Лекция 6. Колебания (продолжение)

Свободные затухающие колебания

Рас-м движение тела в вязкой среде под действием квазиупругой силы вблизи пол-я равновесия (движения грузика на невесом. пружине)

Ур-ние движения грузика: $ma = -kx - rv$ или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, r - коэф.сопр. ($\vec{F}_{сопр} = -r\vec{v}$)

Это ур-ние наз. уравнением свободных затухающих колебаний.

Если $r = 0$, то получим ур-ние свобод. незатухающих колебаний:

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и пот-ой энергии:

$$W_{мех.} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2}\right)$$

Для затух. колебаний мех. энергия не остается постоянной, а убывает:

$$\frac{dW_{мех.}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2\frac{x^2}{2}\right)\right\} = m(\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x}) = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) =$$

$$= m\dot{x}(-2\beta\dot{x}) = -r\dot{x}^2 < 0$$

Искать решение ур-ния св. зат. колебаний будем в виде $x = e^{\lambda t}$

Сокращая, получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\beta\cdot\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Поэтому решение ур-ния должно иметь вид:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} =$$

$$= e^{-\beta t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right)$$

, где C_1 и C_2 - постоянные коэф-ы.

Воспользуемся формулой Эйлера:

$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, где $i = \sqrt{-1}$

При $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ решение не описывает колебания

Колебания будут при $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

Введем обозн.: $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Тогда: $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\omega^2} = i\omega$ и решение ур-ния примет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

Оно описывает свободные колебания циклической частоты ω, затухающие с течением времени

Циклическая частота $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

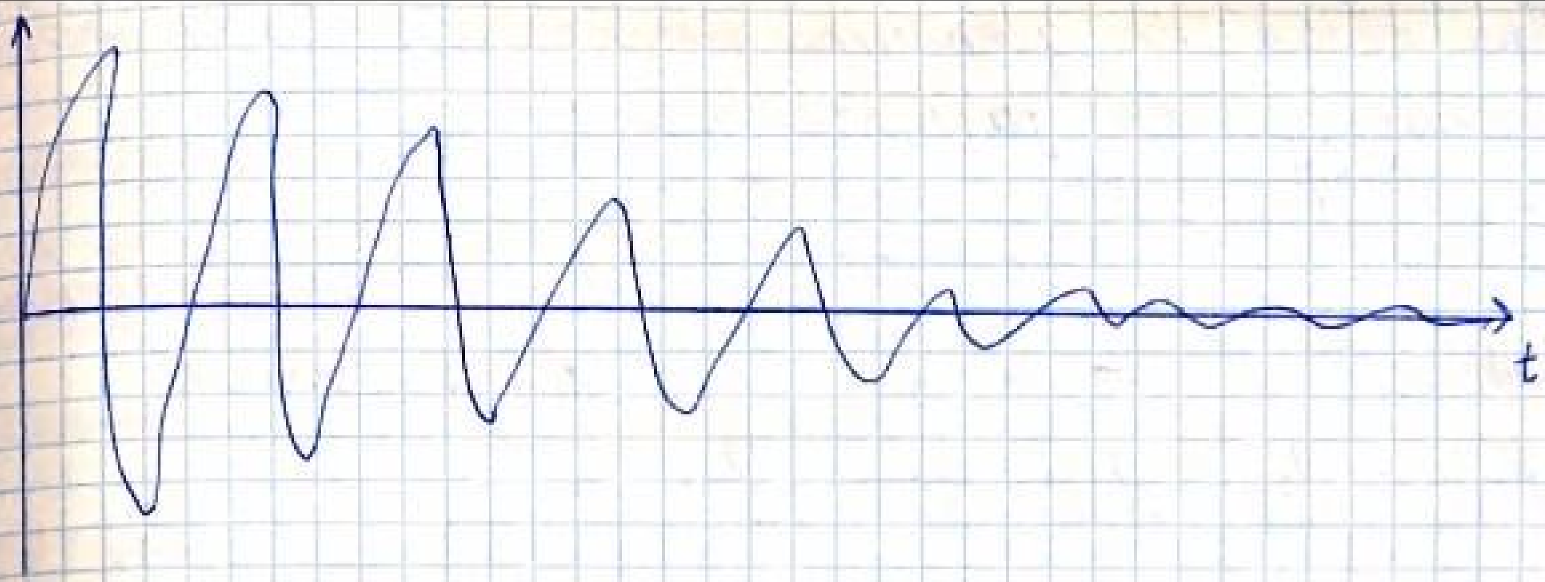
Необх. условие: $\beta < \omega_0$

Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ является амплитудой затухающих колебаний

С течением времени амплитуда убывает, - говорят, что колебания затухают.

Временем затухания (релаксации) наз. время τ, за которое амплитуда убывает в e раз.

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$



Число полных колебаний, сов. системой за это время

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}$$

Декремент затухания - отношение амплитуд колебаний спустя период:

$$\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

Логарифмический декремент затухания $\delta = \ln\Delta = \beta T$

Поэтому $N_e = \frac{1}{\delta}$

Величина $Q = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta}$ наз. добротностью колебательной системы

Энергию колебаний в момент t можно определить как

$$W = \frac{kA^2}{2} = \frac{kA_0^2 e^{-\beta t}}{2}$$

Убыль энергии за один период $W_1 - W_2 = \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{kA_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2} =$

$$= \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t}}{2}\left(1 - e^{-2\beta T}\right)$$

Рас-м отношение запасенной энергии к убыли энергии за 1 период:

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}}$$

При малом лог. декременте затухания $\delta = BT < 1$ воспользуемся разложением:

$$1 - e^{-2BT} = 1-(1-2BT+\ldots) \approx 2BT.$$

Т.к. $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - B^2}$ и при малых B можно приближенно считать $\omega \approx \omega_0$, то:

B - затухание

$$\frac{W}{W_1 - W_2} = \frac{1}{2BT} = \frac{1}{2B\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2B2\pi} = \frac{Q}{2\pi}.$$

! Для затухающих свободных колебаний добротность характеризует скорость убывания энергии при малых затуханиях.