

Математический анализ

Предельное значение функции. Непрерывность

Пепя Р.Ю.

Предельное значение функции. Непрерывность.

- Предел функции в точке
- Предел функции на бесконечности
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции
- Первый замечательный предел
- Второй замечательный предел
- Непрерывность функции
- Точки разрыва функции и их классификация

Предел функции

Определение 1. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех x из интервала $(a - \delta, a + \delta)$, где $x \neq a$, соответствующие значения функции принадлежат интервалу $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Определение 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Предел функции

- Бесконечный предел: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$
- Односторонний предел при $x \rightarrow a + 0$:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
- Односторонний предел при $x \rightarrow a - 0$:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
- Предел функции на бесконечности:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x : x > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Основные свойства пределов

Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a предельные значения b и c соответственно. Тогда:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b - c$

- $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = Cb$

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = bc$

- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}$

Бесконечно малые функции

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = a$ (при $x \rightarrow a$), если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = a$ (при $x \rightarrow a$), если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > A$$

Свойства бесконечно малых функций

- $\alpha(x), \beta(x)$ — бесконечно малые функции, при $x \rightarrow a$, тогда функция $\alpha(x) \pm \beta(x)$ есть также бесконечно малые функции
- $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$, а функция $f(x)$ — ограничена, тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ — бесконечно малая функция
- $f(x)$ определена в окрестности точки a , кроме быть может самой точки a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

Сравнение бесконечно малых функций

Символ Ландау.

- Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высоко порядка**, чем $\beta(x)$, если предельное значение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке равно нулю.
- Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми **одного порядка**, если предельное значение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке существует и отлично от нуля.
- Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется **эквивалентными**, если предельное значение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке равно единице

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

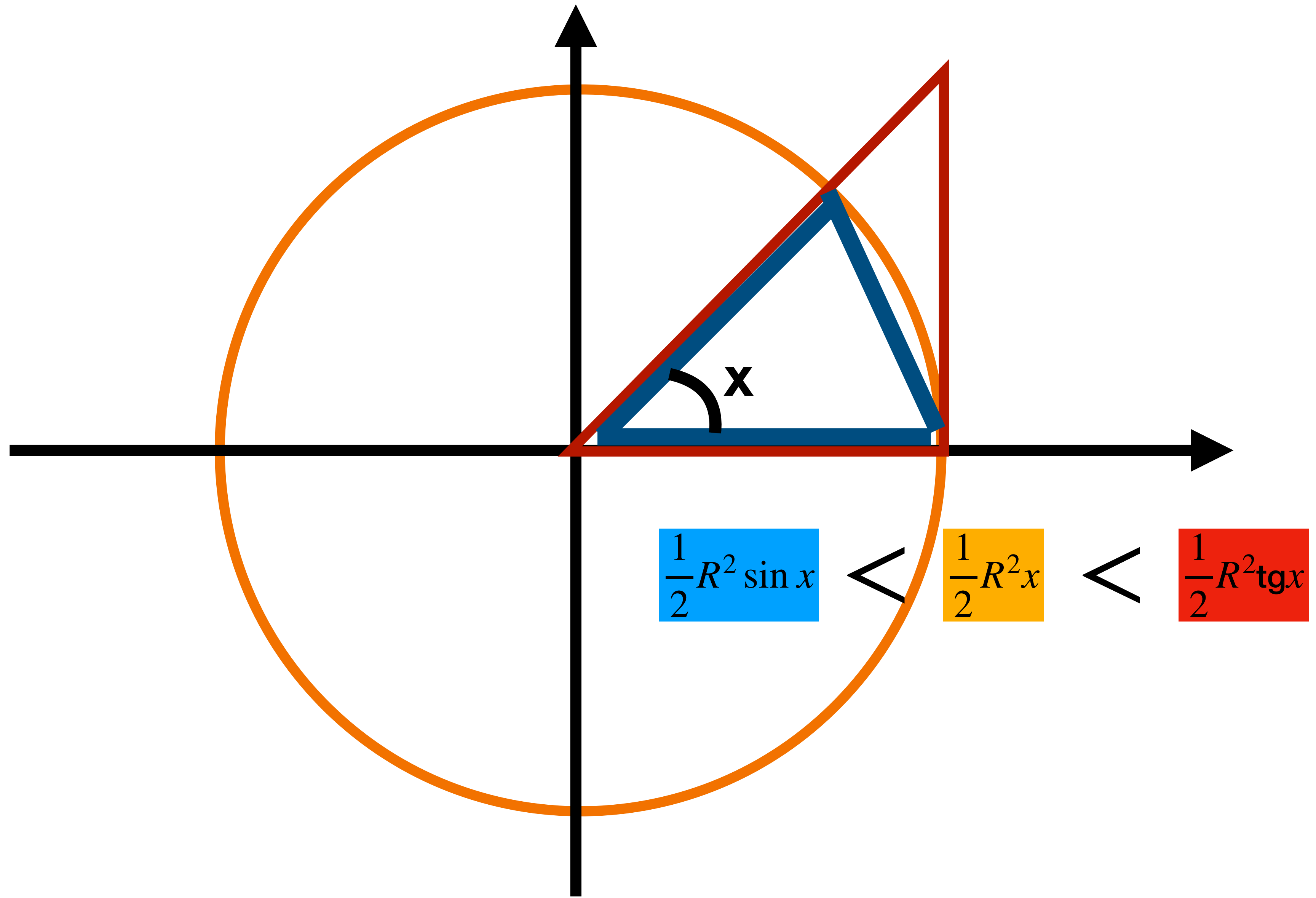
$$\bullet \frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$$

$$\bullet 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\bullet 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin x = x + o(x)$$



Первый замечательный предел

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}}$

1.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

• Пусть $e^x - 1 = y$. Тогда $x = \ln(1+y)$. Следовательно:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

Непрерывность функции

Определение 4. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a , если:

- $f(x)$ существует в точке a
- $f(x)$ имеет предел в точке a
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$f(a) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Определение 4.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \{ |x - a| < \delta \} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Определение 1.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Классификация точек разрыва

- 1. Устранимый разрыв.** Точка a — точка устранимого разрыва функции $f(x)$, если $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, но либо в точке a функция неопределенна или частное значение в точке не равно предельному значению.
- 2. Разрыв 1го рода.** Точка a — точка разрыва первого рода функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.
- 3. Разрыв 2го рода.** Точка a — точка разрыва второго рода функции $f(x)$, если $\nexists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ или $\nexists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$. (\nexists — отрицание существования)

Свойства непрерывных функций

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

- Теорема 1. и на концах его имеет значения, противоположные по знаку, то $f(x)$ обращается в ноль по крайней мере в одной точке интервала (a, b) .
- Теорема 2. ... причем $f(a) = A, f(b) = B$. Тогда, каким бы ни было число C , заключенное между числами A, B на отрезке (a, b) найдётся по крайней мере одна точка c , такая что $f(c) = C$.
- Теорема 3. ... то она ограничена на нем сверху и снизу.
- Теорема 4. ... то она достигает на этом отрезке своих точных верхних и нижних граней