Математический анализ

Производные и дифференциал функции.

Пепа Р.Ю.

Производная и дифференциал функции

- Понятие производной
- Производная элементарных функций
- Геометрический и физический смысл производной
- Производная сложной функции, производная высших порядков
- Понятие дифференциала функции
- Геометрический и физический смысл дифференциала
- Инвариантность формы первого дифференциала

Производная функции одной переменной

Пусть Δx– приращение аргумента, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(\Delta x)$ — приращение функции в точке x, соответствующим приращению аргумента Δy.

- Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x называется предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Примеры

- Найдём производную $f(x) = x^2$:

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

- Показать, что если $f(x) = x^n$, то $f'(x) = nx^{n-1}$.

Примеры

- Найдём производную $f(x) = \sin x$:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{(x + \Delta x) + x}{2}\right)\sin\left(\frac{(x + \Delta x) - x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1$$

Примеры

- Найдём производную $f(x) = \ln(x)$:

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\Big(\frac{x + \Delta x}{x}\Big) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\Big(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\Big)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$\Big[t = \frac{x}{\Delta x}\ ; \Delta x \to 0 \Rightarrow\ t \to \infty\Big] = \frac{1}{x} \ln \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

Примеры

- Найдём производную $f(x) = |x|$ в точке 0.

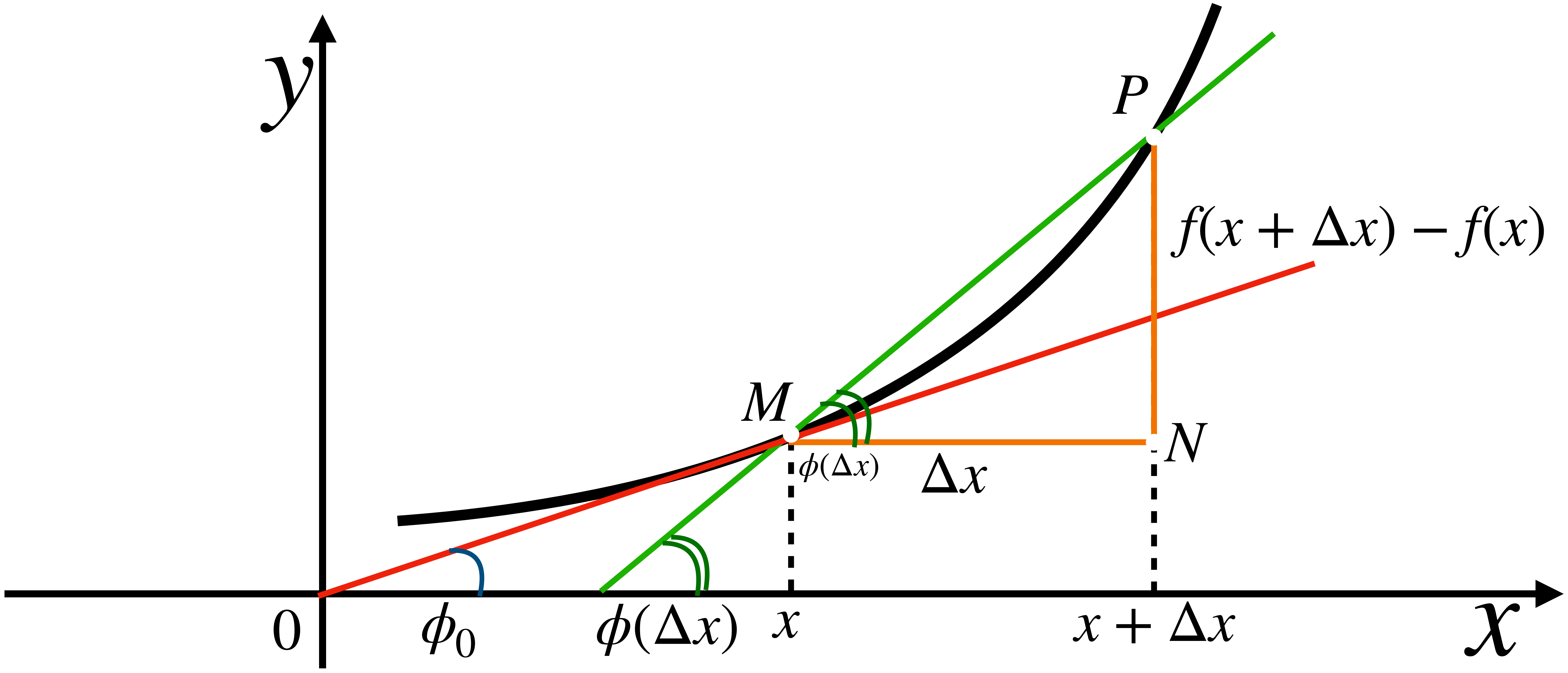
$$(|x|)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

