Математический анализ

Неопределенный интеграл

Пепа Р.Ю.

Неопределенный интеграл

- Понятие первообразной
- Свойства неопределенного интеграла
- Табличный интегралы
- Методы нахождения неопределенного интеграла

Понятие первообразной

- Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке X, конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируемая в каждой точке этапного промежутка и её производная равна $F'(x) = f(x)$.

- Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$, определенных на промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = d\Big(F(x) + C\Big) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = \Big(F(x) + C\Big) = F'(x) = f(x)$

3. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$

4. $\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

5. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Приведение к табличному виду

- $\int (3x^2+4x+2)dx = \int 3x^2dx + \int 4xdx + \int 2dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx + 2\int dx = 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x + C$

Подведение под знак дифференциала

- $\int \frac{dx}{5-3x} = \int \frac{\frac{1}{-3}d(-3)x}{5-3x} = \frac{1}{-3}\int \frac{d(-3x+5)}{5-3x} = \frac{1}{-3}\ln|5-3x| + C$
- $\int x\exp(x^2)dx = \int \exp(x^2)d(\frac{x^2}{2}) = \frac{1}{2}\int \exp(x^2)d(x^2) = \frac{1}{2}\exp(x^2) + C$

$$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\cdot dx = \int f(\phi(x))\cdot d\phi(x)$$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

- $\int \exp(\cos x)\sin x dx = \left[t = \cos x \; dt = -\sin x\right] = -\int \exp(t)dt = -\exp(t) + C$

- $\int (4x-3)^{2022}dx = \left[t = 4x-3 \;\; dt = 4dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{4}\right] = \dfrac{1}{4}\int t^{2022}dt =$

$$= \frac{1}{4 * 2023}t^{2023} + C = \frac{1}{8092}(4x-3)^{2023} + C$$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Интегрирование по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \Rightarrow \int \Big(u(x)v(x)\Big)' dx = u(x)v(x)$$

$$\int \Big(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\Big)dx = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx = \int udv + \int vdu$$

$$\int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)$$

Методы нахождения неопределенного интеграла

Интегрирование по частям

- $\int x\ln x dx = \left[u = \ln x,\ \ dv = xdx\right] = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\int xdx = \dfrac{x^2}{2}(\ln x - \dfrac{1}{2}) + C$

- $\int x\sin x dx = \left[u = x, dv = \sin x dx\right] = -x\cos x - \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$