动态规划
Dynamic Programming

2016-8-1

动态规划题目有什么难点？

- （1）状态是什么？
  - 最大的难点
  - 如何发现状态？
    - 几何直观（从上到下，从左到右，斜向）
    - 已知的顺序结构（时间轴，坐标轴）
    - 依赖关系
- （2）时间效率
- 出题人喜欢考察哪一部分？-时间效率
  - 出题容易
  - 有常见套路

四个决定时间效率的因素

- (1)状态总数
- (2)每个状态的决策数
- (3)每次状态转移所需的时间
- (4)寻求转移过程的相关性

(1)，减少状态总数

- (1)改变状态表示;
- (2)选择适当的规划方向;

- *审查题目中的信息

1-减少状态总数
1.1-改进状态表示

青蛙过河

- 宽度为L的小河上有一座独木桥,青蛙想过河
- 河中有一些荷叶
- 河宽和青蛙一次跳过的距离都是正整数
- 0,1,......,L
- 坐标 0 的点位于河的一侧,坐标 L 的点位于河的另一侧
- 青蛙从 0 开始,不停的向坐标为 L 的点的方向跳跃
- 一次跳跃的距离是 S 到 T 之间的任意正整数(包括 S,T)
- 当青蛙跳到或跳过坐标为 L 的点时,就算已经越过河了

- 问：青蛙要想过河最少需要踩到的荷叶数

1-减少状态总数
1.1-改进状态表示

- 状态？
  - 坐标位置
  - 荷叶的位置

1-减少状态总数

1.1-改进状态表示

- 寻找无向图中长度为 k 的简单路径

- 给定无向图 G=(V,E)，常数 k。
- 对于每一对结点 (u,v)，询问是否有从u到v经过恰好k个结点的简单路径？

- k <= 6
- |V| * |E| * <= 1,500,000

1-减少状态总数
1.1-改进状态表示

- F(source,target,len,S)
  - 从source出发至target结束
  - 经过的点集为S（不包括source, target）
  - 经过的点集大小为len
  - 这样的方案是否存在?

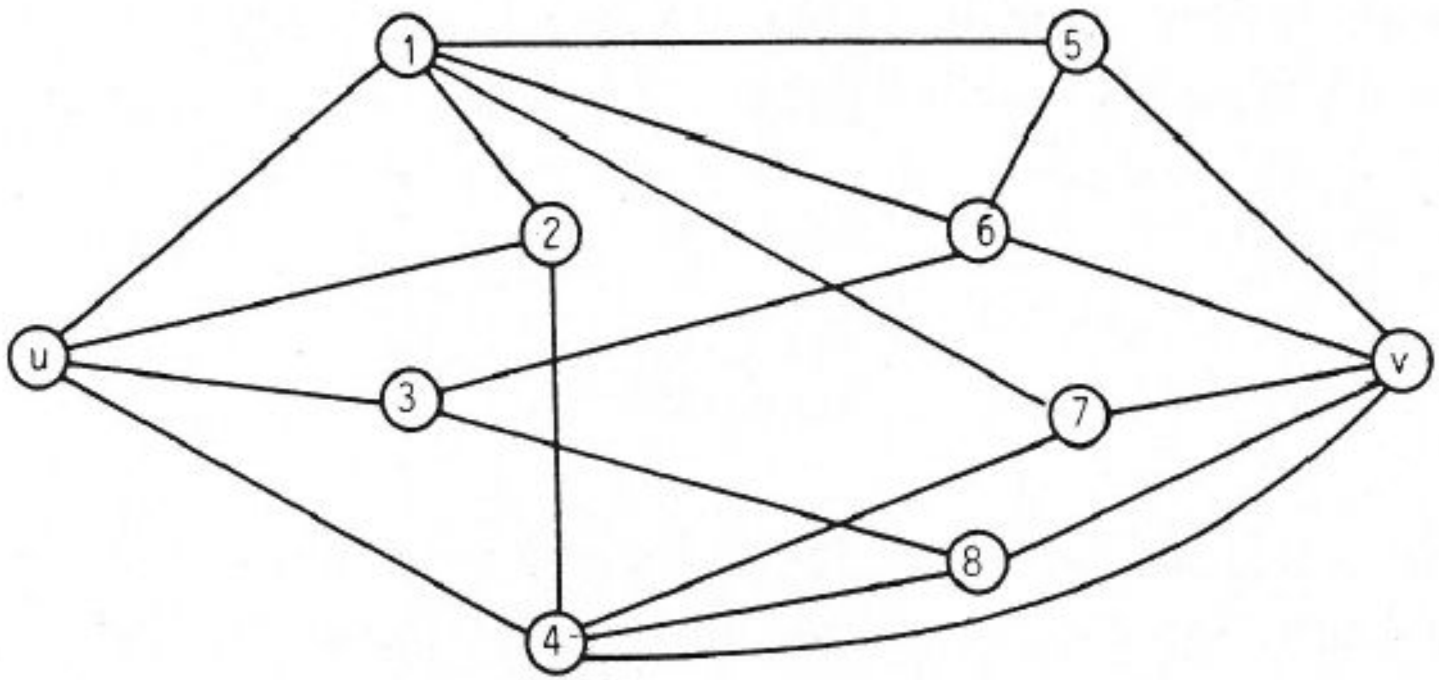
- 转移的时候，需要考虑结点x
- 问是否存在不包含x的集合S，满足F(source,target,len,S)

