

Задача 3-3 Вариант 19 ИУ6-22Б Мамяев И.А.

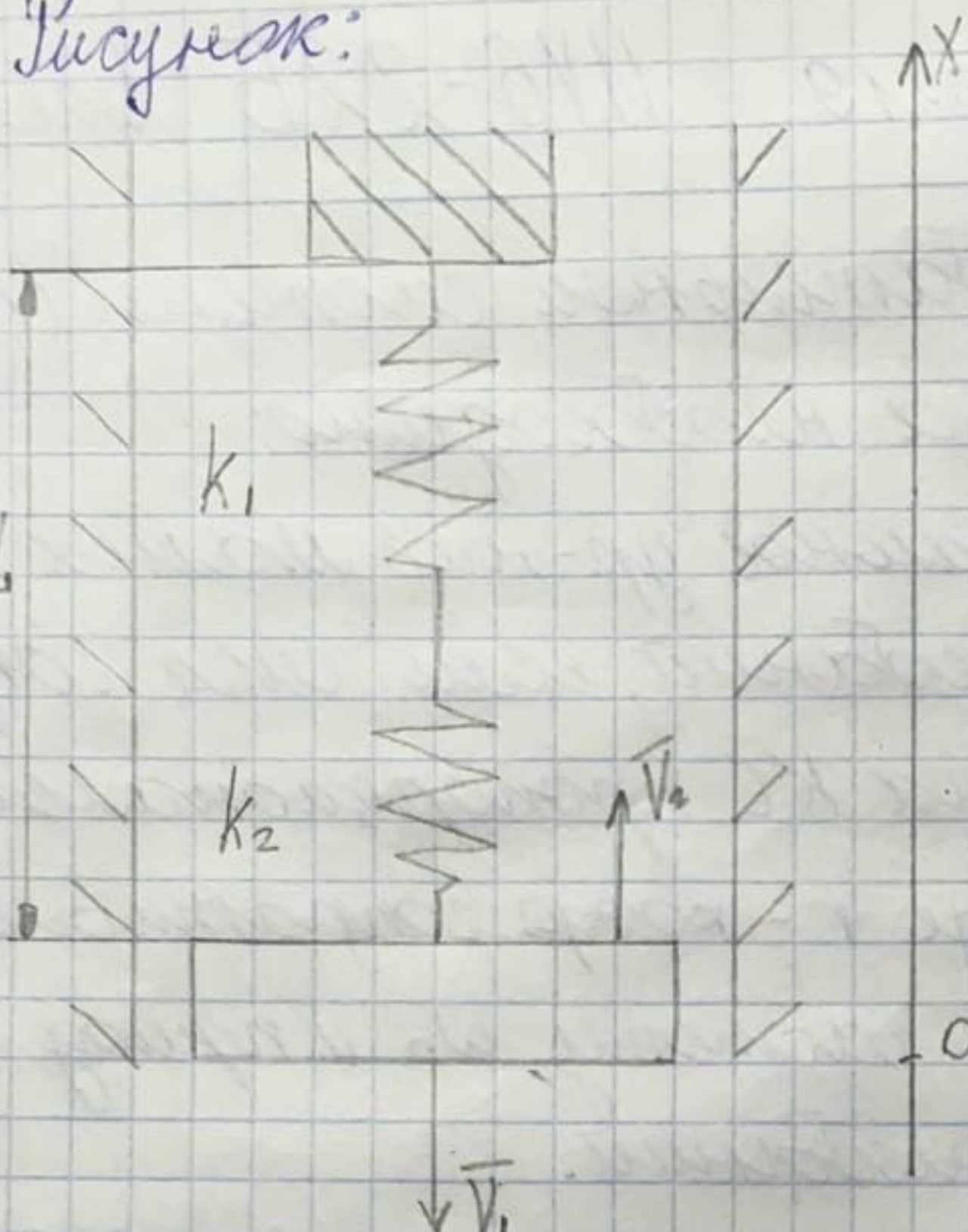
Для конкретной колебательной системы (КС), представленной на рисунке необходимо:

- 1) Вывести дифференциальное уравнение малых свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движения тела КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$, где γ - коэф. сопротивления
- 2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
- 3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
- 4) Вычислить логарифмический декремент затухания.
- 5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальную амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
- 6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний

КС состоит из шайбы массой m и двух упругих пружин, имеющих жесткости k_1 и k_2 . Движение КС происходит в окр. среде с малыми вязкими свойствами. Колебания происходят по действию пружин, соединенных последовательно. Массой пружин пренебречь. Длины l_1 и l_2 пружин в недеформированном состоянии равны l_1 и l_2 . L - общая длина пружин в деформированном состоянии, при $t=0$. Вязкостный вектор нах. ск-ти шайбы равен \vec{v} . Шайбу, нах. в нач. равновесии смещают форс-е L , а затем штырьком придают ей в нач. момент времени $t=0$ ск-ть \vec{v} . В рез-те КС приходит в колебательное движение.

