

Мамеев И.А. ИУБ-22Б Вариант 19 Задача 4-3

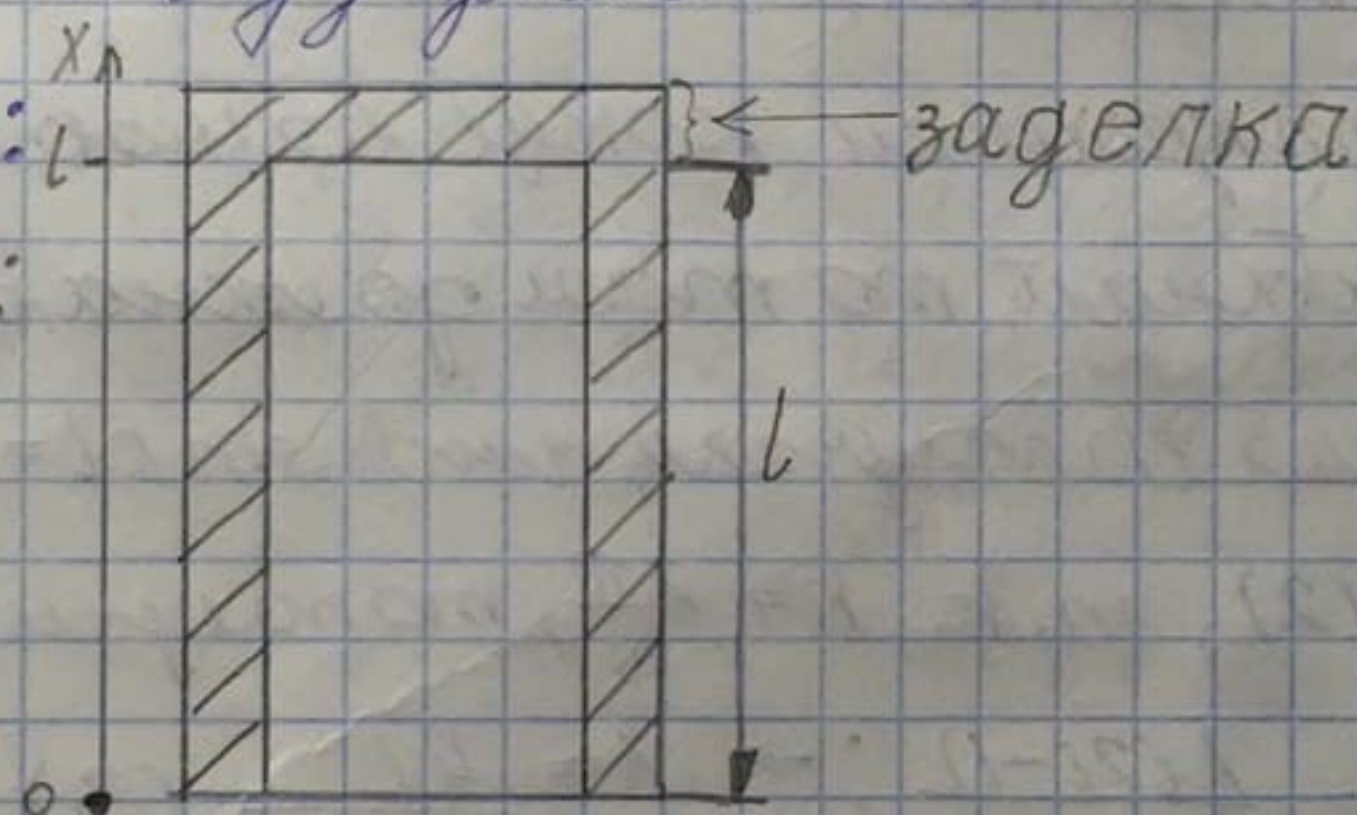
Для прямого вертикального волновода (трубы) длиной l , расположенного в среде (воде), как указано на рисунке необходимо:

- вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в волноводе, при которых в нем образуется стоячая волна
- указать какая частота колебаний явл. основной, а какие относятся к обертонам
- определить частоту и длину волны i -й гармоники
- для этой гармоники нарисовать вдоль волновода качественную картину: а) стоячей волны амплитуд смещений б) стоячей волны амплитуд давлений