可能的S太多了！

1-减少状态总数

1.1-改进状态表示

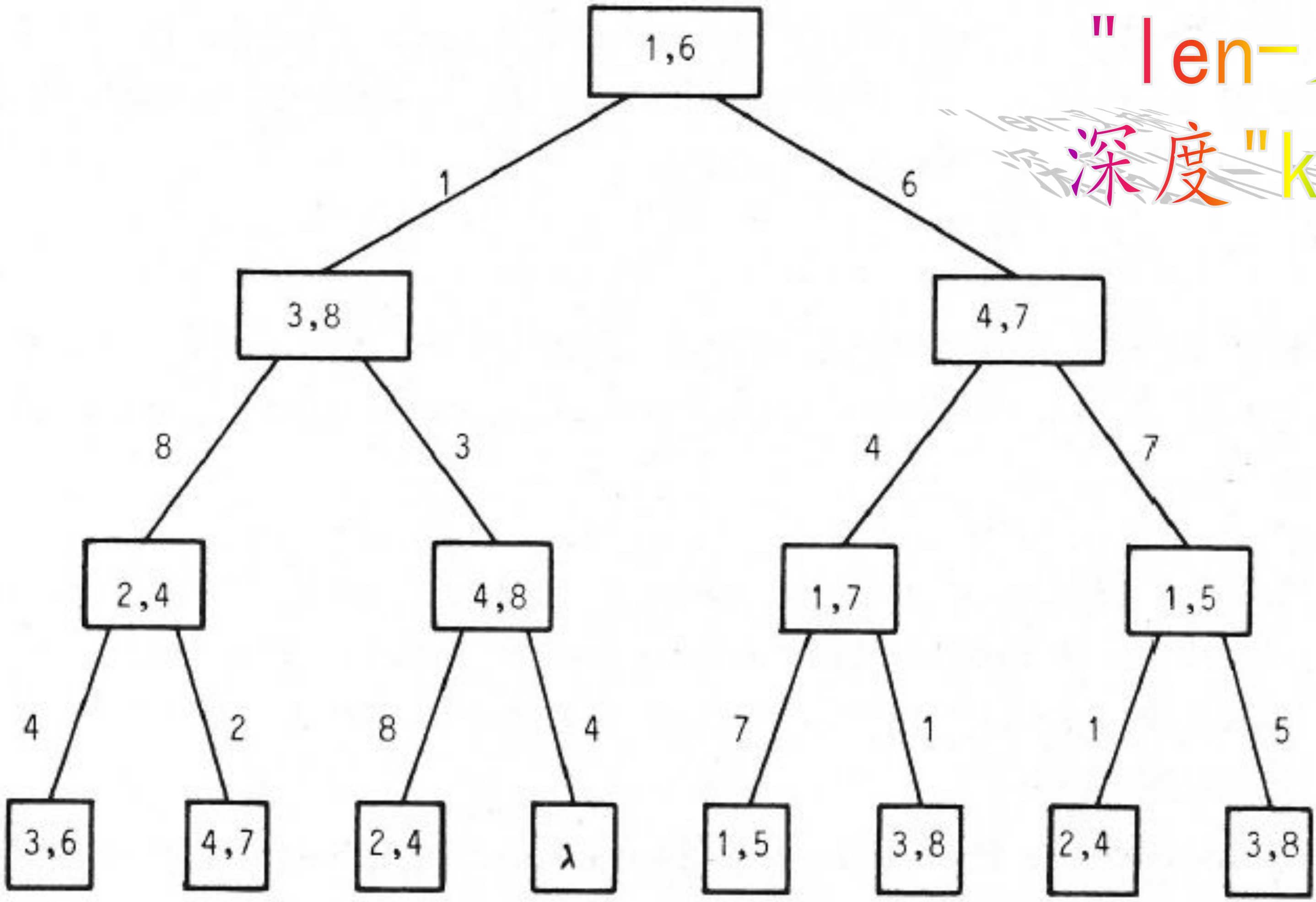
- Sample：
- {S|F(u,v,2,S)} = {{2,4},{1,5},{1,6},{1,7},{3,6},{3,8},{4,8},{4,7}}



