Вариант 19. Асалаев Иван ИУ6-22Б ~~Щ~~ Страница 1.

③ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x}{y}}$ $\exists$ ли?

Решение: замена: $y = kx$, тогда:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\frac{x}{y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} e^{\frac{x}{y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} e^{\frac{x}{kx}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} e^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}}$$

Результат зависит от коэффициента k, $\Rightarrow$ данного предела не существует.

② Для ф-ии $u = e^{xyz}$ в т-ке $M(2;3;1)$ найти градиент и производную в напр-ии вектора $\overline{MN}$, если $N(-1;1;-5)$

Решение:

1) найдем частные производные и их зн-я в т-ке M

$$\frac{du}{dx} = (e^{xyz})'_x = e^{xyz}\cdot yz\ ;\quad \left.\frac{du}{dx}\right|_M = e^{2\cdot 3\cdot 1}\cdot 3\cdot 1 = 3e^6.$$

$$\frac{du}{dy} = (e^{xyz})'_y = e^{xyz}\cdot xz\ ;\quad \left.\frac{du}{dy}\right|_M = e^6\cdot 2\cdot 1 = 2e^6.$$

$$\frac{du}{dz} = e^{xyz}\cdot xy\ ;\quad \left.\frac{du}{dz}\right|_M = 6e^6.$$

тогда $\mathrm{grad}\, u = \left(\frac{du}{dx};\frac{du}{dy};\frac{du}{dz}\right) = (3e^6; 2e^6; 6e^6)$

2) находим к-ты вектора $\overline{MN}$, затем единичн. вектор.

$\overline{MN} = (-1-2; 1-3; -5-1) = (-3; -2; -6)$; $|\overline{MN}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

$\overline{MN_0} = \left(-\frac{3}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}\right)$

$$\left.\frac{du}{dl}\right| = \left.\frac{du}{dx}\right|_M\cdot\cos\alpha + \left.\frac{du}{dy}\right|_M\cdot\cos\beta + \left.\frac{du}{dz}\right|_M\cdot\cos\gamma$$

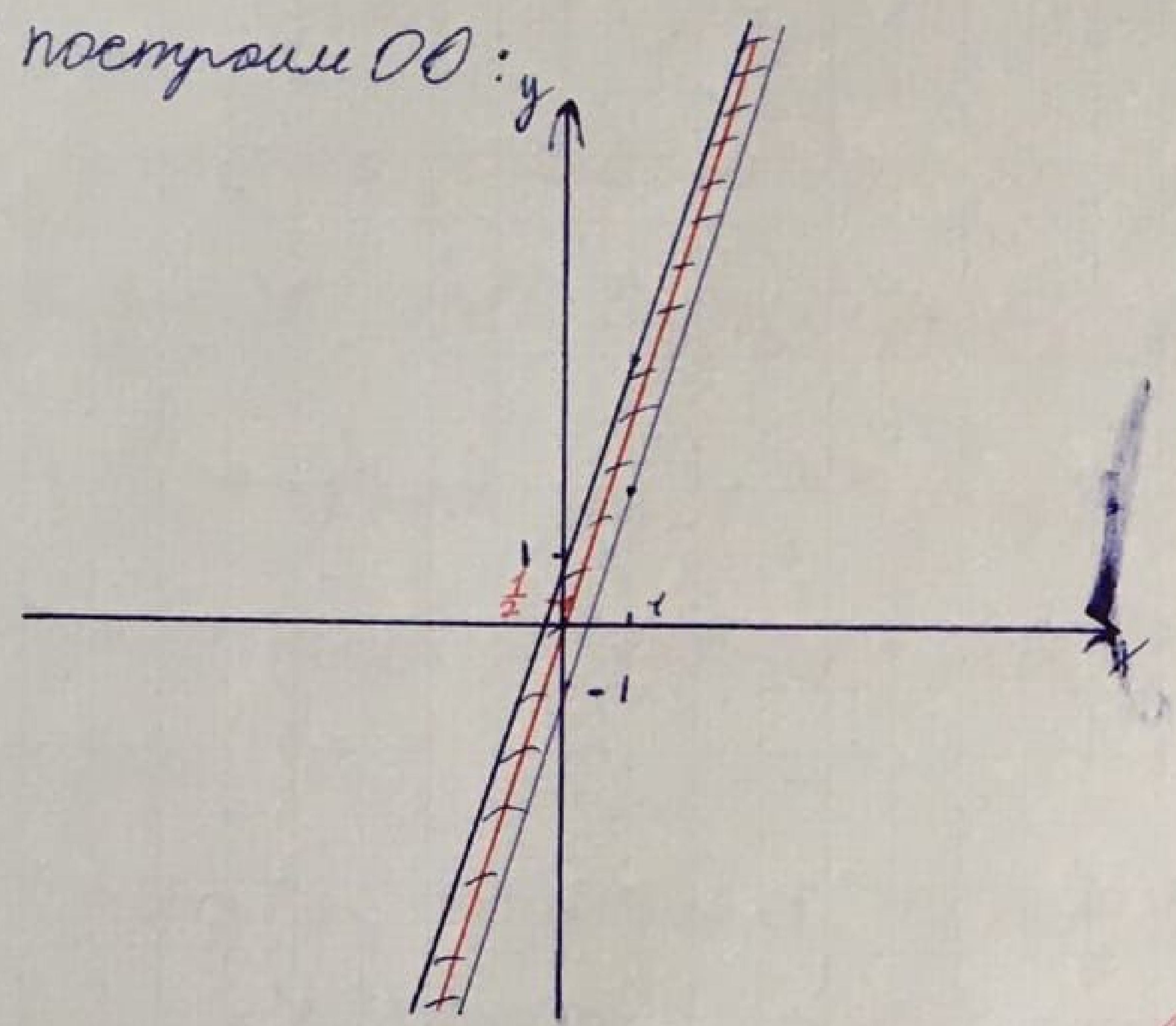
$$\Rightarrow \left.\frac{du}{dl}\right| = 3e^6\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) + 2e^6\left(-\frac{2}{7}\right) + 6e^6\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{49}{7}e^6 = \underline{-7e^6}$$

