

Network-flows

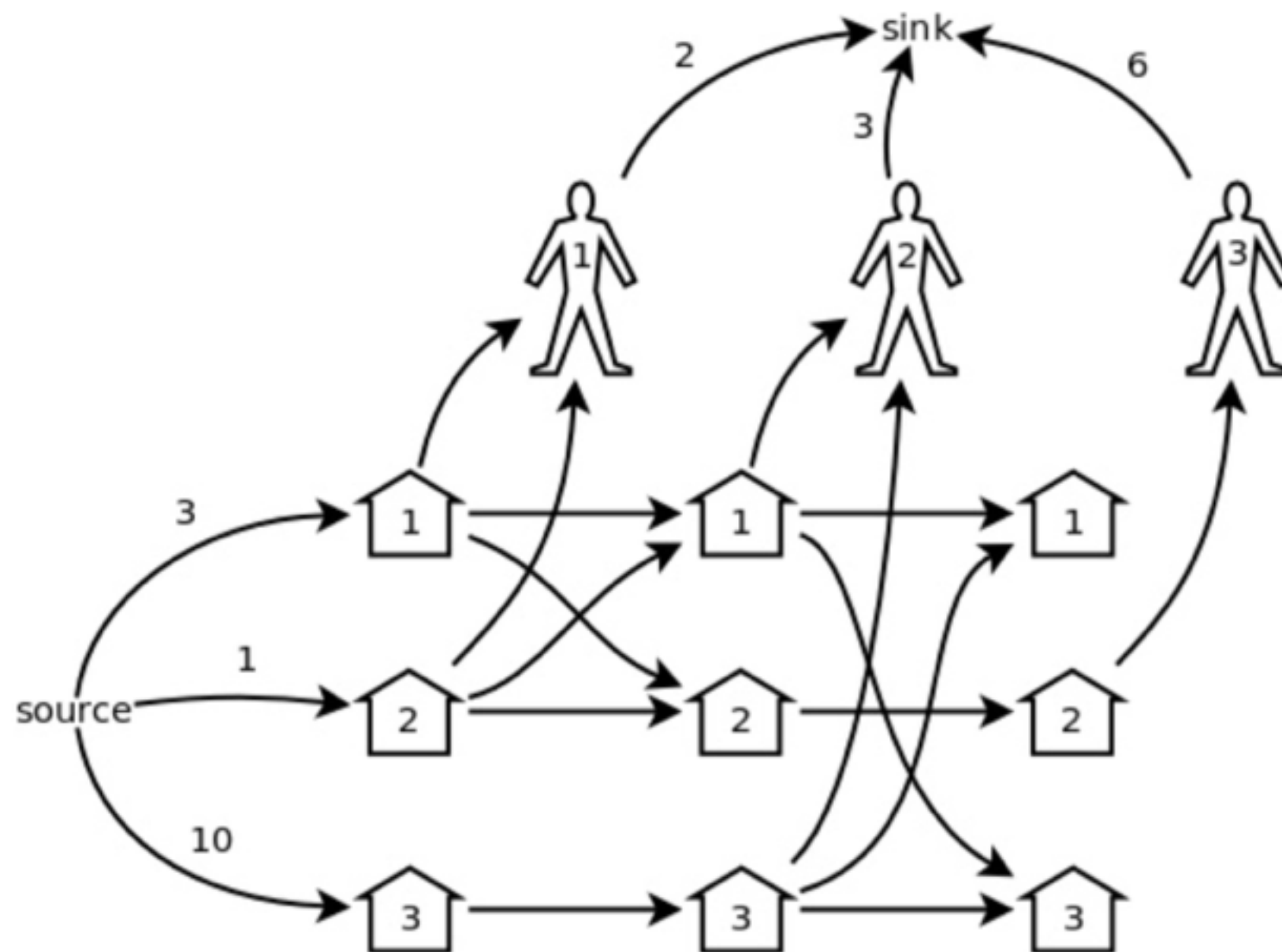
XJTU 数学
王褒广

- 线性规划的一种解决方案
- 最大流 最小割 有上下界的最大流 MCMF
- Dinic ISAP + GAP 预流推进
- 更普适的解决方案——单纯形法
- “送分”题