1-减少状态总数
1.1-改进状态表示

- {S|F(u,v,2,S)} = {{2,4},{1,5},{1,6},{1,7},{3,6},{3,8},{4,8},{4,7}}

"len-叉树"
深度"k-len"



1-减少状态总数
1.2-选择适当的规划方向

- KYKNEION ASMA

Problem Description

On the last day before the famous mathematician Swan's death, he left a problem to the world: Given integers n and a_i for $0 \leq i \leq 4$, calculate the number of n-digit integers which have at most a_i-digit i in its decimal representation (and have no $5, 6, 7, 8$ or 9). Leading zeros are not allowed in this problem.

Input

There is one integer T $(1 < T \leq 10)$ in the beginning of input, which means that you need to process T test cases. In each test case, there is one line containing six integers representing n and a_0 to a_4, where $2 \leq n \leq 15000$ and $0 \leq a_i \leq 30000$.

1-减少状态总数
1.2-选择适当的规划方向

- 方案一：考虑状态(p,x)，前p个数字，总计用了x个
  - 状态数：5n
  - 转移：线形
- 方案二：考虑所有合法（不合法情况组合，共计S个
  - 每一个组合对应长度为n的信息
  - 不同组合之间的转移是线形的
    - 每一次转移是O(1)的
  - $S = 3^5$. $S = 5*2^5$
- 利用本题常数5的特性，方案二定义状态的方法可以使“状态数”x“转移”
- 更优！

1-减少状态总数

1.2-选择适当的规划方向

数组

- 给定 3n 个整数$X_1,X_2,...,X_{3n}$
- 将{1,2,...,3n}分为3个程度为n的序列A,B,C
- 最大化$S = sum\{(X_{Ai}-X_{Bi})*X_{Ci}|1<=i<=n\}$

- $n <= 20$

1-减少状态总数

1.2-选择适当的规划方向

- 不妨假设X已经从小到大排序好了

- Fact1: 对于同一组(A_i,B_i,C_i)一定有$A_i > C_i > B_i$
- Fact2: 如果$C_i > C_{i+1}$，则$A_i > A_{i+1}$且$B_i < B_{i+1}$
- Fact3: $B_i = i$

