Day2 计算几何
Computation Geometry

2017/08/09

计算几何需要的数学基础

- 解析几何：
  - 向量，内积，外积，坐标系，相对坐标系
  - 旋转矩阵，household matrix，定轴旋转
- 线性代数
  - 矩阵乘法与幂，矩阵对角化，行列式
  - 矩阵分解，正交化，特征，特征向量，SVD分解
- 物理知识
  - 功，势能，能量，惯性系，力矩，受力分解，哈密顿力学
- 微积分
  - 体积，面积，曲率，曲线长度，格林公式，近似积分
  - 级数，微分方程，动力系统稳定性

计算几何

- 一，应对纯粹计算几何题的策略
  - “切割”几何对象
  - 极值与最值
- 二，存在性问题
- 三，最佳值问题
  - 高效的几何模型 (凸包)
  - 极限法
  - 逼近最佳解的近似算法 (函数凸性)

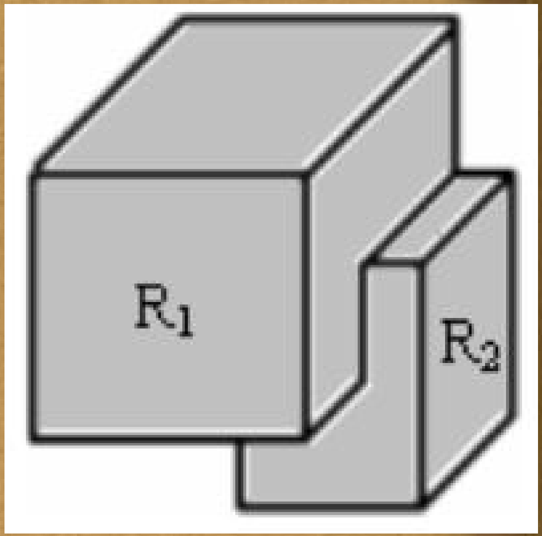
1 - 应对纯粹计算几何题的策略

- 直接询问一个几何对象
  - 的面积，体积，周长，区域积分等
  - 的特殊点个数，包含情况等
- 如何描述一个几何对象
  - 简单：显性描述 - 快速计算
  - 复杂：隐性描述 - 逐步剖析
- 1）切割几何对象（剖析）
- 2）极值与最值（特殊的几何对象，剖析）

1 - 应对纯粹计算几何问题的策略
1.1 - 切割几何对象

- 离散化关键坐标

- 切割问题
- 以此考虑每一个独立的部分
  - 体切割
  - 边界切割（边界决定对象）



- 可能需要的相关知识点：
  - 数据结构，线段树，kdtree
  - 常见几何体的面积，面积计算，体积计算，带权区域积分
  - 几何体的面积，边界的描述
  - 积分，体积近似估计（Simpson's rule）

1 - 应对纯粹计算几何题的策略
1.1 - 切割几何对象

计算n个长方体的体积并

- 已知 n 个长方体，计算这些长方体所覆盖的空间总体积。
- 输入：
  - 第1 行为长方体数n。
  - 以下n 行，其中第i+1 行为‘x1 y1 z1 x2 y2 z2’，表示第i 个长方体的左前下角坐标为（x1 y1 z1），右后上角坐标为（x2 y2 z2）。
- 输出：
  - n 个长方体并的体积和。

