组合数学

主讲人：数一

- 组合数学：
  常见组合计数问题
  (扩展)lucas定理

常见组合计数问题

- 球与盒子的问题
- 错位排列问题

n球m盒分配问题

球可分辨	盒子可分辨	盒可空	方案数
是	是	是	m^n
是	是	否	$m!S_2(n,m)$
是	否	是	$\sum_{i=1}^{m} S_2(n,i)$
是	否	否	$S_2(n,m)$
否	是	是	C_{n+m-1}^{m-1}
否	是	否	C_{n-1}^{m-1}
否	否	是	分拆数(n+m,m)
否	否	否	分拆数(n,m)

最简单的情况

- 有n名同学，有m个兴趣班，每个同学可以任意选择一个兴趣班报名，问有多少种方案。

$$m^n$$

- 有n个球，每个球都长得一样，有m个同学，问分配方案数。

$$C_{n-1}^{m-1}$$

$$C_{n+m-1}^{m-1}$$

圆(环)排列

- n位同学，围成一圈玩狼人杀，问分配座位的方案。

$$(n-1)!$$

第一类斯特灵数

把一个包含n个元素的集合分成k个环排列的方法数

初始值$S_1(n,0)=0$，$S_1(1,1)=1$

$$S_1(n+1,k)=S_1(n,k-1)+nS_1(n,k)$$

- HDU3625 Examining the Rooms
  有N个房间，每个房间里有一把钥匙，钥匙随机分配。如果手中有对应的钥匙，就可以开门，如果没有钥匙就只能选择破门而入拿钥匙，第一个房间不允许破门，给定最多破门次数K，求能进入所有房间的概率。

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{S_1(n,i)-S_1(n-1,i-1)}{n!}$$

- HDU4372
  有一系列的楼房，高度从1~n，然后从左侧看能看到f个楼房，右侧看能看到b个楼房，问有多少个方案数满足。

$$S_1(n-1, f-1+b-1)C_{f-1+b-1}^{f-1}$$

第二类斯特林数

把一个包含n个元素的集合分成k个非空子集的方法数

初始值$S_2(n,0)=0$，$S_2(n,k)=0(n<k)$,
$S_2(n,1)=S_2(n,n)=1$

$$S_2(n,k)=S_2(n-1,k-1)+kS_2(n-1,k)$$

把n个不同的小球放入r个相同的盒子中，

盒子不可以为空的方案数

$$\text{就是} S_2(n, r)$$

盒子可以空怎么办？

$$\sum_{i=1}^{r} S_2(n, i)$$

盒子可以区分怎么办？ $r!S_2(n, r)$

- HDU2643 Rank
  n位选手参加比赛，每个选手有一个排名，有可能有并列，那么排名情况有多少种可能？

$$\sum_{i=1}^{n} S_2(n,i)$$

贝尔(Bell)数

分拆数

- 把正整数n拆分成k个的无序正整数之和的方案数(5=3+1+1和5=1+3+1是同一种方案)

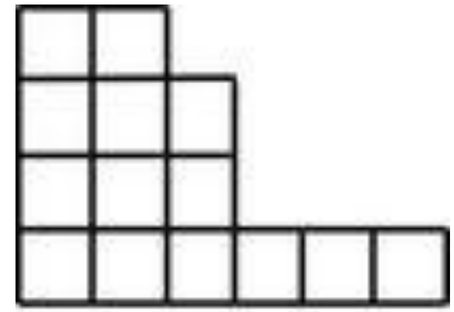
$$P(n,k)$$

两个问题

- 把n表示成不超过m个正整数之和的方案数
- 把n表示成不超过m的正整数之和的方案数
- 这两个答案分别是什么

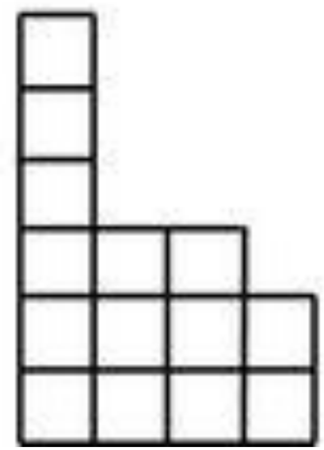
Ferrers图

- 把n个格子分成m层，且每一层的个数不超过下一层的个数，称为Ferrers图像



14=6+3+3+2

14=4+4+3+1+1+1



把n表示成不超过m的正整数之和的方案数

- dp[n][m]=dp[n][m-1]+ dp[n-m][m](n>=m)
  dp[n][m]=dp[n][n]   (n<m)
- dp[0][0]=1
- dp[n][0]=0

