Математический анализ

Определенный интеграл

Пепа Р.Ю.

Определенный интеграл

- Площадь криволинейной трапеции
- Свойства неопределенного интеграла
- Производные интеграла с переменных верхним пределом
- Формула Ньютона-Лейбница
- Методы нахождения неопределенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции

- Пусть фигура ограничена графиком функции $y = f(x)$, вертикальными прямыми $x = a, x = b$ и осью OX. Разобьём отрезок $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \xi_k \in \Delta x_k,$ — точка из отрезка. $f(\xi_k)$ — значение(высота прямоугольника)

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$S = \lim_{\Delta x_k \to 0} S_n = \lim_{\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$

3. $\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6. Если $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Методы нахождения определенного интеграла

Приведение к табличному виду

- $$\int_{-2}^{1}\left(-3x^3+2x+2\right)dx=\int_{-2}^{1}-3x^3dx+\int_{-2}^{1}2xdx+\int_{-2}^{1}2dx=-3\int_{-2}^{1}x^3dx+2\int_{-2}^{1}xdx+2\int_{-2}^{1}dx$$

Подведение под знак дифференциала

- $$\int_0^1\frac{dx}{5-3x}=\int_0^1\frac{\frac{1}{-3}d(-3)x}{5-3x}=\frac{1}{-3}\int_0^1\frac{d(-3x+5)}{5-3x}$$
- $$\int_1^2 x\exp(x^2)dx=\int_1^2\exp(x^2)d(\frac{x^2}{2})=\frac{1}{2}\int_1^2\exp(x^2)d(x^2)$$

Методы нахождения определенного интеграла

- Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ имеет производную в любой точке $t \in [a, b]$, причем $\Phi'(t) = f(t)$.

Формула Ньютона-Лейбница

- Теорема 2.Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $F(x)$ — одна из первообразных на этом отрезке. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Методы нахождения определенного интеграла

- $$\int_{-2}^{2}\left(t^2-4\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}-4t\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left[\frac{2^3}{3}-4(2)\right]-\left[\frac{-2^3}{3}-4(-2)\right]=\left(\frac{8}{3}-8\right)-\left(\frac{8}{3}+8\right)=-\frac{32}{3}$$
- $$\int_1^9\left(\frac{x}{x^{1/2}}-\frac{1}{x^{1/2}}\right)dx=\int_1^9\left(x^{1/2}-x^{-1/2}\right)dx=\left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^9=$$

$$=\left(\frac{9^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{9^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{1^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{1^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)=\frac{40}{3}.$$

- $$\int_{-\pi}^{\pi}-5\sin x dx=-5(-\cos x)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=5\cos x\,|_{-\pi}^{\pi}=[5\cos\pi]-[5\cos(-\pi)]=-5-(-5)=0$$

Методы нахождения определенного интеграла

Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

- Теорема 3. Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Введем новую переменную равенством $x = \phi(t)$, где:

1. Между переменными x и t существует взаимооднозначное соответствие.
2. $x = \phi(t)$, непрерывна на $[\alpha, \beta]$
3. $\phi(\alpha) = a$ и $\phi(\beta) = b$
4. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)dt$$

Методы нахождения определенного интеграла

- $$\int_0^1 x^2\left(1+2x^3\right)^5 dx = \left[u = 1+2x^3, du = 6x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{6}du\right]$$

$$\left[x = 0 \Rightarrow u = 1+2(0) = 1; x = 1 \Rightarrow u = 1+2(1) = 3\right] =$$

$$= \int_0^1 x^2\left(1+2x^3\right)^5 = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^6}{6}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{36}\left[3^6 - 1^6\right] = \frac{182}{9}$$

- $$\int_0^1 xe^{4x^2+3}dx = \left[u = 4x^2+3, du = 8xdx, x = 0 \Rightarrow u = 3, x = 1 \Rightarrow u = 7\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\int_3^7 e^u du = \frac{1}{8}e^u\Big|_3^7 = \frac{e^7 - e^3}{8}.$$

Методы нахождения определенного интеграла

Теорема 4. Пусть $u = u(x)$ **и** $v = v(x)$ **имеют на отрезке** $[a, b]$ **непрерывные производные. Тогда:**

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

$$\int_a^b \Big(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\Big)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда площадь S под кривой равна

$$\int_a^b f(x)dx$$

- $f(x) = 9 - (x/2)^2, g(x) = 6 - x$