Дано:
 $\Gamma = 0,6 \text{ кг/с}$
 $K_1 = 12 \text{ Н/м}$
 $K_2 = 10 \text{ Н/м}$
 $m = 0,04 \text{ кг}$
 $L_{10} = 0,2 \text{ м}$
 $L_{20} = 0,2 \text{ м}$
 $L = 0,48$
 $V_1 = 0,08 \text{ м/с}$
 $V_2 = 0$
 $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$
 $S = 0,001 \text{ м}^2$
 $\varphi = \pi/6$

Рисунок:



Найти:
 ω_0, T_0, ω, T - ?
 A_0, φ_0 - ?

Решение:

① Выведем ур-ние свободных затухающих колебаний
 В качестве исходного ур-ния для вывода диф. ур-ния колебаний возьмем ур-ние поступательного движения тв. тела, записанное в проекции на ось X.

$$m a_x = \sum_i F_{ix}, \text{ где } a_x = \ddot{x} - \text{проекция вектора ускор. на ось } x$$

F_{ix} - проекция вектора i-й силы, действ. на тело, на ось X.

$$F_{\text{упр}} = -K_{\text{св}} \Delta x; \quad F_{\text{сопр}} = -\Gamma \cdot V; \quad V = \dot{x}$$

Так как пружины соединены последовательно, то:

$$K_{\text{св}} = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на ось X:

$$m a_x = F_{\text{упр}} + F_{\text{сопр}}; \text{ Подставим значения } F_{\text{сопр}} \text{ и } F_{\text{упр}}.$$

$$m \ddot{x} = - \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2} \cdot \Delta x - \Gamma \cdot \dot{x} \quad | : m$$

$$\ddot{x} + \frac{K_1 \cdot K_2}{(K_1 + K_2)m} \cdot \Delta x + \frac{\Gamma}{m} \cdot \dot{x} = 0 \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (2)$$

Подставим (2) и (3) в (1), получим:

$$B = \frac{\Gamma}{2m}, \quad \text{где } B - \text{коэф. затухания (по ур.)}$$

$$\ddot{x} + 2B\dot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0 - \text{диф. ур-ние свободных затухающих колебаний.} \quad (4)$$

② Найдем ω_0 и T_0

Из ур-ния (2): $\omega_0 = \frac{\sqrt{K_1 \cdot K_2}}{\sqrt{(K_1 + K_2)m}} = \frac{\sqrt{12 \cdot 10}}{\sqrt{22 \cdot 0,04}} \approx 12 \text{ рад/с}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \approx 0,524 \text{ с}$$

③ Найдем ω и T

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - B^2} = \sqrt{144 - 7,5^2} \approx 9,4 \text{ рад/с}$$

$$\text{, где } B = \frac{\Gamma}{2m} = \frac{0,6}{2 \cdot 0,04} = 7,5 \text{ с}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9,4} \approx 0,668 \text{ с}$$

④ Найдем логарифмический декремент затухания
 $\delta = B \cdot T = 7,5 \cdot 0,668 = 5,01$

⑤ Найдем A_0 и φ_0

Решение ур-ния свободных затухающих колебаний имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-Bt} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ (5)

Координата тела при $t=0$

$$x(0) = A_0 \cdot 1 \cdot \cos(\varphi_0) = A_0 \cdot \cos \varphi_0$$

$$L - l_{10} - l_{20} = A_0 \cdot \cos \varphi_0 \quad (6)$$

Найдем ур-ние для скорости, для этого продифференцируем ур-ние (5):

$$\dot{x}(t) = A_0 (-B e^{-Bt} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega e^{-Bt} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$$

$$v(t) = -A_0 \cdot e^{-Bt} (B \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega \sin(\omega t + \varphi_0))$$

Проекция ск-ти при $t=0$:

$$v_1 = v_x(0) = -A_0 (B \cos \varphi_0 + \omega \sin \varphi_0) \quad (7)$$

Разделим (7) на (6):

$$\frac{v_1}{L - l_{10} - l_{20}} = \frac{-A_0 (B \cos \varphi_0 + \omega \sin \varphi_0)}{A_0 \cos \varphi_0}$$

$$\frac{v_1}{L - l_{10} - l_{20}} = -B - \omega \operatorname{tg} \varphi_0$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-v_1}{(L - l_{10} - l_{20})\omega} - \frac{B}{\omega} \Rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg} \left(\frac{v_1}{(L - l_{10} - l_{20})\omega} + \frac{B}{\omega} \right) \quad \downarrow$$