1 - 应对纯粹计算几何题的策略
1.1 - 切割几何对象

计算n个规则几何体的体积并（园，椭圆，混合）

- 已知 n 个凸几何体，计算他们所覆盖的空间总体积。
- 简化版：
  - n个三角形
  - n个圆
  - n个椭圆

1 - 应对纯粹计算几何题的策略
1.1 - 切割几何对象

计算n个规则几何体的区域积分

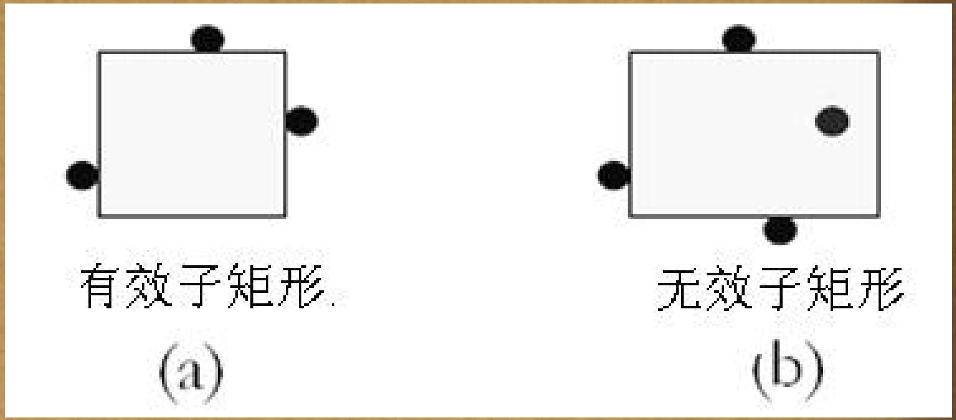
- 对定点的力矩
- 对定质点的力
- 两端点的电阻值

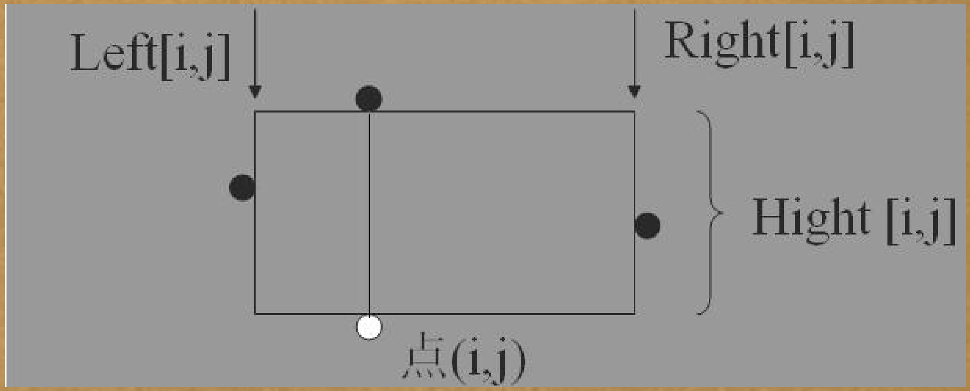
- 分析答案：
  - 数学表示
  - 积分拆解
  - 边界拆分（Stokes' theorem）