В точке 0 имеем $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x}$.

При $\Delta x > 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$,

при $\Delta x < 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Геометрический смысл производной



$$\lim_{\Delta x \to 0} \phi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \text{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{arctg}(f'(x))$$

$$\tan \phi = f'(x)$$

Уравнение касательно к графику функци

Пусть прямая задана уравнением $y = kx + b$, и проходит через точку $M(x_0, f(x_0))$

$$f(x_0) = kx_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - kx_0$$

$$y = kx + (f(x_0) - k(x_0))$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Правила вычисления производных

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x

1. $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$

2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$

3. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \ v(x) \neq 0$

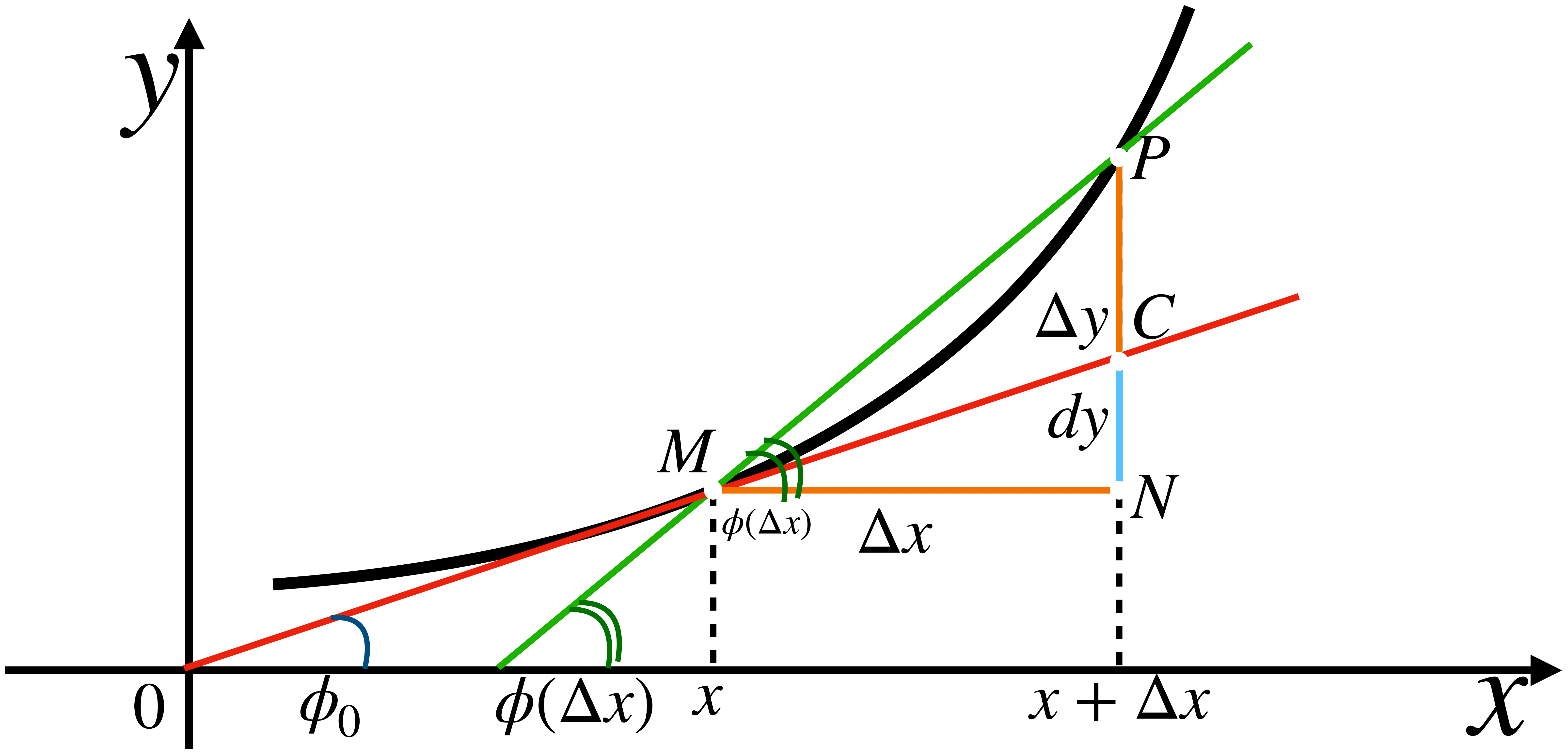
5. Пусть функции $y = y(u),$ и $u = u(x)$ имеют производные соответсвенно в точках $u_0 = u(x_0)$ и x_0. Тогда