- 按照 i 从小到达选取 A_i 和 C_i
- 则：[3n-i+1,3n]一定已经选取，[n+1,2n-i]一定没有选取

- 只需要记录[2n-i+1,3n-i]段的选取情况即可

2-减少每个状态决策数的基本策略

- ● (1)利用最优决策的单调性
- ● (2)优化决策量
- ● (3)合理组织状态
- ● (4)细化状态转移

- *观察转移方程

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.1-利用最优决策的单调性

- 2D2D-型：
  - $f[i][j] = \min_{i<k<=j} \{f[i][k-1]+f[k][j]+w[i][j]\}$
- 1) 四边形不等式
  - – $f[i][j] + f[i'][j'] <= f[i'][j] + f[i][j']$, $i<=i'<=j<=j'$
- 2）区间单调
  - – $f[i'][j] <= f[i][j']$, $i<=i'<=j<=j'$

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.1-利用最优决策的单调性

- 最优排序二叉树
- ● 所谓二叉排序树是指具有下列性质的非空二叉树
  - (1)若根顶点的左子树不空,则左子树的所有顶点值均小于根顶点值
  - (2)若根顶点的右子树不空,则右子树的所有顶点值均不小于根顶点值
  - (3)根结的左右树也分别为二叉排序树;

- 【输入】
  - 第 1 行为关键字数 n
  - 第 2 行为 2n 个正整数,依次为n($1 \le n \le 2000$)个关键字的权值 k_i 和查找频率 p_i($1 \le i \le n$);
- 【输出】
  - 对应二叉排序树的总查找长度
  - – $\Sigma_{1<=i<=n}\ p_i\ (\ depth(k_i) + 1)$ 的最小值。

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.1-利用最优决策的单调性

- C[i][j] 表示：
  - 顶点i~j对应的子树的最小查找长度, w[i][j] 从i->j的频率和。
- $C[i][i] = p_i$.
- $C[i][j] = w[i][j] + \min_{i<k<=j} \{C[i][k-1]+C[k][j]\}$.

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.1-利用最优决策的单调性

- 石子合并问题
- ● 在一个操场上摆放着一排n<=2000堆石子。现要将石子
- 有次序地合并成一堆。规定每次只能选相邻的 2 堆石子
- 合并成新的一堆,并将新的一堆石子数记为该次合并的
- 得分。

- 【输入】
  - 第 1 行为石子堆数 n;
  - 第 2 行为 n 个正整数,依次给出 n 堆的石子数;
- 【输出】
  - 将 n 堆石子合并成一堆的**最小**得分。

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.1-利用最优决策的单调性

- ● f[i][j] : 合并i~j需要的最小费用
- ● $f[i][j] = \min_{i<k<=j} \{f[i][k-1]+f[k][j]\} + d[i]+...+d[j]$

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.1-利用最优决策的单调性

- 邮局
- ● 按照递增顺序给出一条直线上坐标互不相同的 n 个
- 村庄,要求从中选择 p 个村庄建立邮局,每个村庄使
- 用离它最近的那个邮局,使得所有村庄到各自所使用
- 的邮局的距离总和最小。

- 【输入】
  - 第 1 行为村庄数 n 和邮局数p(1≤p≤n≤2000)
  - 第 2 行为 n 个村庄的 x 坐标;
- 【输出】
  - 最小距离和

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.2-优化决策量

- 石子合并
- ● 在一个圆形操场的四周摆放 n 堆石子(1≤n≤2000),现
- 要将石子有序地合成一堆。规定每次只能选相邻的两
- 堆合并成新的一堆,并将新的一堆的石子数记为该次
- 合并的得分。

- 【输入】
  - 第 1 行为堆数 n;第 2 行为每堆的石子数;
- 【输出】
  - n-1 次合并后的**最大**得分总和。

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.2-优化决策量

- ● $f[i][j] = \max_{i<k<=j} \{f[i][k-1]+f[k][j]\}+d[i]+...+d[j]$
- ●
- ● $s[i][j] = k^*$
- ● $s[i][j]$ in $\{i+1,j\}$