Люляев ~~М~~ Страница 2.

(1.) Найти изобр. ОО ф-ии $z = \arccos(-3x+y)$; изобр. линию уровня, проход. через т-ку $(\frac{1}{2}; 2)$.

1) $-1 \le -3x+y \le 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \le -3x+y \\ -3x+y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y \ge 3x-1 \\ y \le 3x+1 \end{matrix}$

2) построим ОО:



$y = 3x + \frac{1}{2}$ – линия уровня

3) Найдем линию уровня

$c = \arccos(-3x+y)$; т.к. проходит через $(\frac{1}{2}; 2)$:

$c = \arccos(-3 \cdot \frac{1}{2} + 2) = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$

$\arccos(-3x+y) = \pi/3$; $-3x+y = \frac{1}{2}$; $y = 3x + \frac{1}{2}$

(4.) • Найдем частные производные 1-го порядка:

$\frac{du}{dx} = A\lambda \cos a\lambda t \cdot \cos \lambda x$

$\frac{du}{dt} = -Aa\lambda \sin\lambda x \cdot \sin a\lambda t$

• 2-го порядка:

$\frac{d^2u}{dx^2} = -A\lambda^2 \cos a\lambda t \cdot \sin\lambda x$

$\frac{d^2u}{dt^2} = -Aa^2\lambda^2 \sin\lambda x \cdot \cancel{\sin} \cos a\lambda t$

• подставим в исходное ур-ние:

$-\lambda a^2\lambda^2 \sin\lambda x \cos a\lambda t = a^2(-A\lambda^2 \cos a\lambda t \cdot \sin\lambda x)$

$0=0$ – доказано

5. зададим ф-ю $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-x^3-y^3-z^3$

найдем частные производные

$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-3x^2}{2z-3z^2}$; $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y-3y^2}{2z-3z^2}$

найдем зн-е производных при $x_0=1$, $y_0=1$, $z=1$.

$z'_x = -\frac{2x-3x^2}{2z-3z^2}\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{2-3}{2-3} = -1$

$z'_y = -\frac{2y-3y^2}{2z-3z^2}\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{2-3}{2-3} = -1$

тогда дифф-ал имеет вид:

$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = -\Delta x - \Delta y$

найдем приближенное зн-е $z(1,1;1,1)$. Обозначим:

$x = x_0 + \Delta x \Rightarrow x_0 = 1; \Delta x = 0,1$

$y = y_0 + \Delta y \Rightarrow y_0 = 1; \Delta y = 0,1$

Приближенное зн-е вычислим по формуле:

$z|_{x=1,1,\, y=1,1} \approx z|_{x=1,\, y=1} + dz$, тогда: $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$

$z|_{x=1,1;\, y=1,1} \approx 1 - 1 \cdot 0,1 - 1 \cdot 0,1 = 1 - 0,2 = \underline{0,8}$