- 更复杂的区域：
  - 规则几何体，重叠若干次后的区

1 - 应对纯粹计算几何问题的策略
1.2 - 极值与最值

- 问题的局部最值，局部极值
- 不需要逐距离考察所有可能
- Samples：
  - 垂线法求最大子矩形





1 - 应对纯粹计算几何题的策略
1.2 - 极值与最值

■Oil

- 给定若干与x轴平行的线段
- 求一条直线可以经过最多多少线段？

- 最优方案一定经过2个端点：枚举2个端点
- 最优方案一定经过1个端点：枚举1个端点

- （如果极值空间的维度（dimSing）比较大，则先尝试找到Sing上一个点，再去找第二个点，第三个点）

1 - 应对纯粹计算几何问题的策略
1.2 - 极值与最值

- 如果极值空间的维度（dimSing）比较大
- 则先尝试找到Sing上一个点，再去找第二个点，第三个点
  - 一个点：0维
  - 两个点：1维

1 - 应对纯粹计算几何题的策略
1.2 - 极值与最值

可达区域

- 给定凸多边形障碍H，给定H外一点P(x,y)，给定长度L
- 求到P点距离不超过L的点形成的区域的面积

- 拓展：
  - 有多少比例的可达区域需要向左走
  - 多少比例的向右走

1 - 应对纯粹计算几何问题的策略
1.2 - 极值与最值

可达区域

- 原题的简单做法：
  - 分别考虑从左从右走
  - 答案=左右两部分可达区域的并
  - 每一部分是什么样子？怎么求？
  - 如何求并

1 - 应对纯粹计算几何题的策略
1.2 - 极值与最值

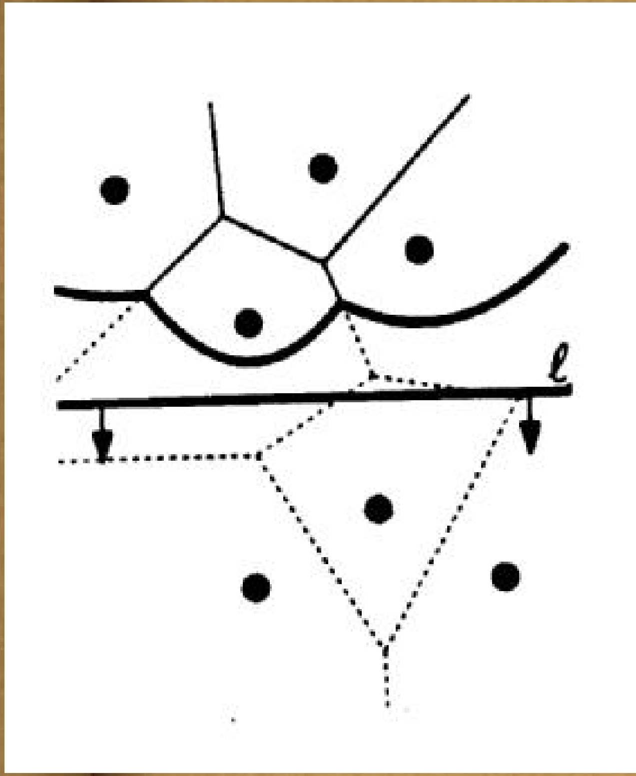
■可达区域

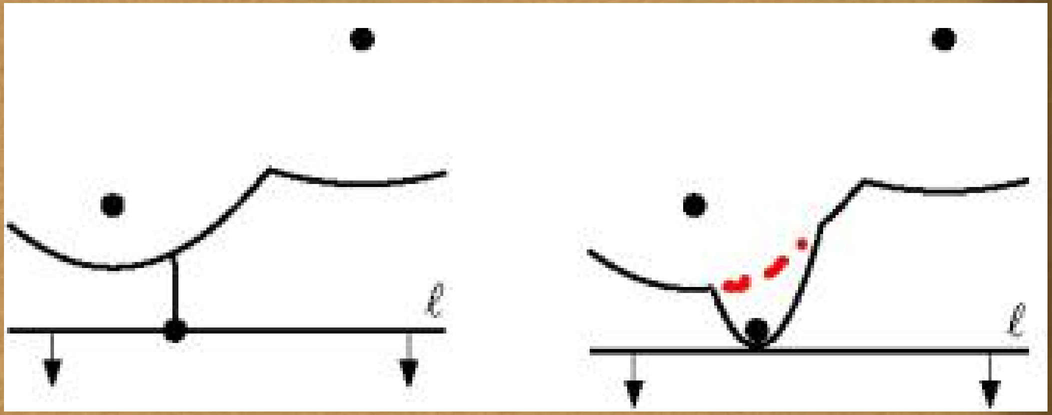
- 找左右分界线（我们需要画个图）
- 分界线是一维的！
  - 先尝试找到一个点（多边形上有一个，怎么找？）
  - 如何找到第二个？
  - 如何找到第三个？

- 分界线是分段的，所有端点都可以被算出来
- 中间的部分？（不是直线！）怎么算？
  - 可以积分

1 - 应对纯粹计算几何题的策略
1.2 - 极值与最值

- Fortune's algorithm (sweeping line)
- for Voronoi diagram





2 - 应对存在性问题的策略探讨

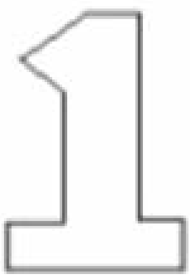
- 直接通过几何计算求解
- 转换几何模型求解

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.1 - 直接通过几何计算求解

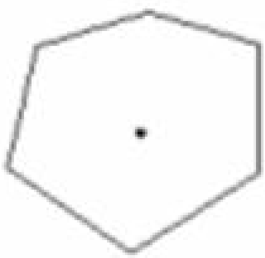
观察点

- 已知一个多边形P（不一定是凸的）

- 问在P 中是否存在点Q
- 在Q 点能观察到整个多边形区域



不存在能观察整个多边形区域的点
(a)



黑点能观察整个多边形区域
(b)

2 - 应对存在性问题的策略探讨

2.1 - 直接通过几何计算求解

- 边界点：
  - V_0，V_1，V_2，…，V_n
  - $V_0 = V_n$

- 能够观察到边 $V_i V_{i+1}$ 的点 Q_i 满足

$$\overrightarrow{Q_iV_i} * \overrightarrow{Q_iV_{i+1}} \geq 0, i = 0 \ldots n-1$$

- 转化为求 n 个半平面的交是否不为空

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.1 - 直接通过几何计算求解

铁人赛

- n 名选手参加铁人三项赛，比赛按照选手在三个赛段中所用的总时间排定名次。
- 已知每名选手在三个项目中的速度Ui、Vi、Wi。
- 问对于选手i（1≤i≤n），能否通过适当的安排三个赛段的长度（但每个赛段的长度都不能为0），来保证他获胜。

