Математический анализ

Предельное значение функции. Непрерывность

Пепа Р.Ю.

Предельное значение функции. Непрерывность.

- Предел функции в точке
- Предел функции на бесконечности
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции
- Первый замечательный предел
- Второй замечательный предел
- Непрерывность функции
- Точки разрыва функции и их классификация

Предел функции

Определение 1. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех x из интервала $(a - \delta, a + \delta)$, где $x \neq a$, соответствующие значения функции принадлежат интервалу $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Обозначается

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Определение 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \Big| \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Предел функции

- Бесконечный предел: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \Big| \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

- Односторонний предел при $x \to a + 0$:
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \Big| \forall x : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

- Односторонний предел при $x \to a - 0$:
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \Big| \forall x : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

- Предел функции на бесконечности:
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \Big| \forall x : x > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Основные свойства пределов

Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ имеет в точке a предельные значения b и c соответственно. Тогда:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to b} g(x) = b + c$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to b} g(x) = b - c$
- $\lim\limits_{x\to a} \text{C}f(x) = \text{C} \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = \text{C}b$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to b} g(x) = bc$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to b} g(x)} = \dfrac{b}{c}$

Бесконечно малые функции

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = a$ (при $x \to a$), если $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,\Big|\, \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = a$ (при $x \to a$), если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \,\Big|\, \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > A$$

Свойства бесконечно малых функций

- $\alpha(x), \beta(x)$ — бесконечно малые функции, при $x \to a$, тогда функция $\alpha(x) \pm \beta(x)$ есть также бесконечно малые функции

- $\alpha(x)$— бесконечно малая функция при $x \to a$, а функция $f(x)$ — ограничена, тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ — бесконечно малая функция

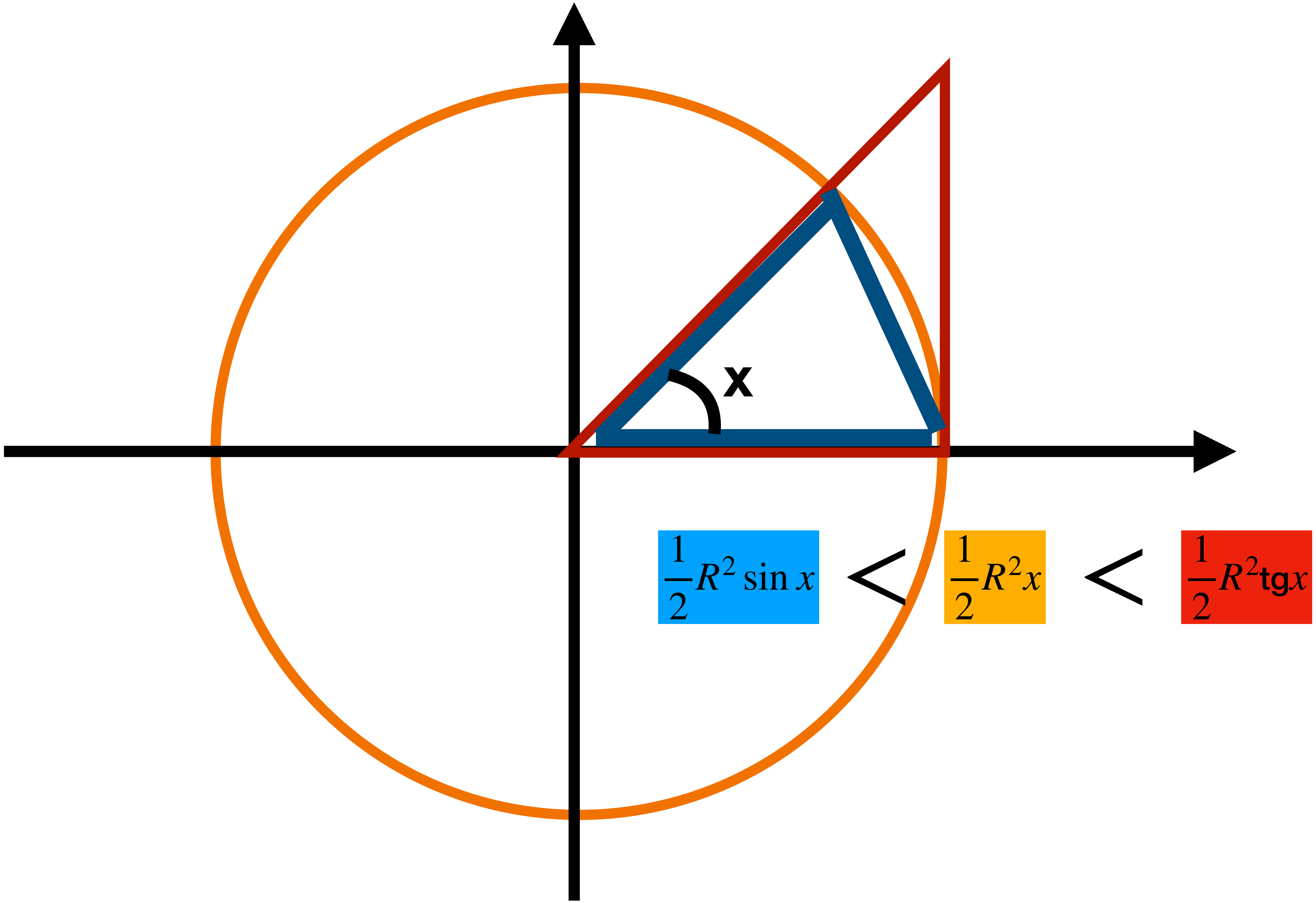
- $f(x)$ определена в окрестности точки a, кроме быть может самой точки a, $\lim\limits_{x \to a} = b$. Тогда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

