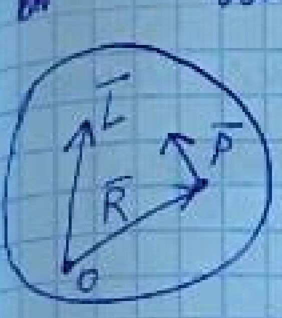
Лекция 3. Закон сохранения момента импульса



• Производная по времени векторного произведения: $\frac{d(\bar a \times \bar b)}{dt} = \frac{d\bar a}{dt} \times \bar b + \bar a \times \frac{d\bar b}{dt}$

• Вектор момента импульса

Вектором момента импульса отн-но точки О наз., вектор $\boxed{\bar L = \bar R \times \bar p}$, $\bar p = m\bar v$, $\bar R$ - радиус-вектор из т. О

вектор $\bar L \perp \bar R$, $\bar L \perp \bar p$ т-ка О - полюс

$$\frac{d\bar L}{dt} = \frac{d\bar R}{dt} \times \bar p + \bar R \times \frac{d\bar p}{dt}$$

, где $\frac{d\bar R}{dt} \times \bar p = 0$, т. к. $\bar v \times (m\bar v) = \bar 0$ $\cancel{\frac{d\bar p}{dt}}$

$$\frac{d\bar L}{dt} = \bar R \times \frac{d\bar p}{dt} \qquad \frac{d\bar p}{dt} = \bar F$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar L}{dt} = \bar R \times \bar F$$

$\bar M = \bar R \times \bar F$ - момент силы

Итого имеем: $\boxed{\frac{d\bar L}{dt} = \bar M}$ - производная от вектора момента импульса отн-но точки равна моменту действ. сил отн-но этой точки.

Свойства $\bar M$: $\bar M \perp \bar F$; $\bar M \perp \bar R$

Момент силы отн-но оси - вектор.

• В системе отсчета, где центр масс тела покоится $\bar p_c = \bar 0$, суммарный момент импульса не зависит от точки, относительно которой он вычисляется

Если расс-тся движение твердого тела, то возможное движение в случае $\bar p_c = \bar 0$ - это вращение вокруг центра масс. В этом смысле момент импульса отвечает вращательное движение системы (тела).

Производная от вектора суммарного момента импульса системы равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему.

• Уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвиж. оси

Момент импульса твердого тела вокруг оси z:

$$L_z = I_z \omega$$

Отсюда:

$$\boxed{I_z \varepsilon = M_{внеш}} \qquad (F = m\bar{a})$$

мера инертности при вращ. движении.

Момент импульса - L

$\boxed{L = I\omega}$

$$[L] = \frac{кг \cdot м^2}{с}$$

Моментом импульса тела отн-но неп. оси наз. физ. величина равная произведению момента инерции тела отн-но этой оси на его угловую скорость.

В СИ за ед. момента импульса принимается, момент импульса тела с моментом инерции 1 кг · м² и угловой скоростью вращения вокруг соответствующей оси 1 радиан/секунду.

$$\boxed{M = \frac{dL}{dt}}$$

(Производная момента импульса - это момент силы)

~~Опр~~ Изменение момента импульса тела за б.м. промежуток времени равно произведению момента действ. на него силы на длительность б.м. времени ($M\Delta t = \Delta L$)

$$L_{iz} = m_i v_i r_i$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} (m_i v_i r_i)$$