- 最大流

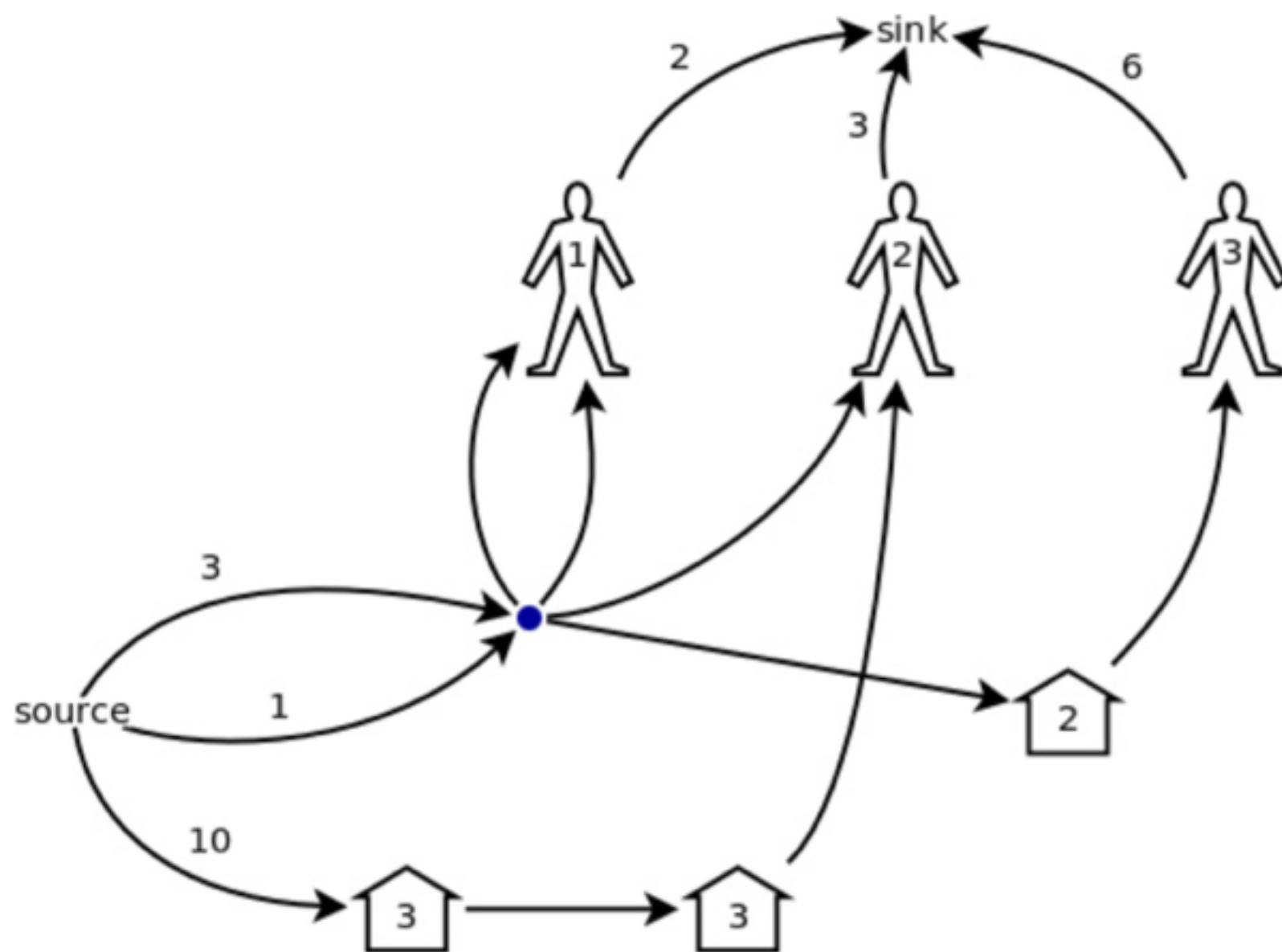
- POJ 1149
- 有M个猪圈，每个猪圈里初始时有若干头猪。一开始所有猪圈都是关闭的。依次来了N个顾客，每个顾客分别会打开指定的几个猪圈，从中买若干头猪。每个顾客分别都有他能够买的数量的上限。每个顾客走后，他打开的那些猪圈中的猪，都可以被任意地调换到其它开着的猪圈里，然后所有猪圈重新关上。问总共最多能卖出多少头猪。 $(1 \leq N \leq 100, 1 \leq M \leq 1000)$