- $\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \text{tg} x$
- $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
- $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$$\sin x = x + o(x)$$


x
$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \mathrm{tg} x$

Первый замечательный предел

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

$$\text{tg}x=x+o(x)$$

2. $$\lim\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{x}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\cdot 1=1$$

$$\cos x=\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1$

$$\ln(1+x)=x+o(x)$$

- Пусть $e^x-1=y$. Тогда $x=\ln(1+y)$. Следовательно:
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=1$

$$e^x=1+x+o(x)$$

Сравнение бесконечно малых функций

Символ Ландау.

- Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высоко порядка, чем $\beta(x)$, если предельное значение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке равно нулю.

- Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми одного порядка, если предельное значение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке существует и отлично от нулю.

- Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высоко порядка, чем $\beta(x)$, если предельное значение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке равно нулю

Непрерывность функции

Определение 4. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если:

- $f(x)$ существует в точке a
- $f(x)$ имеет предел в точке a
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$f(a) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Определение 4.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \forall x \in \{\, |x - a| < \delta \} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Определение 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,\Big|\, \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Классификация точек разрыва

1. **Устранимый разрыв. Точка** a **— точка устранимого разрыва функции** $f(x)$**, если** $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$**, но либо в точке** a **функция неопределенна.**

2. **Разрыв 1го рода. Точка** a **— точка разрыва первого рода функции** $f(x)$**, если** $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ **.**

3. **Разрыв 2го рода. Точка** a **— точка разрыва второго функции** $f(x)$**, если** $\overline{\exists} \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ **или** $\overline{\exists} \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ **.**

Свойства непрерывных функций

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

- Теорема 1. …. и на концах его имеет значения, противоположные по знаку, то $f(x)$ обращается в ноль по крайней мере в одной точке интервала (a, b).

- Теорема 2. … причем $f(a) = A, f(b) = B$. Тогда, каким бы ни было число C, заключенное между числами A, B на отрезке (a, b) найдётся по крайней мере одна точка c, такая что $f(c) = C$.

- Теорема 3. … то она ограничена на нем сверху и снизу.

- Теорема 4. … то она достигает на этом отрезке своих точных верхних и нижних граней