

# 分治算法

XJTU

Information and Computational Science

mg

[xjtumg.me](http://xjtumg.me)

[xjtumg1007@gmail.com](mailto:xjtumg1007@gmail.com)

- 分治思想

- 棋盘覆盖问题
- 用L型骨牌覆盖 $2^n * 2^n$ 的棋盘，其中有一个特殊方格不能被覆盖，输出任意一种覆盖方案
- $1 \leq n \leq 10$

- POJ 3714 最近点对问题
- 给定平面直角坐标系上的n个点
- 求最近点对的距离
- $1 \leq n \leq 1e5$

- Codeforces 97B Superset
- 给定平面直角坐标系上的 $n$ 个点，可以添加若干点使得任意两点至少满足以下三个条件之一
  - 1. 两点横坐标相同
  - 2. 两点纵坐标相同
  - 3. 两点构成的矩形内(包含边界)存在其他点
- 最终点集最多 $20w$ 个点，输出方案
- $1 \leq n \leq 1e4$

- Codeforces 448C Painting Fence
- 每块木板宽度均为1，高度为 $h[i]$
- $n$ 块木板连接为宽度为 $n$ 的栅栏
- 每次可以刷一横或一竖(上色)
- 最少刷多少次可以使得栅栏被全部上色
- $1 \leq n \leq 5000$

- Codeforces 526F Pudding Monsters
- $n * n$ 的矩形，每行每列有且仅有一个特殊点
- 求问存在多少 $k * k$ 的子矩形，使得子矩形内有 $k$ 个特殊点
- $1 \leq n \leq 3 * 1e5$

- 二维前缀和

- 枚举即可

- $O(n^3)$



- 转换为数列A，每个特殊点的横坐标为下标，纵坐标为权值
- $Ax = y$
- 题目相当于询问存在多少(l, r)使得
- $\max(A_l \dots A_r) - \min(A_l \dots A_r) == r - l$
- $O(n^2)$

- 考虑分治
- 1. 最大值最小值在同侧
- 通过枚举l可以计算出r，判断是否可行即可
- 2. 最大值最小值在异侧
- 假设最小值在左侧，最大值在右侧
- $\max(A_{mid} \dots A_r) - r == \min(A_l \dots A_{mid}) - l$

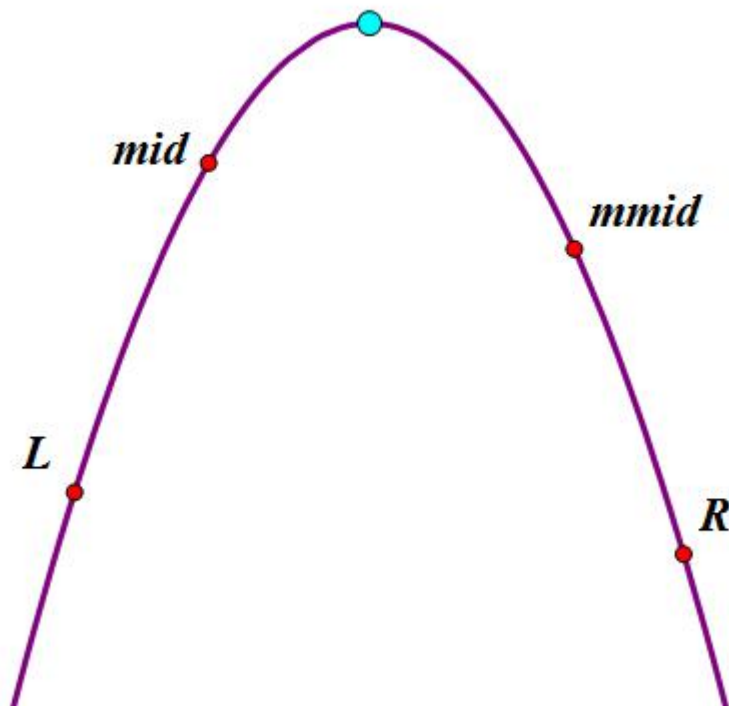
- 由于最大值单调不减，最小值单调不增



- $\min(A[\text{mid}+1] \dots A[r2]) > \min(A[l] \dots A[\text{Mid}])$
- $\max(A[\text{mid}+1] \dots A[r1-1]) < \max(A[l] \dots A[\text{Mid}])$
- $[r1, r2]$ 包含了所有可能合法的右端点
- 类似桶排的记录即可
- $O(n \log n)$

- 三分法

- 以凸函数为例



- $f[mid] > f[mmid]$ 
  - $R = mmid$
- $f[mid] \leq f[mmid]$ 
  - $L = mid$

- Codeforces 578C Weakness and poorness
- 给定一个序列A
- 一个区间的poorness定义为这个区间内和的绝对值
- weakness等于所有区间最大的poorness
- 求一个x使得，序列A全部减x后weakness最小
- $1 \leq n \leq 2 * 1e5$

- Codeforces 626E Simple Skewness
- 给定一个序列A
- 选取一些数，使得这些数的平均数减中位数尽可能大
- $1 \leq n \leq 2 * 1e5$

- 一定选择奇数个数。若选择偶数个数则可将中间两个数较大的一个删除使得答案更优
- 枚举中位数 三分区间长度
- 排序 贪心计算平均数



- 点分治

- POJ 1741
- 给定一个带权树(边权)
- 求树上有多少点对满足两点间距离不超过K
- $1 \leq n \leq 1e4$

- Splay启发式合并

- $O(n \log^2 n)$

- 对于一个以root为根的树，定义dist[i]为i到root的距离， belong[i]表示i属于以belong[i]为根的树， belong[i]为root的儿子节点
- 点对两部分组成
  - 1. 路径经过根节点的点对
  - 2. 路径不经过根节点的点对
- 仅需统计1

- $\text{Total}\{\text{dist}[i] + \text{dist}[j] \leq K \ \&\& \ \text{belong}[i] \neq \text{belong}[j]\}$
- $\text{Total}\{\text{dist}[i] + \text{dist}[j] \leq K\} - \text{Total}\{\text{dist}[i] + \text{dist}[j] \leq K \ \&\& \ \text{belong}[i] == \text{belong}[j]\}$
- 排序 + 双指针扫描

- 为避免时间复杂度退化
- 每次选择重心作为根节点
- 树的重心 最大分支最小
- 重心可在线性时间内找出
- $O(n \log^2 n)$

- Codeforces 716E Digit Tree
- 给一棵树，有边权1~9
- 询问有多少个点对  $(i, j)$ ，将  $i \rightarrow j$  路径上的数字依次连接后所形成新数字可以被  $k$  整除
- $\gcd(K, 10) = 1$
- $1 \leq n \leq 1e5$

- HDU 4812
- 给一棵树，找一条字典序最小的路径(u, v)
- 使得路径上点权乘积 $\text{mod } 1e6 + 3$ 等于k
- $1 \leq n \leq 1e5$



- \*边分治
- SPOJ QTREE4