INCLUSION-EXCLUSION PRINCIPLE

AHdoc

2017/08/12

容斥原理

- |A cup B| = |A| + |B| - |A cap B|
- |A1 cup A2 cup A3 cup … cup An| = |A1| + |A2 cup … cup An| - |A1 cap (A2 cup ..)|

- 考点：
  - （1）发现问题（或者它的补问题）能容斥
  - （2）枚举状态
  - （3）快速计算

因数与素数分解

- 根本结论：如果n是p的倍数，那么一定也是2p,3p,4p,…的倍数

- 最频繁的考点

FROGS

- 有n只青蛙，m个石头排成一圈，编号0到m-1
- 第i只青蛙会从0出发，每次跳a(i)个

- 求：
  - 一共有多少个石头会被青蛙们跳到（被至少一只青蛙跳到）
  - 被跳到的石头的下标和

FROGS

- 一共有多少个石头会被青蛙们跳到？
  - 一个青蛙能抵达的所有石头，都满足下标是gcd(m,a(i))的倍数
  - 记b(1),b(2),…,b(k)是所有可能的gcd(m,a(i))，k不会超过 sqrt(m)
- 一个石头 i 被跳到，至少有一个b(j)是它的因数
  - 记c(1),c(2),…,c(q)是所有m的因子，且满足是某个b的倍数
- 把所有集合（逻辑图中所有区域）都表示成关于某个c(i)的区域，算权重
  - 先全设定为1，从小到达考察每一个c
  - 如果c的权重是1，则c的所有倍数的权重都减去1
  - 看作逐次考察了重叠层数为1，2，3，4的区域

GCD(I,J)的和

- 给定n，求所有1<=i<=j<=n对应的gcd(i,j)的和

- 枚举 d=gcd(i,j)，问题变成有多少（s[n/d]）互素整数对，且都小于等于[n/d]
- 考虑如果不互素，一定存在gcd>1，进一步来说gcd一定有素因子
  - 也就是说gcd一定有至少一个素因子
  - 如果有两个不同的素因子p,q，删除gcd是pq倍数的情况
  - 如果有更多不同的素因子?
- 有多少整数对满足小于等于k且gcd为w的倍数？$[k/w]^2$

GCD(I,J)的和

- 给定n，求所有1<=i<=j<=n对应的gcd(i,j)的和

- 枚举 d=gcd(i,j)，问题变成有多少（s[n/d]）互素整数对，且都小于等于[n/d]
- 计算s[b]的时间复杂度是O(sqrt(b))
  - 因为只需要枚举b的所有因子
- 总的时间复杂度？
  - $O(n^{2/3})$

GCD(I,J)的和

- 给定n，求所有1<=i<=j<=n对应的gcd(i,j)的和

- 容斥中，对于每一个d来说
  - 只有d中不含有某个素数平方的，才会被加入到计算中
  - 如果d有奇数种素因子，系数为1
  - 有偶数种素因子，系数为-1
- 这里的系数不是别的，正是莫比乌斯系数 mu(d)

GCD(I,J)^{5}的和

- 考虑更复杂的问题，gcd的五次方的和
- 依然枚举d = gcd(i,j)
  - $f(n) = \sum_{d=1}^{n}\left(d^5 \sum_{b|\frac{n}{d}} \mu(b) \left\lfloor \frac{n/d}{b} \right\rfloor^2 \right) = \sum_{b|n} \mu(b) \sum_{d=1}^{n} d^5 \left\lfloor \frac{n/b}{d} \right\rfloor^2$
- 记 $s(b) = \sum_{d=1}^{n} d^5 \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor^2$，则s(b)可以枚举因子在O($b^{0.5}$)的时间内求出来
- 所以
  - $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) s(\frac{n}{d})$
- 可以在O($n^{2/3}$)内算出来

系数的计算

- 为什么我们的系数会有不同?
  - 因为我们可能并不是单独考察每一块
- 如何计算：
  - 最简单的情况：我们单独考察了每一块
    - 暴力枚举 2^s 所有的可能
    - 莫比乌斯反演
  - 可能可以通过递推或动态规划记数
  - 可能要写程序搜，或者手工计数（尤其在图的统计问题上）

SPRING

- 给定 N 个大小为 6 的数组
  - ai[1] ai[2] ai[3] ai[4] ai[5] ai[6], 1<=i<=n
- 对于每一个 0<=k<=6，问有多少对数组满足：恰好只有k个位置对应相等

SPRING

- 对于每一个 0<=k<=6，问有多少对数组满足：恰好只有k个位置对应相等

- 对于每一个 k 记 s[k] 是所有选 k 个相同的答案的和（怎么做？）
- Ans[6] = s[6]
- Ans[5] = s[5] – C(6,5)Ans[6]
- Ans[4] = s[4] – C(5,4)Ans[5] – C(6,4)Ans[6]
- ….

