РК-2 Моляев Иван ИУ6-22Б практика

Практика:

2. $y'' = (x+1)(y')^2$ $\qquad y(0)=3;\ y'(0)=-2$

Замена: $p(x) = y';\ y'' = p'$.

$p' = (x+1)p^2$

$\frac{dp}{dx} = (x+1)p^2 \Leftrightarrow \int\frac{dp}{p^2} = \int(x+1)\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{p} = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C_1$

учитывая $y'(0)=-2$: $\qquad -\frac{1}{y'} = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C_1 \ (*)$

$(*)$: $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}(0+1)^2 + C_1$

$C_1 = 0.$

$(*)$: $-\frac{1}{y'} = \frac{1}{2}(x+1)^2 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y = -2\int\frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -2\cdot\left(-\frac{1}{x+1}\right) + C_2 = \frac{2}{x+1} + C_2$

учитывая $y(0)=3$: $3 = \frac{2}{0+1} + C_2 \Rightarrow C_2 = 1.$

$\Rightarrow y = \frac{2}{x+1} + 1$. – ответ

3. $y'' + y = ctg\,x$

хар-ое ур-ние: $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow y_o = C_1\cos x + C_2\sin x$

$y_r = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$

• найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 & |\cdot\sin x \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = ctg\,x & |\cdot\cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x\sin x + C_2'(x)\sin^2 x = 0 & (1) \\ -C_1'(x)\sin x\cos x + C_2'(x)\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin x} & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $C_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \Leftrightarrow C_2'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$

$C_2(x) = \int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x} = \downarrow$

$$\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int\frac{1+\cos 2x}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x} + \frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x\,dx}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2}\int\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}\cos x = \int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x} - \frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x}$$

$$\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \cos x + C = C_2(x)$$

из (1) выразим $C_1'(x)$: $C_1'(x) = -\frac{C_2'(x)\sin x}{\cos x} =$

$= C_1'(x) = -\frac{\cos^2(x)\cdot\sin x}{\sin x\cdot\cos x} = -\cos x$

$C_1(x) = -\int\cos x\,dx = -\sin x + C$

$\Rightarrow y_ч = -\sin x\cos x + \left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \cos x\right)\sin x =$

$= \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$

$y = y_0 + y_ч = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$ — ответ

① Могут, если ф-ии л.н.з., проверим:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x - e^x x = e^x(1-x) \neq 0$$

$\Rightarrow$ ф-ии могут образовывать ФСР.

$y_1 = e^x;\ y_2 = x$:

$$\begin{vmatrix} y & e^x & x \\ y' & e^x & 1 \\ y'' & e^x & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y(-e^x) - e^x(-y'') + x(y'e^x - y''e^x) = 0$$

$$-e^x y + e^x y'' + xe^x(y' - y'') = 0$$

$$-y + y'' + xy' - xy'' = 0$$

$$y''(1-x) + xy' - y = 0 \text{ — ответ}$$

④ $y^{V} - 8y''' + 16y' = x\sin 2x + \cos 2x + 4x + e^{-2x}$

хар-ое ур-ние: $\lambda^5 - 8\lambda^3 + 16\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \pm 2 \\ \lambda_{4,5} = \pm 2 \end{array}\right. \qquad y_0 = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 e^{-2x} + C_5 x e^{-2x}$$

$f_1 = x\sin 2x + \cos 2x$

$y_{r1} = (Ax+B)\sin 2x + (Cx+D)\cos 2x$

$f_2 = 4x$

$y_{r2} = x(Ex+F)$

$f_3 = e^{-2x}$

$y_{r3} = x^2 \cdot M \cdot e^{-2x}$

$y_r = y_{r1} + y_{r2} + y_{r3}$

$y = y_0 + y_r =$

$= C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 e^{-2x} + C_5 x e^{-2x} + (Ax+B)\sin 2x + (Cx+D)\cos 2x + x(Ex+F) +$

$+ x^2 \cdot M \cdot e^{-2x}$. – ответ

РК-2 Маляев Иван ИУ6-22Б теория

(1.) Сформулировать опр-ние определителя Вронского системы ф-й

• Пусть система ф-й $y_1, \dots, y_n$, заданных на промежутке I, состоит из $n-1$ раз дифференцируемых ф-й. Определителем Вронского этой системы называют определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(2.) Сф-ть и док-ть теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го пор-ка.

Теорема: общее решение линейного неоднородного диф. уравнения n-го пор-ка

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = F(x) \quad (1)$$

можно записать в виде

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (2)$$

, где $y_0(x)$ – частное решение диф. ур-ния (1);
$y_1(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного диф ур-ния.
$C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство:

Диф. ур-ние (1) можно с помощью диф. оператора записать в виде $L[y] = F(x)$, а соотв. однородное ДУ – в виде $L[y] = 0$.

Применим диф. оператор L к ф-ции (2)

$L[y] = L[y_0 + C_1 y_1 + \dots + C_n y_n] = L[y_0] + C_1 L[y_1] + \dots + C_n L[y_n] =$

$= |$ т.к. y_0 явл. решением ДУ (1), то $L[y_0] = F(x)$, а т.к. $y_1, \dots, y_n$ – решения соотв. ОДУ, то $L[y_1] = 0 \dots L[y_n] = 0 | = F(x)$.

Получим, что при любых $C_1, \dots, C_n$ ф-я $y = y(x)$, определяемая равенством (2), явл. решением ДУ (1)

Проверим то, что при соотв. подборе констант $C_1, \dots, C_n$ можно получить решение, удовл. любым нач. условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Для опр-ия констант $C_1, \dots, C_n$ составим систему:

$$\begin{cases} y_0(x_0) + C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ y_0'(x_0) + C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \dots \\ y_0^{(n-1)}(x_0) + C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Так как ф-ии $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ составляют ФСР ОДУ, соответствующего ур-нию (1), то по теореме об определителе Вронского л.н. системы решения линейного однородного ур-ния n-го пор-ка определитель этой системы не равен нулю, т.е

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

поэтому требуемый набор констант $C_1, \dots, C_n$ $\exists$.

Таким образом, оба условия, входящие в опр-ние общего решения, проверены. ▲