



# 桥与割点

## Bridge & Cut Pt.

2017 - 08 - 14



# 准备知识

- 1) 最短路径，如何求？
- 2) 最小生成树，如何求？
- 3) 求割点的算法？
- 4) 求割边（桥）的算法？
- 无向图的遍历：
  - $\text{DFS} - E = T + C$  树边，回边
  - $\text{BFS} - E = L + B$  层内，层之间



# 内容简介

- (1) 桥与图的连通性
- (2) DFS序列与桥
- (3) 有向图双联通性与逻辑判定
- (3) 全局割



# 桥与图的连通性 - 四点交换

- 给定无向图  $G = (V, E)$ ，每次操作：
  - 选择四个不同的点  $A, B, C, D$
  - 如果它们中只有  $AB$  和  $CD$  有边
  - 删除这两条边，新增  $AC$  和  $BD$
- 问：至少要多少次操作，才能使整个图连通。



# 桥与图的连通性 - 四点交换

- 什么样的图一定有非桥边？
- 单点！一无解
- 非桥边 换取 两个连通块的连接



# 桥与图的连通性 - 必经点统计

- 给定有向图  $G$ ，指定结点  $s$  和  $t$
- 求所有从  $s$  到  $t$  必定经过的点



# 桥与图的连通性 - 必经点统计

- 考点一：消去有向图所有双连通分量
  - 效果：图变成DAG



# 桥与图的连通性 - 必经点统计

- 考点一：消去有向图所有双连通分量；图变成DAG
- 考点二：找到所有可能在  $s$  到  $t$  的路径上的点
  - 从  $s$  出发正向 dfs
  - 从  $t$  出发逆向 dfs
  - 所有两次都访问到的点，一定在某条  $s$  到  $t$  的路径上






# 桥与图的连通性 - 必经点统计

- 考点一：消去有向图所有双连通分量：图变成DAG
- 考点二：找到所有可能在  $s$  到  $t$  的路径上的点
- 考点三：DAG上只有一个源  $s$ ，只有一个汇  $t$ ，求所有必经点
  - 我们刚才已经保证了DAG上每一个点都在合法路径上
  - 那么此刻任何必经点一定是DAG变成无向图后的割点
  - 把图变成无向图



# 桥与图的连通性 - 必经点统计

- 考点一：消去有向图所有双连通分量：图变成DAG
- 考点二：找到所有可能在  $s$  到  $t$  的路径上的点
- 考点三：DAG上只有一个源  $s$ ，只有一个汇  $t$ ，求所有必经点
  - 变成无向图，欲求  $s$ - $t$  割点
- 考点四：求  $s$ - $t$  割点
  - 所有点拆点，按照原来有向图的信息对所有边分类连接（无向边）
  - 求无向图所有桥（减去是原图边的那些桥）



# DFS序列与桥

- Fact, 非树边连接有祖先子孙关系的点
- Question, 每一个子树内出去的非树边?  $\text{OutE}(u)$



## DFS序列与桥 - 双割

- 考虑  $n$  个点的无向连通图
- 求从图中删除恰好两条边使图不联通的方案总数
- $n \leq 2000$



# DFS序列与桥 - 双割

- Case 1, 其中一个一个是桥
- Case 2, 两个都不是桥
- 图的DFS树  $T$ :
  - 双联通
  - 至少有一条边是树边, 枚举一条边  $u - fa(u)$
  - 另外一条边:
    - 非树边: 检查子树内向外的回边个数
    - 树边:  $v$ 的子树内向外的至高度 $h(u)$ 以上的回边个数



## DFS序列与桥 – CF19E

- 给定无向图，问有多少条边满足：
  - 1) 上面没有长度为偶数的环
  - 2) 上面没有长度为奇数的环



# DFS序列与桥 – CF19E

- 给定无向图，问有多少条边满足：
  - 1) 上面没有长度为偶数的环
  - 2) 上面没有长度为奇数的环
- 对于每一个子树，记录里面出去了多少
  - 1) 形成了奇数长度环的非树边
  - 2) 形成了偶数长度环的非树边



## DFS序列与桥 - 依赖树 $T$ 的割


- Given a simple unweighted graph  $G$  (an undirected graph containing no loops nor multiple edges) with  $n$  nodes and  $m$  edges. Let  $T$  be a spanning tree of  $G$ .
- We say that a cut in  $G$  respects  $T$  if it cuts just one edges of  $T$ .
- You should find the minimum cut of graph  $G$  respecting the given spanning tree  $T$ .






# DFS序列与桥 - 依赖树T的割

- 不是DFS树！
- 如何处理  $\text{OutE}(v)$ ？
- 考虑  $e = (u, v)$ ，则：
  - 对T进行DFS遍历，求 $\text{OutE}(v)$
  - 从叶子走至 $u$ ， $\text{OutE}$ 加一
  - 从 $\text{lca}$ 走至 $v$ ， $\text{OutE}$ 减一
  - 从叶子走至 $v$ ， $\text{OutE}$ 加一
  - 离开 $\text{lca}$ ， $\text{OutE}$ 减一




## DFS序列与桥 - 依赖树 $T$ 的双割

- 如果要求在 $T$ 上割恰好两条边要怎么做？




# 有向图双联通性与逻辑判定

- 2-sat:
  - $(f_1) \& (f_2) \& \dots \& (f_k)$
- 对于n个bool变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ :
  - $(x_i \mid x_j) \& (!x_i \mid x_j) \& (x_i \mid !x_j) \& \dots$
- 每一个bool变量拆分为两个结点
  - 逻辑限制：有向边
  - 矛盾：利用有向边，从一个结点走到对应结点



# 有向图双联通性与逻辑判定 - 石头剪刀布

- 玩剪刀石头布， $n$ 把
- 给了A这 $n$ 把都出了什么，问你B能否会赢
- 其中A会限制B某些局数出的要相同
- 某些局数出的要不同
- 只要B满足他的限制，并且没没有输掉任何一把就算赢



# 有向图双联通性与逻辑判定 - 石头剪刀布

- B 每一次的决策都是“二选一”的！（为什么？）
- 拆分为一对点
- 限制条件一有向边
- 如何输出方案？



# 今天的训练题

- Ural 1557
- Hdu 5452
- Hdu 4115
- CF 668E
- CF 19E
- Poj 2914
- Hdu 4654
- IPSC 2017 Problem I
  
- 欢迎提问



# 课程总结

AHdoc  
2017



# Clariss - 知识体系

- Topic 1. FFT的运用
- Topic 2. 常见的数据结构维护技巧
- Topic 3. 扫描线的应用
- Topic 4. 树分治的应用
- Topic 5. 形形色色的最短路
- Topic 6. 压位大法
- Topic 7. 字符串问题选讲





# Me - 思维方式

- Day 1. 动态规划
- Day 2. 计算几何
- Day 3. 网络流
- Day 4. 数据结构
- Day 5. 容斥原理
- Day 6. 二分与分治
- Day 6.5. 博弈游戏
- Day 7. 桥与割点



# HH 的一套 ACM 教学理念

- 什么是知识体系？
- 什么是思维方式？
- 知识体系：学习掌握（泛读书籍和论文）
- 思维方式：多磨练多思考（在题解与数据的掩护下）
- 思维方式决定能力
- ACM 训练是 知识体系 与 思维方式的 训练



- 谢谢

- 欢迎提问