\Rightarrow c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_1=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=-9$:

$$\begin{pmatrix}8 & 8 & -4\\ 8 & 8 & -4\\ -4 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \sim \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 2x+2y-z=0 \Rightarrow 2x+2c-c=0$$

$$x=-\tfrac{1}{2}c$$

$$\Rightarrow c\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_2=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'\\ y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'\\ z=\frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{1}{2}z'\end{cases}$$

$f(x,y,z)=$ ← канонический вид

$$\underline{-9x'^2-9y'^2+9z'^2}$$