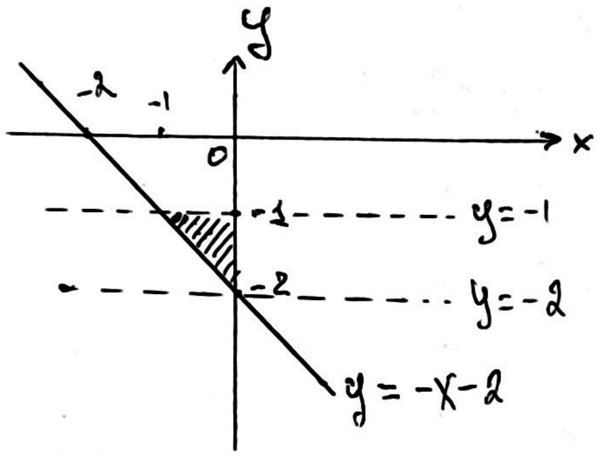
Типовой расчет №1 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 1. Изменить порядок интегрирования

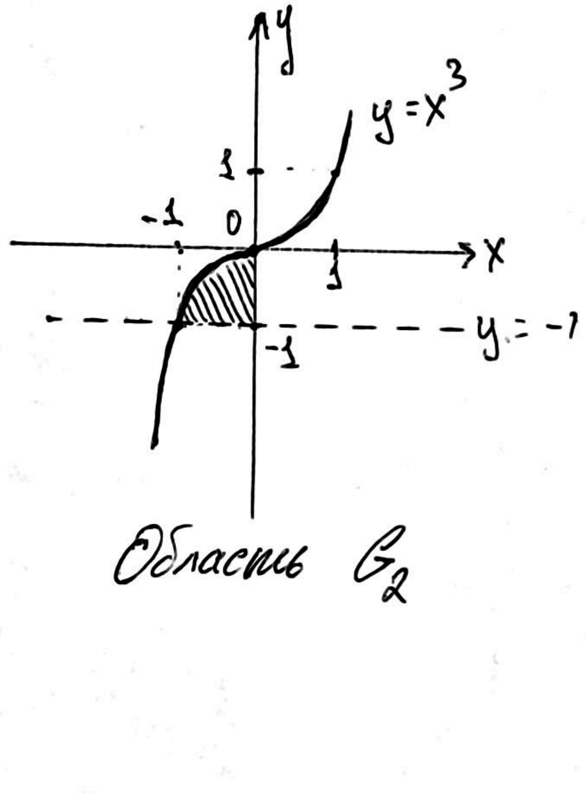
$\boxed{1.20}$ $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx = I_1 + I_2$

$$I_1 = \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f dx = \iint\limits_{G_1} f dx dy, \text{ где } G_1: \begin{cases} -2 \le y \le -1 \\ x = -2-y \\ x = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx = \iint\limits_{G_2} f dx dy, \text{ где } G_2: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ x = \sqrt[3]{y} \\ x = 0 \end{cases}$$



Область G_1



Область G_2

$$I_1 = \iint\limits_{G_1} f dx dy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x-2}^{-1} f dy$$

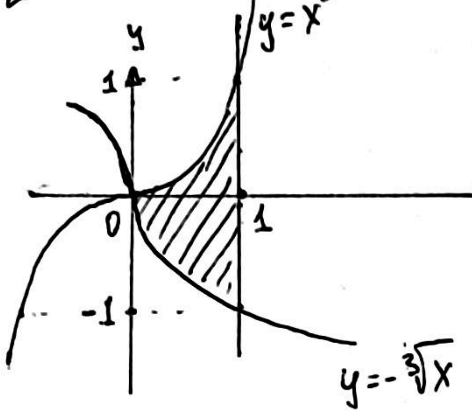
$$I_2 = \iint\limits_{G_2} f dx dy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1}^{x^3} f dy$$

Ответ: $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x-2}^{-1} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1}^{x^3} f dy$

