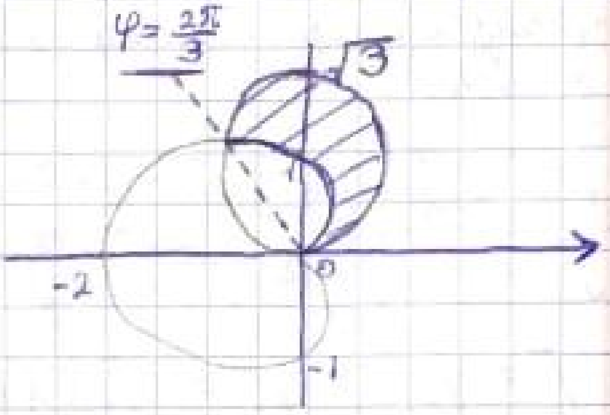
ДЗ Маляев ИУ6-22Б Вариант 19.

№1. Вычислить пл-дь фигуры, огр-й ок-тью $r=\sqrt{3}\sin\varphi$ и кардиоидой $r=1-\cos\varphi$ (вне кардиоиды)



• найдем угол т. п-я:

$\sqrt{3}\sin\varphi = 1-\cos\varphi$

$\sin\varphi\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\varphi=\frac{1}{2}$

$\sin(\varphi+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\\ \varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}\varphi=0\\ \varphi=\frac{2\pi}{3}\end{array}$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}3\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1-\cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{3}{2\cdot 2}\int_0^{2\pi/3}(1-\cos2\varphi)d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

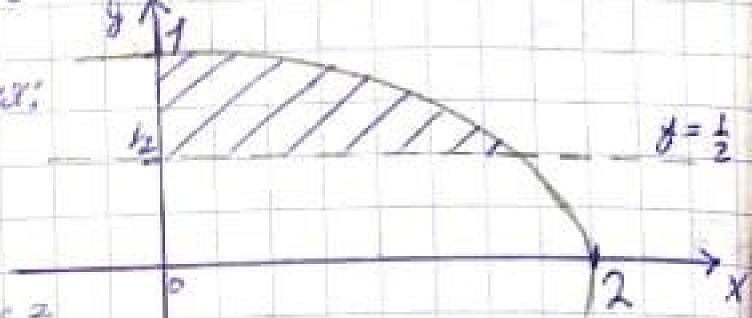
$$=\frac{3}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}-\frac{3}{8}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}d\sin2\varphi-\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}+\sin\varphi\Big|_0^{2\pi/3}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+\cos2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{3}{8}\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}-\frac{1}{8}\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}=$$

$$=\frac{6\pi}{12}-\frac{3}{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{16}=\frac{12\sqrt{3}}{16}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$ – ответ

№2. Найти V тела, обр-го вращением вокруг OY фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ для $y \geq \frac{1}{2}$



• найдем пределы интегрирования:

$y = \sin t$

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin t = 1 \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \end{array}$$

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dy = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\, y'(t)\, dt = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \cdot \cos t\, dt =$$

$$= 4\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt = 4\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\, d\sin t =$$

$$= 4\pi \sin t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4\pi \sin^3 t}{3} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 4\pi \cdot \frac{5}{24} = \frac{5\pi}{6}$$

ответ

№3. Вычислить S пов-ти, обр-ой вр-ем вокруг оси OX дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$

$$y^2 = 4 + x \Rightarrow y = \pm\sqrt{4+x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}}$$

$$S = 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{4+x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4(4+x)}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{4+x} \cdot \sqrt{\frac{4x+17}{4(4+x)}}\, dx = 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{x + \frac{17}{4}}\, dx =$$

$$= 2\pi \left(x + \frac{17}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_{-4}^{2} = \frac{4\pi}{3}\left(\left(2 + \frac{17}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(-4 + \frac{17}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{125}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{124}{8} = \frac{62\pi}{3}$$ - ответ

4. Исследовать на сходимость:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+3x+1} \cdot \ln x}$$

$$\frac{1}{x\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}} \cdot \ln x} > \frac{1}{2x\ln x}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x\ln x} = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \frac{1}{2}\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \ln|\ln x| - \frac{1}{2}\ln|\ln 2|$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln|\ln x| = \infty \Rightarrow$ интеграл расходится

$\Rightarrow$ исходный интеграл $\boxed{\text{расходится}}$ по пред. признаку сравнения.

5 Исследовать на сходимость

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$$ точка разрыва – 1;

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^2)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{4(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}(1-x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{4(1-x)}}$$ – сходится по признаку сх-ти $\left(\frac{1}{4} < 1\right)$

$\Rightarrow$ исходный интеграл $\boxed{\text{сходится}}$ по предельному признаку сравнения.