Математический анализ

Несобственный интеграл

Пепа Р.Ю.

Определенный интеграл

- Несобственный интеграл 1-го рода
- Несобственный интеграл 2-го рода
- Исследование на сходимость несобственных интегралов 1-го и 2-го рода
- Исследование на сходимость интегралов от знакопеременных функций.
- Двойной интеграл

Несобственный интеграл 1-го рода

- **Определение 1**. Несобственным интегралом 1-го рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется предел $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$. Если этот предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

- Замечание 1. Пусть $b > a$, тогда:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx,$$

Очевидно, из сходимости одного из двух несобственных интегралов следует сходимость другого.

Пример 1

Рассмотрим на полупрямой $a \leq x < \infty (a > 0)$ функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}, \quad p =$ const. Эта функция интегрируем на любом сегменте $a \leq x \leq b$.

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-p}}{1-p} = \dfrac{b^{1-p} - a^{1-p}}{1-p}, \text{при} \quad p \neq 1 \\ \ln x \Big|_a^b = \ln \dfrac{b}{a}, \text{при} \quad p = 1 \end{cases}$$

Очевидно, при $p > 1$ предел $\lim\limits_{b \to \infty} \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$, и не существует при $p \leq 1$.

Достаточные признаки сходимости.

Теорема 1. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \geq a$ выполнены условия:

1. $f(x) \leq g(x)$;

2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны.

Тогда из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 2. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \geq a$ выполнены условия:

1. $f(x) > 0, \quad g(x) > 0$;

2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны;

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k > 0.$

Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 2

- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} (\frac{1}{b} + 1) = 1$
- $$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ – непрерывна и положительна на промежутке $[2, +\infty)$, причем $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} > \frac{1}{x^{1/2}}$, следовательно, по 1-теореме о сравнения интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ расходится.

Несобственный интеграл 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ неограниченна на конечном промежутке $[a, b)$, причем $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$

- **Определение 2**. Несобственным интегралом 2-го рода $\int_a^b f(x)dx$ на промежутке $[a, b)$ называется предел $\lim\limits_{\delta \to +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$. Если этот предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

- Замечание 1.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to +0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\gamma \to +0} \int_{c+\gamma}^b f(x)dx,$$

Очевидно, из сходимости двух несобственных интегралов справа следует сходимость несвойственного интеграла слева.

Пример 1

Рассмотрим на полупрямой $a \leq x < \infty (a > 0)$ функция $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}, \quad p =$ const. Эта функция интегрируем на любом сегменте $a \leq x \leq b$.

$$\int_a^{b-\alpha} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^{b-\alpha} = \dfrac{(b-a)^{1-p} - \alpha^{1-p}}{1-p}, \text{при} \quad p \neq 1 \\ \ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha} = \ln\dfrac{b-a}{\alpha}, \text{при} \quad p = 1 \end{cases}$$

Очевидно, при $p < 1$ предел $\lim\limits_{b \to \infty} \displaystyle\int_a^{b-\alpha} \frac{dx}{(b-x)^p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$, и не существует при $p \geq 1$.

Достаточные признаки сходимости.

Теорема 3. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a; b)$ выполнены условия:

1. $0 \leq f(x) \leq g(x)$;

2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны.

3. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = +\infty$.

Тогда из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 4. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \geq a$ выполнены условия:

1. $f(x) > 0, \quad g(x) > 0$;

2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны;

4. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k > 0$.

Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3

- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin x\,\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$

- $$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 1$ – непрерывна и положительна на промежутке $[2,+\infty)$, причем

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$, —сходится, а следовательно и интеграл

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$. сходится.

Исследование на сходимость интегралов от знакопеременных функций

Определение 3. Интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$.

Определение 4. Если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ расходится, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся.

Теорема 5. Если интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится также.

Пример 4

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$$

Методы нахождения определенного интеграла

- **Теорема 1***. (частный признак сравнения). Пусть для функций $f(x)$ при $x \geq a > 0$ выполнено условие $|f(x)| \leq \dfrac{c}{x^p}$, где c и p – постоянные, $p > 1$, тогда интеграл $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ сходится. Если же существует такая такая постоянная $c > 0$, что для $x \geq a > 0$ справедливо соотношение $f(x) \geq \dfrac{c}{x^p}$, в котором $p \leq 1$, то интеграл $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ расходится.

Двойные интегралы

Определение 3. Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x, y)$, распространённым на ограниченную замкнутую область D плоскости XOY, называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы

$$\lim_{\max \Delta x_i, \Delta y_k \to 0} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k) \Delta x_i \Delta y_k = \int\int_{(D)} f(x, y) dx dy$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ и сумма распространена на те значения i, k, для которых точки (x_i, y_k) принадлежат области D.

Пусть область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), а снизу и сверху непрерывными кривыми $y = \phi_1(x)$ и $y = \phi_2(x)$. Тогда двойной интеграл сводится к повторному интегралу по формуле

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy$$

где при вычислении $\displaystyle\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy$ величину x полагают постоянной.