

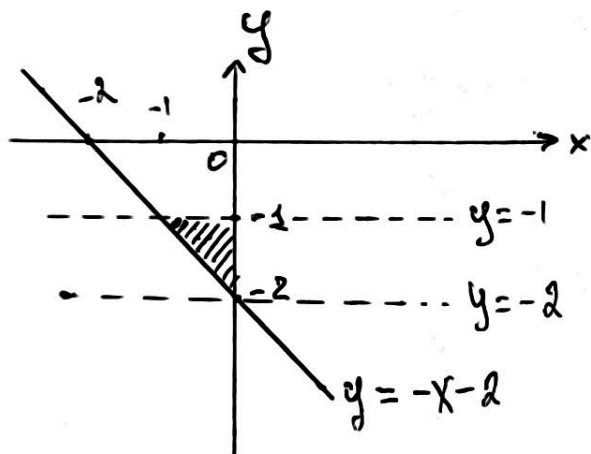
Типовой работы №1 по математическому анализу  
студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 1. Изменить порядок интегрирования

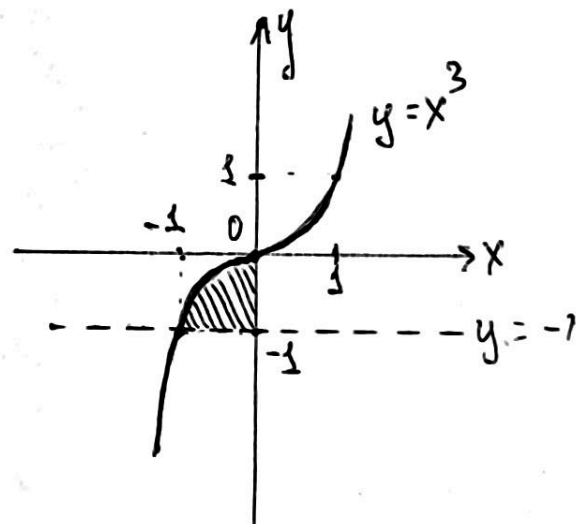
$$\boxed{1.20} \quad \int_{-2}^0 dy \int_{-(2+y)}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-2}^0 dy \int_{-(2+y)}^0 f dx = \iint_{G_1} f dx dy, \text{ где } G_1: \begin{cases} -2 \leq y \leq -1 \\ x = -2-y \\ x = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx = \iint_{G_2} f dx dy, \text{ где } G_2: \begin{cases} -1 \leq y \leq 0 \\ x = \sqrt[3]{y} \\ x = 0 \end{cases}$$



Область  $G_1$



Область  $G_2$

$$I_1 = \iint_{G_1} f dx dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-x-2}^0 f dx$$

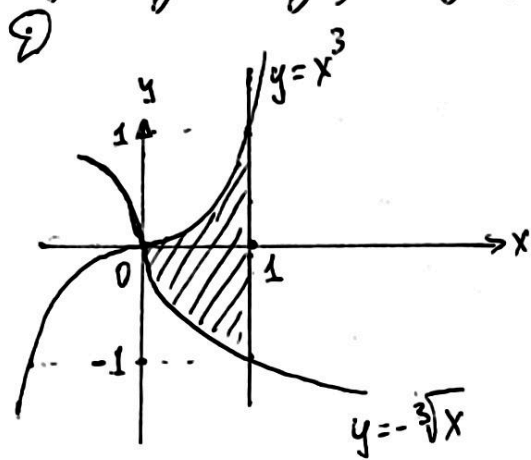
$$I_2 = \iint_{G_2} f dx dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt[3]{y}}^0 f dx$$

Ответ:  $\int_{-1}^0 dy \int_{-x-2}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt[3]{y}}^0 f dx$

Типовой расчет №2 по математическому анализу  
студента группы А-02-23 ТУРХАНОВА АРТЕМА