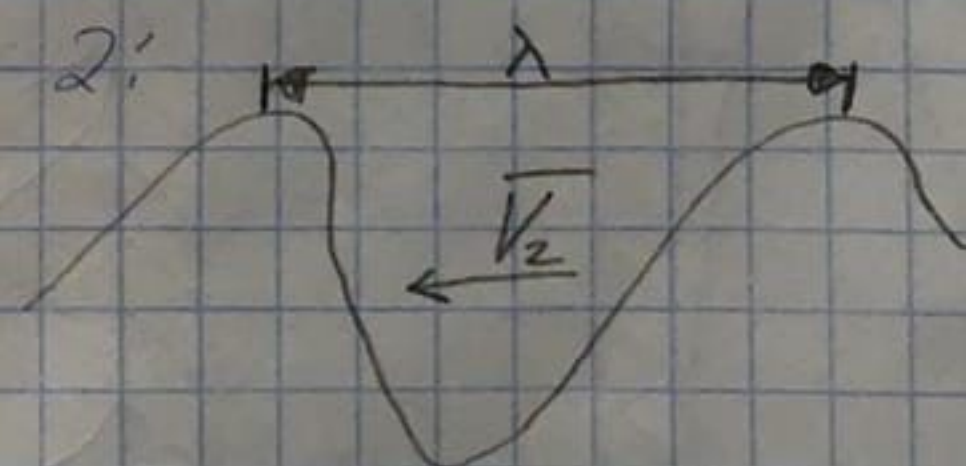
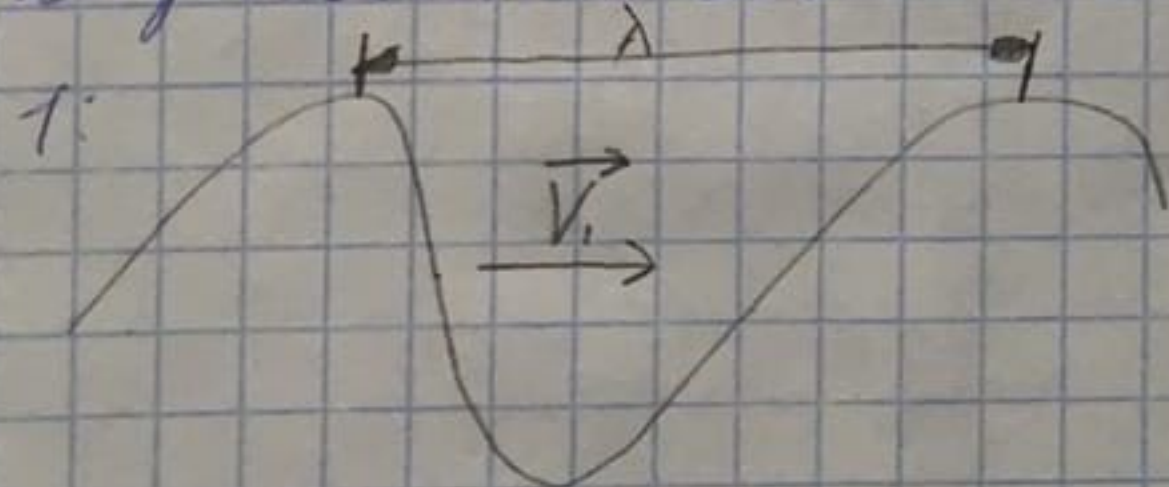
Дано:
 $l = 1,5 \text{ м}$
 $i = 4$
 $c_1 = 1500 \text{ м/с}$
 среда - вода

Найти:
 $\omega, \omega_i, \lambda_i - ?$

Решение:
 Волновод:



Расс-м 2 одинаковые волны, движущиеся в различных направлениях:



Данные волны распространяются по след. закону:

$$E_1(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$E_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

Поскольку 2-я волна будет отражаться от заделки волновода длиной l , то по волноводу будет распространяться обратная отраженная волна со сдвигом фазы на величину π .

