結局うれしくなかった AABBとレイの話

2024 レイトレ合宿10

Pentan

お断り

なんとなく前から思っていたことを試しにちょっと考えてみたけど
別にこれ嬉しくないなとなったためいい加減な感じで終わる話です

というわけで突然ですが

シンプレックス法というものがあります

シンプレックス法

線形計画問題を解くのによく使われる手法の1つ

線形計画問題

制約条件と目的関数がすべて線形な最適化問題

このくらいふわっとした知識で書いていますので
お手柔らかにお願いします

例題

製品XとYがあります
Xは$20、Yは$30で売ることができます
またどちらも製造するのにA、B、Cの3種類の材料を使います

- Xを1つ作るにはAを1、Bを3、Cを3使います
- Yを1つ作るにはAを2、Bを4、Cを1使います

材料の在庫が、Aが800、Bが1800、Cが1500ある時、
XとYを何個づつ作ると利益を最大化できるでしょう

出典:
https://www.bunkyo.ac.jp/~nemoto/lecture/or/97/simplex/index.htm

まず式を立てます

それぞれx個、y個を製造するとして材料の使用量に着目
また最後の式は得られる利益

$$
\begin{aligned}
x + 2y &\le 800 \\
3x + 4y &\le 1800 \\
3x + y &\le 1500 \\
20x + 30y &\ge 0
\end{aligned}
$$

不等式を等式に変換します

それぞれ式の不足分の変数s_a,s_b,s_c,を導入して不等式を等式に変換
このsをスラック変数と呼びます
また最小化にそろえるために利益の式には-1をかけておきます

$$
\begin{aligned}
x + 2y + s_a &= 800 \\
3x + 4y + s_b &= 1800 \\
3x + y + s_c &= 1500 \\
-20x - 30y &= z
\end{aligned}
$$

わかりやすいように表にします

	z	x	y	s_a	s_b	s_c	
s_a	0	1	2	1	0	0	800
s_b	0	3	4	0	1	0	1800
s_c	0	3	1	0	0	1	1500
z	1	-20	-30	0	0	0	0

一番左に書き出した文字は縦が(1,0,0,0)というような形になっている列のメモです
この表をシンプレックス表(タブロー)と呼びます

面倒なので詳細は割愛

本当は選び方があるのですが、とりあえずs_aの行のyを1にして、残りの方程式のyを0にします
要は連立方程式の消去法の操作を行います

	z	x	y	s_a	s_b	s_c	
y	0	0.5	1	0.5	0	0	400
s_b	0	1	0	-2	1	0	200
s_c	0	2.5	0	-0.5	0	1	1100
z	1	-5	0	0	0	0	12000

もう一回

続けてs_bの行のxを1にして、残りの方程式のxを0にします

	z	x	y	s_a	s_b	s_c	
y	0	0	1	1.5	-0.5	0	300
x	0	1	0	-2	1	0	200
s_c	0	0	0	4.5	-2.5	1	600
z	1	0	0	5	5	0	13000

詳しい条件は割愛しますがシンプレックス法としてはこれで終了

答え

	z	x	y	s_a	s_b	s_c	
y	0	0	1	1.5	-0.5	0	300
x	0	1	0	-2	1	0	200
s_c	0	0	0	4.5	-2.5	1	600
z	1	0	0	5	5	0	13000

