ДЗ-2 Вариант 19 Маяев Иван ИУ6-22Б

1. $2yy'' - (y')^2 = yy'$; $y(0)=1$ $y'(0)=2$

Замена: $p(y) = y' \Rightarrow y'' = p'p$

$2yp'p - p^2 = yp \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=0 \Leftrightarrow y'=0 \text{ - не удовлетворяет условию} \\ 2yp' - p = y \ (*) \end{array}\right.$

$(*)$: $2yp' - p = y$ - линейное

запишем однородное: $2yp' = p \Leftrightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{p}{2y} \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln|p| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln C$

$p = C\cdot y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow p = C(y)\cdot y^{\frac{1}{2}}$; $p' = C'(y)\cdot y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}C(y) y^{-\frac{1}{2}}$

подставим: $2y\,C'(y)\cdot y^{\frac{1}{2}} + \cancel{y\,C(y)\cdot y^{-\frac{1}{2}}} - \cancel{C(y)\cdot y^{\frac{1}{2}}} = y$

$C'(y)\cdot y^{\frac{3}{2}}\cdot 2 = y$

$C'(y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow C(y) = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}\cdot 2 + C_1$

$\Rightarrow p = C(y)\cdot y^{\frac{1}{2}} = y + C\sqrt{y}$

$y' = y + C\sqrt{y}$

С учетом нач. условий: $2 = 1 + C \Leftrightarrow C_1 = 1$

$y' = y + \sqrt{y} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y+\sqrt{y}} \overset{(\#)}{=} \int dx \Leftrightarrow$

$(\#)$: $\int \frac{dy}{y+\sqrt{y}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{y} \\ y=t^2 \\ dy = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + C =$

$= 2\ln|\sqrt{y}+1| + C_2$

$\Leftrightarrow 2\ln|y^{\frac{1}{2}}+1| + C_2 = x \Leftrightarrow 2\ln|\sqrt{y}+1| = x + C_2$

с учетом нач. условия: $2\ln|1+1| = 0 + C_2$

$C_2 = \ln 4$

$\Rightarrow 2\ln|\sqrt{y}+1| = x + \ln 4$ - ответ

(2.) $y'' = \frac{y'}{x} - \sqrt{1-\left(\frac{y'}{x}\right)^2}\cdot\arccos\frac{y'}{x}$

замена: $p(x) = y'$; $y'' = p'$

$p' = \frac{p}{x} - \sqrt{1-\left(\frac{p}{x}\right)^2}\cdot\arccos\frac{p}{x}$

замена: $p = z(x)\cdot x$; $p' = z'x + z$

$z'x + z = z - \sqrt{1-z^2}\cdot\arccos z$

$\frac{dz}{dx}\cdot x = -\sqrt{1-z^2}\cdot\arccos z$

$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\arccos z}^{(*)} = \int\frac{dx}{x}$ $\quad (*)$: $-\int\frac{d\arccos z}{\arccos z} = -\ln|\arccos z| + C_1$

$\ln|\arccos z| = \ln|x| + C_1^{\sim\ln|C_1|}$

$\arccos z = C_1x$; $z = \cos C_1x \Leftrightarrow \frac{p}{x} = \cos C_1x \Leftrightarrow \frac{y'}{x} = \cos C_1x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx\,x} = \cos C_1x \Leftrightarrow \int dy = \int x\cos(C_1x)dx^{(\#)}$

$(\#)$: $\int x\cos(C_1x)dx = \left|\begin{array}{l}u = x\\ dv = \cos C_1x\,dx\\ v = \frac{\sin C_1x}{C_1}\end{array}\right| = \frac{x\sin C_1x}{C_1} - \frac{1}{C_1}\int\sin C_1x\,dx = \frac{x\sin C_1x}{C_1} + \frac{\cos C_1x}{C_1^2} + C_2$

$y = \frac{x\sin C_1x}{C_1} + \frac{\cos C_1x}{C_1^2} + C_2$ – ответ

(3) $y''' - y'' + 2y' = 4x + x^2e^{\frac{x}{2}} - 2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + 1 - 5xe^x\sin2x$

1) хар-ое ур-ние: $\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 0\\ \lambda^2 - \lambda + 2 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 0\\ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i\end{array}\right.$

$\boxed{y_0} = C_1e^0 + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

2) $f(x) = 4x$; $y_{ч1} = x\cdot(Ax+B)$

$f_2 = x^2e^{\frac{x}{2}}$; $y_{ч2} = e^{\frac{x}{2}}(Cx^2+Dx+E)$

$f_3 = -2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$; $y_{ч3} = F\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + G\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x$

$f_4 = -5xe^x\sin2x$; $y_{ч4} = e^x((Nx+L)\sin2x + (Ox+P)\cos2x)$

$\boxed{y_ч} = x(Ax+B) + e^{\frac{x}{2}}(Cx^2+Dx+E) + F\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x + G\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + e^x((Nx+L)\sin2x +$

$+ (Ox+P)\cos2x)$

$y_{он} = y_0 + y_ч$.

