Занятия 13-14. Вычисление длины дуги и площади поверхности вращения.

Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина её дуги, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

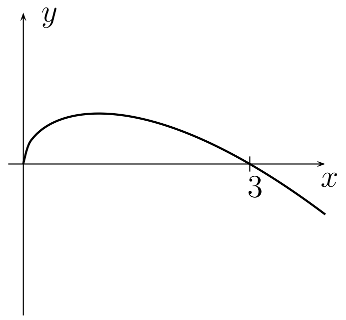
Длина дуги гладкой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, заданной параметрически,

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Если задано полярное уравнение гладкой кривой $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

6.494. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью Ox.



$\triangleleft$ $y' = -\dfrac{1}{3}\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}(3-x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $(y')^2 = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4x}$;

$$l = \int\limits_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int\limits_0^3 \sqrt{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}}\, dx = \int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{4x}}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx =$$
$$= \left|\frac{1}{3}x\sqrt{x} + \sqrt{x}\right|_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}. \triangleright$$

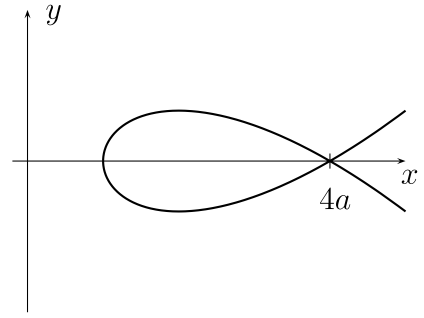
6.506. Найти длину петли кривой $x = a(t^2+1)$, $y = \dfrac{a}{3}(t^3 - 3t)$ $a > 0$.

$\triangleleft$ Видим, что кривая симметрична относительно оси Ox.
Найдём точку самопересечения кривой:

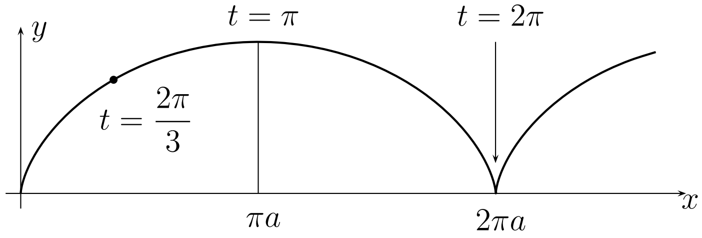
$$\begin{cases} a(t_1^2+1) = a(t_2^2+1) \\ a(t_1^3 - 3t_1)/3 = a(t_2^3 - 3t_2)/3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = \pm t_2 \\ t_1^3 - 3t_1 = \pm(t_1^3 - 3t_1) \end{cases}$$

$t_1^3 - 3t_1 = 0 \Rightarrow t = 0$ или $t = \pm\sqrt{3}$.

$$l = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4a^2t^2 + a^2(t^2-1)^2}\, dt =$$
$$= 2a\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1}\, dt = 2a\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2+1)^2}\, dt =$$
$$= 2a\int\limits_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)\, dt = 2a\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) = 4a\sqrt{3}. \triangleright$$



6.507. На циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит длину первой арки циклоиды в отношении $1 : 3$, считая от начала координат ($a > 0$).



$\triangleleft$ $x'_t = a(1 - \cos t),\ y'_t = a\sin t$.

Длина участка циклоиды от начала координат до точки $t = \tau$, $\tau \in [0, 2\pi]$,

$$L(\tau) = \int\limits_0^\tau \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = \int\limits_0^\tau \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int\limits_0^\tau \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{2}\int\limits_0^\tau \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int\limits_0^\tau \left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt = (\text{т.к. } \tau \in [0, 2\pi]) = 2a\int\limits_0^\tau \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int\limits_0^\tau \sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= 4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^\tau = 4a\left(1 - \cos\frac{\tau}{2}\right).$$

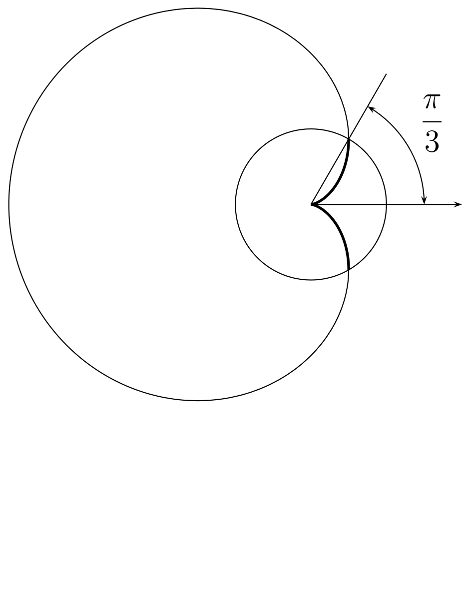
Таким образом, длина одной арки циклоиды $L(2\pi) = 8a$. Найдём такое τ^*, что $L(\tau^*) = \frac{1}{4}L(2\pi) = 2a$:

$$4a\left(1 - \cos\frac{\tau^*}{2}\right) = 2a \ \Rightarrow\ \cos\frac{\tau^*}{2} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \tau^* = \frac{2\pi}{3}.$$

Искомая точка имеет координаты

$$x(\tau^*) = a\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad y(\tau^*) = a\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3a}{2}. \triangleright$$

6.509. Найти длину дуги кардиоиды $r = 2(1 - \cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r = 1$ ($a > 0$).