Задача 2. Вычисление

$$\iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy, D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$$



$$\begin{aligned} \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy &= \\ &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} (4xy + 16x^3y^3) dy \end{aligned}$$

$$\int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} (4xy + 16x^3y^3) dy = \left( 4x \frac{y^2}{2} + 16x^3 \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} =$$

$$= \left( 2xy^2 + 4x^3y^4 \right) \Big|_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3} = 2 \cdot x \cdot x^6 + 4x^3 \cdot x^{12} - 2x(-x^{\frac{2}{3}}) - 4x^3 \cdot (-x^{\frac{4}{3}}) =$$

$$= 2x^7 + 4x^{15} + 2x^{\frac{5}{3}} + 4x^{\frac{7}{3}}$$

$$\int_0^1 (2x^7 + 4x^{15} + 2x^{\frac{5}{3}} + 4x^{\frac{7}{3}}) dx = \left( \frac{2x^8}{8} + 4 \frac{x^{16}}{16} + 2 \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + 4 \cdot \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{8} \cdot 1 + \frac{4}{16} \cdot 1 + \frac{6}{8} \cdot 1 + \frac{12}{10} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{5}{4} + \frac{6}{5} =$$

$$= \frac{49}{20}$$

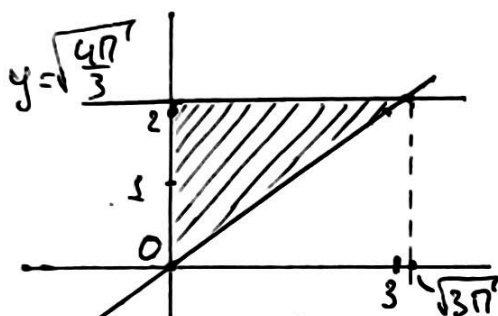
Ответ:  $\frac{49}{20}$

### Задача 3. Вычислить

13.20)  $\iint_D 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy$ , где  $D: x=0, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y=\frac{2}{3}x$

Найдем точку пересечения  $y=\frac{2}{3}x$  и  $y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$ :

$$\frac{2}{3}x = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \frac{4x^2}{9} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3\pi}$$



Область  $D$

$$\iint_D 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy = \int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} dy \int_0^{\frac{3}{2}y} 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}y} 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx = 3y^2 \int_0^{\frac{3}{2}y} \sin \frac{xy}{2} dx =$$

$$= 3y^2 \cdot \left( -\cos \left( \frac{xy}{2} \right) \cdot \frac{2}{y} \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}y} = -6y \cos \frac{xy}{2} \Big|_0^{\frac{3}{2}y} =$$

$$= -6y \cos \frac{3}{2}y \cdot \frac{y}{2} + 6y \cos 0 = -6y \cos \frac{3y^2}{4} + 6y$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} (6y - 6y \cos \frac{3y^2}{4}) dy = I_1 - I_2 \quad \text{---}$$

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} 6y dy = 6 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} = 3y^2 \Big|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} = 4\pi$$

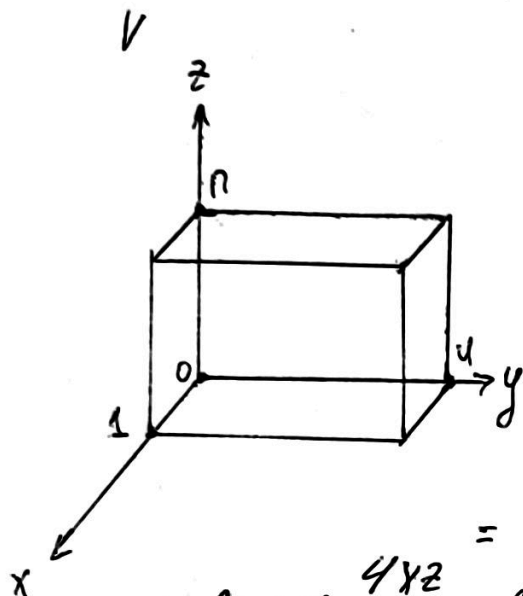
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} 6y \cos \frac{3y^2}{4} dy = \begin{cases} u = 6y & u' = 6 \\ v' = \cos \frac{3y^2}{4} & v = \sin \left( \frac{3y^2}{4} \right) \cdot \frac{4}{6y} \end{cases} = \\ &= \frac{6}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} \cos \frac{3y^2}{4} dy^2 = 2 \sin \frac{3y^2}{4} \cdot \frac{4}{3} \Big|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} = 4 \sin \frac{3y^2}{4} \Big|_0^{\sqrt{\frac{4\pi}{3}}} = \\ &= 4 \sin \frac{3}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} = 4 \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\text{---} \quad 4\pi - 0 = 4\pi$$

