

# 二分与分治

2017-08-13

# 内容一览

- ❖ ( 0 ) 为什么要二分
- ❖ ( 1 ) 如何一分为二
- ❖ ( 2 ) 如何统计答案
- ❖ ( 3 ) 从划分树谈起

## (0) 为什么要二分

❖ 找到一个无法直接找到的位置

## (0) 为什么要二分

- ❖ 度限制最小生成树
- ❖ 限制要求  $S$  在生成树中的度为  $k$

## (0) 为什么要二分

- ❖ 度限制最小生成树
- ❖ 限制要求  $S$  在生成树中的度为  $k$
- ❖ 给定黑边与白边
- ❖ 求有恰好  $k$  条黑边的最小生成树

## (0) 为什么要二分

- ❖ 度限制最小生成树，要求  $S$  在生成树中的度为  $k$
- ❖ 给定黑边与白边，求恰好  $k$  条黑边的最小生成树

- ❖  $O(M(\lg N + \lg C))$
- ❖  $O(M + N(\lg N + \lg C))$

## (0) 为什么要二分

- ❖ 给定 $n$ 个点，要求分成 $m$ 段
- ❖ 使每段最小覆盖圆半径的最大值最小

## (0) 为什么要二分

- ❖ 给定 $n$ 个点，要求分成 $m$ 段
- ❖ 使每段最小覆盖圆半径的最大值最小

### ❖ 最小圆覆盖：

- 随即增量
- 可以支持动态插入一个点（太慢了）
- 可以几乎线性计算给定的一系列点



# (1) 如何一分为二

- ❖ 0. 基本原则
- ❖ 1. 树的分治
- ❖ 2. 矩阵的分治
- ❖ 3. 平面图的分治

# 1. 基本原则

- ❖ 将大对象分割为大小均匀的两部分
- ❖ ( 边界是什么 ? )
- ❖ ( 空集 ? 非空集 ? )
  
- ❖ 记大小为  $T, T_L, T_R$
- ❖ 存在常数  $0 < p < q < 1$  , 使得分割出来的大小满足 :
  - $pT \leq T_L, T_R \leq qT$

## 2. 树的分治

### ❖ 边界：

- 空集
- 单点
- 若干个点

### ❖ “边” 分治

- 分割为两部分
- $p = 1/d, q = 1 - 1/d$

### ❖ “点” 分治

- 分割为多个部分
- 每一个部分大小不超过  $|V|$  的一半
- 重心

## 2. 树的分治

### ❖ 例：树中点对统计

❖ 给定N个结点的带权树

❖ 定义 $\text{dist}(u, v)$

❖ 给定K，对于不同的两个结点a, b，如果

■  $\text{dist}(a, b) \leq K$

❖ 称(a, b)为合法点对

❖ 求合法点对个数

### 3. 矩阵的分治

❖ - 分块矩阵的乘法

❖ - 快速矩阵乘法

### 3. 矩阵的分治

❖ 什么是 LU 分解？

❖ 它的数学表达？

### 3. 矩阵的分治

#### ❖ 考虑分块 ( $2 \times 2$ )

- 不妨考虑满秩的情形
  - 先处理1/4块 (左上角) 的 LU 分解, 得到对角阵
  - 消去左下角, 维护右侧整体的变换矩阵
  - 快速矩阵乘法
  - 再处理右下角
- 
- 不满秩? (相似的过程)