この表より、Xを200、yを300作ると利益が13000となり最大になるという答えが導かれる

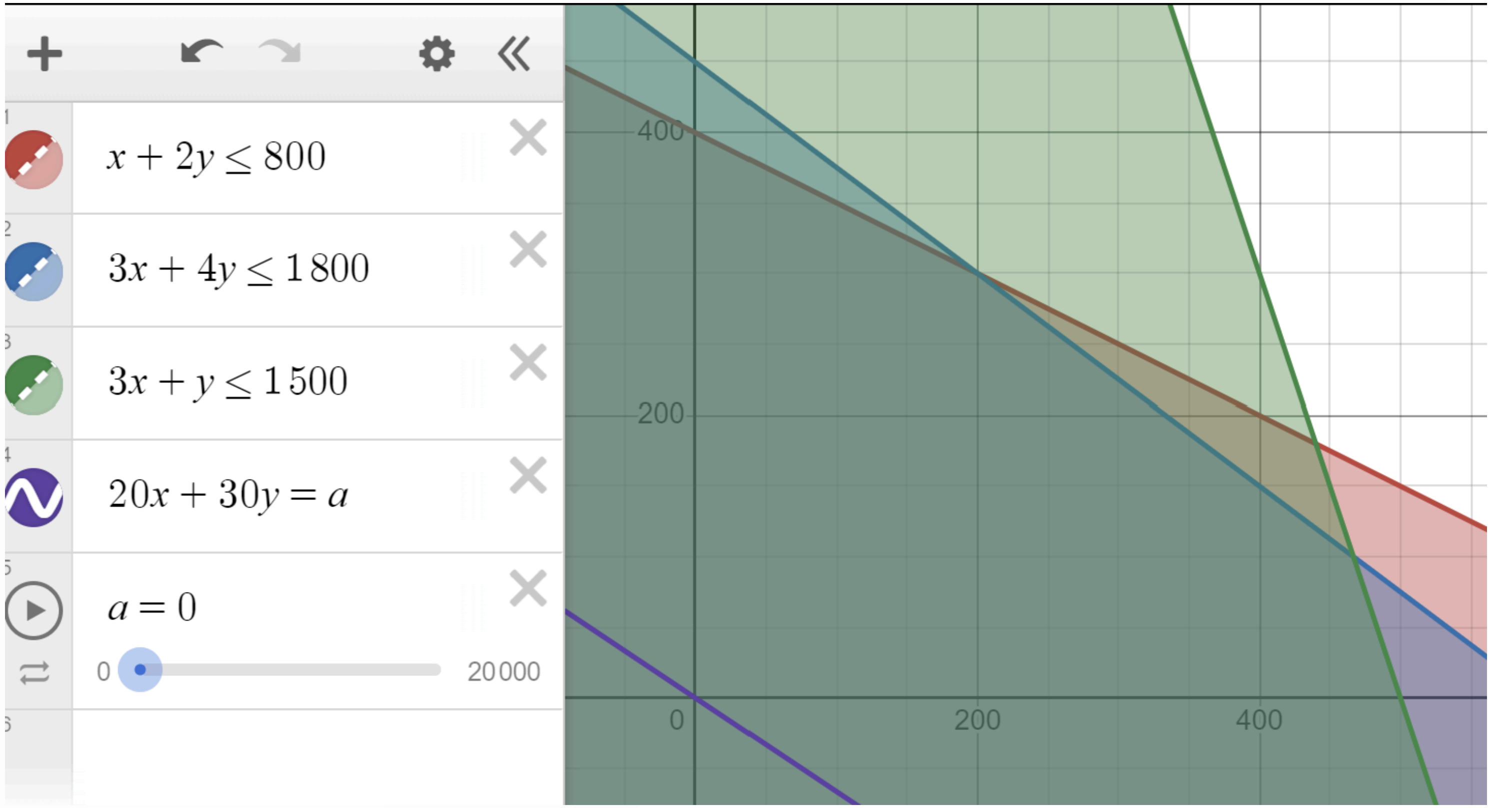
グラフを書くこともできます

最初の式に戻ります

$$
\begin{aligned}
x + 2y \ &\leq 800 \\
3x + 4y &\leq 1800 \\
3x + y &\leq 1500 \\
20x + 30y \quad &\geq 0
\end{aligned}
$$

