AHdoc

Game Theory 2

什么是游戏

- (1) 有2个或若干个玩家 (player)
- (2) 每一个玩家有若干策略可以选择
- (3) 每一个玩家的策略选择，决定了最后游戏的结果
- (4) 每一个可能的游戏结果赋予了每一个玩家一个收益 (payoff)

- 我们只考虑最简单的一类：Normal Form Games

Normal Form Games

- Payoff matrix game

		Player 2		
Player 1		c_1	$\dots$	c_j
	r_1	$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,j}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	r_i	$a_{i,1}$	$\dots$	$a_{i,j}$

先看 Two Person Zero Sum Games

- 所有 a(i,j) 是零和的

		Player 2		
Player 1		c_1	$\dots$	c_j
	r_1	$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,j}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	r_i	$a_{i,1}$	$\dots$	$a_{i,j}$

决策：Pure strategy

- Pure strategy：
  - 非概率策略
  - 玩家不会改变他们在游戏过程中的行为
- 常见的Pure strategy：
  - Dominant strategy
  - Saddle Point

决策：Pure strategy

- 常见的Pure strategy：Dominant strategy
  - 一个策略 S 是Dominant strategy，是说存在一个策略 T 满足
  - 对于任何情况，策略 T 都不差于 S 且至少有一个情况 T 严格更好
- **Dominant strategy principle:**
  - 任何玩家都不会尝试一个 **Dominant strategy**
- 可以用来减少决策

决策：Pure strategy

- **Dominant strategy principle:**
  - 任何玩家都不会尝试一个 **Dominant strategy**
- 可以用来减少决策
  - **3 5 4 2**
  - **5 6 2 4**
  - **2 1 4 0**
  - **3 3 5 2**

决策：Pure strategy

- 常见的Pure strategy：Saddle Point

- 在 payoff matrix 中看，一个位置 (x,y) 是Saddle Point
- 是说：
  - 它是所在行最大的
  - 也是所在行最小的

决策：Pure strategy

- 常见的Pure strategy：Saddle Point

		Player 2			
		A	B	C	Min
Player 1	A	2	4	3	**2**
	B	1	-10	5	-10
	C	-1	6	-8	-8
	Max	**2**	6	5	

决策：Pure strategy

- 常见的Pure strategy：Saddle Point
- **Saddle point principle:**
  - **如果存在 Saddle points**
  - **则每一个玩家都一定选择有 Saddle point 的策略**
- Saddle point 可能有多个

决策：Pure strategy

- Saddle point 可能有多个，但：
  - 任意两个 Saddle points 有相同的值（**Value of the game**）
  - 如果玩家 A 和 B 都选择了一个包含 Saddle points 的策略，则一定在 Saddle point
- 为什么？证明一下？