Типовой расчет №2 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 2. Вычислить

$$\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)\,dxdy\,,\quad D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$$



$$\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} (4xy+16x^3y^3)\,dy$$

$$\int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} (4xy+16x^3y^3)\,dy = \left(4x\frac{y^2}{2}+16x^3\cdot\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} =$$

$$= \left(2xy^2+4x^3y^4\right)\Bigg|_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} = 2\cdot x\cdot x^6+4x^3\cdot x^{12}-2x\left(-x^{\frac{2}{3}}\right)-4x^3\cdot\left(-x^{\frac{4}{3}}\right) =$$

$$= 2x^7+4x^{15}+2x^{\frac{5}{3}}+4x^{\frac{7}{3}}$$

$$\int_0^1 \left(2x^7+4x^{15}+2x^{\frac{5}{3}}+4x^{\frac{7}{3}}\right)dx = \left(\frac{2x^8}{8}+4\frac{x^{16}}{16}+2\frac{x^{8/3}}{8/3}+4\cdot\frac{x^{10/3}}{10/3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{8}\cdot 1+\frac{4}{16}\cdot 1+\frac{6}{8}\cdot 1+\frac{12}{10}\cdot 1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{6}{5} = \frac{5}{4}^{\backslash 5}+\frac{6}{5}^{\backslash 4} =$$

$$= \frac{49}{20}$$

Ответ: $\frac{49}{20}$

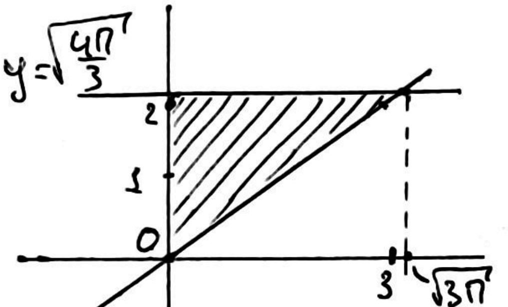
Типовой расчет № 3 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 3. Вычислить

$\boxed{3.20}$ $\displaystyle\iint\limits_D 3y^2\sin\frac{xy}{2}\,dxdy$, где $D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},\ y=\frac{2}{3}x$

Найдем точку пересечения $y=\frac{2}{3}x$ и $y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$:

$$\frac{2}{3}x=\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \frac{4x^2}{9}=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow x=\sqrt{3\pi}$$



Область D

$$\iint\limits_D 3y^2\sin\frac{xy}{2}\,dxdy=\int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}dy\int_0^{\frac{3}{2}y}3y^2\sin\frac{xy}{2}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}y}3y^2\sin\frac{xy}{2}\,dx=3y^2\int_0^{\frac{3}{2}y}\sin\frac{xy}{2}\,dx=$$

$$=3y^2\cdot\left(-\cos\left(\frac{xy}{2}\right)\cdot\frac{2}{y}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}y}=-6y\cos\frac{xy}{2}\Bigg|_0^{\frac{3}{2}y}=$$

$$=-6y\cos\frac{3}{2}y\cdot\frac{y}{2}+6y\cdot\cos 0=-6y\cos\frac{3y^2}{4}+6y$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}\left(6y-6y\cos\frac{3y^2}{4}\right)dy=I_1-I_2 =$$

$$I_1=\int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}6y\,dy=6\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}=3y^2\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}=4\pi$$

$$I_2=\int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}6y\cos\frac{3y^2}{4}\,dy=\begin{cases}u=6y & u'=6\\ v'=\cos\frac{3y^2}{4} & v=\sin\left(\frac{3y^2}{4}\right)\cdot\frac{4}{6y}\end{cases}=$$

$$=\frac{6}{3}\int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}\cos\frac{3y^2}{4}\,dy^2=\cancel{3}\cdot\sin\frac{3y^2}{4}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}=4\sin\frac{3y^2}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}}=$$

$$=4\cdot\sin\frac{3}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}=4\cdot\sin\pi=0$$