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.3-合理组织状态

- 如何存储状态？
  - 直接维护F[s]？
  - 维护下标为F[s]的位置？
  - 更多？

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.3-合理组织状态

- 求最长单调上升子序列

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.3-合理组织状态

叠 放 箱 子

- ● 某港口有一批箱子,将其编号,分别为 1 至 N。每一个箱子的尺寸
- 规格是一样的,现在要将其中某些箱子叠放起来,箱子叠放的规则如
- 下:
  - 1、每个箱子上最多只能直接叠放一个箱子;
  - 2、编号较小的箱子不能放在编号较大的箱子之上;
  - 3、每个箱子都给出了自身重量与可承受重量,每个箱子之上的所有箱子重量之和不得超过该箱的可承受重量。

- ● 为了节约堆放场地,希望你编程从中选出最多个箱子,使之能够在满
- 足条件的情况下叠放起来。

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.3-合理组织状态

- ● 设函数 f(i,j),其含意是:前 i 个箱子中最多可选出 f(i,j)
- 个箱子叠放起来,上面还可承受重量 j
  - $w_0[i]$ 为第 i 个箱子的本身重量
  - $w_1[i]$为第 i 个箱子可承受的重量
- ● $f(i,j)=\max\{f(i-1,j+w_0[i])+1 \mid w_1[i]\geq j, f(i-1,j)\}$
- ●
- ● 内存？
- ● 如果要求给出策略，内存如何优化？

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.4-细化状态转移

- 考虑如下的转移方程
- 下标$0<=i<=n$，$0<=j<=m$
- 边界条件：
  - $f(i,j) = 0 : i=0 \text{ or } j=0$
- 已知转移为：
  - $f(i,j) = \min_{1<=k<=i} \{f(i-k,j-k)+c_1, f(i-k,j)+c_2, f(i,j-1)+c_3\}$

2-减少每个状态决策数的基本策略
2.4-细化状态转移

- $f(i,j) = \min_{1<=k<=i} \{f(i-k,j-k)+c_1, f(i-k,j)+c_2, f(i,j-1)+c_3\}$

- 思考：（ fix i and j ）
- 如果$f(i,j)$的最优转移从第一部分过来，即
  - $f(i,j) = f(i-k^*,j-k^*) + c$
- 且如果令$f_1(i-1,j-1)$是强制$(i-1,j-1)$从第一部分转移的情况下的最优方案，则
  - $f(i,j) = f(i-1,j-1)$

- 维护$f_0(i,j)$, $f_1(i,j)$, $f_2(i,j)$，状态规模$O(n^2)$，转移$O(1)$

3-减少状态转移时间的基本策略

- (1)、减少决策时间
  - 第一目标：对于每一个可能的前一状态，O(1)
- (2)、减少计算递推式的时间
  - 第二目标：快速考虑多个前置状态

3-减少状态转移时间的基本策略
3.1、减少决策时间

- LOSTCITY
- ● 现给出一张单词表、特定的语法规则和一篇文章:
- ● 文章和单词表中只含 26 个小写英文字母 a...z。单词表中的单词只有名词,动词和辅词这三种词性,
- ● 且相同词性的单词互不相同。单词的长度均不超过 20。语法规则可简述为:
  - ● 名词短语:任意个辅词前缀接上一个名词;
  - ● 动词短语:任意个辅词前缀接上一个动词;
- ● 句子:以名词短语开头,名词短语与动词短语相间连接而成。
- ● 文章的长度不超过 1000。且已知文章是由有限个句子组成的,句子只包含有限个单词。将这篇文章划分成最少的句子,在此前提之下,要求划分出的单词数最少。

3-减少状态转移时间的基本策略
3.1、减少决策时间

- 状态：
  - Fv(i)：“前i个字符划分为以动词为结尾，且在i<M的时候允许带任意个辅词后缀”的最优分解方案下划分的句子数与单词数.
  - Fn(i)：“前i个字符划分为以名词为结尾，且在i<M的时候允许带任意个辅词后缀”的最优分解方案下划分的句子数与单词数.
- 注意，Fv(i)与Fn(i)存储的都是二元组(*,*)

