КР2 Моляев Иван ИУ6-22Б Вариант 19

1. $(2x+y)dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$

$(2x+y-4\ln y)dy = y\,dx$

$2x+y-4\ln y = y\,x'$

$y\,x' - 2x = y - 4\ln y$

$x' - \frac{2x}{y} = 1 - \frac{4\ln y}{y}$ – линейное уравнение 1-го пор-ка

Однородное: $x' = \frac{2x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y} \ominus$

$\ominus \ln|x| = \ln y^2 + C \Leftrightarrow \ln|x| = \ln y^2 + \ln C$

$x = Cy^2 \Rightarrow x = C(y)\cdot y^2$

$x' = C'(y)y^2 + 2y\,C(y)$

подставим: $C'(y)y^2 + \cancel{2y\,C(y)} - \cancel{\frac{2C(y)y^2}{y}} = 1 - \frac{4\ln y}{y}$

$C'(y)y^2 = 1 - \frac{4\ln y}{y}$

$\frac{d(C(y))}{dy} = y^{-2} - \frac{4\ln y}{y^3}$

$d(C(y)) = \left(y^{-2} - \frac{4\ln y}{y^3}\right)dy$

$C(y) = \int y^{-2}dy - \int\frac{4\ln y}{y^3}dy$ (*)

(*): $\int\frac{\ln y}{y^3}dy = \left|\begin{matrix} u = \ln y \\ dv = y^{-3}dy \\ v = -\frac{1}{2}y^{-2} \end{matrix}\right| = -\frac{1\ln y}{2y^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y^2}dy =$

$= -\frac{\ln y}{2y^2} + \frac{1}{2}\cdot y^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + C = -\frac{\ln y}{2y^2} - \frac{1}{4y^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{2\ln y + 1}{y^2}\right)$

$C(y) = \frac{-1}{y} + \frac{2\ln y + 1}{y^2} + C$

$x = C(y)\cdot y^2$

$x = \left(\frac{-1}{y} + \frac{2\ln y + 1}{y^2} + C\right)y^2$

$x = -y + 2\ln y + 1 + Cy^2$

② $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$

$\frac{dx}{x} = \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}$ – ур-ние с разд. пер-ными (x=0 доп. решение)

$\ln|x| = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{2}\int (y^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(y^2+1) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (y^2+1)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{y^2+1} + C$

$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C$; искл. решение: $x=0$

③ $y'\cdot x^3 \sin y = xy' - 2y$; $\quad y(1)=1$

$y'(x^3\sin y - x) = -2y$

$\frac{dy}{dx}(x^3\sin y - x) = -2y$

расс-м ур-ние отн-но обр. ф-ии $x(y)$:

$x^3\sin y - x = -2y\frac{dx}{dy}$

$x^3\sin y - x = -2y\cdot x'$

$2y\,x' - x = -x^3\sin y$

$x' - \frac{x}{2y} = -\frac{\sin y}{2y}\cdot x^3$ – ур-ние Бернулли

замена: $z(y) = x^{1-2} = x^{1-3} = x^{-2}$; $x = z^{-\frac{1}{2}}$, $x' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\cdot z'$

$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z' - \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2y} = -\frac{\sin y}{2y}\cdot z^{-\frac{3}{2}}$

$-\frac{1}{2}z' - \frac{z}{2y} = -\frac{\sin y}{2y}\cdot 1 \quad |\cdot(-2)$

$z' + \frac{z}{y} = \frac{\sin y}{y}$ – лин. ур-ние

однородное: $z' = -\frac{z}{y} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -\frac{z}{y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y}$

$\ln|z| = -\ln|y| + \ln C$

$z = y^{-1}\cdot C \Rightarrow z = C(y)\cdot\frac{1}{y}$

считаем, что C зависит от y

$z' = C'(y)\cdot\frac{1}{y} + C(y)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$

подставим z и z':

$\frac{C'(y)}{y} - \cancel{\frac{C(y)}{y^2}} + \cancel{\frac{C(y)}{y^2}} = \frac{\sin y}{y}$

$C'(y) = \sin y$

$C(y) = -\cos y + C$

$\Rightarrow z = \frac{C(y)}{y}$; $z = \frac{-\cos y}{y} + \frac{C}{y}$

$\frac{1}{x^2} = \frac{-\cos y + C}{y} \Rightarrow x^2 = \frac{y}{-\cos y + C}$

при $y(1)=1$: $1^2 = \frac{1}{-\cos 1 + C}$

$1 = -\cos 1 + C$

$C = 1 + \cos 1$

итого: $x^2 = \frac{y}{-\cos y + 1 + \cos 1}$

(4.) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$ $\quad y(1)=1$

замена: $y = u(x)\,x$; $u = \frac{y}{x}$; однородное

$y' = u'x + u$;

$2x^3(u'x + u) = ux(2x^2 - u^2x^2)$

$2x^3(u'x+u) = ux^3(2-u^2)$

$2u'x + 2u = 2u - u^3$

$u'2x = -u^3$

$\frac{du}{dx} 2x = -u^3$

$u^{-3}du = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$

$-\frac{1}{2}u^{-2} = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$

$\ln|Cx| = \frac{x^2}{y^2}$

$x = \pm y\sqrt{\ln Cx}$

при $y(1)=1$:

$1 = \pm\sqrt{\ln C}$

$1 = \ln C$

$C = e$;

$x = y\sqrt{\ln ex}$;