Занятие 15. ОДУ первого порядка. Метод изоклин. Уравнения с разделяющимися переменными и однородной правой частью.

9.1. Показать, что при любом действительном значении параметра C выражение

$$y = x\,(C - \ln|x|)$$

определяет решения дифференциального уравнения

$$(x - y)\,dx + x\,dy = 0.$$

9.9. Составить дифференциальные уравнения семейств парабол

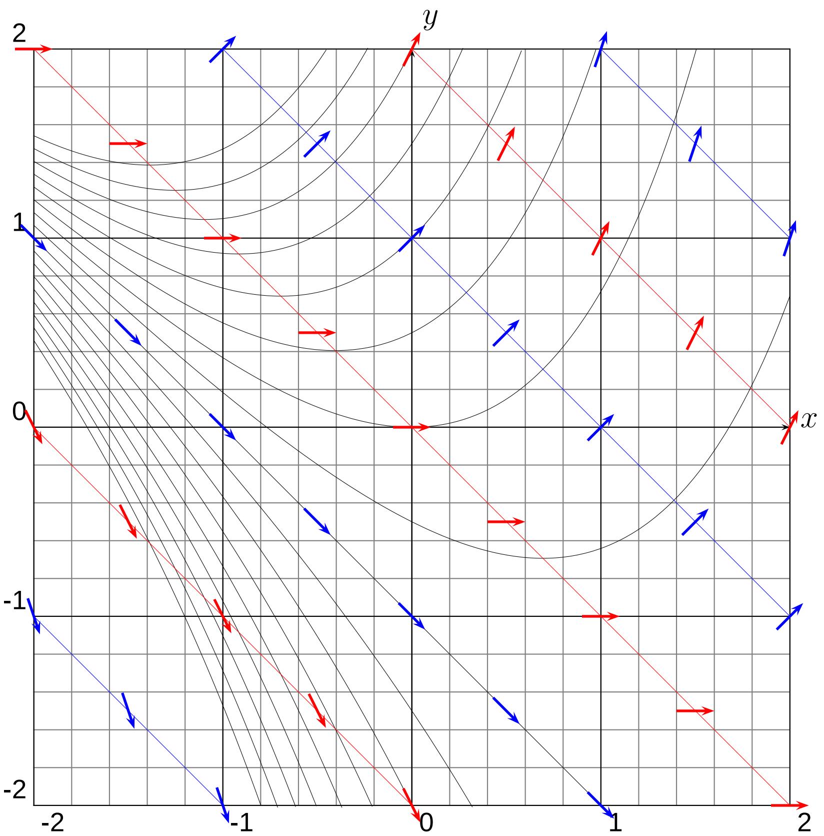
$$y = x^2 + 2ax.$$

$\triangleleft$ $y' = 2x + 2a$; $a = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{x}{2}$ и $a = \dfrac{y'}{2} - x$. Имеем:

$$\frac{y}{2x} - \frac{x}{2} = \frac{y'}{2} - x \quad \text{или} \quad y - x^2 = xy' - 2x^2 \quad \text{или} \quad y + x^2 = xy'. \ \triangleright$$

9.16. Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых уравнения

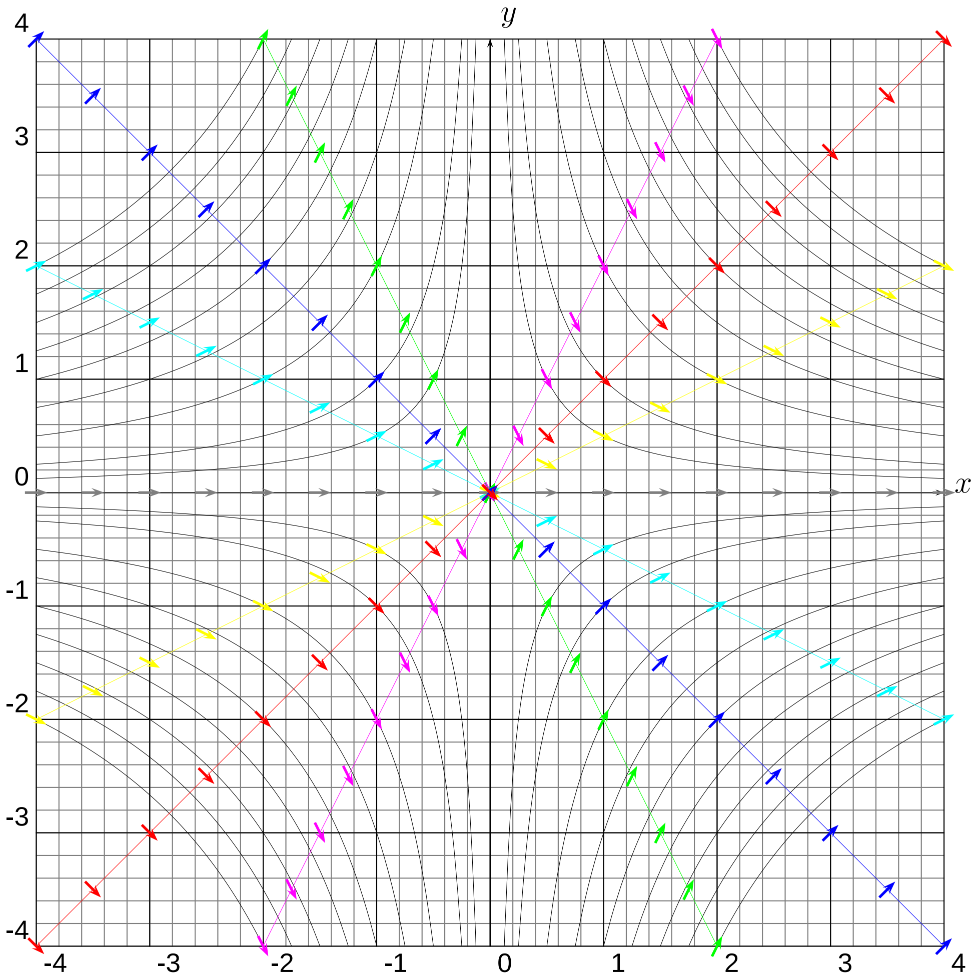
$$y' = x + y.$$



(Общее решение: $y = Ce^x - x - 1$.)