- 如何快速决策[j+1,i]是不是动词，名词，辅词？
- j=1,2,3,...,i-1

3-减少状态转移时间的基本策略
3.2、减少计算递推式的时间

- 常见技巧二则：
- （1）利用数据结构
  - 快速区间计算 - 区间最值等
- （2）目标图形化（找到单调性）

3-减少状态转移时间的基本策略
3.2、减少计算递推式的时间

最大平均值问题

- 读入一列正数，$a_1, a_2, \ldots, a_N$，以及数F
  - 求一段长度大于等于F且**平均值最大**的子串
- 定义若$i \le j$，$ave(i, j) = (a_i + \ldots + a_j) / (j - i + 1)$
- 目标：$\mathrm{Max}\{ave(a, b) \mid a \le b - F + 1\}$
- 范围：$F \le N \le 100\ 000$
- 例如N=4的序列中，F=2
  - 2, 5, 2, 5
  - ave(2, 4) = (5 + 2 + 5) / 3 = 4最大

3-减少状态转移时间的基本策略

3.2、减少计算递推式的时间

- 设部分和序列S_i为{a_i}前i项和，$S_0=0$
- $ave(i, j) = [S_j - S_{i-1}] / [j - (i-1)]$
- 过两点的直线：$P_{i-1}(i-1, S_{i-1})$，$P_j(j, S_j)$

- 问题转化：
- 平面上已知$N+1$个点，$P_i(i, S_i)$，$0 \le i \le N$
- 求横向距离大于等于F的两点连线的最大斜率

4-寻求转移过程的相关性（整体上减少转移时间）

- （1）有周期性的转移 - F[s]与F[s+t]的转移相似
- （2）局部卷积形式

- 更多？
- 观察转移式的特殊性。

4-寻求转移过程的相关性
4.1、有周期性的转移

- 幼儿园的游戏

描述

公元1770年，纪昀先生途经进香河，与百姓谈说人世，谈说友善。他所告诉人们的为友之道，流传至今，深深影响着当地的人们，甚至是幼儿园的孩童。

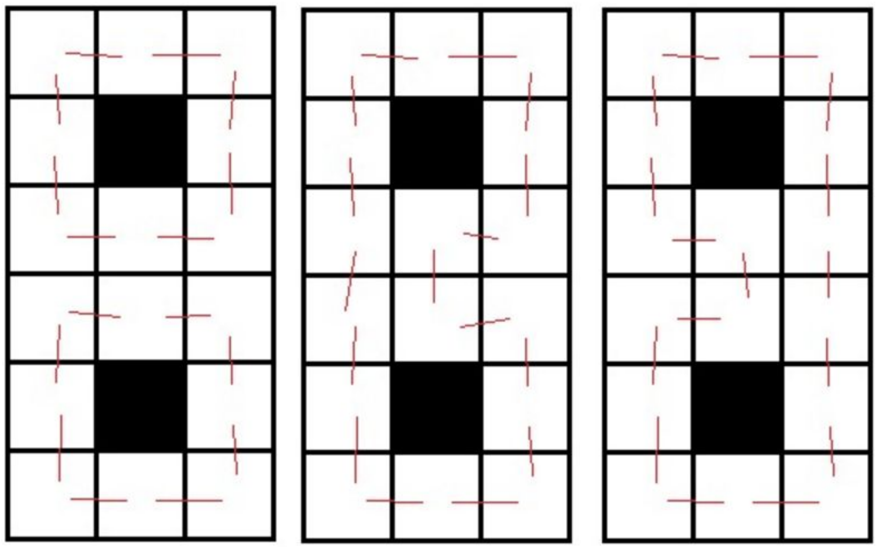
一天，多诺达新幼儿园的孩子们与老师们排排坐，形成了一个N*M的矩形队列，一共有K个老师，他们融入在了这个矩形队列之中，与小朋友们欢乐地唱着歌。"手拉手，我们永远都是好朋友！"于是老师要求每一位小朋友都和四周(即上下左右四个方向)的任意两个小朋友牵手。