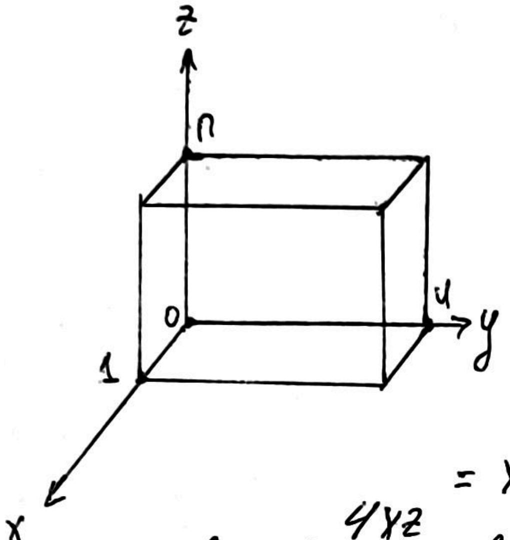
$= 4\pi-0=4\pi$

Ответ: 4π

Типовой расчет №4 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 4. Вычислить

$\boxed{4.20}$ $\iiint\limits_V x^2 z \sin\frac{xyz}{2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: \begin{cases} x=1, y=4, z=\pi \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$



$$\iiint\limits_V x^2 z \sin\frac{xyz}{2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{\pi} dz \int_0^4 x^2 z \sin\frac{xyz}{2}\,dy$$

$$\int_0^4 x^2 z \sin\frac{xyz}{2}\,dy = x^2 z \int_0^4 \sin\frac{xyz}{2}\,dy = x^2 z\left(-\cos\left(\frac{xyz}{2}\right)\cdot\frac{2}{xz}\right)\Bigg|_0^4 = -2x\cos\frac{xyz}{2}\Bigg|_0^4 =$$

$$= -2x\cos\frac{4xz}{2} + 2x\cos 0 = 2x - 2x\cos 2xz$$

$$\int_0^{\pi}(2x - 2x\cos 2xz)\,dz = 2x\int_0^{\pi} dz - 2x\int_0^{\pi}\cos 2xz\,dz = 2x\cdot z\Big|_0^{\pi} - \cancel{2x}\cdot\frac{\sin 2xz}{\cancel{2x}}\Bigg|_0^{\pi} = 2\pi x - \sin 2\pi x + \sin 0 = 2\pi x - \sin 2\pi x$$

$$\int_0^1 (2\pi x - \sin 2\pi x)\,dx = 2\pi\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx = \cancel{2}\pi\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\Bigg|_0^1 - \left(\frac{-\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Bigg|_0^1 = \pi + \frac{\cos 2\pi}{2\pi} - \frac{\cos 0}{2\pi} = \pi + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = \pi$$

Ответ: π

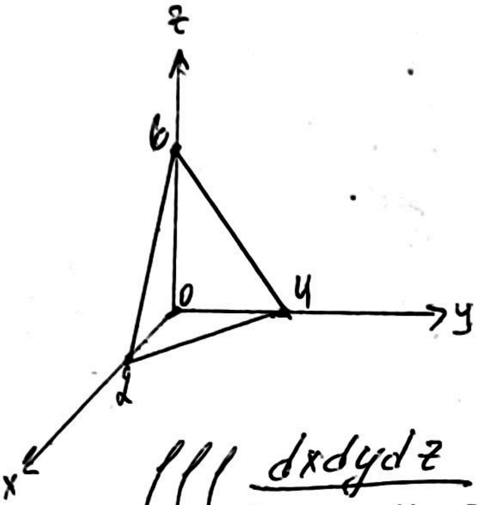
Типовой расчет №5 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

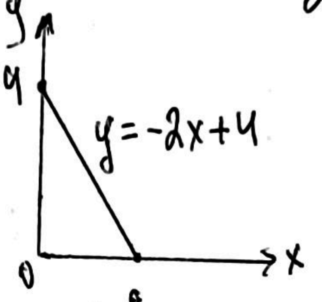
Задача 5. Вычислить

$\boxed{5.20}$ $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^6}$, где $V: \left\{\begin{matrix} \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1 \\ x=0, y=0, z=0 \end{matrix}\right\}$