- 直观建图

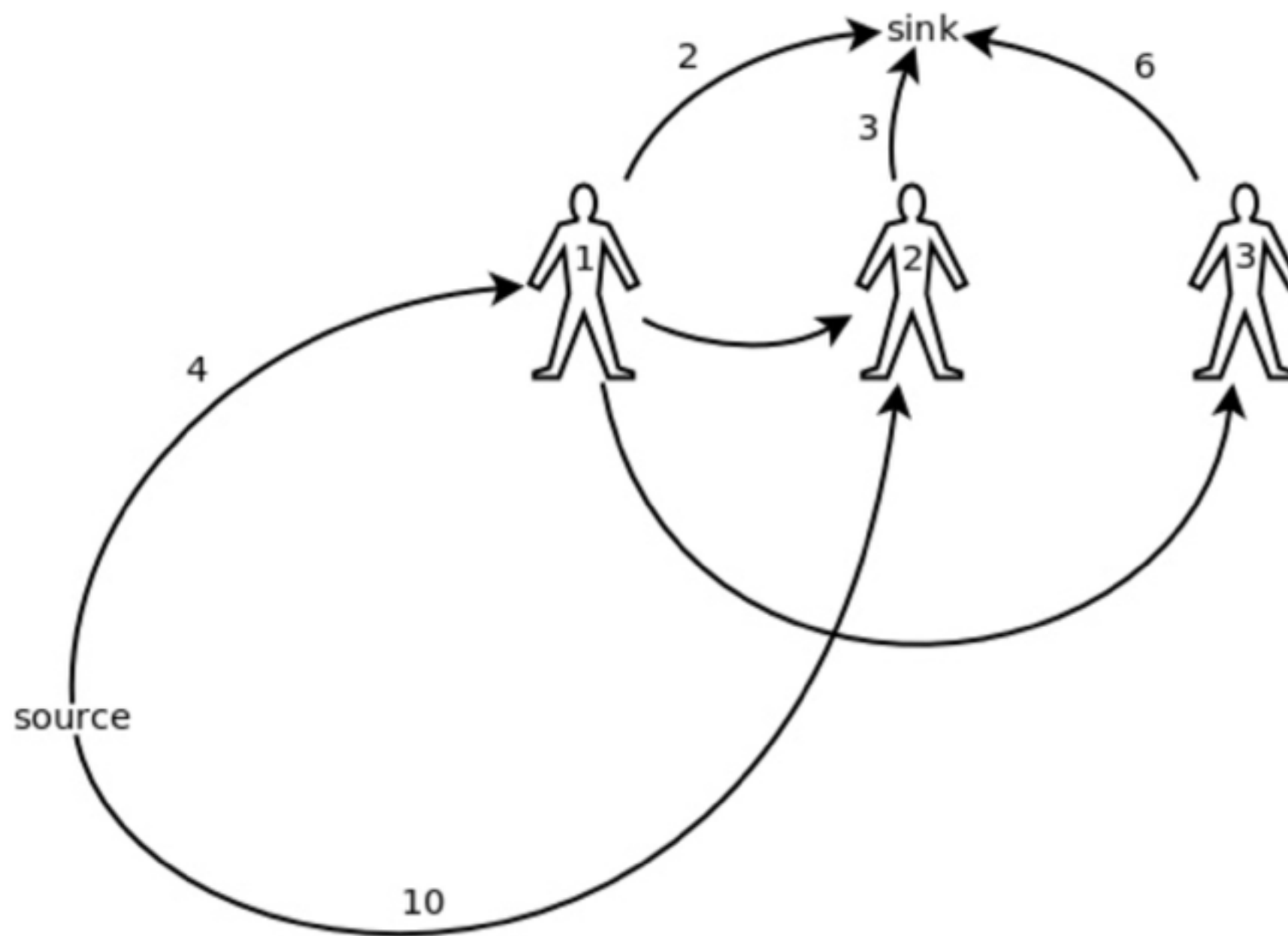


- 模型过于复杂
- 如果几个结点的流量的来源完全相同, 则可以把它们合并成一个
- 如果几个结点的流量的去向完全相同, 则可以把它们合并成一个
- 如果从点 u 到点 v 有一条容量为 ∞ 的边, 并且点 v 除了点 u 以外没有别的流量来源, 则可以把这两个结点合并成一个

- 第一步合并



- 第二次合并



- 建模方案
- 建立超级源点及超级汇点，每个顾客用一个点来表示
- 超级源点向每个猪圈的第一个顾客连容量为猪圈里初始猪数量的边
- 每个猪圈的第 i 个顾客向第 $i + 1$ 个顾客连一条容量为正无穷的边
- 每个顾客向超级汇点连一条容量为其最大购买量的边

- POJ 1637
- 混合图欧拉回路 ($1 \leq N \leq 200, 1 \leq M \leq 1000$)