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.1 - 直接通过几何计算求解

- 假设三个赛段的长度分别为x、y、z
- 选手i 胜于选手j 的充要条件：

$$\frac{x}{u_i}+\frac{y}{v_i}+\frac{z}{w_i}<\frac{x}{u_j}+\frac{y}{v_j}+\frac{z}{w_j}, i \neq j$$

- 将每个不等式两侧都除以z，令X=x/z，Y=y/z

$$\left(1/u_j - 1/u_i\right)*X+\left(1/v_j - 1/v_i\right)*Y+\left(1/w_j - 1/w_i\right)>0$$

- 转化为求这n-1 个不等式对应的半平面的交

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2 - 转换几何模型求解

- 对于存在性问题，模型的效率同模型的抽象化程度有关
- 模型的抽象化程度越高，它的效率也就越高

- 而且存在性问题一般在一个测试点上有多组测试数据
- 几何模型的效率不能满足要求的

- 对几何模型进行相应的变换

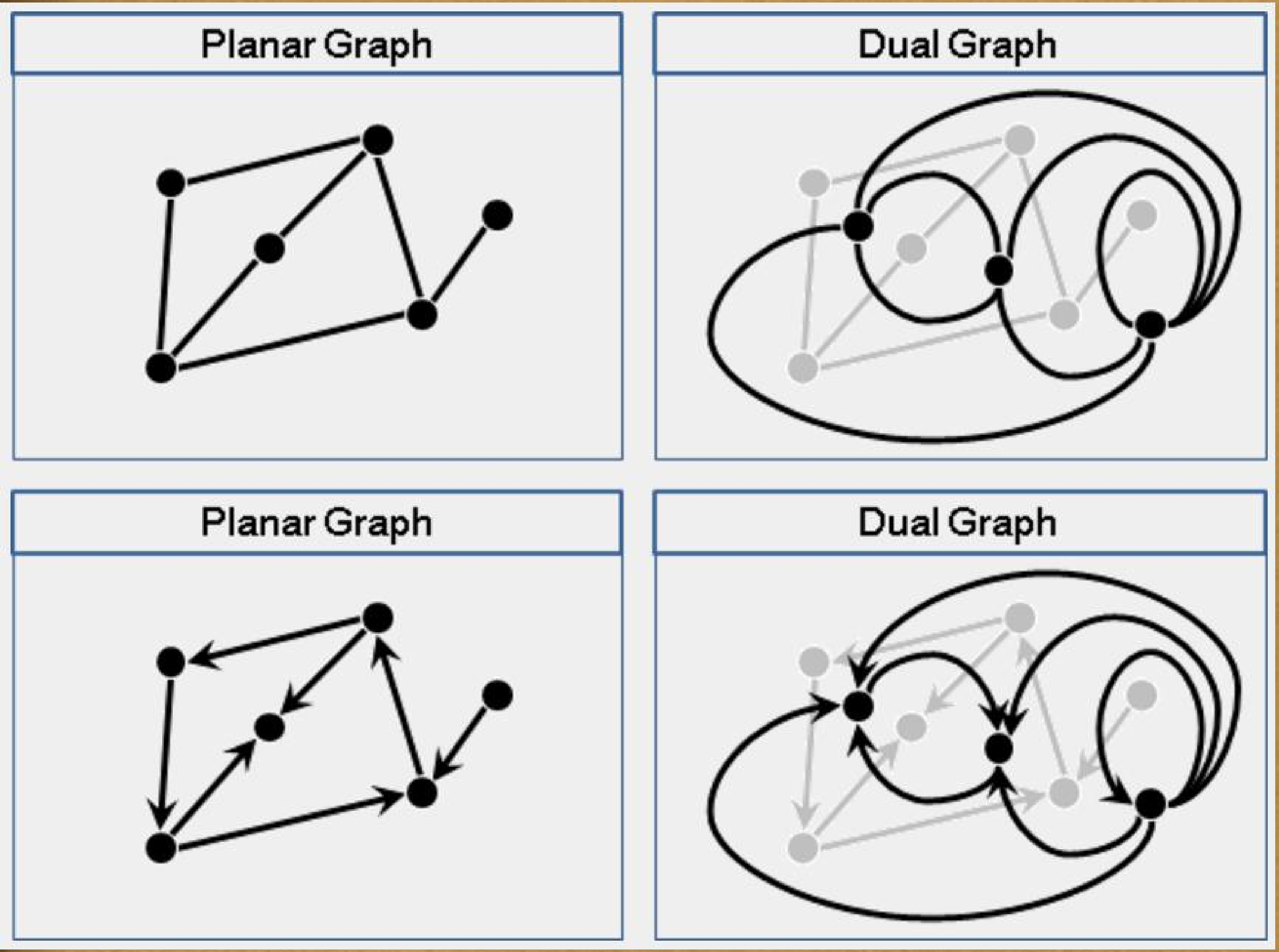
- 1）平面图对呕图
- 2）降低维数

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2　-　转换几何模型求解

- 平面图对偶图

- Samples：
- （1）生成树 - 对偶图的生成树
- （2）网络流 - 对偶图最短路径
- （3）有障碍的平面可达性 - 由障碍决定的对偶图连通性

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2 - 转换几何模型求解



2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2 - 转换几何模型求解

比较胖的人过障碍