$\triangleleft$ Найдём точки пересечения кардиоиды и окружности:
$2(1 - \cos\varphi) = 1,\ \varphi \in [0, 2\pi] \ \Rightarrow\ \cos\varphi\dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$.

$$\frac{L}{2} = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{4(1-\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\,d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/3} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi = 8\int\limits_0^{\pi/3} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 8\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = 8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ L = 8\left(2 - \sqrt{3}\right). \triangleright$$

Площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой вокруг произвольной оси, выражается формулой

$$S = 2\pi \int\limits_A^B R\, dl,$$

где R — расстояние от точки на кривой до оси вращения, dl — дифференциал дуги, A и B — пределы интегрирования, соответствующие концам дуги.

В частности, площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Если дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$S_x = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

6.519 (а). Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Ox.

$\triangleleft$ Уравнение эллипса

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad y = \pm 2\sqrt{1 - x^2}.$$

$$f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}, \quad f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$S_x = 2 \cdot 2\pi \int\limits_0^1 2\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = 8\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 + \frac{4x^2}{1 - x^2}}\, dx =$$

$$= 8\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\sqrt{\frac{1 - x^2 + 4x^2}{1 - x^2}}\, dx = 8\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 3x^2}\, dx;$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{1+3x^2} \\ dv = dx \end{matrix} \right| = x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1+3x^2-1}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx = x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\sqrt{1+3x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}\right)dx =$$

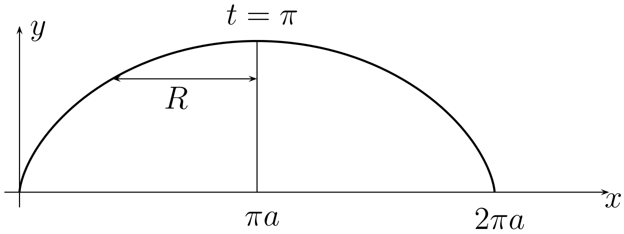
$$= 2 - \int_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{1+3x^2}} = 2 - \int_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2+1})\Big|_0^1 =$$

$$= 2 - \int_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3});$$

$$2\int_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3});$$

$$S_x = 8\pi\int_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx = 8\pi + \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3}). \triangleright$$

6.527. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, вокруг её оси симметрии.



$\triangleleft$ $x'_t = a(1-\cos t),\ y'_t = a\sin t.$

$$S = 2\pi\int_0^\pi (\pi a - x(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 2\pi\int_0^\pi (\pi a - a(t-\sin t))\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^\pi (\pi - t + \sin t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 2\pi a^2\int_0^\pi (\pi - t + \sin t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^\pi (\pi - t + \sin t)\sqrt{4\cdot\frac{1-\cos t}{2}}\,dt = 4\pi a^2\int_0^\pi (\pi - t + \sin t)\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

(т.к. $0 \leqslant t \leqslant \pi$, то $\sin t/2 \geqslant 0$)

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^\pi (\pi - t + \sin t) \sin\frac{t}{2}\, dt = 4\pi a^2 \int\limits_0^\pi (\pi - t)\sin\frac{t}{2}\, dt + 4\pi a^2 \int\limits_0^\pi \sin t \sin\frac{t}{2}\, dt;$$

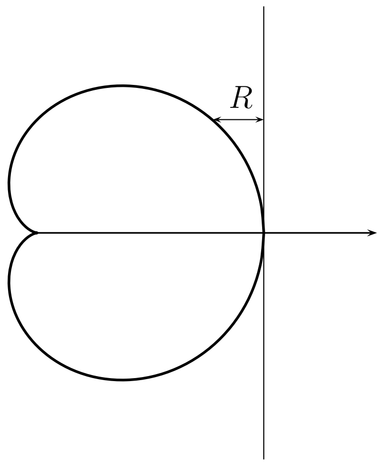
$$\int\limits_0^\pi (\pi - t)\sin\frac{t}{2}\, dt = \begin{vmatrix} u = \pi - t,\ v = -2\cos\dfrac{t}{2} \\ dv = \sin\dfrac{t}{2}\, dt \end{vmatrix} = -2\,(\pi - t)\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \left(-2\cos\frac{t}{2}\right)(-1)\, dt =$$

$$= 2\pi - \int\limits_0^\pi 2\cos\frac{t}{2}\, dt = 2\pi - 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 2\pi - 4.$$

$$\int\limits_0^\pi \sin t \sin\frac{t}{2}\, dt = 2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\, dt = 2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cdot 2\, d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

$$S = 4\pi a^2(2\pi - 4 + 4/3) = 4\pi a^2(2\pi - 8/3) = a^2\left(8\pi^2 - \frac{32}{3}\pi\right). \triangleright$$

6.530. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг касательной в её вершине $(2a, 0)$.



$\triangleleft$ $r' = -a\sin\varphi$; $R(\varphi) = 2a - a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$

$$S = 2\cdot 2\pi \int\limits_0^\pi R(\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^\pi (2a - a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi a \int\limits_0^\pi (2 - \cos\varphi - \cos^2\varphi)\sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^\pi (2 - \cos\varphi - \cos^2\varphi)\sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^\pi (2 - \cos\varphi - \cos^2\varphi)\sqrt{4\cdot\frac{1 + \cos\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2 \int\limits_0^\pi (2 - \cos\varphi - \cos^2\varphi)\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 8\pi a^2 \int\limits_0^\pi (2 - \cos\varphi - \cos^2\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2 \int\limits_0^\pi (1 - \cos\varphi + \sin^2\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi;$$

$$\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 2;$$

$$\int\limits_0^\pi \cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi \left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - 2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi - 4\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi - \frac{4}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3};$$

$$\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi 8\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\,d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 8\left(\frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{8}{3} - \frac{8}{5};$$

$$S = 8\pi a^2\left(2 - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - \frac{8}{5}\right) = 8\pi a^2\cdot\frac{12}{5} = \frac{96}{5}\pi a^2. \ \triangleright$$