- 存在欧拉回路充要条件：每个点出度 = 入度
- 有向边无法改变方向，对出入度影响是定值
- 重点在于无向边，初始时随意定向
- 若此时存在某个点出入度之差为奇数则不存在欧拉回路
- 设每个点的出入度之差的一半为 X_i

- 删掉图中所有有向边，定向的无向边容量为1
- 若 $X_i > 0$ 则连至超级汇点，容量为 X_i
- 若 $X_i > 0$ 则从超级源点连至此点，容量为 X_i
- 若满流则存在欧拉回路

- 如何构造欧拉回路？

- POJ 2391
- 给定无向带权图，边权代表经过所需的时间，每个点初始有 A_i 头牛，下雨时每个点的牛棚能容纳 B_i 头牛，问下雨时最少需要多少时间才能让所有牛进入牛棚。
- $1 \leq N \leq 200, 1 \leq M \leq 1500$

- Floyd求出任意点对之间最短路
- 二分答案 + 最大流判断可行性
- 如何建图？

- ZOJ 2760
- 给定一个带权有向图，问从S点到T点最多有多少条边不相交的最短路 ($1 \leq N \leq 100$)

- 将所有满足 $dist[u] + w[u][v] = dist[v]$ 的边留下，其它边删掉
- 所有边容量为1
- 最大流即为答案

- 最小割

- HOJ 2634
- 有 M 个项目和 N 个员工。做项目 i 可以获得 A_i 元，但是必须雇用若干个指定的员工。雇用员工 j 需要花费 B_j 元，且一旦雇用，员工 j 可以参加多个项目的开发。问经过合理的项目取舍，最多能挣多少钱
- $1 \leq N, M \leq 100$

- 最大权闭合子图模型
- 每个项目 i 作为一个点并连边 (s, i, A_i) , 每名员工 j 作为一个点并连边 (j, t, B_j) , 若项目 i 需要雇用员工 j 则连边 (i, j, ∞)
- 设最小割为 ans , 那么 $\sum A_i - ans$ 即为结果

- HOJ 2713
- 一个 $N \times M$ 的网格，每个单元都有一块价值 C_{ij} 的宝石。问最多能取多少价值的宝石且任意两块宝石不相邻
- $1 \leq N, M \leq 50$

- 二分图最大点权独立集
- 黑白染色转化为二分图
- 二分图最大点权独立集 = 总权值 - 二分图最小点权覆盖集
- 对偶问题

- 先将网格黑白染色，从源点到每个黑点有一条边，从每个白点到汇点有一条边，容量均为相应宝石的价值
- 每个黑点向与其相邻的四个白点连边，容量为 ∞
- 设最小割为 ans ，结果即为 $\sum C_{ij} - ans$

- Ural 1277
- 一个犯罪团伙打算去偷一家美术馆。警察决定派 K 个人堵住所有从匪窝通向美术馆的道路，不过他们只能驻守在沿途顶点处而不能在匪窝或美术馆，且每个点都有一个需要警察驻守的最低人数 R_i
- 问警察能否完成任务
- $1 \leq N \leq 100, 1 \leq M \leq 10000$

- 无向图点带权的点连通度问题
- 若删掉 K 个点，所得的子图不连通，且删掉任意 $K-1$ 个点子图均连通，则称原图点连通度为 K
- 边连通度定义类似

- 将每个点 i 拆成两个点 i' , i'' , 除匪窝 s 和 美术馆 t 外加边 (i', i'', R_i) , 将每条无向边 (i, j) 分解为 (i'', j') , (j'', i')
- 令 s'' 为源, t' 为汇, 求一次最小割即为结果

- 无向图边连通度
- 任选一点固定为源，枚举汇点求最小割，取最小值即为所求
- 无向图点连通度
- 令本题中的 $R_i = 1$ ，以度最小的顶点为源，枚举汇点求最小割，取一个最小值即为所求

- MCMF

- HOJ 2739
- 带权有向图上的中国邮路问题
- 一名邮递员需要经过每条有向边至少一次，最后回到出发点，一条边多次经过权值要累加，问最小总权值是多少
- $2 \leq N \leq 100, 1 \leq M \leq 2000$

- 若原图的基图不连通, 或者存在某个点的入度或出度为 0 则无解
- 统计所有点的入度出度之差 D_i
- 对于 $D_i > 0$ 的点, 加边($s, i, D_i, 0$)
- 对于 $D_i < 0$ 的点, 加边($i, t, -D_i, 0$)
- 对原图中的每条边(i, j), 在网络中加边(i, j, ∞, D_{ij}), 其中 D_{ij} 为边(i, j)的权值。求一次最小费用流, 费用加上原图所有边权和即为结果