グラフ

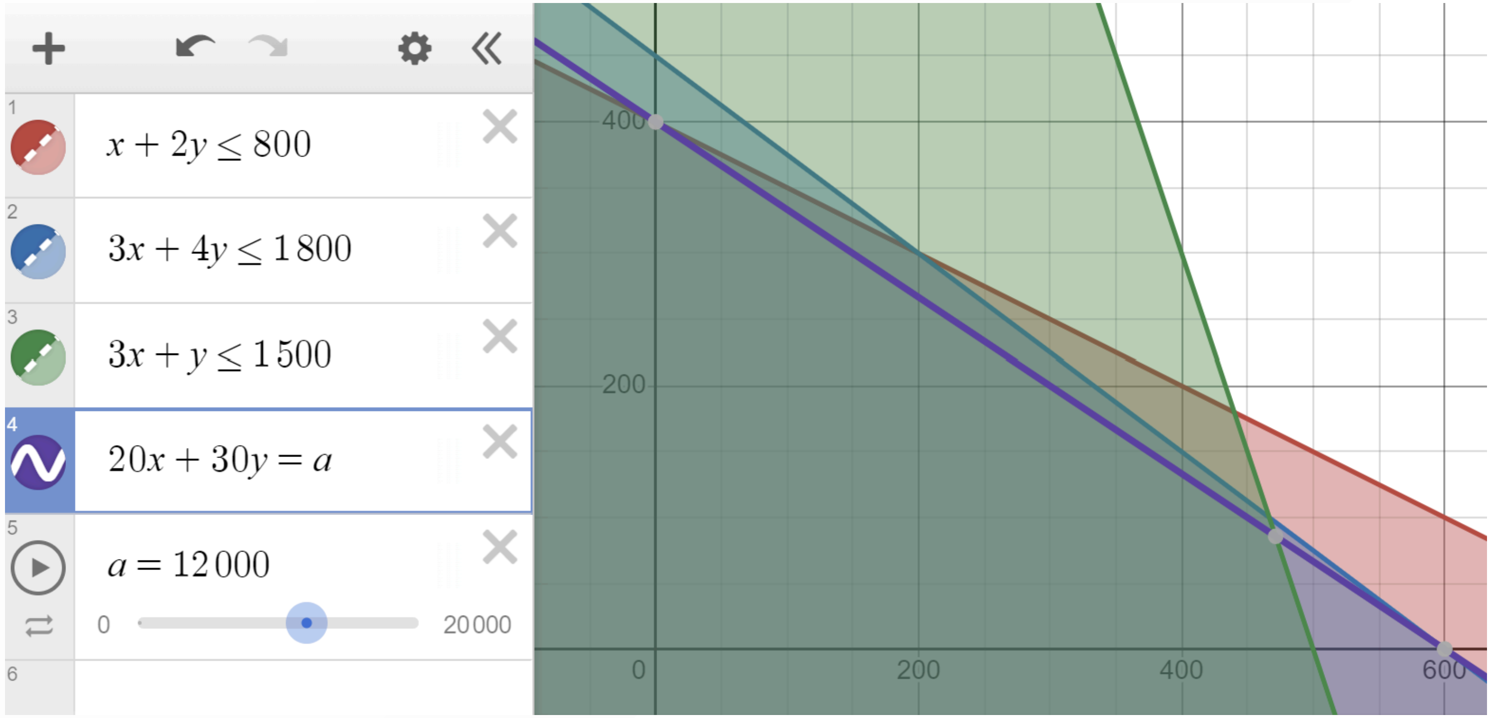
最初の状態



$x + 2y \leq 800$
$3x + 4y \leq 1\,800$
$3x + y \leq 1\,500$
$20x + 30y = a$
$a = 0$
0
20000
400
200
0
200
400