Ответ:  $4\pi$

Задача 4. Вычислить

(4.20)  $\iiint_V x^2 z \sin \frac{xy^2}{2} dx dy dz$ , где  $V: \begin{cases} x=1, y=4, z=\pi \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$



$$\iiint_V x^2 z \sin \frac{xy^2}{2} dx dy dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\pi} dz \int_0^4 x^2 z \sin \frac{xy^2}{2} dy$$

$$\int_0^4 x^2 z \sin \frac{xy^2}{2} dy = x^2 z \int_0^4 \sin \frac{xy^2}{2} dy =$$

$$= x^2 z \left( -\cos \left( \frac{xy^2}{2} \right) \cdot \frac{2}{xz} \right) \Big|_0^4 = -2x \cos \frac{xy^2}{2} \Big|_0^4 =$$

$$\pi = -2x \cos \frac{4xz}{2} + 2x \cos 0 = 2x - 2x \cos 2xz$$

$$\int_0^{\pi} (2x - 2x \cos 2xz) dz = 2x \int_0^{\pi} dz - 2x \int_0^{\pi} \cos 2xz dz = 2x \cdot z \Big|_0^{\pi} -$$

$$- 2x \cdot \frac{\sin 2xz}{2x} \Big|_0^{\pi} = 2\pi x - \sin 2\pi x + \sin 0 = 2\pi x - \sin 2\pi x$$

$$\int_0^1 (2\pi x - \sin 2\pi x) dx = 2\pi \int_0^1 x dx - \int_0^1 \sin 2\pi x dx = 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 -$$

$$- \left( \frac{-\cos 2\pi x}{2\pi} \right) \Big|_0^1 = \pi + \frac{\cos 2\pi}{2\pi} - \frac{\cos 0}{2\pi} = \pi + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = \pi$$

Ответ:  $\pi$



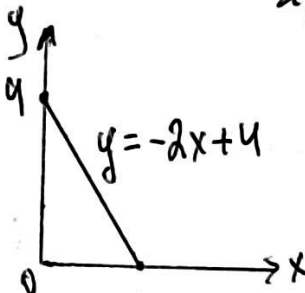
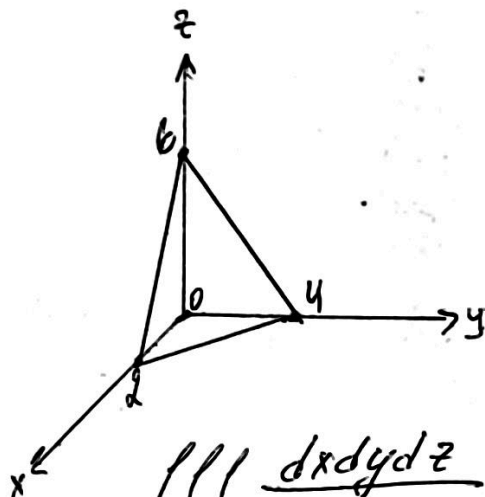
Типовой расчет №5 по математическому анализу  
студента группы А-02-23 ТУРХАНОВ АРТЕМА

### Задача 5. Вычислить

[5.20] 
$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6}\right)^6}, \text{ где } V: \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \\ x=0, y=0, z=0 \end{cases}$$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} - 1 = 0$  — плоскость