(4.) $y'' - 2y' - 15y = 16e^{5x} - 15x - 17$ $\quad y(0)=9;\ y'(0)=3.$

хар. ур-ние: $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$

$\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 5$

$\underline{y_0} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x}$

$y_ч = Axe^{5x} + Bx + C$

$y'_ч = Ae^{5x} + 5Axe^{5x} + B$

$y''_ч = 5Ae^{5x} + 5Ae^{5x} + 25Axe^{5x}$

$5Ae^{5x} + 5Ae^{5x} + 25Axe^{5x} - 2(Ae^{5x} + 5Axe^{5x} + B) - 15(Axe^{5x} + Bx + C) = 16e^{5x} - 15x - 17$

$8Ae^{5x} - 2B - 15Bx - 15C = 16e^{5x} - 15x - 17$

$\begin{cases} e^{5x}: 8A = 16 \\ x: -15B = -15 \\ C: -2B - 15C = -17 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 2;\ B = 1;\ C = 1.$

$\Rightarrow \underline{y_ч} = 2xe^{5x} + x + 1$

$y_{он} = y_0 + y_ч;\ y_{он} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x} + 2xe^{5x} + x + 1;$

$y'_{он} = -3C_1 e^{-3x} + 5C_2 e^{5x} + 2e^{5x} + 2x \cdot 5e^{5x} + 1$

Учтем нач. условия: $\begin{matrix} y(0)=9: \\ y'(0)=3: \end{matrix} \begin{cases} 9 = C_1 + C_2 + 1 \\ 3 = -3C_1 + 5C_2 + 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -3C_1 + 5C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 5 \\ C_2 = 3 \end{matrix}$

$y = 5e^{-3x} + 3e^{5x} + 2xe^{5x} + x + 1;$ – ответ

(5.) $(x-1)y'' - (x-3)y' - y = 2e^{2x}$ $\quad y_1 = \frac{1}{x-1}$

$y'' - \frac{(x-3)}{(x-1)} y' - \frac{y}{(x-1)} = \frac{2e^{2x}}{x-1}$

замена: $y = z(x) \cdot y_1 = \frac{z(x)}{(x-1)};\ y' = \frac{z'(x-1) - z}{(x-1)^2}$

$y'' = \frac{(z''(x-1) + z' - z')(x-1)^2 - (z'(x-1) - z) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

подставим:

$\frac{z''(x-1)^3 - 2(x-1)^2(z' - z/(x-1))}{(x-1)^3} - \frac{(x-3)(z'(x-1) - z)}{(x-1)^2} - \frac{z}{(x-1)} = 2e^{2x} / \cdot (x-1)$

$z'' - \frac{2z'}{x-1} + \frac{2z}{(x-1)^2} - \frac{(x-3)z'}{(x-1)} + \frac{(x-3)z}{(x-1)^2} - \frac{z}{(x-1)} = 2e^{2x}$

$z'' - z'\left(\frac{2 + x - 3}{x-1}\right) + z\left(\frac{2 + x - 3 - x + 1}{(x-1)^2}\right) = 2e^{2x}$

$z'' - z' = 2e^{2x}$

замена: $p(x) = z'$; $z'' = p'$

$p' - p = 2e^{2x}$ — линейное

запишем однород.: $p' = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = dx$

$\ln|p| = x + C_1 \quad \sim \ln|C|$

$p = C_1 e^x = C(x) e^x$

$p' = C'(x) e^x + C(x) e^x$

подставим:

$C'(x) e^x + \cancel{C(x)e^x} - \cancel{C(x)e^x} = 2e^{2x}$

$C'(x) = 2e^{2x-x}$

$C'(x) = 2e^x$

$C(x) = 2e^x + C_1$

$\Rightarrow p = 2e^{2x} + C_1 e^x$

$z' = 2e^{2x} + C_1 e^x \Rightarrow z = 2\int e^{2x} dx + C_1 \int e^x dx$

$z = e^{2x} + C_1 e^x + C_2$

$y(x-1) = e^{2x} + C_1 e^x + C_2$

$y = \frac{e^{2x}}{x-1} + \frac{C_1 e^x}{x-1} + \frac{C_2}{x-1}$ — ответ