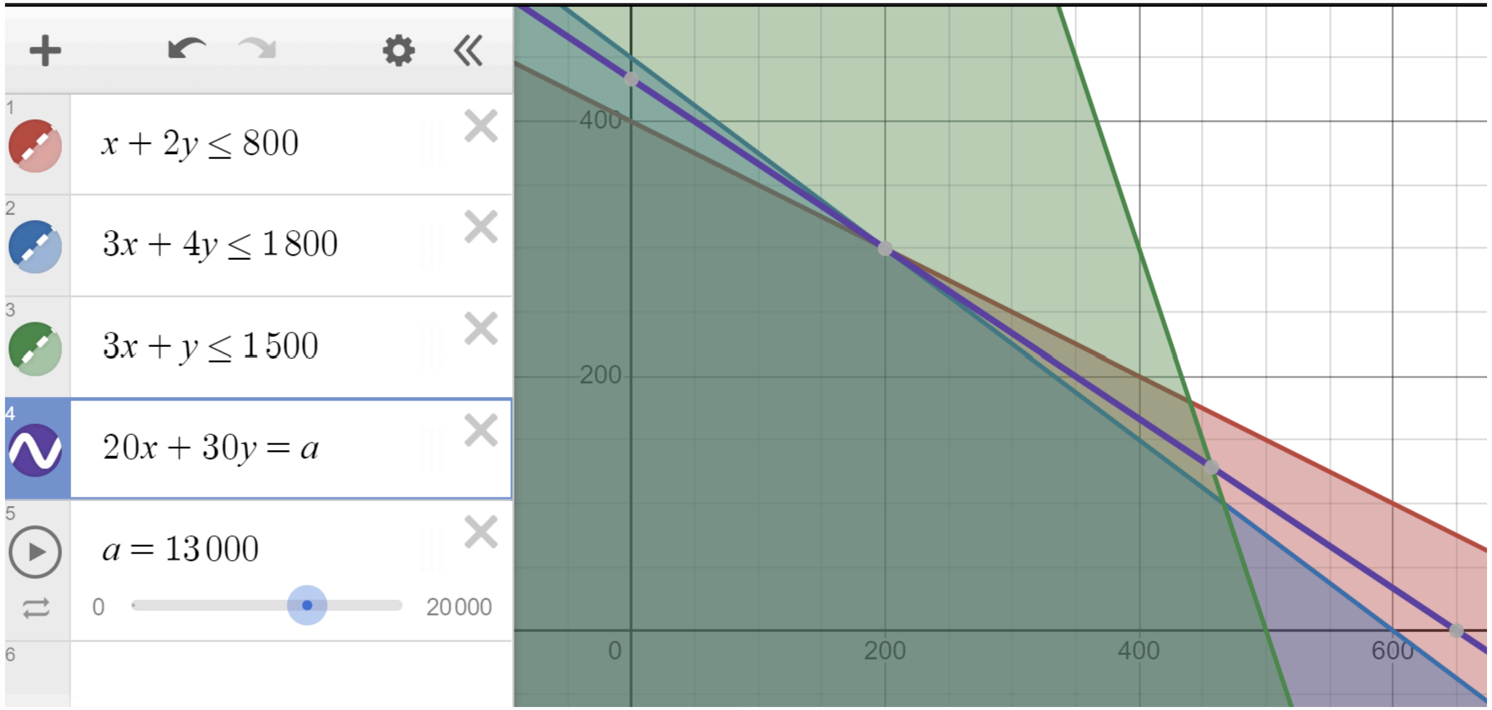
グラフ

一回変数を入れ替えた状態のzの値に注目してみると、目的関数が移動したことがわかる



グラフ

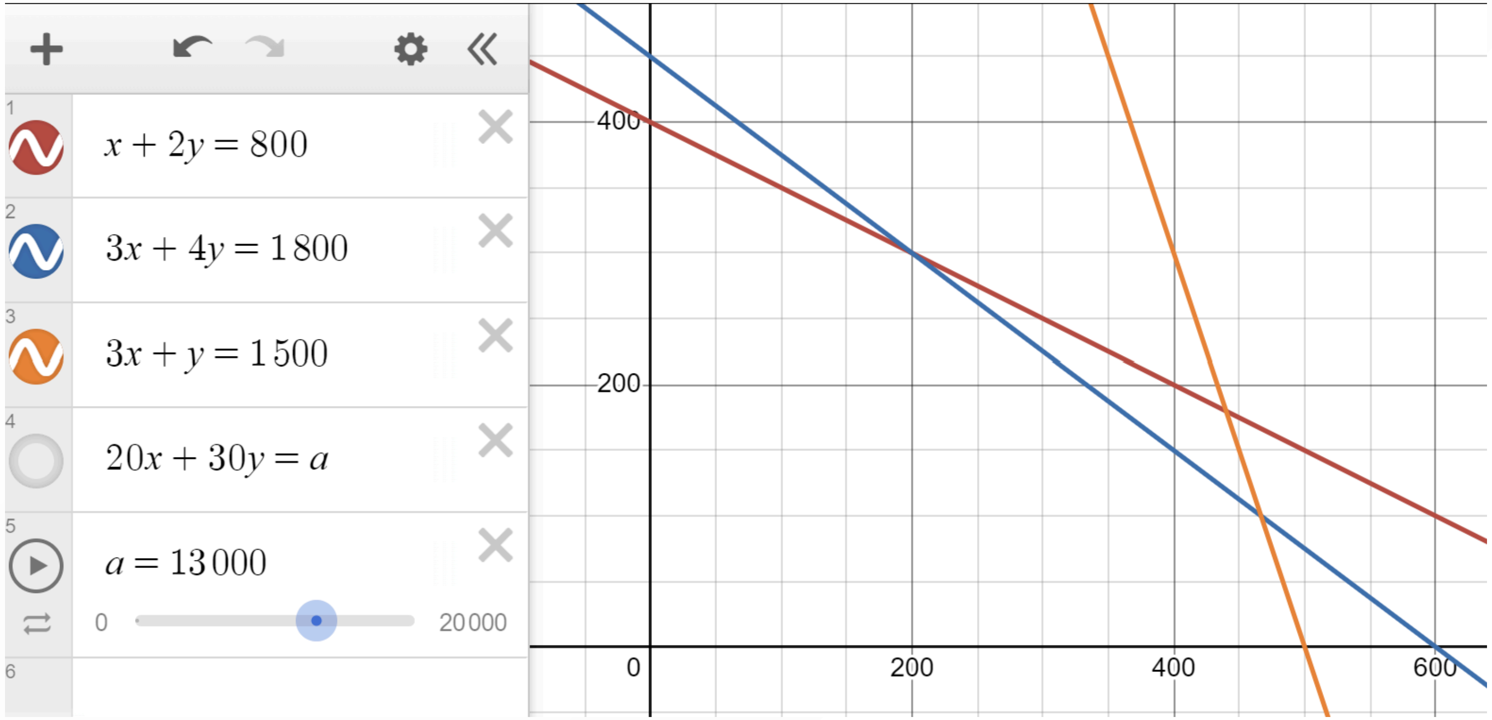
最後の変数を入れ替えた状態



つまり

シンプレックス法は制約条件同士の交わる頂点の上を移動することができる

そして



こんな描き方にすると赤とオレンジのAABBにレイが刺さっているように見えてきませんか？

シンプレックス法で考えるレイとAABB

最小の角が原点にあるAABBとレイの交差している状態を用意
レイはベクトルで表すと $\hat{p} + \hat{v}t = 0$ ですが、2次元なら媒介変数を消去して $ax + b = 0$ の形で書けます
そこで適当な例題を作ってみました
とりあえず目的関数はレイに直行する直線です

$$
\begin{aligned}
x + y &= 5 \\
x &\leq 4 \\
y &\leq 3 \\
-x + y &= 0
\end{aligned}
$$