$z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y$



$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6}\right)^6} &= \int_0^2 \int_0^{-2x+4} \int_0^{6-3x-\frac{3}{2}y} \frac{dz}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6}\right)^6} \\ &= \int_0^2 \int_0^{-2x+4} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6}\right)^{-5} \Big|_0^{6-3x-\frac{3}{2}y} dy \\ &= \int_0^2 \left( \frac{6}{5} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{6} \left(6 - 3x - \frac{3}{2}y\right)\right)^{-5} - \frac{6}{5} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right)^{-5} \right) dy \\ &= \int_0^2 \left( \frac{6}{5} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right)^{-5} - \frac{6}{5} \cdot 2^{-5} \right) dy = \frac{6}{5} \int_0^{-2x+4} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right)^{-5} dy - \frac{6}{5} \cdot 2^{-5} \int_0^{-2x+4} dy \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right)^{-4}}{-4} \Big|_0^{-2x+4} - \frac{6}{5} \cdot 2^{-5} \cdot y \Big|_0^{-2x+4} = -\frac{6}{5} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(-2x+4)\right)^{-4} + \\ &+ \frac{6}{5} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-4} + \frac{12}{5} \cdot 2^{-5} x - \frac{24}{5} \cdot 2^{-5} = -\frac{6}{5} \cdot 2^{-4} + \frac{6}{5} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-4} + \frac{12}{5} 2^{-5} x - \\ &- \frac{24}{5} \cdot 2^{-5} \end{aligned}$$

Продолжение на след. странице



$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \left( -\frac{6}{5} 2^{-4} + \frac{6}{5} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-4} + \frac{12}{5} 2^{-5} x - \frac{24}{5} 2^{-5} \right) dx = \left( \frac{-6}{5 \cdot 2^4} \cdot x + \right. \\
 & \left. + \frac{6}{5} \cdot \frac{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-3}}{-3} \cdot 2 + \frac{12}{5 \cdot 2^5} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{24}{5 \cdot 2^5} \cdot x \right) \Big|_0^2 = \\
 & = \left( \frac{-6 \cdot 2}{5 \cdot 2^4} - \frac{4}{5} (1+1)^{-3} + \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 2^5} - \frac{24 \cdot 2}{5 \cdot 2^5} \right) - \left( -\frac{4}{5} \cdot 1^{-3} \right) = \\
 & = -\frac{12}{5 \cdot 16} - \frac{4}{5 \cdot 8} + \frac{24}{5 \cdot 32} - \frac{48}{5 \cdot 32} + \frac{4}{5} = \\
 & = \frac{-24 - 16 + 24 - 48 + 32 \cdot 4}{5 \cdot 32} = \frac{32 \cdot 4 - 64}{5 \cdot 32} = \frac{32(4-2)}{5 \cdot 32} = \\
 & = \frac{2}{5} = 0,4
 \end{aligned}$$

Ответ: 0,4

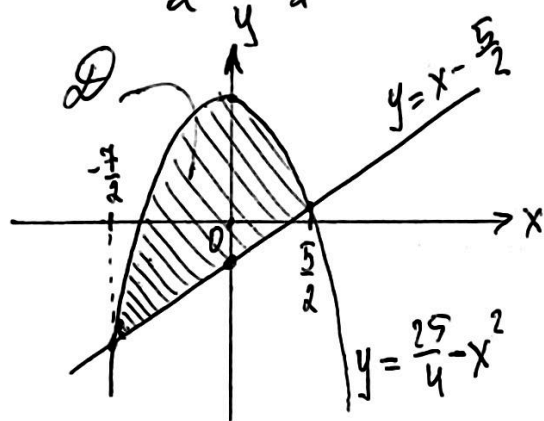
Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

**6.20**  $y = \frac{25}{4} - x^2$ ,  $y = x - \frac{5}{2}$   
парабола                  прямая

Найдем точки пересечения:  $\frac{25}{4} - x^2 = x - \frac{5}{2}$

$$x^2 + x - \frac{5}{2} - \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + x - \frac{35}{4} = 0 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{35}{4}) = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2}; \quad x_2 = \frac{-1-6}{2} = -\frac{7}{2}$$



$$S = \iint_D dS = \int \int_D dx dy = \int dx \int dy$$

$$\int dy = y \Big|_{x-\frac{5}{2}}^{\frac{25}{4}-x^2} = \frac{25}{4} - x^2 - x + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{25}{4} - x^2 - x + \frac{5}{2} = \frac{35}{4} - x^2 - x$$