где k - волновое число
 $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Следовательно уравнение отраженной волны примет вид: $E_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi)$

При наложении прямой и обратной волн получаем стоячую волну:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E_1 + E_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi) = \\ &= A (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi)) = \\ &= A (2 \cos(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx - 2kl - \pi}{2}) \cdot \cos(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx + 2kl + \pi}{2})) = \\ &= 2A \cos(kl - kx + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\omega t - kl - \frac{\pi}{2}) \\ \Rightarrow E(x, t) &= 2A \sin(kl - kx) \cdot \sin(\omega t - kl) \end{aligned}$$

, где $A_{ст} = 2A \sin(kl - kx)$ - амплитуда стоячей волны

При $x = l$, $A_{ст} = 0$. Сл-но, со стороны заделки будет находиться узел стоячей волны

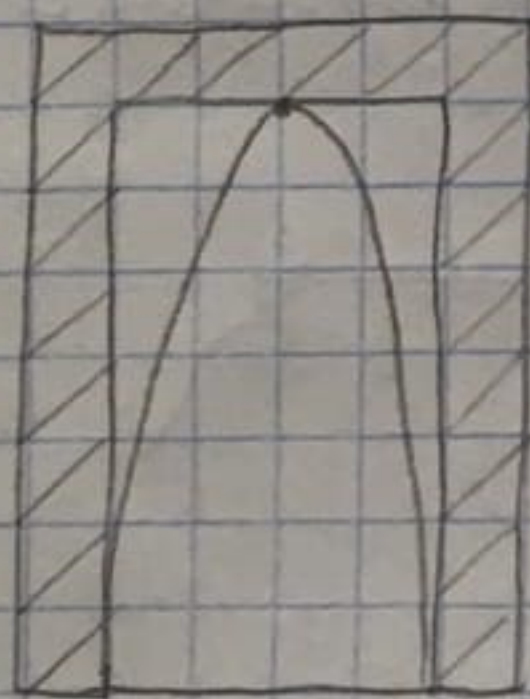
При $x = 0$, $A_{ст} = 2A \sin kl$ (1)

так как на открытом конце волновода находится источник колебаний, то там должна быть пучность.

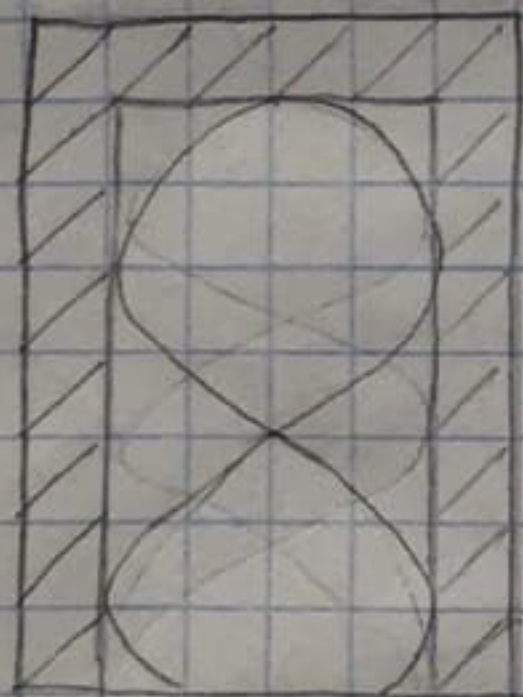
Сл-но, из ур-ния (1) получаем, что $\sin kl = 1$, откуда:

$$kl = \pi i - \frac{\pi}{2} \quad (2), \text{ т.к. } k = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ то получим:}$$

$$l = \frac{\lambda}{2} (i - \frac{1}{2}) = \frac{\lambda(2i-1)}{4}; \Rightarrow \lambda = \frac{4l}{(2i-1)} \quad (3) \text{ - ограничение для длины стоячей волны}$$



При $i=1$; $\lambda = 4l$



При $i=4$; $\lambda = \frac{4l}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{4l}{7}$

Так как $\lambda = \frac{c}{\nu}$, то подставив в (3), находим частоты, при которых в данном стержне будет образовываться стоячая волна:

$$\nu = \frac{c}{2l} (i - \frac{1}{2}) = \frac{ci}{2l} - \frac{c}{4l} = \frac{c(2i-1)}{4l}$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c(2i-1)}{4L} = \frac{\pi c(2i-1)}{2L}$

$\omega = \frac{\pi c(2i-1)}{2L}$ - формула для возможных частот продольных волн, при которых образуется стоячая волна.