スラック変数の導入

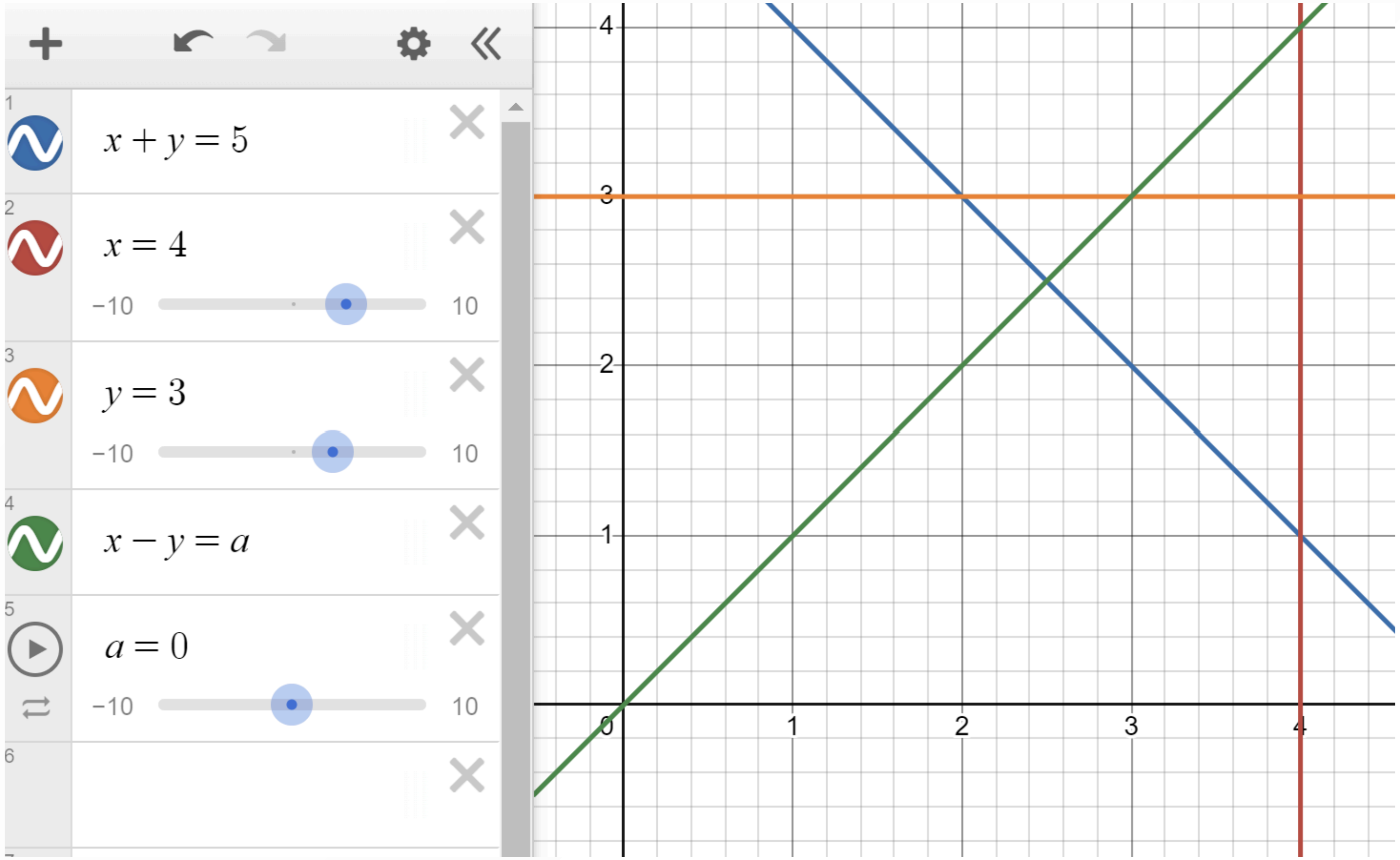
ここではレイ由来のスラック変数をs_r、最小点が原点のAABB由来のスラック変数をs_x、s_yとします。

$$
\begin{aligned}
x + y + s_r &= 5 \\
x + s_x &= 4 \\
y + s_y &= 3 \\
-x + y &= 0
\end{aligned}
$$

シンプレックス表

	z	x	y	s_r	s_x	s_y	
s_r	0	1	1	1	0	0	5
s_x	0	1	0	0	1	0	4
s_y	0	0	1	0	0	1	3
z	1	-1	1	0	0	0	0