决策：Mixed strategy

- Mixed strategy：
  - 混合的策略，每一种策略有一定概率
  - 固定的概率
- 怎么计算 **Value of the game**？

最小最大原则 （Minimax Thm.）

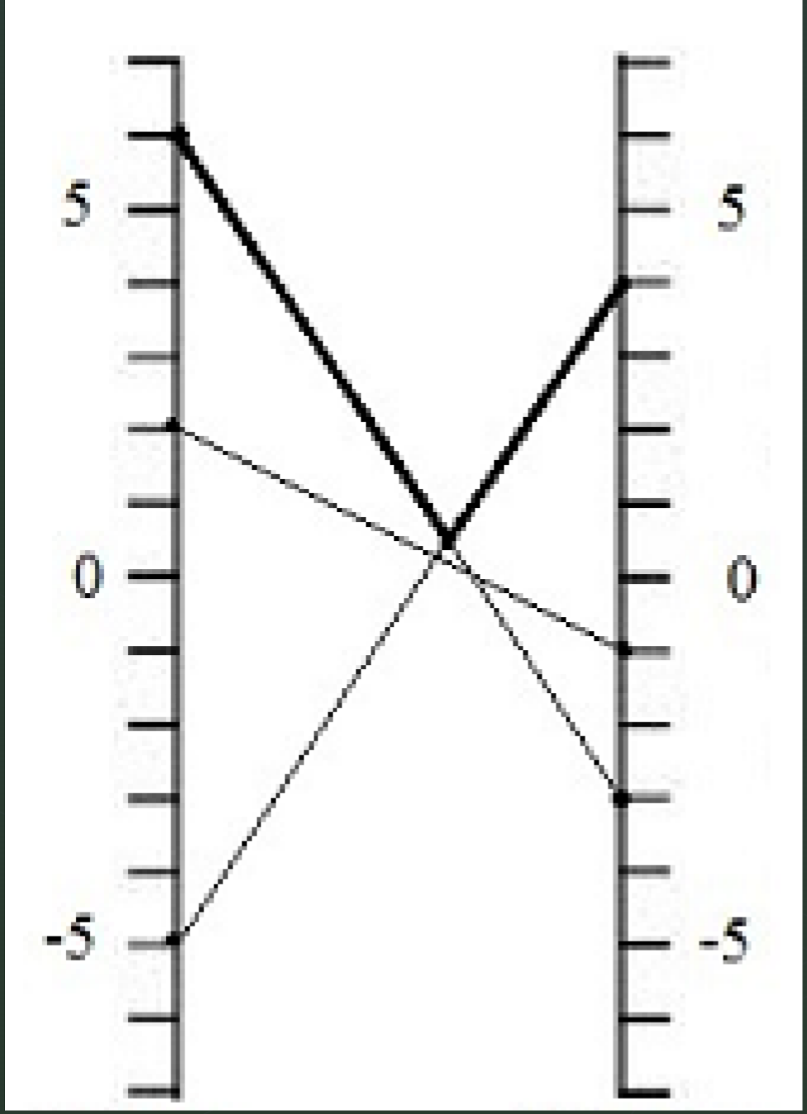
- 总存在一个唯一的数 v， 称作 Value of the game
- 满足存在 A 和 B 的最优策略（pure or mixed）满足：
  - A 在选定策略下的期望 payoff 大于等于 v，无论B做什么
  - B 在选定策略下，可以让A的期望 payoff 小于等于 v，无论A做什么

如何寻找最优 Mixed strategy

- 1). 如果是 2 * 2 的策略？
- 2). 更多？降维
- 3). 有一些几何上的方法

如何寻找最优 Mixed strategy

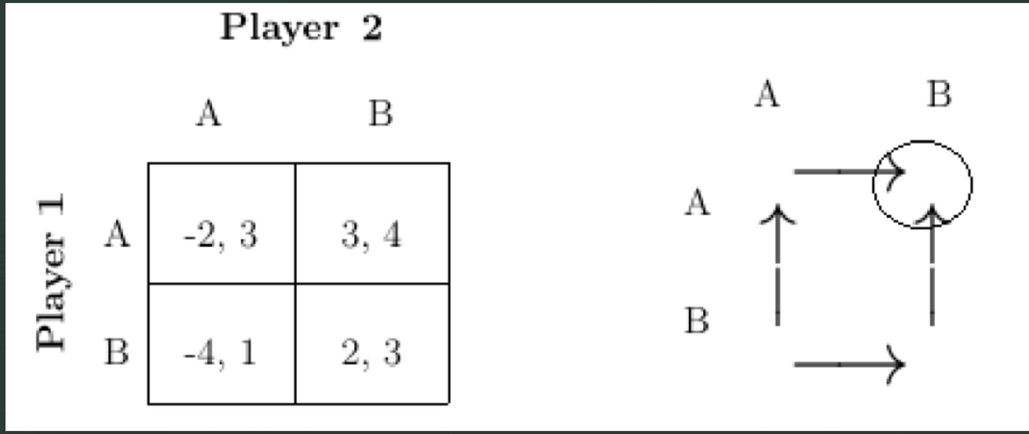
		Player 2		
		A	B	Min
Player 1	A	6	-3	-3
	B	2	-1	**-1**
	C	-5	4	-5
	Max	6	**4**	