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{5}{2}} (\frac{35}{4} - x^2 - x) dx = \left( \frac{35}{4}x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\frac{7}{2}}^{\frac{5}{2}} = \left( \frac{35}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{125}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \right) - \left( -\frac{35}{4} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{49 \cdot 7}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{4} \right) = \left( \frac{35 \cdot 5}{8} - \frac{125}{8 \cdot 3} - \frac{25}{8} \right) + \frac{35 \cdot 7}{8} - \frac{49 \cdot 7}{8 \cdot 3} + \frac{49}{8} = \frac{35 \cdot 15 - 125 - 75 + 35 \cdot 21 - 49 \cdot 7 + 49 \cdot 3}{24} = \frac{525 - 125 - 75 + 735 - 343 + 147}{24} = \frac{325 + 735 - 343 + 147}{24} = \frac{1207 - 343}{24} = \frac{864}{24} = 36$$

Ответ: 36



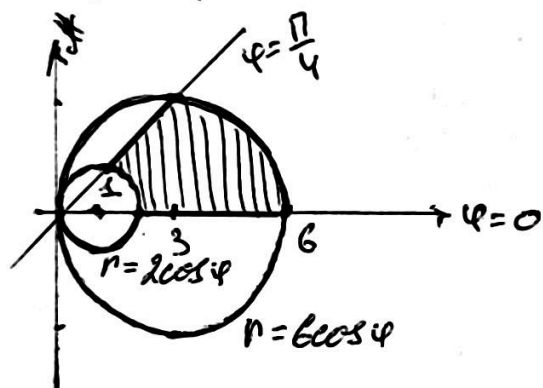
Типовой работы №7 по математическому анализу  
студента группы А-02-23 ТУРХАНОВА АРТЕМА

Задача 7. Найти площадь фигуры, огр. дуговыми линиями

[7.20] 
$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 6x + y^2 &= 0 \\ y &= 0, y = x \end{aligned}$$
 для удобства вычисления перейдем к полярной системе координат:  $x = r \cos \varphi$   $y = r \sin \varphi$   
при переходе радиус  $|r| = r$

$$\begin{aligned} (r \cos \varphi)^2 - 2r \cos \varphi + (r \sin \varphi)^2 &= 0 \\ r^2 \cos^2 \varphi - 2r \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi &= 0 \\ r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) &= 2r \cos \varphi \\ r &= 2 \cos \varphi \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} (r \cos \varphi)^2 - 6r \cos \varphi + (r \sin \varphi)^2 &= 0 \\ r^2 \cos^2 \varphi - 6r \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi &= 0 \\ r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) &= 6r \cos \varphi \\ r &= 6 \cos \varphi \end{aligned} \right.$$

$y = x \Leftrightarrow r \sin \varphi = r \cos \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4} \int_{2 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} r dr d\varphi \\ \int_{2 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} r dr &= \frac{r^2}{2} \Big|_{2 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} = \frac{1}{2} (36 \cos^2 \varphi - \end{aligned}$$

$$- 4 \cos^2 \varphi) = \frac{1}{2} \cdot 32 \cos^2 \varphi = 16 \cos^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4} 16 \cos^2 \varphi d\varphi = 16 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi = 16 \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 8 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 8 \int_0^{\pi/4} 1 d\varphi + 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = 8 \int_0^{\pi/4} 1 d\varphi + \frac{8}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \\ &= 8 \cdot \varphi \Big|_0^{\pi/4} + 4 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 8 \frac{\pi}{4} - 8 \cdot 0 + 4 \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) - 4 \sin 0 = \\ &= 2\pi + 4 = 2(\pi + 2) \end{aligned}$$

Ответ:  $2(\pi + 2)$



Типовой расчёт №8 по математическому анализу  
студента группы А-02-23 Турханова Артема

Задача 8. Д-пластинка.  $\mu$ -поверхностная плотность.  
Найти массу пластинки.