- 在宽度W的跑道上，有一个球形的胖子
- 有n个障碍
- 问可达性？

- 可达性=障碍的（上下边界）连通性

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2 - 转换几何模型求解

- 降低维数
  - dim=1 区间问题
  - dim=2 半平面交

- 这是三维问题的常见手段
- 如果二维问题需要用这样的手段，一般也需要数据结构

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2 - 转换几何模型求解

- **判断点在哪个区域**

- 给定平面n个区域（互不相交，可能有公共边）
- 第 i 个区域的边界是 a_i 边形，满足sum a_i<=100000

- 大量（<=100000）询问，每次给定一个点(x,y)
- 问在第几个区域内

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2 - 转换几何模型求解

- 判断点在哪个区域

- 1）多个二维区域没有很好的逻辑性
- 2）想办法变成一维的查询

- x方向切割
  - 切割后是什么样子？
  - 没有内测交点！
- y方向二分
  - 怎么二分？

2 - 应对存在性问题的策略探讨
2.2 - 转换几何模型求解

- CS游戏

- 3D管道的可视化问题
- （2D管道的可视化问题怎么做？）

- 维护视野（球面）
- 限制性平面（需要限制到球面上么？）

- 拓展思考：球面如何维护？
  - 球面直线，球面夹角？相交判定？

3 - 应对存在性问题的策略探讨

- （1）考虑极限情形
- （2）采用逼近最佳解的近似算法

3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.1 - 考虑极限情形

- 证明的手段
  - 自变量取某些非特殊情况值时目标函数不可能是最优的
- 考虑充分小量
  - 经过微调能够使得目标函数的值变得更优
  - 剩下有限种特殊的取值情况可能成为最优解

