Математический анализ

Предел последовательности

Пепа Р.Ю.

Числовые последовательности

- Ограниченные и неограниченные последовательности
- Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности
- Свойства бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей
- Сходящиеся последовательности
- Теоремы о сходимости последовательностей

Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 1.

Если каждому числу n натурального ряда чисел $1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots$ ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число x_n, то множество вещественных занумерованных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

мы будем называть числовой последовательностью или просто последовательностью.
x_n — элемент числовой последовательности $\{x_n\}$.

Определение 2.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое вещественное число M(число m), что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$).

Определение 3.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной с обеих сторон или просто ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, то есть существуют такие вещественные число M и m, что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $m \leq x_n \leq M$.

Ограниченные и неограниченные последовательности

Примеры

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $-1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots,1/n,\ \ldots$. **ограничена**
2. $\{1+(-1)^n\}$ $-$ $0,\ 2\ 0,\ 2,\ 0,\ \ldots$ **ограничена**
3. $-1,\ -4,\ -9,\ \ldots,-n^2,\ldots$ **—ограничена сверху и не ограничена снизу**
4. $1,\ 2,\ 1,\ 3,\ \ldots,1,\ n,\ 1,\ (n+1),\ldots$ **— не ограничена**

Определение 4.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A найдётся элемент x_n этой последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение 5.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A можно указать номер $N(A)$, что при $n > N$, все элементы x_n этой последовательности последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $|x_n| > A$.

Определение 6.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε можно указать номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N$, все элементы x_n этой последовательности последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $|x_n| < \varepsilon$.

Примеры

- $q, q^2, q^3, \ldots$ **— бесконечно большая при $|q| > 1$, бесконечно малая при $|q| < 1$.**
- $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ **— бесконечно малая.**

Основные свойства бесконечно малых последовательностей

- **Теорема 1**. Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность
- **Теорема 2**. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.
- **Теорема 3**. Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то начиная с некоторого номера n, определена последовательность $\{1/x_n\}$, которая является бесконечно малой. Если все элементы бесконечно малой последовательности больше нуля, то последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно большая.

Сходящиеся последовательности и их свойства.

Определение 7.

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует число a, такое что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Число a при этом называется пределом последовательности $\{x_n\}$.

Определение 7.

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если для любого положительного числа ε можно указать номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N$, все элементы x_n этой последовательности последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. Число a при этом называется пределом последовательности $\{x_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Кванторы

- $\exists$ — **существует**
- $\forall$ — **для любого**
- $|$ — **ограничение (удовлетворяющее условию)**

Определение 5. Последовательность называется бесконечно большой $a \to \infty$, если

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in N\ |\ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| > \varepsilon$

Определение 6. Последовательность называется бесконечно малой $a \to 0$, если

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in N\ |\ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$

Определение 7. Последовательность называется сходящейся $a \to 0$, если

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in N\ |\ \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Пример.

Докажем, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малая. Если $n \geq N(\varepsilon)$, то $1/n \leq 1/N(\varepsilon)$. Каким бы малым мы не выбрали ε, достаточно будет $N(\varepsilon)$ = $[1/\varepsilon] + 1$.

Основные свойства сходящихся последовательностей

- **Теорема 4**. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
- **Теорема 5**. Сходящаяся последовательность ограничена.
- **Теорема 6**. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда:

  i. $\lim\limits_{n\to\infty} (Cx_n) = Ca$, для всех $C \in \mathbb{R}$;

  ii. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

  iii. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;

  iv. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / y_n) = a/b$, при условии, что $b \neq 0$.

Пример

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3})}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(n+2-n+3)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}=5\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)}=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)}=2{,}5$$

Число *e*

- 1
- $1 + 1 = 2$
- $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$
- $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.44141$
- $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61304$
- $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.71457$
- $\left(1 + \frac{1}{365 \times 24}\right)^{365 \times 24} = 2.71813$
- $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045\ldots$