Математический анализ

Функции нескольких переменных

Пепа Р.Ю.

Производная и дифференциал функции

- Введении в функции нескольких переменных
- Непрерывность
- Частные производные
- Понятие дифференцируемости. Полный дифференциал
- Производные по направлению. Градиент
- Максимум/минимум функции нескольких переменных

Функция нескольких переменных

Рассмотрим некоторое множество $\{M\}$ точек евклидового пространства.

- Определение 1. Если каждой точке M из некоторого множества $\{M\}$ точек евклидовой прямой ставится в соответствие по известному закону некоторое число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$.

- Определение 2. Если каждой точке M из некоторого множества $\{M\}$ точек евклидовой плоскости ставится в соответствие по известному закону некоторое число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$ или $u = f(M)$.

- Определение 3. Координатная плоскость называется евклидовой плоскостью, если между любыми двумя точками $M(x_0, y_0)$ и $N(x_1, y_1)$ определено расстояние
$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

Непрерывность

- Определение 4. Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке A, если предельное значении в этой точке A существует и равно частному значению функции $f(A)$

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(\lim_{m \to A} M).$$

- Определени 5. Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке A, если для любого положительного числа ε можно указать положительное число δ, что для всех точек M из области задания функции, удовлетворяющих условию $\rho(M, A) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Основные свойства непрерывных функций

- Теорема 1. Пусть функция $u = f(M)$ непрерывна во всех точках связного множества $\{M\}$ евклидов пространства, причем $f(A)$ и $f(B)$ — значения этой функции в точках A и B этого множества. Пусть далее C — любое число заключенное между $f(A)$ и $f(B)$. Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющие точки A и B и целиком располагающиеся в $\{M\}$, найдётся точка N такая, что $f(N) = C$.

- Теорема 2. Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутой ограниченном множестве $\{M\}$, то она ограничена на этом множестве.

- Теорема 3. Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$, то она достигает на этом множестве своих точных верхних и нижних граней.

Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.

Пусть точка $M(x, y, z)$ является внутренней точкой области задания функции $u = f(x, y, z)$. Рассмотрим в данной фиксированной точке точке $M(x, y, z)$ отношение частного приращения $\Delta_x u$ к соответствующему приращению Δx.

•Определение 6. Если существует предел отношения

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Частного приращения $\Delta_x u$ функции в точке $M(x, y, z)$ к соответствующему приращению Δx аргумента x при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется частной производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ по аргументу x и обозначается одним из следующих символов

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad u'_x, \quad f'_x .$$

Примеры

- Найдём производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ для функции $u = \sin(3x)\cos(3y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sin(3x)\cos(3y) = \left(\frac{\partial \sin(3x)}{\partial x}\right)\cos(3y) + \left(\frac{\partial \cos(3y)}{\partial x}\right)\sin(3x) = 3\cos(3x)\cos(3y)$$

Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных

- Определение 4. Функция $u = f(x, y, z)$ называется дифференциемой в данной точке $M(x, y, z)$ если её полное приращение в этой точке может быть представлена в виде

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z$$

где $A, B, C -$некоторые постоянные для точки $M(x, y, z)$ числа, а α, β, γ $-$ бесконечно малые функции, зависящие от Δx, Δy и Δz, стремящиеся к нулю, при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$.

- Теорема 4. Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x, y, z)$ области определения, то она имеет в этой точке частные производные, причем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = B$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = C$.

- Теорема 5. Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x, y, z)$ области её определения, то она непрерывна в этой точке.

- Теорема 6. Если функция $u = f(x, y, z)$ имеет частные производные в окрестности точки $M(x, y, z)$, причем эти производные непрерывны в самой точке, то функция дифференцируема в точке $M(x, y, z)$.