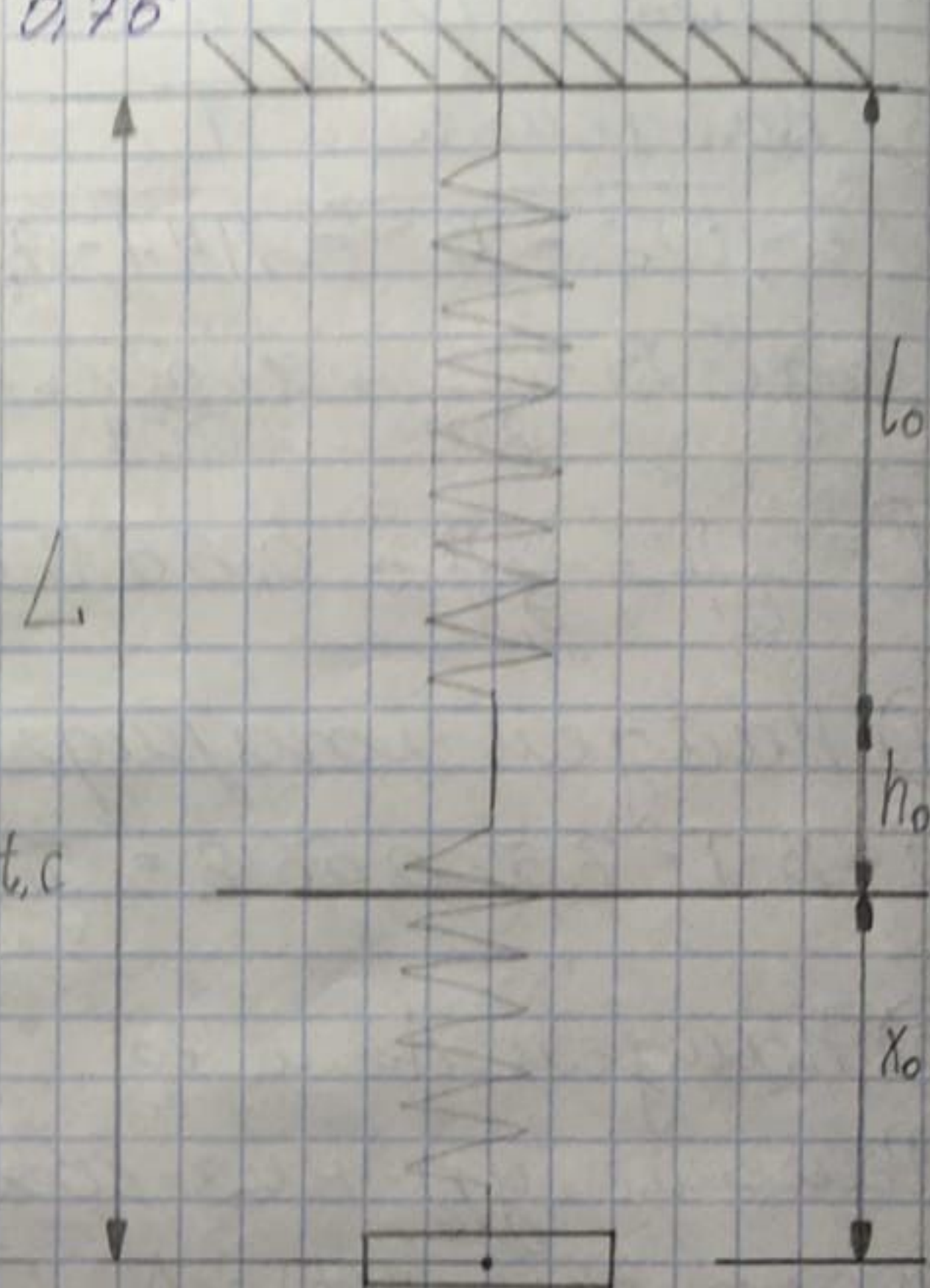
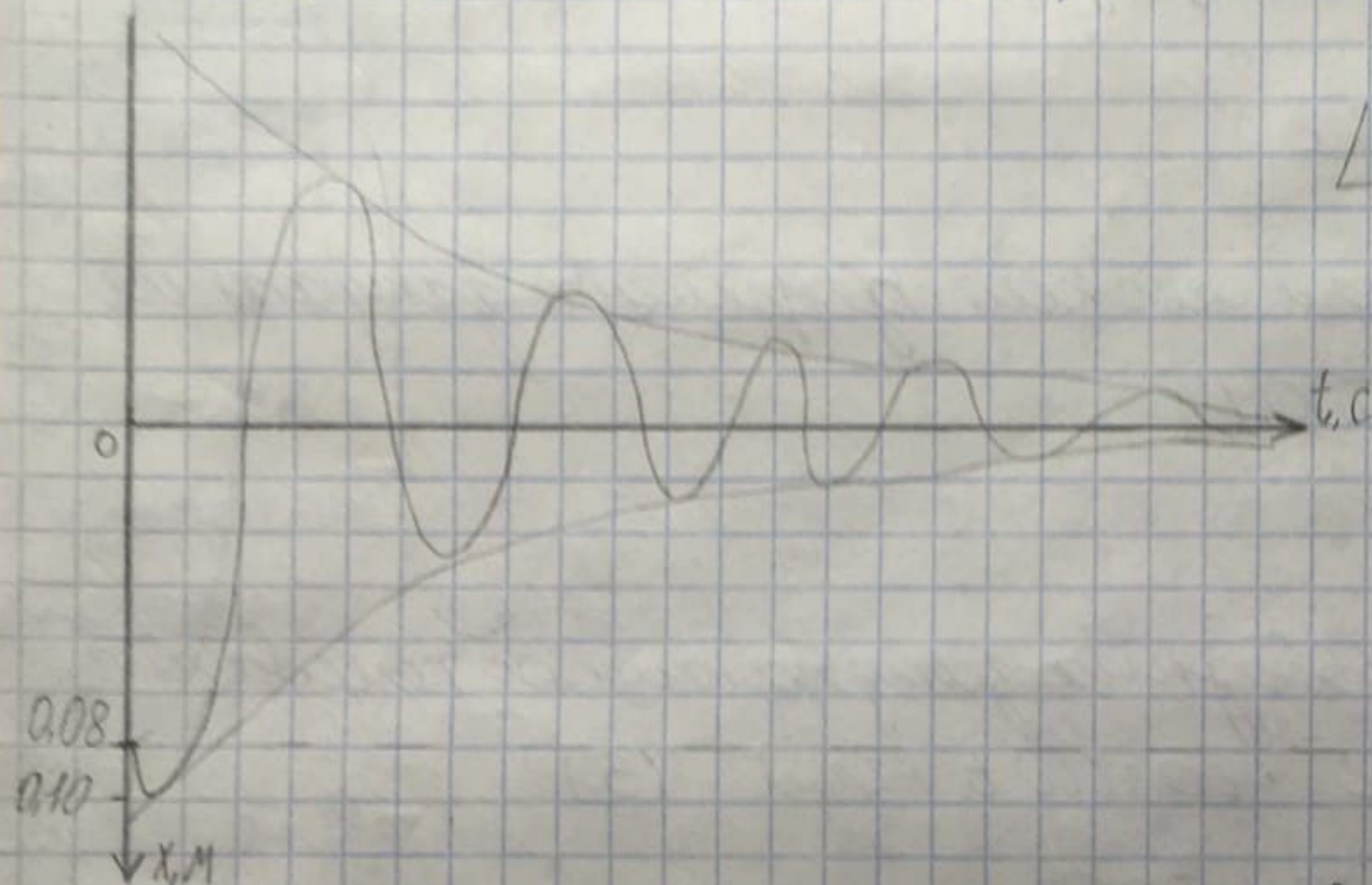
$$\varphi_0 = -\arctg\left(\frac{0,08}{\sqrt{(0,48-0,2-0,2) \cdot 9,4} + \frac{7,5}{9,4}}\right) = -\arctg(0,9) \approx -0,7 \text{ рад}$$

Из (6) найдем A_0 :

$$\frac{L - l_{10} - l_{20}}{\cos \varphi_0} = A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{0,48 - 0,2 - 0,2}{\cos(-0,7)} = \frac{0,08}{0,76} \approx 0,1 \text{ м}$$

⑥ Запишем уравнение колебаний

$$x(t) = 0,1 \cdot e^{-2,5 \cdot t} \cdot \cos(9,4t - 0,7)$$



- x_0 - начальное смещение массы от пол. равновесия
- $l_0 = l_{10} + l_{20}$ - длина пружины в свобод. состоянии
- h_0 - дот. растяжение пружины в пол. равновесии
- $h_0 = mg \cdot \frac{(k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}$

Ответ: 1) $\ddot{x} + 2B\dot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0$

2) $\omega_0 = 12 \text{ рад/с}$

$T_0 = 0,524 \text{ с}$

3) $\omega = 9,4 \text{ рад/с}$

$T = 0,668 \text{ с}$

4) $\delta = 5,01$

5) $\varphi_0 = -0,7 \text{ рад} = -40,1^\circ$

$A_0 = 0,1 \text{ м}$

6) $x(t) = 0,1 \cdot e^{-2,5t} \cdot \cos(9,4t - 0,7)$