[8.20] Д:  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ )

$$\mu = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}$$

Для удобства вычислений перейдём к полярным координатам. Любая точка перехода имеет  $|I| = r$ :

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = 1$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = 4$$

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 1$$

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 4$$

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$$

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4$$

$$r^2 = 1$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 1$$

$$r = 2$$

первая окружность

вторая окружность

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{x + 2y}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi + 2r \sin \varphi}{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = \frac{r \cos \varphi + 2r \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{r (\cos \varphi + 2 \sin \varphi)}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{\cos \varphi + 2 \sin \varphi}{r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{1}{r} (\cos \varphi + 2 \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \mu r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r} (\cos \varphi + 2 \sin \varphi) dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + 2 \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi =$$

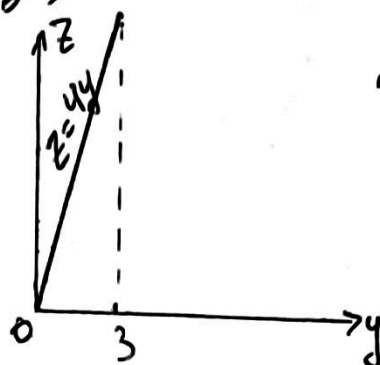
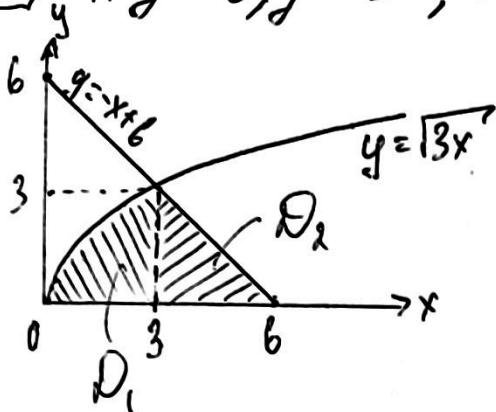
$$= \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - 2 \cos \frac{\pi}{2} +$$

$$+ 2 \cos 0 = 1 - 0 - 0 + 2 \cdot 1 = 3$$

Ответ: 3

Задача 10. Найти объем тела.

10.20  $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0$



Найти точку  
соединения  $D_1$  и  $D_2$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{3x} &= -x+6 \\ 3x &= x^2-12x+36 \\ x^2-15x+36 &= 0 \\ D &= 225-4\cdot36=81=9^2 \\ x_1 &= \frac{15+9}{2}=12 \\ x_2 &= \frac{15-9}{2}=3 \\ &\text{не удовн., т.к.} \\ &x_{\text{соед.}} \in (0,6) \end{aligned}$$

$$\iiint_V dV = \iiint_{V_1} dV + \iiint_{V_2} dV = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{3x}} dy \int_0^{4y} dz \Rightarrow \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{3x}} 4y dy = 4 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3x}} = 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^3 6x dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 3 \cdot 9 = 27 = I_1$$

$$I_2 = \int_3^6 dx \int_0^{-x+6} dy \int_0^{4y} dz \Rightarrow \int_3^6 dx \int_0^{-x+6} 4y dy = 4 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{-x+6} = 2(x^2-12x+36) =$$

$$= 2x^2-24x+72 \Rightarrow \int_3^6 (2x^2-24x+72) dx = \left( 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 24 \frac{x^2}{2} + 72x \right) \Big|_3^6 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 6^3 - 12 \cdot 36 + 72 \cdot 6 - \left( \frac{2}{3} \cdot 3^3 + 12 \cdot 9 - 72 \cdot 3 \right) = 36 \cdot 4 - 36 \cdot 12 + 36 \cdot 12 -$$

$$- \frac{2}{3} \cdot 27 + 12 \cdot 9 - 36 \cdot 6 = 36(4-12+12-6) - 2 \cdot 9 + 12 \cdot 9 = -72 -$$

$$- 2 \cdot 9 + 12 \cdot 9 = -72 + 9(12-2) = 90 - 72 = 18 = I_2$$

$$I = I_1 + I_2 = 27 + 18 = 45 (\text{куб. ед.})$$

Ответ: 45