9.18. Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых уравнения

$$y' = -y/x.$$



(Общее решение: $y = C/x$.)

Уравнения с разделяющимися переменными.

Решить дифференциальные уравнения:

9.22. $y' = x/y$.
$\triangleleft\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$, $y\,dy = x\,dx$, $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + C$, $y^2 = x^2 + C$. $\triangleright$

9.27. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$.
$\triangleleft$

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\operatorname{arctg} y = \arcsin x + C. \ \triangleright$$

9.30. $(1+y^2)x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0.$
$\triangleleft$
$$(1+y^2)x\,dx = -(1+x^2)\,dy$$
$$\frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{dy}{1+y^2}$$
$$\frac{\frac{1}{2}\,d(1+x^2)}{1+x^2} = -\frac{dy}{1+y^2}$$
$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2| = -\operatorname{arctg} y + C. \ \triangleright$$

9.37. $y' = \cos(x+y).$
$\triangleleft$ В этом уравнении необходимо сделать замену $u(x) = x + y(x)$. Тогда $u' = 1 + y'$ и
$$u' - 1 = \cos u;$$
$$\frac{du}{dx} = \cos u + 1$$
$$\frac{du}{\cos u + 1} = \ dx$$
(Заметим, что $\cos u = -1$ даст решение $u = \pi + 2\pi k$ или $y = -x + \pi + 2\pi k$.)
$$\int \frac{du}{\cos u + 1} = \left| \begin{array}{l} u = \ 2\operatorname{arctg} t \\ t = \ \operatorname{tg}\dfrac{u}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2+1+t^2} = \int dt = t + C = \operatorname{tg}\frac{u}{2} + C;$$
$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = x + C$$
Ответ:
$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = x + C \text{ или } x + y = \pi + 2\pi k. \ \triangleright$$

9.39. $y' = (4x+y+1)^2.$
$\triangleleft$ Замена: $u(x) = 4x + y + 1$, $u' = 4 + y'$.
$$u' - 4 = u^2; \quad \frac{du}{dx} = u^2 + 4; \quad \frac{du}{u^2+4} = dx; \quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} = x + C; \quad \operatorname{arctg}\frac{4x+y+1}{2} = 2x + C. \ \triangleright$$

9.44. Найти частное решение уравнения $(xy^2 + x)\,dy + (x^2y - y)\,dx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

$\triangleleft$

$$x(y^2+1)\,dy = y(1-x^2)\,dx$$

$$(y+1/y)\,dy = (1/x - x)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C;$$

Подставляем начальные условия:

$$\frac{1}{2} + 0 = 0 - \frac{1}{2} + C; \quad C = 1; \quad \frac{y^2}{2} + \ln|y| = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + 1. \triangleright$$

Однородные уравнения.

Решить дифференциальные уравнения:

9.48. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.
$\triangleleft$ $y = x \cdot u(x)$; $y' = u(x) + x \cdot u'(x)$;

$$u(x) + x \cdot u'(x) = u(x) + \frac{1}{u(x)}$$

$$xu' = \frac{1}{u}; \quad u\,du = \frac{dx}{x}; \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + C; \quad \frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C; \quad y^2 = 2x^2\ln|x| + 2Cx^2. \triangleright$$

9.55. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.
$\triangleleft$ $y = ux$; $y' = u'x + u$;

$$x(u'x + u) - ux = \sqrt{x^2 - x^2u^2}$$

$$u'x^2 = |x|\sqrt{1-u^2}.$$

По-хорошему здесь надо рассматривать два случая: $x > 0$ и $x < 0$.

$$u'x = \pm\sqrt{1-u^2}. \text{ (Плюс для } x > 0, \text{ минус для } x < 0.)$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\frac{dx}{x} \quad \text{(отдельно рассмотрим случай } u = \pm 1)$$

$$\arcsin u = \pm\ln|x| + C$$

$$u = \sin(\pm\ln|x| + C)$$

$$\frac{y}{x} = \sin(\pm\ln|x| + C) \;\Rightarrow\; y = x\sin(\pm\ln|x| + C).$$

Теперь рассмотрим случай $u = \pm 1$, т.е. $y = \pm x$:

$$x \cdot (\pm 1) - (\pm x) = 0 \;\Rightarrow\; \text{равенство удовлетворяется.}$$

Ответ: $y = \pm x$, $y = x\sin(\pm\ln|x| + C)$. $\triangleright$

9.64. Найти частное решение уравнения $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

$\triangleleft$ $y = x\cdot u(x)$; $y' = u(x) + x\cdot u'(x)$;

$$xu + x^2u' = xu\ln u; \quad xu' = (\ln u - 1)u; \quad \frac{du}{(\ln u - 1)u} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{d(\ln u - 1)}{(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln C; \quad \ln u - 1 = Cx; \quad u = e^{Cx+1}; \quad y = xe^{Cx+1}.$$

$$y(1) = e^{C+1} = 1 \quad\Rightarrow\quad C = -1; \quad y = xe^{1-x}.\ \triangleright$$