3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.1 - 考虑极限情形

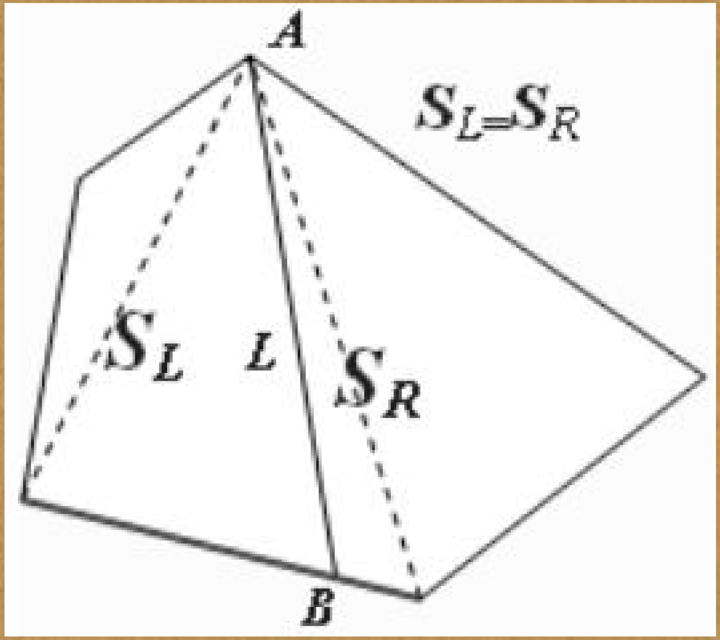
- **巧克力（Ural XXXX）**

- 凸N边形，一刀割成大小相等的两半
- 找出分割线的最短长度

3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.1 - 考虑极限情形

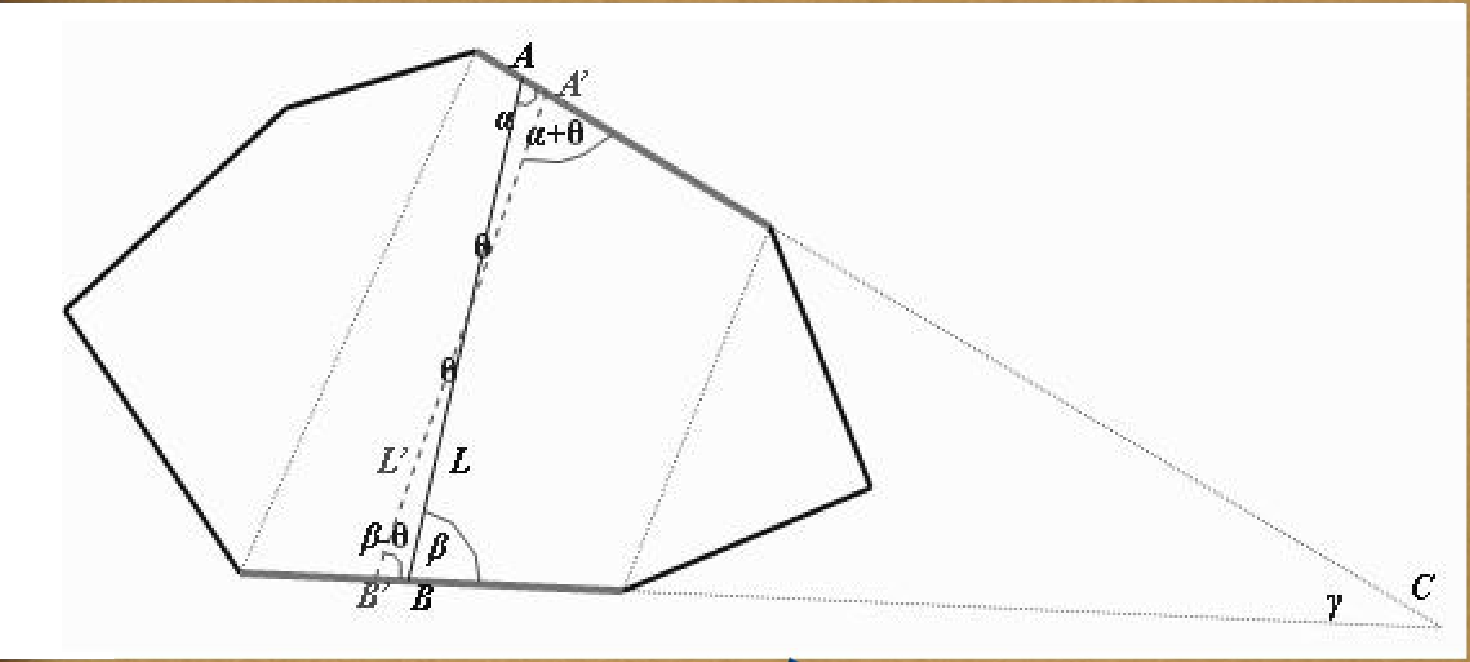
- Case 1. L = (A,B), A在凸包顶点上

- 可以二分快速找到B的位置



3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.1 - 考虑极限情形

- Case 2. A, B都不在凸包顶点位置



L与P的两个夹角相等！

3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.1 - 考虑极限情形

- 太慢了！要O(n^2)！

- 一定过重心（为什么？）
- 过重心的所有直线与多边形的关系

- 线性扫描

- 相似的题目：
  - 线扫描求：最远点对，最大宽度，最小宽度，最小面积差
  - 双（多）指针同时移动

3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.1 - 考虑极限情形

- **思考题：**

- 平面上有n(3≤n≤10000)个互不重合的点
- 要求一条直线，使得所有点到这条直线的距离和最小

3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.2 - 采用逼近最佳解的近似算法

- 迭代
  - 收敛性
  - 收敛速度
  - 稳定的规模
  - 稳定类型
- 随机增量！
  - 最小圆覆盖
  - 最优化选点（最小圆覆盖就是最优化选择圆心）
- 要考察问题函数的单调性

3 - 应对存在性问题的策略探讨
3.2 - 采用逼近最佳解的近似算法

- 重物垂吊

- 桌面上有n个洞
- 有n个物品分别质量m_1到m_n
- 有n根绳子长度分别L_1到L_n
- 所有绳子一头拴在一起，另外一头连接物品并穿过洞口

- 求平衡位置绳头的坐标

今日训练安排

- SPOJ CIRUT
- World Final 2010 K
- World Final 2011 K
- World Final 2016 G
- World Final 2016 H
- World Final 2017 A

- 欢迎提问！