复杂度$O\left(n^2\right)$

利用母函数可以优化到$O(n\sqrt{n})$

错位排列

- 定义：1~n这n个数构成一个排列，第1项不是1，第2项不是2,……,第n项不是n的方案数。

$$f(n)=(n-1)\big(f(n-1)+f(n-2)\big)$$

$$f(1)=1 \quad f(2)=1$$

$$f(n)=nf(n-1)+(-1)^n, n>1$$

- hdu2048神、上帝以及老天爷
  n个人，每个人写一张纸条上面写着自己的名字，然后放入抽奖箱，每个人轮流抽奖，如果抽到自己的名字就中奖。问没有人中奖的概率是多少。(n<=20)

卡特兰数(OEIS108)

- 把一个正n+1多边形用n-2条不相交的对角线划分成n-1个三角形的方案数是h(n)
- 一个无穷大的栈的进栈序列为1,2,3,…,n，合法出栈序列方案数 h(n)
- 一个括号序列由n个左括号和n个右括号组成，合法括号序列的方案数h(n)
- 一棵体积为n的有根二叉树有多少种形态h(n)

……

递推式

初始值$h(0)=1$

$$h(n)=\sum_{i=0}^{n-1}h(i)h(n-1-i)$$

$$h(n)=\frac{4n-2}{n+1}h(n-1)$$

$$h(n)=\frac{C_{2n}^{n}}{n+1}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \qquad 0!=1$$

- BZOJ1485
- 1~2n的排列中，奇数项单调递增，偶数项单调递增，且对于任意相邻的奇数项a[2i-1]和偶数项a[2i]，都满足奇数项小于偶数项的方案数，对P取余(n<=1e6 P<=1e9)

求组合数的方法

- 杨辉三角dp法
  dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+dp[i-1][j]
  O(n^2)~O(1)

求组合数的方法

- 预处理阶乘逆元法(若要取余)
  预处理1~n的阶乘以及对应的逆元
  frac[i]=frac[i-1]*i%M;//阶乘递推
  inv[n]=invmod(frac[n])//逆元
  inv[i]=inv[i+1]*(i+1)%M//逆元递推
  计算C(m,n)
  frac[n]*inv[n-m]%M*inv[m]%M;
  O(n)预处理+O(1)调用

求组合数的方法

- lucas定理
- Lucas(n,m,p)=C(n%p,m%p)*Lucas(n/p,m/p,p)(p是质数)

$$C_n^m \% p = C_{n\%p}^{m\%p} C_{n/p}^{m/p} \% p$$

继续递归

取余不是质数

- 对p进行分解质因数，然后分别求解，最后用中国剩余定理合成。
  遇到取余是p^t形式怎么办？

扩展lucas定理

$$n = 97$$

$$p = 3$$

$$t = 2$$

- C(n,m)%p^t
  等价于求解n!%p^t

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 97$$

$$= \left(1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 10 \times 11 \times \ldots 95 \times 97\right) \times \left(3 \times 6 \times 9 \times \ldots \times 96\right)$$

$$= \left(1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 10 \times 11 \times \ldots 95 \times 97\right) \times 3^{32} \times \left(1 \times 2 \times \ldots \times 32\right)$$

以p^t为循环节

递归

扩展lucas定理

$$1\times 2\times 4\times 5\times 7\times 8\times 10\times 11\times \ldots 95\times 97$$

$$=\left(1\times 2\times 4\times 5\times 7\times 8\right)\times \left(1\times 2\times 4\times 5\times 7\times 8\right)\times \ldots$$

$$\times \left(1\times 2\times 4\times 5\times 7\right)\left(\bmod 3^2\right)$$

$$=\left(1\times 2\times 4\times 5\times 7\times 8\right)^{10}\times \left(1\times 2\times 4\times 5\times 7\right)\left(\bmod 3^2\right)$$

例题

- HDU3439 (2010年多校1)
  1~n的排列有n!种，定义D(某个排列)表示为排列中不动点的个数。例如D({1,2,3})=3,D({1,3,2})=1。问1~n的排列中，不动点个数为k的有多少个，对m取余
  (T<=500 0<=k<=n<=1e9 1<=m<=1e5, n!=0)

$$C_n^k \cdot f\left(n-k\right)$$

错位排列

求组合数的方法

- 分解质因数法(取余的模不是质数)
  利用素数筛预处理1~n的质数以及每一个合数的最小质因子
  使用组合数对分子和分母分别分解质因数，分子的质因数的指数对应减去分母质因数的指数，然后最后快速幂合成。

求组合数的方法

- 浮点数取对数法，通常用在概率题预处理ln(i)的前缀和(i=1,2,…,n)

$$C_m^n = e^{\sum_{i=1}^{n}\ln(i)-\sum_{i=1}^{m}\ln(i)-\sum_{i=1}^{n-m}\ln(i)}$$