グラフ



注意点

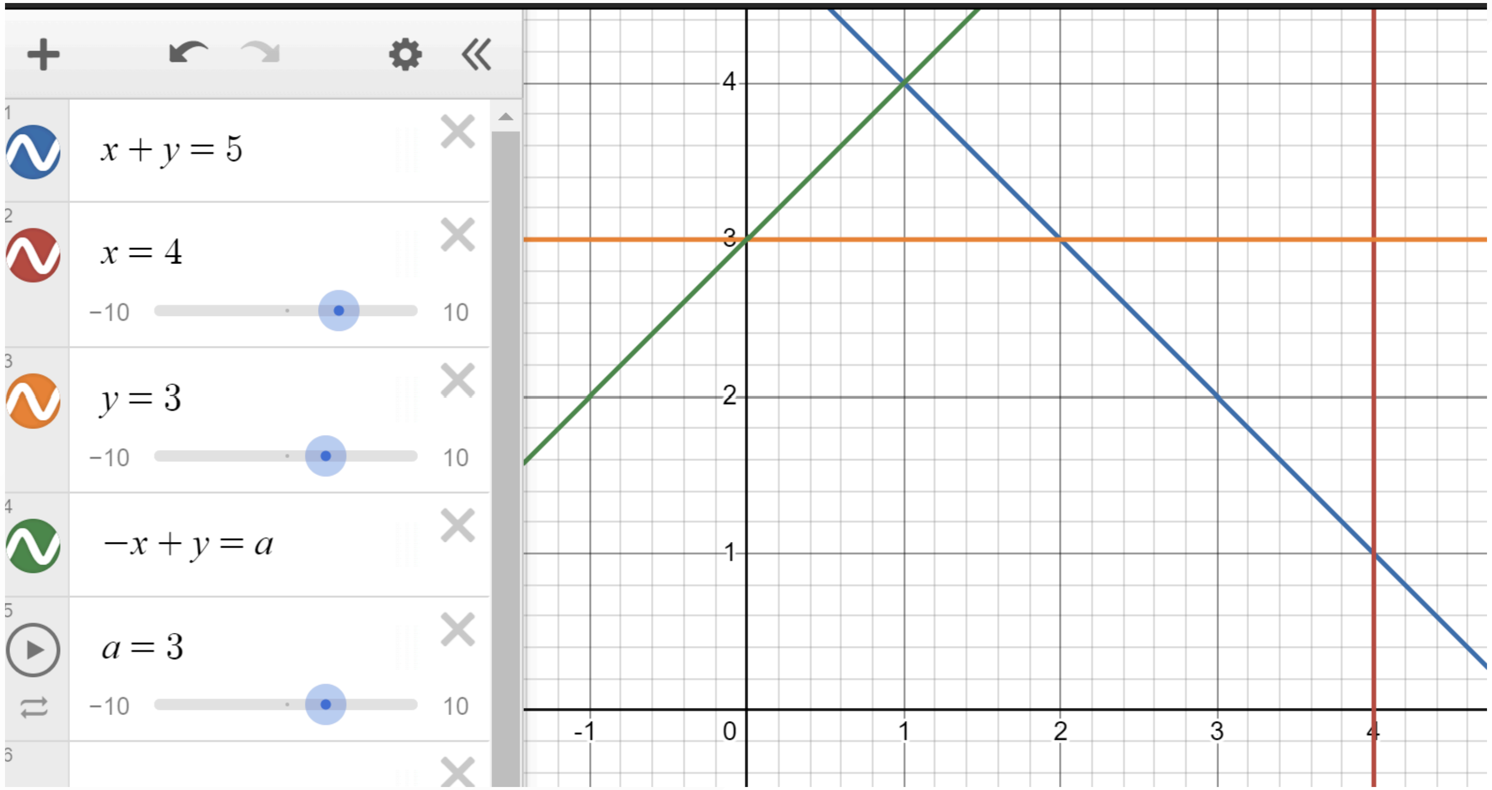
目的関数が適当なので、変数の入れ替えも適当に行う

シンプレックス表2

yとs_yを入れ替える

	z	x	y	s_r	s_x	s_y	
s_r	0	1	0	1	0	-1	2
s_x	0	1	0	0	1	0	4
y	0	0	1	0	0	1	3
z	1	1	0	0	0	0	3