$$\Big(y\big(u(x)\big)\Big)'\Big|_{x=x_0} = y'(u)\Big|_{u=u_0} \cdot u'(x)\Big|_{x=x_0}$$

6. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Дифференциал функции

Пусть функция функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, следовательно её приращение можно представить в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.



Дифференциал функции

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Из теореме о пределе функции следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

Пусть $f'(x) \neq 0$. Тогда: $f'(x_0)\Delta x -$ б.м. так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\Delta x = 0$ и $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x -$ б.м. Более высокого порядка малости чем Δx.

Определение 2. Дифференциалом функции называется линейная относительно Δx часть приращения функции. Обозначается $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Свойства бесконечно малых функций

- $\alpha(x), \beta(x)$ — бесконечно малые функции, при $x \to a$, тогда функция $\alpha(x) \pm \beta(x)$ есть также бесконечно малые функции

- $\alpha(x)$— бесконечно малая функция при $x \to a$, а функция $f(x)$ — ограничена, тогда $\alpha(x) \cdot f(x)$ — бесконечно малая функция

- $f(x)$ определена в окрестности точки a, кроме быть может самой точки a, $\lim_{x \to a} = b$. Тогда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Дифференциал функции

Пусть $y = x$, вычислим $dy - ?$.

$$dy(x) = dx = y'(x) \cdot \Delta x = (x)'\Delta x = \Delta x.$$

Следовательно

$$dx = \Delta x.$$

— то есть дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. А так как по определению $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, то

$$dy = f'(x)dx\,.$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции

Пример.

$dy-?$, $y = 2x^2 + \sin(3x)$.