## 4. 平面图的分治

### ❖ 特殊平面图

- 格点图
- 类格点图
- 边为直线段

### ❖ 一般平面图

- 最长路径，重心
- $p = 1/3, q = 2/3$
- 分界： $|V|^{0.5}$  规模



## ( 2 ) 如何统计答案

- ❖ 1. 合并状态
- ❖ 2. 枚举公共点 ( 集 ) 的情况
- ❖ 3. 预处理对子树的查询

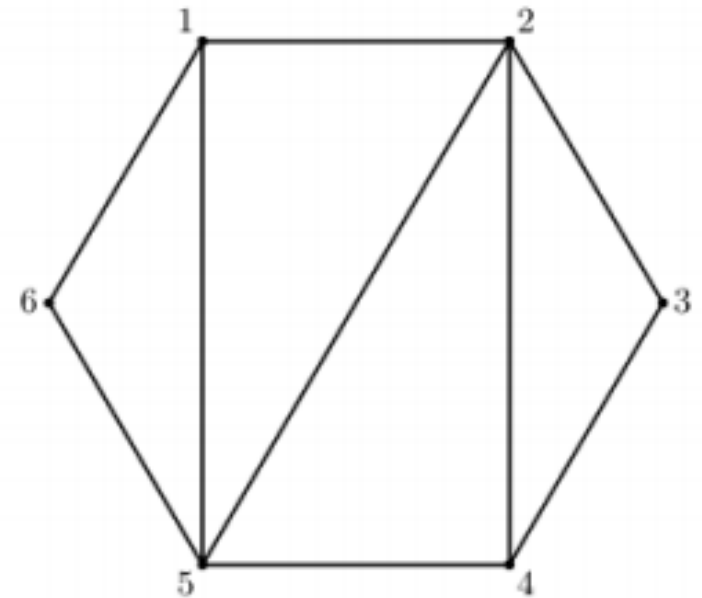
# 1. 合并状态

❖ 回顾：线段树如何合并

❖ 尤其回顾：路径可达性询问如何合并

# 1. 合并状态

- ❖ Distance on Triangulation ( NEERC 2015 )
- ❖ You have a convex polygon.
- ❖ Also have a triangulation of this polygon, given as a list of  $n - 3$  diagonals
- ❖ Distance?



## 2. 枚举公共点（集）的情况

❖ 回顾：树链剖分

- ❖ 在树的“点”分治中，可以看作“点”同时存在于所有子图内
  - 相关联系
  - “点”的状态决策

## 2. 枚举公共点（集）的情况

### ❖ 例：模式字符串

- ❖ 给出 $n$ 个结点的树结构 $T$ ，其中每一个结点上有一个字符，再给出长度为 $m$ 的模式串 $S$
- ❖ 希望知道，有多少对结点 $\langle u, v \rangle$ 满足 $T$ 上从 $u$ 到 $v$ 的路径形成的字符串可以由模式串 $S$ 重复若干次得到？

## ( 3 ) 从划分树讲起

❖ 回顾：什么是划分树

❖ 1. 划分树的思维方式

❖ 2. 推广与联想

# 1. 划分树的思维方式

- ❖ 将区间  $[L,R]$  分割为两个大小一样的区间
  - 第一个区间对应前一半大的值
  - 第二个区间对应后一半大的值
- ❖ 从分治的角度来说
  - 相同点：一分为二
  - 不同点：分割的标准是全新的

## 2. 推广与联想

### ❖ 修改分割的标准

❖ 以位置作为分割的标准

❖ 以数值作为分割的标准

❖ 以答案作为分割的标准

❖ 以查询时间线作为分割的标准



## 2. 推广与联想

- ❖ 例：H函数（2009海峡两岸）
- ❖ ...并把它命名为H函数
  - $H[A,B,C,D](x) = (A * B^x + C) \bmod D$
- ❖ 如果给定一个正整数 $m$ ，用 $F(A, B, C, D)$ 表示 $H[A,B,C,D](x)$ 在 $[1,m]$ 取最小值时的 $x$ （ $x$ 为正整数，且数据保证 $x$ 值唯一）
- ❖ 给定 $n, m, \{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}, \{D_n\}$
- ❖ 求出所有的 $F(A_i, B_i, C_i, D_i)$
- ❖ ...满足 $F(A_i, B_i, C_i, D_i) \leq F(A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1})$

## 2. 推广与联想

- ❖ 给定一个序列， $q$ 次询问（询问离线给出）
- ❖ 每次询问给定  $[l, r]$  与  $k$
- ❖ 问  $[l, r]$  内从左往右找出第一个与  $k$  互素的数

# 今日训练题

- ❖ BZOJ 2280
- ❖ Beijing regional online contest 2016 C
- ❖ 欢迎提问！