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}-1=0 \,\Big|\cdot 6$ плоскость

$z=6-3x-\frac{3}{2}y$





$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^6} = \int_0^2 dx \int_0^{-2x+4} dy \int_0^{6-3x-\frac{3}{2}y} \frac{dz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^6}$$

$$\int_0^{6-3x-\frac{3}{2}y} \frac{dz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^6} = \int_0^{6-3x-\frac{3}{2}y} \left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^{-6} dz = \frac{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^{-5}}{-5}\cdot 6 \Bigg|_0^{6-3x-\frac{3}{2}y} =$$

$$= -\frac{6}{5}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{1}{6}\left(6-3x-\frac{3}{2}y\right)\right)^{-5} + \frac{6}{5}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)^{-5} = \frac{6}{5}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)^{-5} - \frac{6}{5}\cdot 2^{-5}$$

$$\int_0^{-2x+4}\left(\frac{6}{5}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)^{-5} - \frac{6}{5}\cdot 2^{-5}\right)dy = \frac{6}{5}\int_0^{-2x+4}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)^{-5}dy - \frac{6}{5}\cdot 2^{-5}\int_0^{-2x+4} dy =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot\frac{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)^{-4}}{-\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\Bigg|_0^{-2x+4} - \frac{6}{5}\cdot 2^{-5}\cdot y\Big|_0^{-2x+4} = -\frac{6}{5}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}(-2x+4)\right)^{-4} +$$

$$+ \frac{6}{5}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-4} + \frac{12}{5}\cdot 2^{-5}x - \frac{24}{5}\cdot 2^{-5} = -\frac{6}{5}\cdot 2^{-4} + \frac{6}{5}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-4} + \frac{12}{5}2^{-5}x -$$

$$- \frac{24}{5}\cdot 2^{-5}$$

Продолжение на след. странице →

Типовой расчет №6 по математическому анализу студента группы А-02-23 ТУРХАНОВА АРТЕМА

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

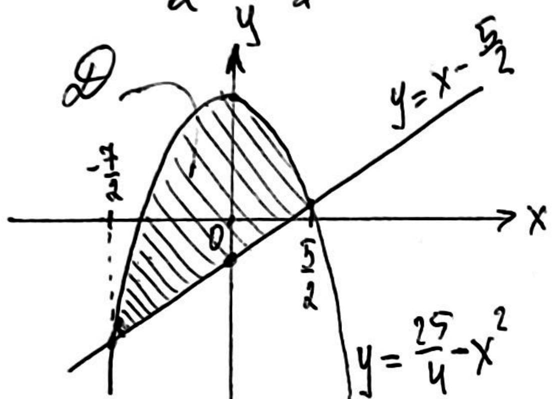
$\boxed{6.20}$ $y=\frac{25}{4}-x^2$, $y=x-\frac{5}{2}$

парабола прямая

найдем точки пересечения: $\frac{25}{4}-x^2=x-\frac{5}{2}$

$x^2+x-\frac{5}{2}-\frac{25}{4}=0 \Rightarrow x^2+x-\frac{35}{4}=0 \Rightarrow D=1-4\cdot1\cdot\left(-\frac{35}{4}\right)=36=6^2$

$x_1=\frac{-1+6}{2}=\frac{5}{2}$; $x_2=\frac{-1-6}{2}=-\frac{7}{2}$



$$S=\iint\limits_{\mathcal{D}} dS=\iint\limits_{\mathcal{D}} dx\,dy=\int\limits_{-\frac{7}{2}}^{\frac{5}{2}}dx\int\limits_{x-\frac{5}{2}}^{\frac{25}{4}-x^2}dy$$

$$\int\limits_{x-\frac{5}{2}}^{\frac{25}{4}-x^2}dy=y\Big|_{x-\frac{5}{2}}^{\frac{25}{4}-x^2}=\frac{25}{4}-x^2-x+\frac{5}{2}^{\backslash 2}=$$