グラフ2

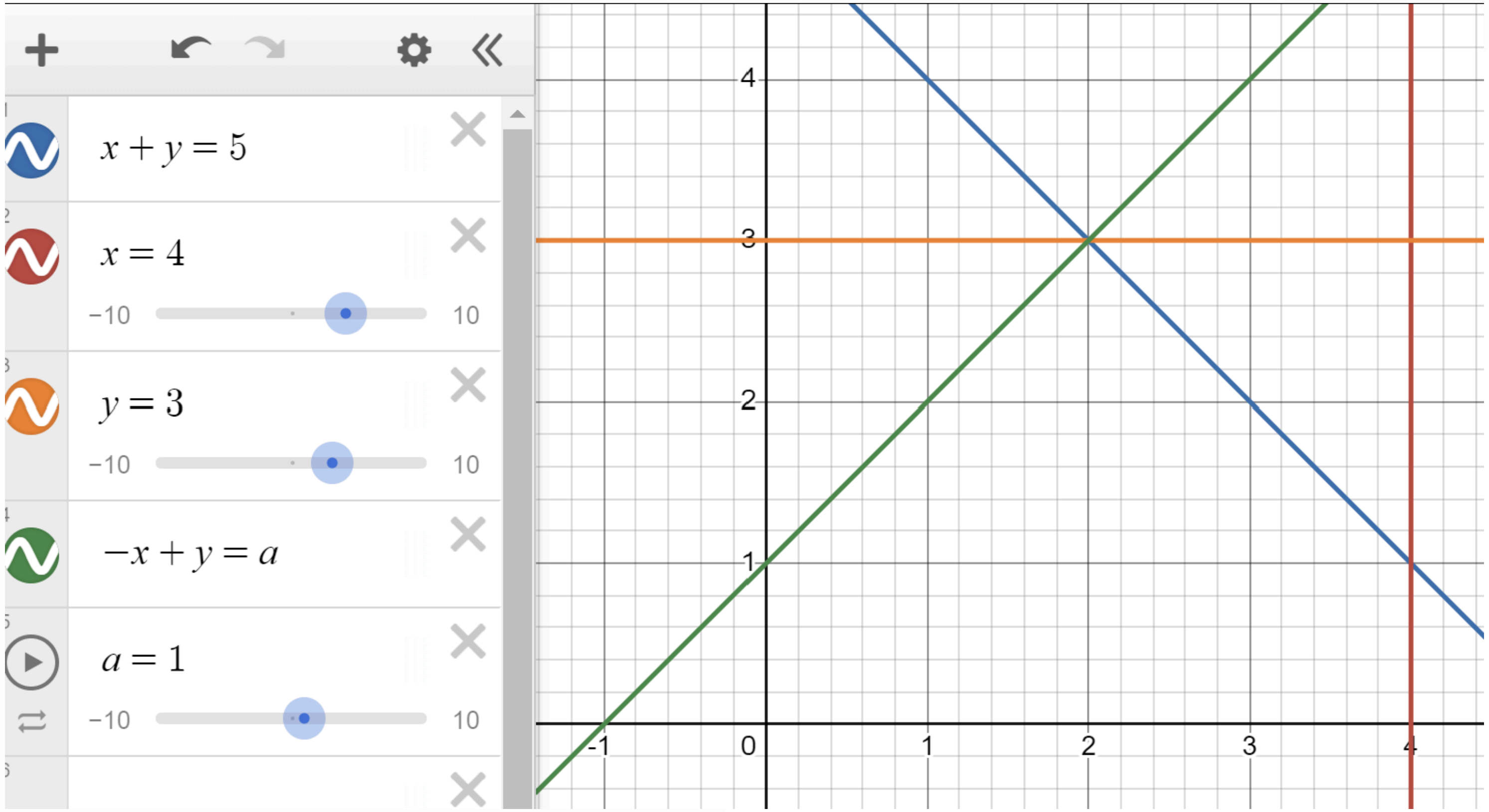


シンプレックス表2

xとs_rを入れ替える

	z	x	y	s_r	s_x	s_y	
x	0	1	0	1	0	-1	2
s_x	0	0	0	-1	1	1	2
y	0	0	1	0	0	1	3
z	1	0	0	1	0	1	1

グラフ3



レイとの交点までたどり着けました

なんとなく

一連の操作をみると、隣にある時に行きたいもの由来のスラック変数を入れ替えるとそこへ移動できそうです

この後

レイトレでAABBとレイの交差判定をとるのはBVHをトラバースするときが想定されます

つまりここからあとは角が原点から外れているAABBを扱う必要があります

原点が制約条件に入っていない
シンプレックス法

- シンプレックス法としては一度原点を含む条件でスタート地点を探す二段階法などがあります
- しかしそれは頂点が未知なためで、AABBは頂点が既知なので直接移動してしまうことができます
- なんならレイから導いた式でAABBの頂点を符号テストすると交差している辺のあたりをつけることもできます
  - 1回程度の操作でレイとの交点へたどり着ける可能性がある？

三次元への拡張

- 三次元のレイで制約条件をつくるにはどうすればよいか
  - レイの上で直行する二平面でも使うとか
  - これも符号テストで交差している面のあたりをつけられます
  - そうするとAABBの頂点→レイ平面1の上の点→レイ上の点の2回程度の操作でいける？

このあたりでふと気が付く

よく使われているレイとAABBの交差判定(Slab method)のほうが明らかに計算量少なくない？

以上です。
ありがとうございました。