Домашнее задание по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»

Выполнил студент группы ИУ6-22Б Люляев Иван

Вариант № 19

Задача № 1

Условие:

В линейном пространстве V_3 свободных векторов выбран правый ортонормированный базис $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$. Этот базис поворачивается вокруг вектора $\vec{\boldsymbol{j}}$ на φ=30° в положительном направлении, а затем вокруг нового положения вектора $\vec{\boldsymbol{k}}$ на ψ=150° в положительном направлении. Найти матрицу перехода от старого базиса $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ к новому $\vec{\boldsymbol{i}}', \vec{\boldsymbol{j}}', \vec{\boldsymbol{k}}'$.

Решение:

$$T_{B\to B'}=T_{B\to\varepsilon}*T_{\varepsilon\to B'}$$

$$T_{B\to\varepsilon}(+30°)=\begin{pmatrix} cos\varphi & 0 & sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$T_{\varepsilon\to B}(+150°)'=\begin{pmatrix} cos\psi & -sin\psi & 0 \\ sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{B\to B'}=\begin{pmatrix} cos\varphi & 0 & sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} cos\psi & -sin\psi & 0 \\ sin\psi & cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$T_{B\to B'}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Задача № 2

Условие:

Даны векторы $\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ евклидова пространства $\mathbf{E}_4$ с координатами в базисе $\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3, \vec{\boldsymbol{a}}_4$ векторы которого определены относительно некоторого ортонормированного базиса этого пространства

1) Применяя процесс ортогонализации, ортонормировать базис $\{\vec{\boldsymbol{a}}_i\}$ (полученный базис- $\{\vec{\boldsymbol{b}}_j\}$) .

2) Найти матрицу перехода $\mathbf{T}_{\mathbf{bj}\to\mathbf{ai}}$ от полученного ортонормированного базиса $\{\vec{\boldsymbol{b}}_j\}$ к данному базису $\{\vec{\boldsymbol{a}}_i\}$.

3) Найти координаты $\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$ в этом ортонормированном базисе.

4) Вычислить скалярное произведение($\vec{\boldsymbol{p}}$, $\vec{\boldsymbol{q}}$**)**.

5) Вычислить угол между векторами $\vec{\boldsymbol{p}}$ и $\vec{\boldsymbol{q}}$.

$\vec{p}=\begin{bmatrix}1\\7\\-7\\1\end{bmatrix}$, $\vec{q}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\7\end{bmatrix}$, $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}8\\4\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{bmatrix}8\\3\\5\\8\end{bmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{bmatrix}7\\3\\13\\4\end{bmatrix}$, $\vec{a}_4=\begin{bmatrix}-4\\8\\0\\1\end{bmatrix}$,

Решение:

1) $\mathcal{E}=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$- ортогональный базис

$\vec{e}_1=\vec{a}_1$

$$\vec{e}_2=\vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2,\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix}8\\3\\5\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\4\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\8\end{pmatrix}$$

$(\vec{a}_2, \vec{e}_1)=64+12+5=81$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_1)=64+16+1=81$

$$\vec{e}_3=\vec{a}_3 - \frac{(\vec{a}_3,\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)} \cdot \vec{e}_1 - \frac{(\vec{a}_3,\vec{e}_2)}{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}7\\3\\13\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\4\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\8\\-4\end{pmatrix}$$

$(\vec{a}_3, \vec{e}_1)$=56+12+13=81

$(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$= 64+16+1=81

$(\vec{a}_3, \vec{e}_2)$=-3+52+32=81

$\vec{e}_4=\vec{a}_4 - \frac{(\vec{a}_4,\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}\cdot \vec{e}_1 - \frac{(\vec{a}_4,\vec{e}_2)}{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)} \cdot \vec{e}_2 \quad \frac{(\vec{a}_4,\vec{e}_3)}{(\vec{e}_3,\vec{e}_3)}\cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$-0-0-0=$\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\vec{a}_4, \vec{e}_1)$=1-1-1+1=0

$(\vec{e}_3, \vec{e}_3)$= 64+16+1=81

$(\vec{a}_4, \vec{e}_2)$=-8+8=0

$(\vec{a}_4, \vec{e}_3)$=4-4 =0

$\vec{e}_1=\vec{a}_1$

$\vec{e}_2=\vec{a}_2-\vec{e}_1=\vec{a}_2-\vec{a}_1$

$\vec{e}_3=\vec{a}_3-\vec{e}_1-\frac{1}{2}\vec{e}_2=\vec{a}_3-\vec{a}_1-\frac{1}{2}\vec{a}_2+\frac{1}{2}\vec{a}_1=\vec{a}_3-\frac{1}{2}\vec{a}_1-\frac{1}{2}\vec{a}_2$

$\vec{e}_4=\vec{a}_4$

$\mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}=\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

$\vec{b}_1=\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}=\begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|\vec{e}_1\|=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=9$

$\vec{b}_2=\frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$; $\|\vec{e}_2\|=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=9$

$\vec{b}_3=\frac{\vec{e}_3}{\|\vec{e}_3\|}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ 0 \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$; $\|\vec{e}_3\|=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=9$

$\vec{b}_4=\frac{\vec{e}_4}{\|\vec{e}_4\|}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ 0 \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; $\|\vec{e}_4\|=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=9$

2) $T_{\mathbf{B}\to A} = T_{B\to E} * T_{E\to A} = (T_{E\to B})_{обр.} * T_{E\to A}$

$\vec{b}_1=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}_1$
$\vec{b}_2=\frac{1}{4}\cdot(\vec{a}_2-\vec{a}_1)$

$\vec{b}_3=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}_3-\frac{1}{2}\vec{a}_1-\frac{1}{2}\vec{a}_2)$

$\vec{b}_4=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}_4$

$T_{\mathbf{B}\to A}=(T_{A\to B})^{-1}=T_{B\to E}*T_{E\to A}=\frac{1}{9}*\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 & -4 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 13 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\frac{1}{9}*\begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 & 0 \\ 0 & 81 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

3) $\vec{P}_{\text{B}} = \text{T}_{\text{B}\to\text{A}} \cdot \vec{P}_{\text{A}} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -63 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\vec{q}_{\text{B}} = \text{T}_{\text{B}\to\text{A}} \cdot \vec{q}_{\text{A}} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \\ 63 \end{pmatrix}$

4) $(\vec{p}_b, \vec{q}_b) = \sum_{i=1}^{4} \vec{p}_{b_i} \cdot \vec{q}_{b_i} =$ -9*63 + 9*63=0

5) $\cos\alpha = \frac{(\vec{p}_b, \vec{q}_b)}{\|\vec{p}_b\| \cdot \|\vec{q}_b\|} = 0;\ \alpha = 90°$

Ответ:

1) $\text{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

2) $T_{\mathbf{B}\to A}=\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

3) $\vec{P}_B=\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -63 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_B=\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 9 \\ 63 \end{pmatrix}$

4) $(\vec{p}_b, \vec{q}_b) = 0$

5) $\alpha = 90°$