XAVIER IS LEARNING TO COUNT

- 给定 N 个整数 a[1], a[2], …, a[n]，要求从中不重复地拿出 P(<=5) 个相加
- 问能得到那些和值，以及分别能得到多少个

- 如果 P=2 要怎么做？

图上路径存在性

- 1，是否存在定长简单路
- 2，是否存在定长简单环

LONG PATH OF LENGTH 5

- 给定无向图 G
- 对于每一对点 <U,V>
- 问是否有 U 到 V 的简单路径，满足长度为5（经过了6个点）

- U – A – X – Y – B - V

LONG PATH OF LENGTH 5

- U – A – X – Y – B – V

- 先看怎么找到 A – X – Y – B
- O(m^2) 找到所有的 A – X 与 Y – B，那么我们可以统计
  - I. 对于 A 和 B 有多少 A – X – Y – B 经过了某个点 U
    - 对于三元对 <A,B,U> 满足上述询问答案不是0的只有 O(m^2) 对
    - Hash - 快速查询
  - II. 对于 A 和 B 有多少 A – X – Y - B 经过了点 U 和 V

LONG PATH OF LENGTH 5

- U – A – X – Y – B – V

- 找到所有的 A – X 与 Y – B，那么我们可以统计
  - I. 对于 A 和 B 有多少 A – X – Y – B 经过了某个点 U
  - II. 对于 A 和 B 有多少 A – X – Y - B 经过了点 U 和 V
- 枚举 U – A 和 B - V，则问题为：有多少方案 A – X – Y – B 满足 X,Y都不等于U和V
- 容斥！ 时间复杂度 O(m^2)

WALK OF LENGTH 6

- 给定无向图 G
- 对于每一对点 <U,V>
- 问是否有长度为6的简单环，其中U和V是环上对顶点

- U – A – B – V – C – D - U
- U – A - ? - ? – B – V 且U和V相连
- 时间复杂度 O(m^2)

图上计数问题

- 1、图与补图
- 2、连通与不连通
- 3、子图统计问题

最大团

- 无向图 G
- 选择最多的点，满足两两有边

最大团

- 最大团 = （补图的）最大独立集
- 搜索：
  - 枚举 x 的选择情况：
    - 如果选了 x，则与之相邻的点都不能选
    - $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(n^2) = O(n^2 1.618^n)$
    - 度为1的点一定不选 $T(n) = T(n-1) + T(n-3) + O(n^2) = O(n^2 1.4656^n)$
  - 再快一点？
    - 如果最大度为2，暴力构造最优解
    - 否则：选择了x至少能删除4个点
    - $T(n) = T(n-1) + T(n-4) + O(n^2) = O(n^2 1.38^n)$
  - 继续？（偏题了）

交叉路径计数

- 给定第一象限的格点地图
- Alice 从(0,a)向下向右走到(u,0)
- Bob 从(0,b)向下向右走到(v,0)
- $a<b$, $u<v$

- 求二人路径不相交的方案总数

黑白三角形计数

- 给定无向完全图G
- 任意两点的边要么是白色，要么是黑色

- 求有多少纯色三角形：白色三角形+黑色三角形

ALL SUBGRAPHS OF SIZE 4

- 四个点的子图有

```
+-+-+-+     +-+-+     +-+     +-+-+   +-+     +---+
              |       | |       |/    |\|     |\ /|
              +       +-+       +     +-+     | X |
                                              |/ \|
                                              +---+
```

- 给定无向图G，分别求上述子图在里面出现了多少次

ALL SUBGRAPHS OF SIZE 4

```
+-+-+-+      +-+-+      +-+      +-+-+   +-+      +---+
               |        | |        |/    |\|      |\ /|
               +        +-+        +     +-+      | X |
                                                  |/ \|
                                                  +---+
```

- 前两个怎么求？组合公式：枚举中间2个点-O(m)；枚举中间一个点-O(n)
- 第四第五第六个：枚举一条边，枚举其中一个点的所有连边-O(nm)
  - 可以更快
  - 度超过K的点有O(m/K)个，只有$O(m^2/K^2)$条边需要枚举n个点
  - 其余每条边只需要枚举O(K)个点
  - $O(m^2/K+mK) = O(m^{1.5})$
- 第三个：不会！（有一些慢的做法）

ALL SUBGRAPHS OF SIZE 4

```
+-+-+-+      +-+-+     +-+     +-+-+  +-+     +---+
               |       | |       |/   |\|     |\ /|
               +       +-+       +    +-+     | X |
                                              |/ \|
                                              +---+
```

- 第三个：不会！（有一些慢的做法）
- 可是，第三个一定也是第一个
- 还有哪些会是第一个？

```
+-+
| |
+ +
```

- 中间有三条边存在性不明：分别会得到图3,4,5,6
- 权值分别多少？

TRAINING

- Hdu 4093
- Hdu 5514
- Uestc 811