Математический анализ

Теоремы дифференциального исчисления. Исследование графиков функции.

Пепа Р.Ю.

Возрастание (убывание) функции. Локальный максимум (минимум) функции

- Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке c, если найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой $f(x) > f(c)$ при $x > c$ и $f(x) < f(c)$ при $x < c$ ($f(x) < f(c)$ при $x > c$ и $f(x) > f(c)$ при $x < c$).
- Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), то эта функция возрастает (убывает).
- Определение 2. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум), если найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой значение $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений этой функции.
- Теорема 2(теорема Ферма). Если функция $f(x)$ дифференцируемая в точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.

Основные теоремы дифференциального исчисления

- Теорема 3 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента. Пусть кроме того $f(a) = f(b)$. Тогда внутри сегмента найдётся такая точка c, что производная в этой точке $f'(c)$ равна нулю.

- Теорема 4(теорема Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех её внутренних точках этого сегмента, то внутри сегмента $[a, b]$ найдётся точка c, такая что справедлива формула

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

- Теорема 3 (теорема Коши). Если каждая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента и если кроме того, производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду внутри сегмента $[a, b]$, то внутри этого сегмента найдётся точка c, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

- Теорема 4(правило Лопиталя). Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференциемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

и производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду в указанной выше окрестности в точки a. Тогда, если существует (конечное или бесконечное) предельное значение $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предельное значение $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Формула Маклорена

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

1.$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$

2.$P''(x) = 2a_2x + 3 \cdot 2 \cdot a_3x^2 + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_nx^{n-2}$

3.$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_nx^{n-3}$

4.…

5.$P^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\ldots 2 \cdot 1 \cdot a_n$

1.$a_1 = \dfrac{P'(0)}{1!}$

2.$a_2 = \dfrac{P''(0)}{2!}$

3.$a_3 = \dfrac{P'''(0)}{3!}$

4.…

5.$a_n = \dfrac{P^{(n)}(x)}{n!}$

7. $$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!} + \frac{P''(0)}{2!} + \frac{P'''(0)}{3!} + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

Формула Маклорена

Формула разложения функции $y = f(x)$ в ряд по степеням x принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$
- $\cos x = 1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
- $\ln(1 + x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} + o(x^2)$

Формула Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x + o(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{o(1)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3!} + o(x)\right]$$

Исследование функций.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум функции в точке x_0, то её производная $f'(x_0)$ либо равно нулю, либо не существует.

Теорема 6. Пусть

1) $y = f(x)$ непрерывна

2) $f'(x) = 0$ или $f'(x) = \infty$ в точке x_0

3) $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак.

Тогда: функция $f(x)$ в точке x_0 имеет:

1. Минимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с минуса на плюс
2. Максимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с плюса на минус.

Исследование функций.

Теорема 7. Пусть

1) $y = f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0

2) $f'(x) = 0$ в точке x_0

3) $f''(x) \neq 0$ в точке x_0

Тогда: функция $f(x)$ в точке x_0 имеет:

1. Минимум, если $f''(x_0) > 0$ в точке x_0
2. Максимум, если $f''(x_0) < 0$ в точке x_0

Выпуклость функции.

- Определение 3. График функции $f(x)$, дифференцируемой на сегменте $[a, b]$, имеет на этом интервале выпуклость вверх(вниз), если график этой фунции в пределах сегменте $[a, b]$ лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

- Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ и имеет непрерывную не равную нулю в точке $x_0 \in [a, b]$ вторую производную. Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на сегменте $[a, b]$, то функция имеет выпуклость вниз, если $f''(x) > 0$, то выпуклость вверх.

Точки перегиба

- Определение 4. Точкой перегиба функции $f(x)$ называется точка, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

- Теорема 9. Если функция $f(x)$ имеет перегиб в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$ или не существует.

- Теорема 10. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную $f'(x)$ в окрестности точки x_0, вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует в точке x_0 и $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак, тогда функция в этой точке имеет перегиб.

Схема исследования графика функции

1. Уточнить область задания функции

2. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных)

3. Найти область возрастания и убывания функции и точки экстремума

4. Найти область сохранения направления выпуклости

5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.