作为幼儿园里最聪明的小朋友，你马上意识到这并不是单纯的游戏，而是一个非常有意义的问题。你非常希望知道一共有多少种不同的牵手方案，满足每一位小朋友都可以和四周恰好两位小朋友牵手。当然，每一位小朋友都只能和小朋友牵手，不能去和老师牵手。任何一位小朋友都不允许自己和自己牵手(即左手拉右手)。

你所需要知道的只是方案个数，因为答案可能太大，所以需要对1000000007取模。

4-寻求转移过程的相关性

4.1、有周期性的转移



对于100%的数据，N<=8,M<=2147483647，K<=100

4-寻求转移过程的相关性
4.1、有周期性的转移

- 插头DP？（... as an independent topic ...）
- 注意到k <= 100，如果k=0：
  - 将一行的转移视作整体
  - 转移具有周期性
- 没有障碍的时候，相邻行的转移可以表述为转移矩阵A
  - 时间复杂度：$O(2^{24}k\log n)$
- 如何做到更快？
  - 最终答案对应 $A^{n_1}B_1A^{n_2}B_2...A^{n_k}B_kx$

4-寻求转移过程的相关性
4.2、局部卷积形式

- Shell Necklace

Problem Description

Perhaps the sea's definition of a shell is the pearl. However, in my view, a shell necklace with n beautiful shells contains the most sincere feeling for my best lover Arrietty, but even that is not enough.

Suppose the shell necklace is a sequence of shells (not a chain end to end). Considering i continuous shells in the shell necklace, I know that there exist different schemes to decorate the i shells together with one declaration of love.

I want to decorate all the shells with some declarations of love and decorate each shell just one time. As a problem, I want to know the total number of schemes.

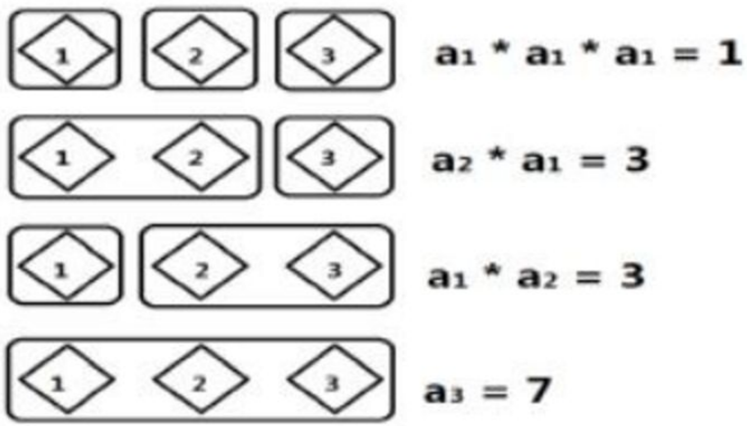


Figure 1: Hint for Sample.

4-寻求转移过程的相关性

4.2、局部卷积形式

- $F(i) = Sum_{1<=j<i} \{F[j] * A[i-j]\}$
- 不妨考虑 $N = 2^k$ 是2的幂，并记 T(N) 为用时。
  - 假设我们已经处理好了前一半的F(i)
    - T(N/2)
  - 将前一半做卷积，并分配给所有目标位置
    - 将 F(u) * A(v) 的值赋予 $F_0(u+v)$
    - O(NlogN)
  - 对于 i > N/2，考虑 F(i) - $F_0(i)$
    - F(i <= N/2) * A(j > N/2)
      - 均已知，O(NlogN)
    - F(i > N/2) * A(j <= N/2)
      - 问题还原为 N/2 规模的等价问题，T(N/2)
- 分析时间复杂度：$T(N) = 2*T(N/2) + O(NlogN) = O(Nlog^2N)$

今日训练安排

- acm.hust.edu.cn/vjudge/contest/125438
-
-
-
-
-
-
-
-
-
- **欢迎提问！**