При $i=1$: $\omega = \frac{\pi c}{2L}$ - основная частота

При $i>1$ частоты относятся к обертонам

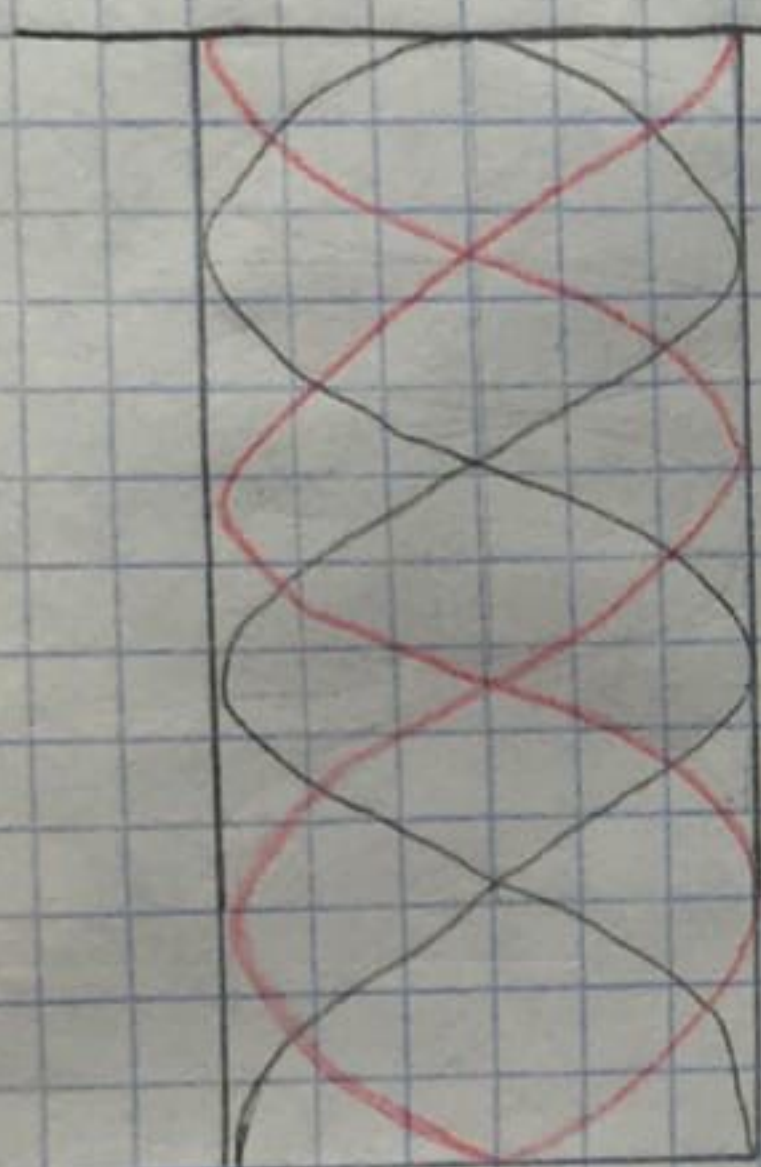
При $i=4$:

$\omega_i = \frac{\pi c(2 \cdot 4 - 1)}{2L} = \frac{7 \cdot \pi \cdot 1500}{2 \cdot 1,5} = 10\,990 \text{ Гц}$

$\lambda_i = \frac{4L}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{4 \cdot 1,5}{7} \approx 0,857 \text{ м}$

Рисунок 1.

, заглушка



— - стоячая волна амплитуды давлений

— - стоячая волна амплитуды смещений

Пам, где узлы амплитуды смещений, там же пучности амплитуды давлений.

Ответ: 1) $\omega = \frac{\pi c(2i-1)}{2L}$; $i \in \mathbb{N}$

2) При $i=1$, $\omega = \frac{\pi c}{2L}$ - основная частота

при $i>1$ - частоты относятся к обертонам

3) $\omega_i = 10\,990 \text{ Гц}$

$\lambda_i = 0,857 \text{ м}$

4) Рисунок 1.