Полный дифференциал

Определение 7. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x, y, z)$. Полным дифференциалом функции dz называется линейная относительно $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ часть приращения $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$этой функции

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

Теорема 4. Пусть функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ дифференцируемы в некоторой точке t, а функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в соответствующей точке (x, y, z). Тогда сложная функция $u = f(x(t), y(t), z(t))$ дифференцируема в точке t, причем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Производные по направлению

Пусть $u = f(x, y)$ **задана в некоторой окрестности точки** $M(x_0, y_0)$ **и описывают поверхность** S

- Определение 8. Предел отношения $\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ называется производной по направлению l от функции $u = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta$$

Градиент

- Определение 9. Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, то есть
  $\text{grad u} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$
- Построим в направлении l единичный вектор $a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\frac{u}{\partial l} = \big(\text{grad u, a}\big) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\frac{u}{\partial l} = \big(\text{grad u, a}\big) = |\text{grad u}| \cdot |a| \cdot \cos\phi = |\text{grad u}| \cdot \cos\phi$$

Второй дифференциал

Определение 7. Значение $\delta(du)$ дифференциала от первого дифференциала, взятое при $\delta x = dx, \delta x_2 = dx_2, \delta x_3 = dx_3$ называется вторым дифференциалом функции $u = f(x_1, x_2, x_3)$ в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ и обозначается символом d^2u

$$d^2u = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}dx_1 dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1 dx_3 +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}dx_2 dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2}dx_2 dx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}dx_2 dx_3 +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1}dx_3 dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2}dx_3 dx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_3}dx_3 dx_3 +$$

Второй дифференциал

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно. Дифференциалом 2-го порядка функции $u = f(x, y, z)$ называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка.

$$d^2u = d(du) = d\Big(u'_x dx + u'_y dy + u'_y dy\Big) =$$

$$d(u'_x dx) + d(u'_y dy) + d(u'_y dy) = d(u'_x)dx + d(u'_y)dy + d(u'_z)dz =$$

Для независимой переменной $dx = \Delta x = \text{const}$, тогда

$$= \Big((u'_x)'_x dx + (u'_x)'_y dy + (u'_x)'_z dz\Big)dx + \Big((u'_y)'_x dx + (u'_y)'_y dy + (u'_y)'_z dz\Big)dy + \Big((u'_z)'_x dx + (u'_z)'_y dy + (u'_z)'_z dz\Big)dz =$$

$$= u''_{xx}dx^2 + u''_{zz}dz^2 + u''_{yy}dy^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + 2u''_{yz}dydz$$

Второй дифференциал

$$\begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yz} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

$$= u''_{xx}dx^2 + u''_{zz}dz^2 + u''_{yy}dy^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + 2u''_{yz}dydz$$

Максимум/миниму функции нескольких переменных

- Определение 11. Будем говорить, что функция $u = f(M)$ имеет локальный максимум в точке M_0 (локальный минимум) если найдётся такая $\delta-$окрестность точки M_0, в пределах которой значение $f(M_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений $f(M)$

- Теорема 5.(необходимое условие локального экстремума) Если функция $u = f(M) = f(x, y, z)$ обладает в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ частными производными первого порядка по всем переменным x, y, z и имеет в этой точке локальный экстремум, то все частные производные первого порядка в этой точке обращаются в нуль.

Максимум/миниму функции нескольких переменных

Теорема 6(достаточное условие локального экстремума) Пусть функция $u = f(M) = f(x, y, z)$ один раз дифференцируема в некоторой окрестности точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два раза дифференцируема в самой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является точкой возможного экстремума функции $u = f(M) = f(x, y, z)$, то есть $du\Big|_{M_0} = 0$.

Тогда если второй дифференциал функции функции представляет собой положительно определенную (отрицательно определенную) квадратичную форму от переменных dx, dy, dz, то функция $u = f(M) = f(x, y, z)$ имеет в точке локальный минимум (локальный максимум). Если же второй дифференциал представляет собой знакопеременную квадратичную форму, то функция $u = f(M) = f(x, y, z)$ не имеет локального экстремума в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.