

# Математический анализ

Функции нескольких переменных

Пепя Р.Ю.

# Производная и дифференциал функции

- Введении в функции нескольких переменных
- Непрерывность
- Частные производные
- Понятие дифференцируемости. Полный дифференциал
- Производные по направлению. Градиент
- Максимум/минимум функции нескольких переменных

# Функция нескольких переменных

Рассмотрим некоторое множество  $\{M\}$  точек евклидового пространства.

- Определение 1. Если каждой точке  $M$  из некоторого множества  $\{M\}$  точек евклидовой **прямой** ставится в соответствие по известному закону некоторое число  $u$ , то говорят, что на множестве  $\{M\}$  задана функция  $u = u(M)$  или  $u = f(M)$ .
- Определение 2. Если каждой точке  $M$  из некоторого множества  $\{M\}$  точек евклидовой **плоскости** ставится в соответствие по известному закону некоторое число  $u$ , то говорят, что на множестве  $\{M\}$  задана функция  $u = u(M)$  или  $u = f(M)$ .
- Определение 3. Координатная плоскость называется **евклидовой плоскостью**, если между любыми двумя точками  $M(x_0, y_0)$  и  $N(x_1, y_1)$  определено расстояние

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

# Непрерывность

- Определение 4. Функция  $u = f(M)$  называется непрерывной в точке  $A$ , если предельное значение в этой точке  $A$  существует и равно частному значению функции  $f(A)$

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(\lim_{m \rightarrow A} M).$$

- Определени 5. Функция  $u = f(M)$  называется непрерывной в точке  $A$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать положительное число  $\delta$ , что для всех точек  $M$  из области задания функции, удовлетворяющих условию  $\rho(M, A) < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$ .

# Основные свойства непрерывных функций

- Теорема 1. Пусть функция  $u = f(M)$  непрерывна во всех точках связного множества  $\{M\}$  евклидов пространства, причем  $f(A)$  и  $f(B)$  — значения этой функции в точках  $A$  и  $B$  этого множества. Пусть далее  $C$  — любое число заключенное между  $f(A)$  и  $f(B)$ . Тогда на любой непрерывной кривой  $L$ , соединяющие точки  $A$  и  $B$  и целиком располагающиеся в  $\{M\}$ , найдётся точка  $N$  такая, что  $f(N) = C$ .
- Теорема 2. Если функция  $u = f(M)$  непрерывна на замкнутой ограниченном множестве  $\{M\}$ , то она ограничена на этом множестве.
- Теорема 3. Если функция  $u = f(M)$  непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $\{M\}$ , то она достигает на этом множестве своих точных верхних и нижних граней.

# Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.

Пусть точка  $M(x, y, z)$  является внутренней точкой области задания функции  $u = f(x, y, z)$ . Рассмотрим в данной фиксированной точке  $M(x, y, z)$  отношение частного приращения  $\Delta_x u$  к соответствующему приращению  $\Delta x$ .

•Определение 6. Если существует предел отношения

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Частного приращения  $\Delta_x u$  функции в точке  $M(x, y, z)$  к соответствующему приращению  $\Delta x$  аргумента  $x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то этот предел называется частной производной функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M(x, y, z)$  по аргументу  $x$  и обозначается одним из следующих символов

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad u'_x, \quad f'_x.$$

# Примеры

- Найдём производную  $\frac{\partial u}{\partial x}$  для функции  $u = \sin(3x)\cos(3y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sin(3x)\cos(3y) = \left(\frac{\partial \sin(3x)}{\partial x}\right)\cos(3y) + \left(\frac{\partial \cos(3y)}{\partial x}\right)\sin(3x) = 3 \cos(3x)\cos(3y)$$

# Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных

- Определение 4. Функция  $u = f(x, y, z)$  называется дифференцируемой в данной точке  $M(x, y, z)$  если её полное приращение в этой точке может быть представлена в виде

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z$$

где  $A, B, C$  — некоторые постоянные для точки  $M(x, y, z)$  числа, а  $\alpha, \beta, \gamma$  — бесконечно малые функции, зависящие от  $\Delta x, \Delta y$  и  $\Delta z$ , стремящиеся к нулю, при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ .

- Теорема 4. Если функция  $u = f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $M(x, y, z)$  области определения, то она имеет в этой точке частные производные, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = C.$$

- Теорема 5. Если функция  $u = f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $M(x, y, z)$  области её определения, то она непрерывна в этой точке.
- Теорема 6. Если функция  $u = f(x, y, z)$  имеет частные производные в окрестности точки  $M(x, y, z)$ , причем эти производные непрерывны в самой точке, то функция дифференцируема в точке  $M(x, y, z)$ .



