生成函数

Generating Function

2016 - 08 - 09

内容概要

- （ 1 ）从组合数 C(n,r) 谈起
- （ 2 ）形式幂级数
- （ 3 ）两类组合问题
- （ 4 ）部分分式
- （ 5 ）整系数一次不定方程
- （ 6 ）线性循环数列

从组合数 C(n,r) 谈起

- C(n,r) : 从n个有差异的物品中选择r个的所有方案数

- Fact 1: C(n,r) = C(n,n-r)
- Fact 2: C(n,r) + C(n,r+1) = C(n+1,r+1)

从组合数 C(n,r) 谈起

- Fact 3:
  - $C(n,0)C(m,r)+C(n,1)C(m,r-1)+\ldots C(n,i)C(m,r-i)\ldots+C(n,r)C(m,0)=C(n+m,r)$
- 特别有：
  - $r = n = m$时：$C(n,0)^2+C(n,1)^2+\ldots+C(n,n)^2 = C(2n,n)$

从组合数 C(n,r) 谈起

- Fact 3:
  - $C(n,0)C(m,r)+C(n,1)C(m,r-1)+\ldots C(n,i)C(m,r-i)\ldots+C(n,r)C(m,0)=C(n+m,r)$
- 证明：
  - Newton二项式：
    - $(1+x)^n=C(n,0)+C(n,1)x+\ldots+C(n,n)x^n$
    - $(1+x)^m=C(m,0)+C(n,1)x+\ldots+C(m,m)x^m$
  - 那么$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$其中xr的系数为：
    - $C(n,0)C(m,r)+C(n,1)C(m,r-1)+\ldots+C(n,r)C(m,0) = C(n+m,r)$

从组合数 C(n,r) 谈起

- Fact 4:
  - n为偶数, $C(n,0)^2-C(n,1)^2+C(n,2)^2-...+(-1)^nC(n,n)^2 = (-1)^{n/2}C(n,n/2)$
  - n为奇数, $C(n,0)^2-C(n,1)^2+C(n,2)^2-...+(-1)^nC(n,n)^2 = 0$

从组合数 C(n,r) 谈起

- 定义：对于数列$a_0,a_1,...,a_n$，它的母函数为$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

- 例：
  - 数列1,2,3,...,n+1有母函数$1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+(n+1)x^n$

从组合数 C(n,r) 谈起

- 组合数的母函数

- 对于C(n,n), C(n,n-1), ..., C(n,r), ..., C(n,0)，有母函数
  - $C(n,n)+C(n,n-1)x+C(n,n-2)x^2+...+C(n,n-r)x^r+...+C(n,0)x^n$
  - $= x^n(C(n,n)/x^n+C(n,n-1)/x^{n-1}+...+C(n,n-r)/x^{n-r}+...+C(n,0))$
  - $= x^n(1+1/x)^n \ = (1+x)^n$

从组合数 C(n,r) 谈起

- 组合数的母函数 $f(x) = (1+x)^n$

- 令 $x = 1$，则$C(n,0)+C(n,1)+...+C(n,n) = 2^n$
- 令 $x = -1$，则$C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-...+(-1)^nC(n,n) = 0$

- 令 $x = 3$，则$C(n,0)+3C(n,1)+3^2C(n,2)+...+3^nC(n,n) = 4^n$

形式幂级数

- 形式幂级数：无穷级数的母函数

- Fact 1: sum $a_n x^n$ = sum $b_n x^n$ iff $a_n = b_n$
- Fact 2: sum anx^n + sum bnx^n = sum $(an+bn)x^n$
- Fact 3: (sum $a_n x^n$)a = sum $(aa_n)x^n$

形式幂级数

- 例：如何计算 (sum x^n)^2

形式幂级数

- 例：如何计算 $(\text{sum } a_n x^n)(\text{sum } x^n)$

- 数列 $a_0,a_1,\dots,a_n,\dots$ 的母函数
- 数列 $a_0,a_0+a_1,a_0+a_1+a_2,\dots,a_0+a_1+\dots+a_n,\dots$ 的母函数
- 数列 $a_0,-(a_0+a_1),a_0+a_1+a_2,\dots,(-1)^n(a_0+a_1+\dots+a_n),\dots$ 的母函数