$$=\frac{25+10}{4}-x^2-x=\frac{35}{4}-x^2-x$$

$$\int\limits_{-\frac{7}{2}}^{\frac{5}{2}}\left(\frac{35}{4}-x^2-x\right)dx=\left(\frac{35}{4}x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{\frac{5}{2}}=\left(\frac{35}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}\right)-\left(-\frac{35}{4}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{49\cdot7}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{4}\right)=\left(\frac{35\cdot5}{8}^{\backslash 3}-\frac{125}{8\cdot3}-\right.$$

$$\left.-\frac{25}{8}^{\backslash 3}\right)+\frac{35\cdot7}{8}^{\backslash 3}-\frac{49\cdot7}{8\cdot3}+\frac{49}{8}^{\backslash 3}=\frac{35\cdot15-125-75+35\cdot21-}{24}$$

$$-\frac{49\cdot7+49\cdot3}{24}=\frac{525-125-75+735-343+147}{24}=$$

$$=\frac{325+735-343+147}{24}=\frac{1207-343}{24}=\frac{864}{24}=36$$

Ответ: 36

Типовой расчет №7 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 7. Найти площадь фигуры, огр. данными линиями

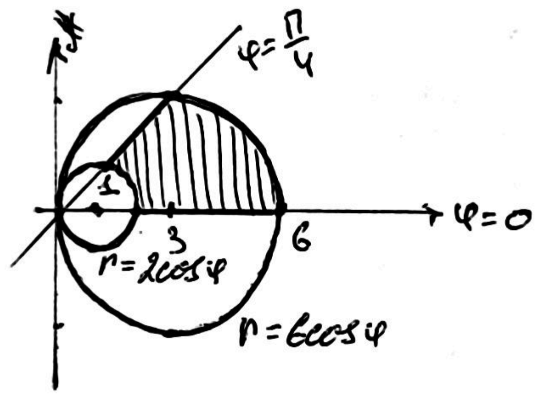
$\boxed{7.20}$ $x^2-2x+y^2=0$
$x^2-6x+y^2=0$
$y=0,\ y=x$

для удобства вычисления перейдем к полярной системе координат: $x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$
Якобиан перехода равен $|J|=r$

$(r\cos\varphi)^2-2r\cos\varphi+(r\sin\varphi)^2=0$
$r^2\cos^2\varphi-2r\cos\varphi+r^2\sin^2\varphi=0$
$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2r\cos\varphi$
$r=2\cos\varphi$

$(r\cos\varphi)^2-6r\cos\varphi+(r\sin\varphi)^2=0$
$r^2\cos^2\varphi-6r\cos\varphi+r^2\sin^2\varphi=0$
$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=6r\cos\varphi$
$r=6\cos\varphi$

$y=x \Leftrightarrow r\sin\varphi=r\cos\varphi \Rightarrow \sin\varphi=\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi}r\,dr$$

$$\int_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi}r\,dr=\frac{r^2}{2}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi}=\frac{1}{2}(36\cos^2\varphi-$$
$$-4\cos^2\varphi)=\frac{1}{2}\cdot 32\cos^2\varphi=16\cos^2\varphi$$

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}16\cos^2\varphi\,d\varphi=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\,d\varphi=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi=$$
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi+8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi+\frac{8}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d2\varphi=$$
$$=8\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+4\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=8\frac{\pi}{4}-8\cdot 0+4\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-4\sin 0=$$
$$=2\pi+4=2(\pi+2)$$

Ответ: $2(\pi+2)$

Типовой расчёт №8 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 8. D-пластинка. μ-поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

$\boxed{8.20}$ $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0\ (x\geq 0, y\geq 0)$

$$\mu=\frac{x+2y}{x^2+y^2}$$

Для удобства вычислений перейдём к полярным координатам. Якобиан перехода равен $|I|=r$:

$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$

$x^2+y^2=1$

$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=1$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=1$