$v = \omega r$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I_z \omega$$

$$\boxed{I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z}$$

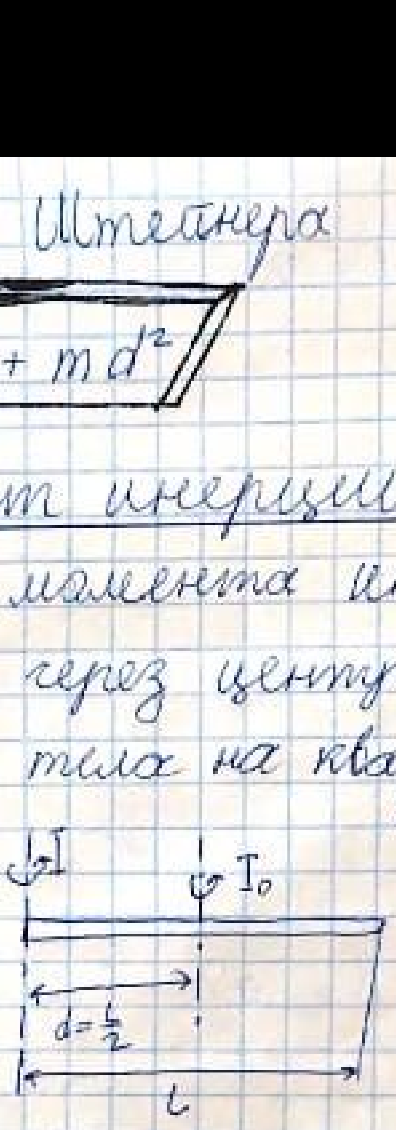
$$\boxed{L_z = I_z \omega}$$

Теорема Штейнера (теорема о || осях)

$$\boxed{I = I_0 + md^2}$$

Момент инерции тела от-но любой оси равен сумме момента инерции тела от-но || оси, проходящей через центр масс тела и произведению массы тела на квадрат расстояния между этими осями

Пример:



$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I = I_0 + md^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{3}{12} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

Основное ур-ние динамики вращательного движения.

$v = \omega R$

$\omega = \frac{v}{R}$

$a_y = \frac{v^2}{r}$; $a_y = \omega^2 r$

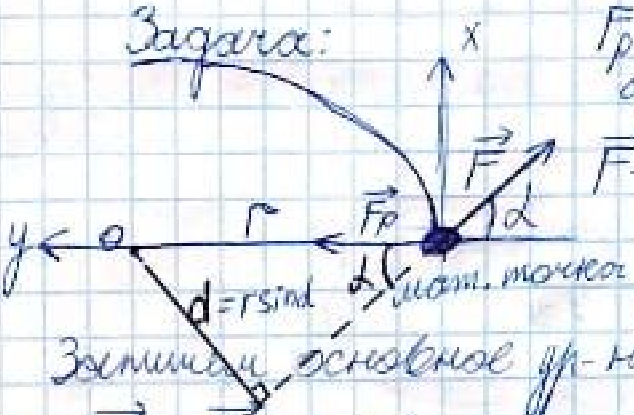
$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon r$

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_y^2}$

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ (произв. по t) - угловое ускорение

$a_\tau = \varepsilon r$

Задача:



F_p - сила реакции стержня

$\vec{F}$ - сила действ. на мат. точку

d - плечо

(m)

• Масса - мера инертности тела, к попытке его разогнать (поступательное движение)

• Момент инерции (I) - мера инертности тела, к попытке его раскрутить (вращательное движение)

$\boxed{M = I \cdot \varepsilon}$ осн-ное ур-ние вращательного движения

M - алг. сумма моментов сил, действующих на тело

I - момент инерции тела

Опр.

Алгебраическая сумма моментов сил, действующих на тело, равна произведению момента инерции тела на его угловое ускорение.

Запишем основное ур-ние динамики

$\vec{F} + \vec{F_p} = m\vec{a}$

M - момент силы

OX: $\vec{F}\sin\alpha = m a_x$ (1)

OY: $-\vec{F}\cos\alpha + \vec{F_p} = m a_y$ (2)

$a_x = a_\tau$; $a_y = a_y$

$a_\tau = \varepsilon r \Rightarrow$ перепишем (1):

$\vec{F}\sin\alpha = m\varepsilon r$

$\varepsilon = \frac{\vec{F}\sin\alpha}{mr} \quad | \cdot \frac{r}{r}$

$\varepsilon = \frac{\vec{F} r \sin\alpha}{mr^2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\vec{F} d}{mr^2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{M}{mr^2}$ (3)