形式幂级数

- 除法：$f = gh$ 即 $f/g = h$

- 例：求 $1/(1+x)$ 的级数表示
- 如果 $x = 2$, 能否带入？

形式幂级数

- 定理：$1/(1+x)^n = C(n-1,n-1)+C(n,n-1)x+C(n+1,n-1)x^2+...$

- 证明依赖等式：
  $C(p,p)C(q+n,q)+C(p+1,p)C(q+n-1,q)+C(p+2,p)C(q+n-2,q)+...$
  $+C(p+n,p)C(q,q) = C(p+q+n+1,p+q+1)$

形式幂级数

- 习题：
  - 求 $a_n = n^2$ 的母函数
  - 求 $a_n = 5^n$ 的母函数
  - 求 $a_n = n(n+1)$ 的母函数
  - 求 $a_n = n+5$ 的母函数

两类组合问题

- （1）从n个不同的物体中任取r个，允许重复 - C(n+r-1,r)
- （2）从n个不同的物体中任取r个，第i个最多允许取a_i个

两类组合问题

- $(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)(\ldots)\ldots(\ldots) = \text{sum } a_r x^r$

- 且$1+x+x^2+\ldots = 1/(1-x)$所以：
  - $\{a_r\}$有目函数$(1/(1-x))^n$
  - 又 $(1/(1-x))^n = C(n-1,n-1)+C(n,n-1)x+\ldots+C(n+r-1,n-1)x^r+\ldots$
  - 所以$a_r=C(n+r-1,n-1)$

两类组合问题

- 例：口袋中有白球 5 个，红球 3 个，黑球 2 个，每次取 5 个
- 求方案数？

两类组合问题

- 例：用1g,2g,4g,8g,16g砝码各一个可以称出哪些重量

部分分式

- 部分分式定理：真分式 P(x)/Q(x)，则可以拆分为部分分式和
- 例：$1/(x^3-x^2-x+1)$可以分解$1/(2(x-1)^2)-1/(4(x-1))+1/(4(x+1))$

整系数一次不定方程

- 思考：一次不定方程　$x_1+x_2+...+x_n=r$
- 的非负整数解的个数等于 $C(n+r-1,r)$

- 定理：一次不定方程 $p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n=r$
- 的非负整数解个数为b_r，则：
  - $1/[(1-x^{p_1})(1-x^{p_2})...(1-x^{p_n})]$ 为b_r的母函数

整系数一次不定方程

- 例：用１元和２元钞票支付１５元钱，有多少方案？

整系数一次不定方程

- 拆分数 P(n)

- Euler's Pentagonal Number Theorem.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{k}{2}(3k-1)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(1+x^k\right)x^{k(3k-1)/2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(1-x^{2k+1}\right)x^{k(3k+1)/2}$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\cdots$$

线性循环数列

- 考虑Fibnacci数列的母函数 f(x)
  - $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$
  - $(1-x-x^2)f(x) = a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-a_0)x^2+\ldots+(a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^n+\ldots$
  - $(1-x-x^2)f(x) = 1$
- 所以：
  - 分数拆分
  - 通项

线性循环数列

- 一般情况：
  - $a_n = c_1a^{n-1} + c_2a^{n-2} + ... + a_ka^{n-k}$
  - 母函数 $f(x) = (b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_kx^k+...) / (1-c_1x-c_2x^2-...-c_kx^k)$

  - 比较系数：
    - $b_0 = a_0$
    - $b_1 = a_1 - c_1a_0$
    - $b_2 = a_2 - c_1a_1 - c_2a_0$
    - ...
    - $b_n = 0$ (n>=k)

线性循环数列

- 例：$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, 求 a_n

线性循环数列

- 例：$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n, a_0 = -1, a_1 = -2$

训练题

- http://acm.hust.edu.cn/vjudge/contest/127189 (Fulton)

- hdu 4651
- hdu 4658
- hdu 1171
- hdu 1028
- hdu 1398
- hdu 2065
- poj 3734

- 欢迎提问！