$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=1$

$r^2=1$

$r=1$

первая окружность

$x^2+y^2=4$

$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=4$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4$

$r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=4$

$r^2=4$

$r=2$ вторая окружность

$$\mu=\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\varphi+2r\sin\varphi}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=\frac{r\cos\varphi+2r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{r(\cos\varphi+2\sin\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\frac{\cos\varphi+2\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\frac{1}{r}(\cos\varphi+2\sin\varphi)$$

$$m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2\mu r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2\frac{r}{r}(\cos\varphi+2\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+2\sin\varphi)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin0-2\cos\frac{\pi}{2}+$$

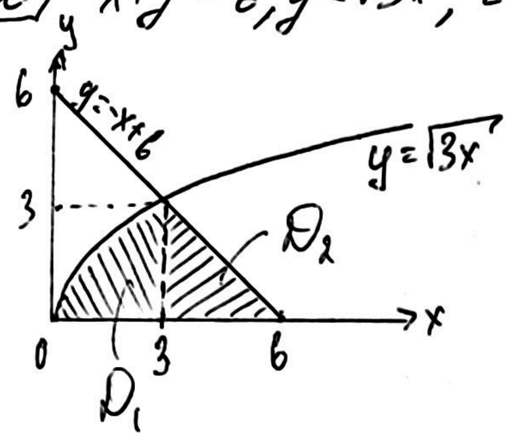
$$+2\cos0=1-0-0+2\cdot1=3$$

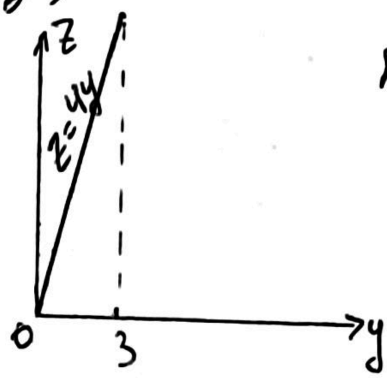
<u>Ответ: 3</u>

Типовой расчет №10 по математическому анализу студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 10. Найти объём тела.

$\boxed{10\text{-}20}$ $x+y=6,\ y=\sqrt{3x},\ z=4y,\ z=0$





Найдем точку соединения D_1 и D_2:

$\sqrt{3x}=-x+6$

$3x=x^2-12x+36$

$x^2-15x+36=0$

$D=225-4\cdot36=81=9^2$

$x_1=\frac{15+9}{2}=12\ \varnothing$

$x_2=\frac{15-9}{2}=3$

не удовл., т.к. $x_{соед.}\in(0,6)$

$$\iiint\limits_V dV=\iiint\limits_{V_1} dV+\iiint\limits_{V_2} dV=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^3 dx\int_0^{\sqrt{3x}}dy\int_0^{4y}dz\Rightarrow\int_0^{4y}dz=4y\Rightarrow4\int_0^{\sqrt{3x}}y\,dy=4\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3x}}=6x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow6\int_0^3 x\,dx=6\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=3\cdot9=27=I_1$$

$$I_2=\int_3^6 dx\int_0^{-x+6}dy\int_0^{4y}dz\Rightarrow\int_0^{4y}dz=4y\Rightarrow4\int_0^{-x+6}y\,dy=4\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{-x+6}=2(x^2-12x+36)=$$

$$=2x^2-24x+72\Rightarrow\int_3^6(2x^2-24x+72)dx=\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-24\frac{x^2}{2}+72x\right)\Big|_3^6=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot6^3-12\cdot36+72\cdot6-\frac{2}{3}\cdot3^3+12\cdot9-72\cdot3=36\cdot4-36\cdot12+36\cdot12-$$

$$-\frac{2}{3}\cdot27+12\cdot9-36\cdot6=36(4-12+12-6)-2\cdot9+12\cdot9=-72-$$

$$-2\cdot9+12\cdot9=-72+9(12-2)=90-72=18=I_2$$

$$I=I_1+I_2=27+18=45\ (\text{куб. ед})$$

Ответ: 45