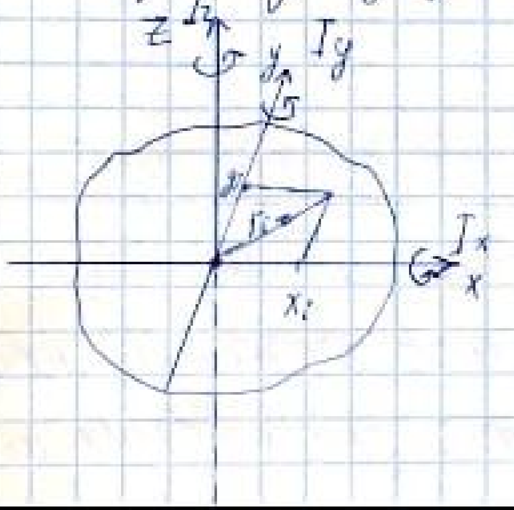
Из (3): $M = mr^2 \cdot \varepsilon$

$(\vec{F} = m \cdot \vec{a})$

мера инертности

Теорема о взаимно перпендикулярных осях

$I_z = I_x + I_y$



Вычисление моментов инерции тел различной формы

Момент инерции составного тела равен сумме моментов инерций сост. частей

$M=(I_1+I_2)\varepsilon \Rightarrow M=I\varepsilon$

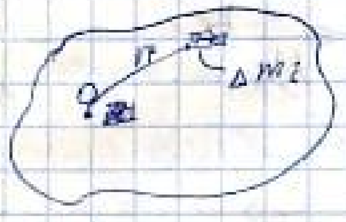
Момент инерции зависит от:
1) Массы ($I\sim m$)
2) Размеров ($I\sim$ размер^2)
3) Положения оси вращения

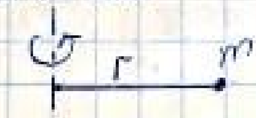
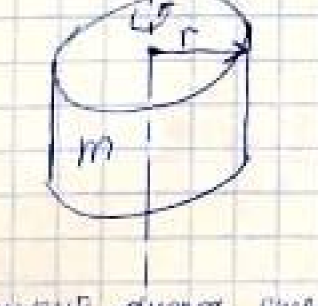
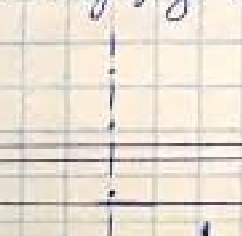
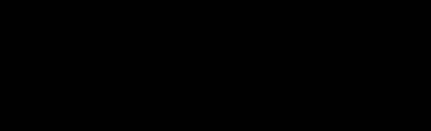
Момент Инерции I для мат. точки:

$I=mr^2$

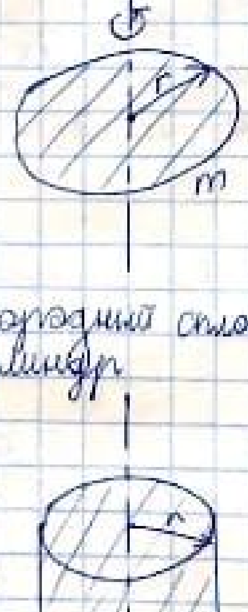
Если мы хотим раскрутить тело произвольной формы: вокруг произв. оси О

$$I=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\cdot r_i^2$$

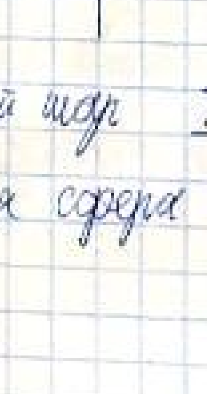


Тело	I, $[I]=$ кг $\cdot$ м^2
мат. точка 	$I=mr^2$
Тонкое кольцо 	$I=mr^2$
Тонкостенный цилиндр 	$I=mr^2$
Тонкий однород. стержень 	$I=\frac{1}{12}ml^2$

Однородный диск $I=\frac{1}{2}mr^2$



Однородный сплошной цилиндр $I=\frac{1}{2}mr^2$



Однородный шар $I=\frac{2}{5}mr^2$

Однородная сфера $I=\frac{2}{3}mr^2=\frac{2}{3}mr^2$