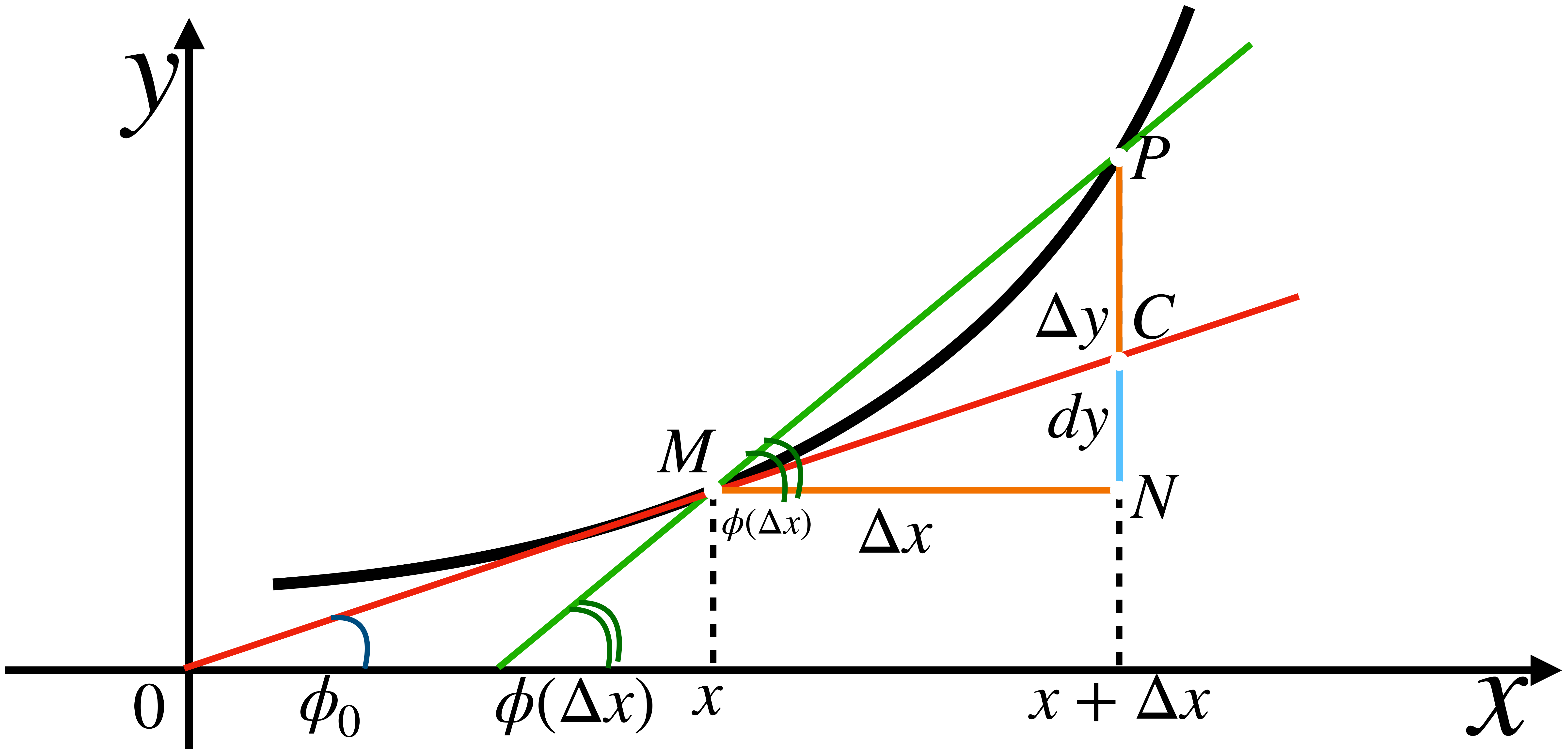
$$dy = (2x^2 + \sin(3x))'dx = (4x + 3\sin(3x))dx$$

Дифференциал функции

$CN - ?,$

$$\triangle\, CMN \Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{CN}{MN} \Rightarrow CN = \tan\phi \cdot MN \Rightarrow CN = f'(x)\cdot MN = f'(x)\cdot \Delta x$$

$$dy = f'(x)dx$$



Дифференциал функции

Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $y = f(u)$, $u = \phi(x)$, **тогда** $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

$$y'_x \cdot dx = f'_u \cdot u'_x \cdot dx \quad \Rightarrow$$

$$dy = f'_u \cdot du.$$