

Математический анализ

Неопределенный интеграл

Пепа Р.Ю.

Неопределенный интеграл

- Понятие первообразной
- Свойства неопределенного интеграла
- Табличные интегралы
- Методы нахождения неопределенного интеграла

Понятие первообразной

- Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке X , конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируемая в каждой точке этапного промежутка и её производная равна $F'(x) = f(x)$.
- Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$, определенных на промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

$$1. \quad d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

$$2. \quad \left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$$

$$3. \quad \int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$4. \quad \int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

$$5. \quad \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Приведение к табличному виду

- $$\int (3x^2 + 4x + 2)dx = \int 3x^2 dx + \int 4x dx + \int 2 dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx + 2 \int dx = 3 \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Подведение под знак дифференциала

- $$\int \frac{dx}{5 - 3x} = \int \frac{\frac{1}{-3} d(-3)x}{5 - 3x} = \frac{1}{-3} \int \frac{d(-3x + 5)}{5 - 3x} = \frac{1}{-3} \ln |5 - 3x| + C$$

- $$\int x \exp(x^2) dx = \int \exp(x^2) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \exp(x^2) d(x^2) = \frac{1}{2} \exp(x^2) + C$$

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \cdot dx = \int f(\phi(x)) \cdot d\phi(x)$$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

$$\bullet \int \exp(\cos x) \sin x dx = [t = \cos x \quad dt = -\sin x] = - \int \exp(t) dt = -\exp(t) + C$$

$$\bullet \int (4x - 3)^{2022} dx = [t = 4x - 3 \quad dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}] = \frac{1}{4} \int t^{2022} dt =$$
$$= \frac{1}{4 * 2023} t^{2023} + C = \frac{1}{8092} (4x - 3)^{2023} + C$$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Интегрирование по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \Rightarrow \int \left(u(x)v(x) \right)' dx = u(x)v(x)$$

$$\int \left(u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \right) dx = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx = \int u dv + \int v du$$

$$\int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)$$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Интегрирование по частям

$$\bullet \int x \ln x dx = \left[u = \ln x, \quad dv = x dx \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

$$\bullet \int x \sin x dx = \left[u = x, \quad dv = \sin x dx \right] = -x \cos x - \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$