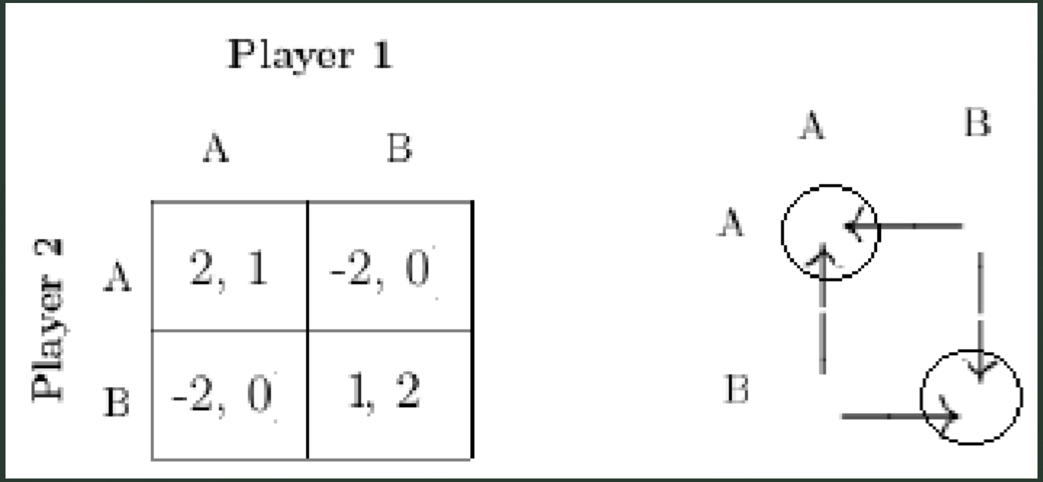
下面看 Two Person Non-Zero Sum Games

- Cooperative strategies？
- 需要先思考，到底能否有交流和商议的可能

Two Person Non-Zero Sum Games



Player 1 \ Player 2	A	B
A	-2, 3	3, 4
B	-4, 1	2, 3



Player 2 \ Player 1	A	B
A	2, 1	-2, 0
B	-2, 0	1, 2

Nash Equilibrium

- 对于2个人来说，如果有一个均衡策略满足：
  - 每一个玩家都无法通过只修改他自身的策略获得更好的 payoff
- 这样的策略位置就是 Nash Equilibrium

- 也就是说此刻，每一个人都做到了自己能做到的最好情况

Mixed Strategy 的 Nash Equilibrium

		Player 1	
		A	B
Player 2	A	-2, 3	3, 2
	B	4, 1	2, 3

- 考虑从一种策略出发，假设此刻两个人都等概率混合策略
- Step 1.
  - 对于 Player 1，枚举 x 选择 A，1-x 选择 B
  - 3x+(1-x) = 2x+3(1-x)，所以x = 2/3
- Step 2.
  - 此刻 Player 1 的策略是 2/3 选择 A，1/3 选择 B
  - 同样 -2*2x+3(1-x) = 4*2x+2(1-x)

小结

- 我们稍微介绍了均衡博弈问题的冰山一角
- 1）Pure strategy & Mixed strategy，实际上还有更多别的策略
- 2）Nash Equilibrium 以及如何找到
- 3）Mixed strategy 的Nash Equilibrium

思考题

Prisoner 2		
Prisoner 1	S	B
S	$(-1,-1)$	$(-3,0)$
B	$(0,-3)$	$(-2,-2)$

Player 2		
Player 1	C	D
C	(R,R)	(S,T)
D	(T,S)	(U,U)

- 求出所有合法的 (T,R,U,S)