# Полный дифференциал

Определение 7. Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $M(x, y, z)$ . Полным дифференциалом функции  $dz$  называется линейная относительно  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  часть приращения  $\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$  этой функции

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

Теорема 4. Пусть функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  дифференцируемы в некоторой точке  $t$ , а функция  $u = f(x, y, z)$  дифференцируема в соответствующей точке  $(x, y, z)$ . Тогда сложная функция  $u = f(x(t), y(t), z(t))$  дифференцируема в точке  $t$ , причем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

# Производные по направлению

Пусть  $u = f(x, y)$  задана в некоторой окрестности точки  $M(x_0, y_0)$  и описывают поверхность  $S$

.Определение 8. Предел отношения  $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$  при  $\Delta l \rightarrow 0$  называется производной по направлению  $l$  от функции  $u = f(x, y)$  в точке  $M(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta$$

# Градиент

- Определение 9. Градиентом функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M(x, y, z)$  называется вектор с координатами  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ , то есть

$$\text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

- Построим в направлении  $l$  единичный вектор  $a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, a) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, a) = |\text{grad } u| \cdot |a| \cdot \cos \phi = |\text{grad } u| \cdot \cos \phi$$

# Второй дифференциал

Определение 7. Значение  $\delta(du)$  дифференциала от первого дифференциала, взятое при  $\delta x = dx, \delta x_2 = dx_2, \delta x_3 = dx_3$  называется вторым дифференциалом функции  $u = f(x_1, x_2, x_3)$  в точке  $M(x_1, x_2, x_3)$  и обозначается символом  $d^2u$

$$d^2u = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

$$\begin{aligned} d^2u = & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} dx_1 dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} dx_2 dx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} dx_3 dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 dx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_3} dx_3 dx_3 + \end{aligned}$$

# Второй дифференциал

Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно. Дифференциалом 2-го порядка функции  $u = f(x, y, z)$  называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка.

$$d^2u = d(du) = d(u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz) =$$

$$d(u'_x dx) + d(u'_y dy) + d(u'_z dz) = d(u'_x)dx + d(u'_y)dy + d(u'_z)dz =$$

Для независимой переменной  $dx = \Delta x = \text{const}$ , тогда

$$= \left( (u'_x)'_x dx + (u'_x)'_y dy + (u'_x)'_z dz \right) dx + \left( (u'_y)'_x dx + (u'_y)'_y dy + (u'_y)'_z dz \right) dy + \left( (u'_z)'_x dx + (u'_z)'_y dy + (u'_z)'_z dz \right) dz =$$

$$= u''_{xx} dx^2 + u''_{zz} dz^2 + u''_{yy} dy^2 + 2u''_{xy} dx dy + 2u''_{xz} dx dz + 2u''_{yz} dy dz$$

# Второй дифференциал

$$(dx \quad dy \quad dz) \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yz} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

$$= u''_{xx}dx^2 + u''_{zz}dz^2 + u''_{yy}dy^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + 2u''_{yz}dydz$$

# Максимум/минимум функции нескольких переменных

- Определение 11. Будем говорить, что функция  $u = f(M)$  имеет локальный максимум в точке  $M_0$  (локальный минимум) если найдётся такая  $\delta$ —окрестность точки  $M_0$ , в пределах которой значение  $f(M_0)$  является наибольшим (наименьшим) среди всех значений  $f(M)$
- Теорема 5.(необходимое условие локального экстремума) Если функция  $u = f(M) = f(x, y, z)$  обладает в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  частными производными первого порядка по всем переменным  $x, y, z$  и имеет в этой точке локальный экстремум, то все частные производные первого порядка в этой точке обращаются в нуль.

# Максимум/минимум функции нескольких переменных

Теорема 6 (достаточное условие локального экстремума) Пусть функция  $u = f(M) = f(x, y, z)$  один раз дифференцируема в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и два раза дифференцируема в самой точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Пусть, кроме того, точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  является точкой возможного экстремума функции  $u = f(M) = f(x, y, z)$ , то есть  $du \Big|_{M_0} = 0$ .

Тогда если второй дифференциал функции представляет собой **положительно определенную (отрицательно определенную)** квадратичную форму от переменных  $dx, dy, dz$ , то функция  $u = f(M) = f(x, y, z)$  имеет в точке **локальный минимум (локальный максимум)**. Если же второй дифференциал представляет собой знакопеременную квадратичную форму, то функция  $u = f(M) = f(x, y, z)$  не имеет локального экстремума в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .