



JUEGOS EN SUPERFICIES NO ABATIBLES

Juan Manuel Alfonso Simón

José Campo Sáez

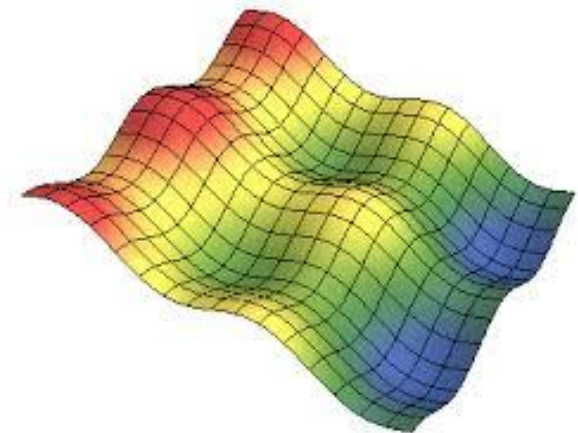
José Manuel Moya García

Guillermo Sánchez-Gadeo Medina

SUPERFICIES TOPOLÓGICAS

Una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$ es un espacio topológico Hausdorff M de forma que cada punto $p \in M$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Una superficie es una variedad topológica de dimensión 2.

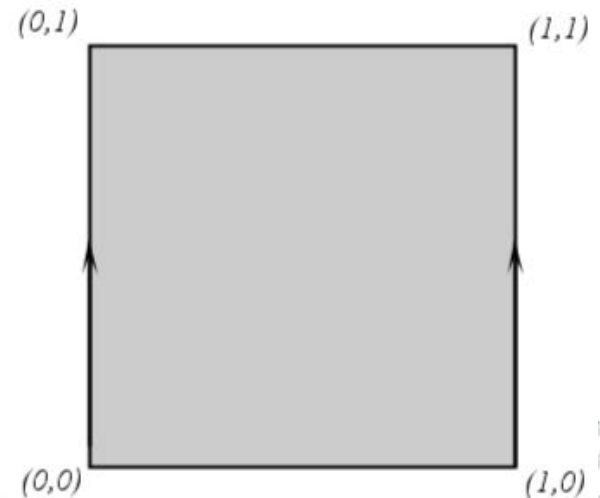


CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES MEDIANTE PEGADO

Sea $R = [0,1] \times [0,1]$ un cuadrado. Intentamos construir superficies identificando puntos de su frontera. Esto se denotará mediante flechas, pegando lados con flechas del mismo sentido.

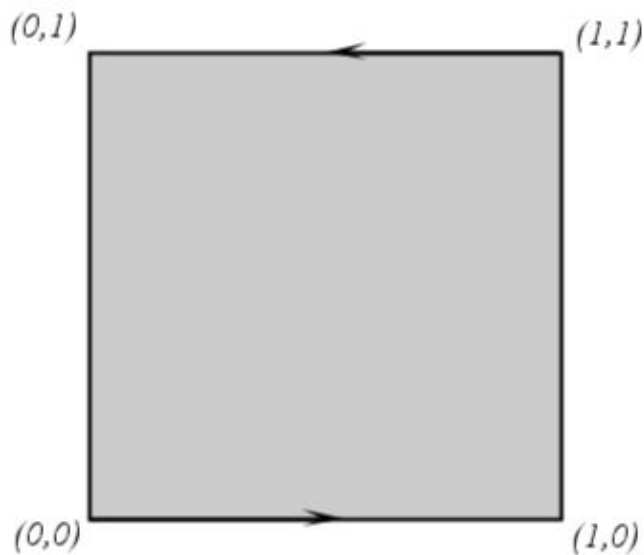
En esta forma de pegado se identifican los puntos $(0,y)$ con $(1,y)$ donde $0 < y < 1$. El resto de puntos no se identifican.

El espacio cociente $C = R/\sim$ es un cilindro



PEGADO EN BANDA DE MÖBIUS

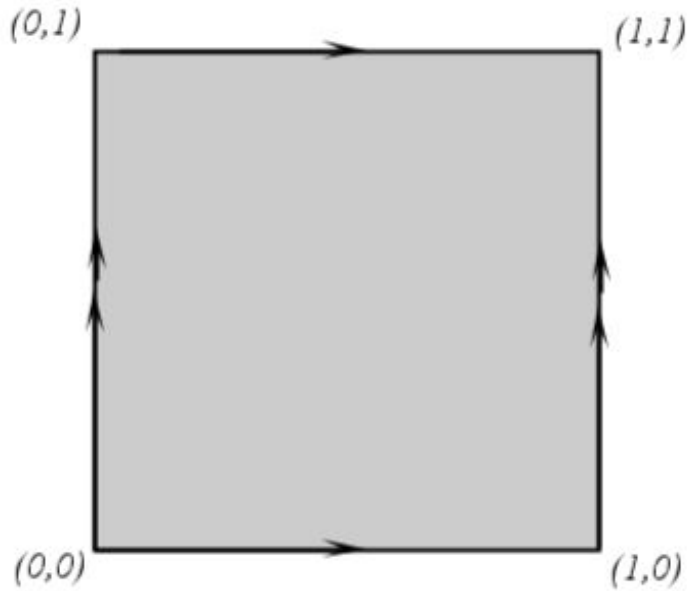
Pegamos cada punto $(x,0)$ con $(1-x,1)$ para cada x tal que $0 < x < 1$. El resto de puntos no se identifican. Esto es pegar los bordes con un “giro” previo.



La frontera de la banda tiene una sola componente conexa: empieza en $(0,0)$, sube a $(0,1) \sim (1,0)$ y continua hasta $(1,1) \sim (0,0)$ donde se cierra.

Así obtenemos una superficie distinta a un cilindro.

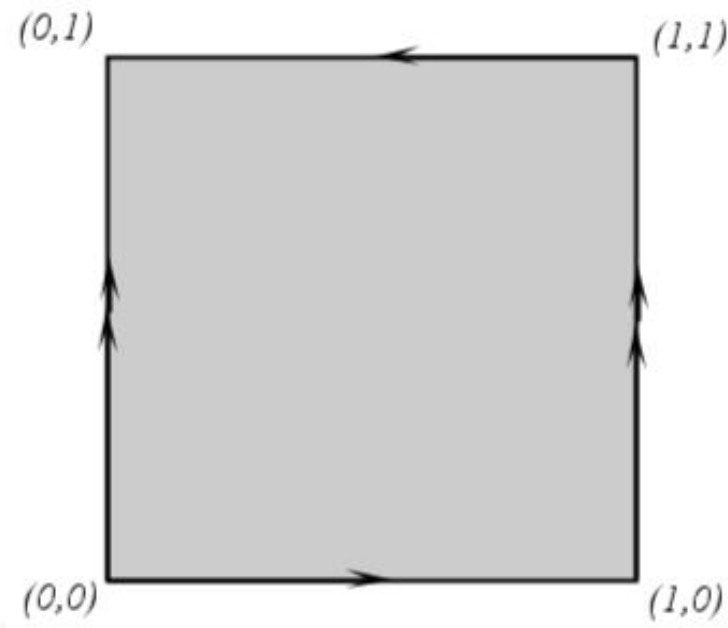
EL TORO T



Se identifican los puntos $(x,0)$ con $(x,1)$ por un lado, y $(0,y)$ con $(1,y)$ por otro, donde $0 < x,y < 1$. Esto es, primero pegar los lados verticales para obtener un cilindro, y después identificando los bordes de éste. No tiene frontera.

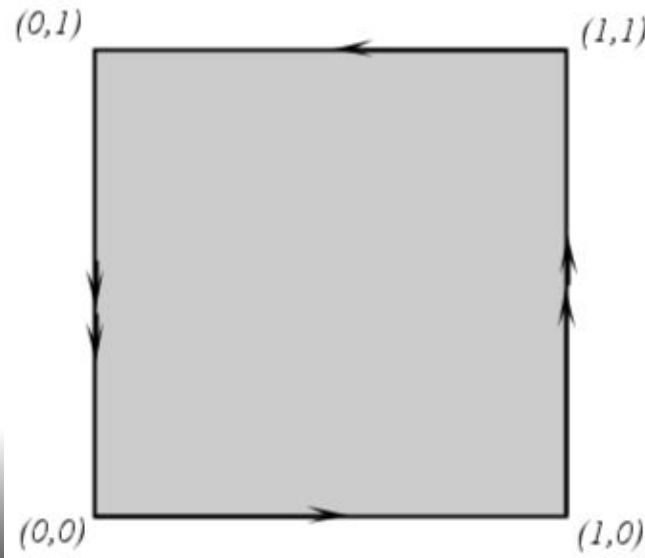
BOTELLA DE KLEIN

Las identificaciones son $(0,y) \sim (1,y)$ y $(x,0) \sim (1-x,1)$, de nuevo con $0 < x,y < 1$. Esto es primero pegar de forma vertical para obtener un cilindro y después pegar los bordes de éste “dándoles la vuelta”.



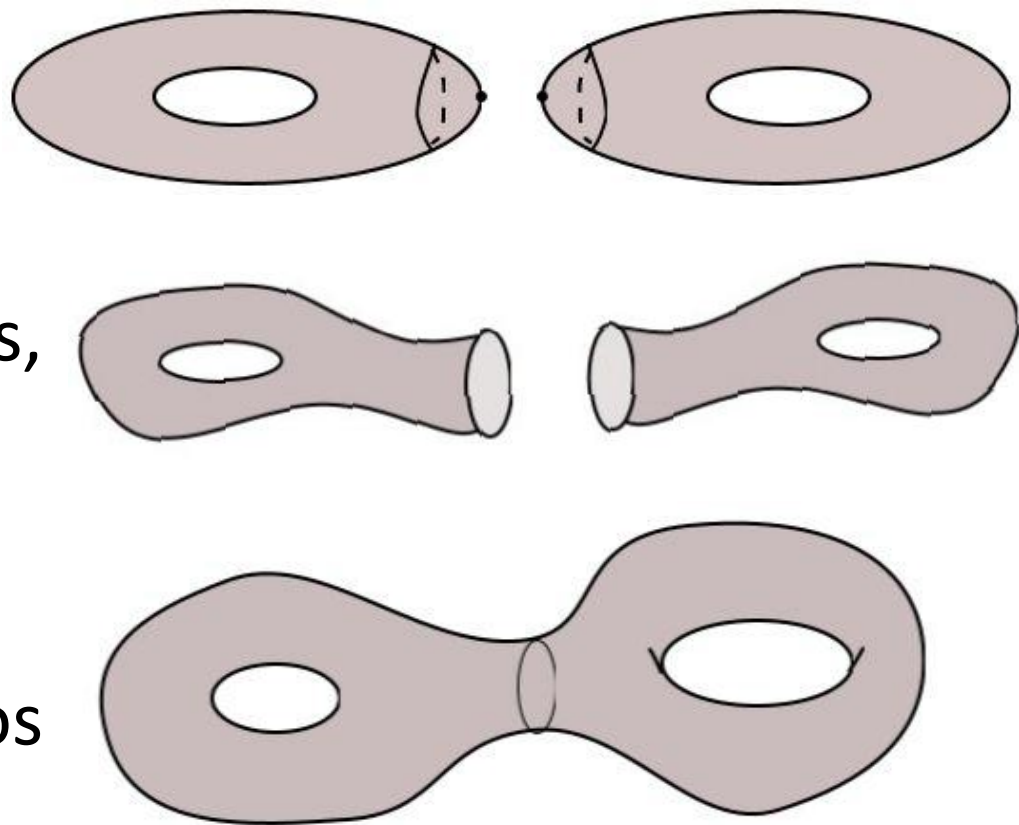
PLANO PROYECTIVO \mathbb{P}^2

Identificamos $(0,y) \sim (1,1-y)$ y $(x,0) \sim (1-x,1)$, donde $0 < x,y < 1$. Con la primera identificación se obtiene una banda de Möbius, y la siguiente recuerda al de la botella de Klein. Esto es difícil de visualizar ya que el plano proyectivo no puede representarse en \mathbb{R}^3 , habría que hacerlo en \mathbb{R}^4 para verlo sin cortes.



SUMA CONEXA DE SUPERFICIES

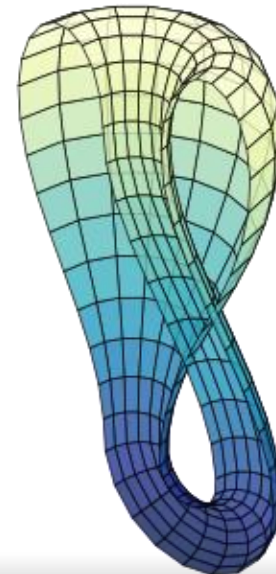
Para definir más superficies podemos seguir pegando lados en polígonos más complejos, pero es más útil definir una forma de “sumar” superficies como se aprecia en la suma de dos toros.



ORIENTABILIDAD

Lema.- (Criterio de no orientabilidad)

Si una superficie contiene el interior de una banda de Möbius entonces es no orientable.



TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

Proposición.-

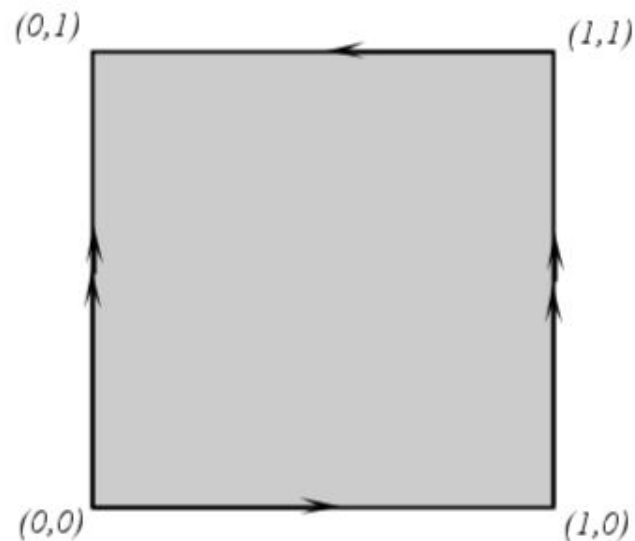
Sea S una superficie compacta, conexa y sin borde. Entonces S es homeomorfa a alguna de las siguientes superficies:

- Esfera S^2 .
- Suma conexa de toros $T \# \dots \# T$.
- Suma conexa de planos proyectivos $P_{\mathbb{R}^2} \# \dots \# P_{\mathbb{R}^2}$.

CARACTERÍSTICA DE EULER

Dada S una superficie con una presentación P dada, se define la característica de Euler de P como $\chi(P)=v-e+f$, donde f es el número de caras, e el de aristas y v el de vértices.

La botella de Klein, con la presentación $P=ABAB^{-1}$, verifica $\chi(P)=1-2+1=0$



CARACTERÍSTICA DE EULER

Se puede probar que $\chi(P)$ es un invariante de la superficie, es decir, no depende de la presentación dada para S . Por ello se denotará $\chi(S)$ y se llamará característica de Euler de la superficie.

Además:

- Si S homeomorfa a una esfera, $\chi(S)=2$.
- Si S homeomorfa a n -toros, $\chi(S)= 2-2n$.
- Si S homeomorfa a n -planos proyectivos, $\chi(S)=2-n$.

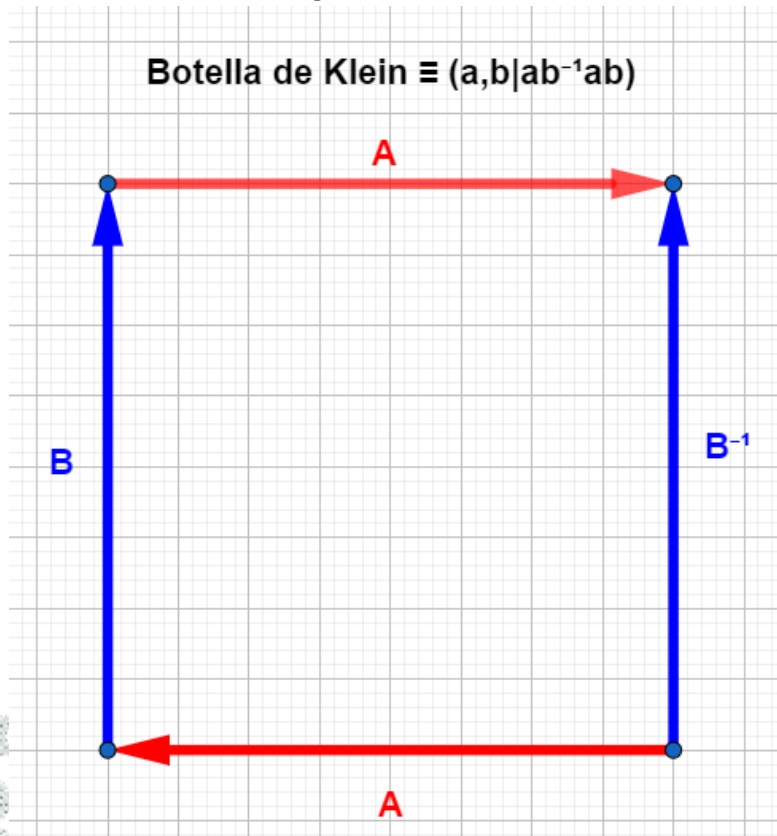
CARACTERÍSTICA DE EULER

Cuestión

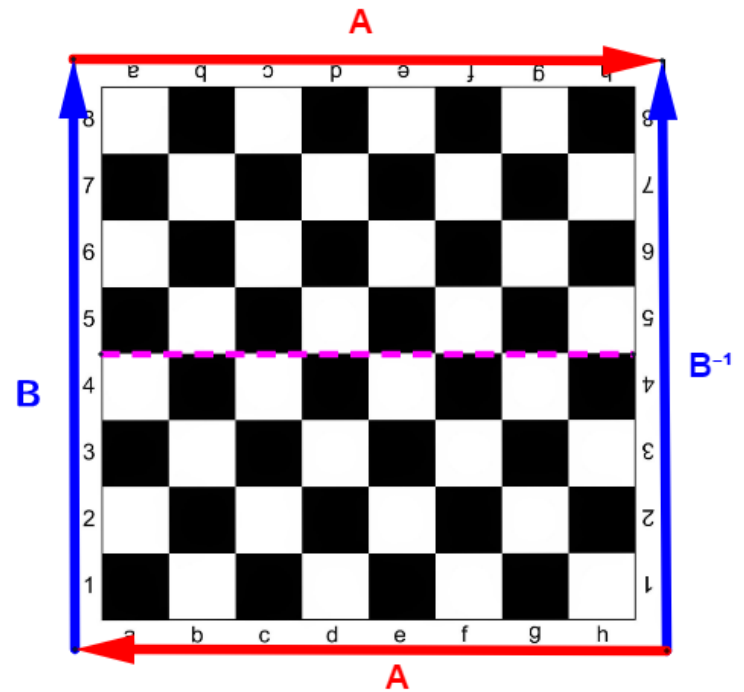
¿Podría suceder que para dos naturales m y n distintos, la suma conexa de n -toros fuera homeomorfa a la suma conexa de m -toros?

LAS DAMAS

Superficie

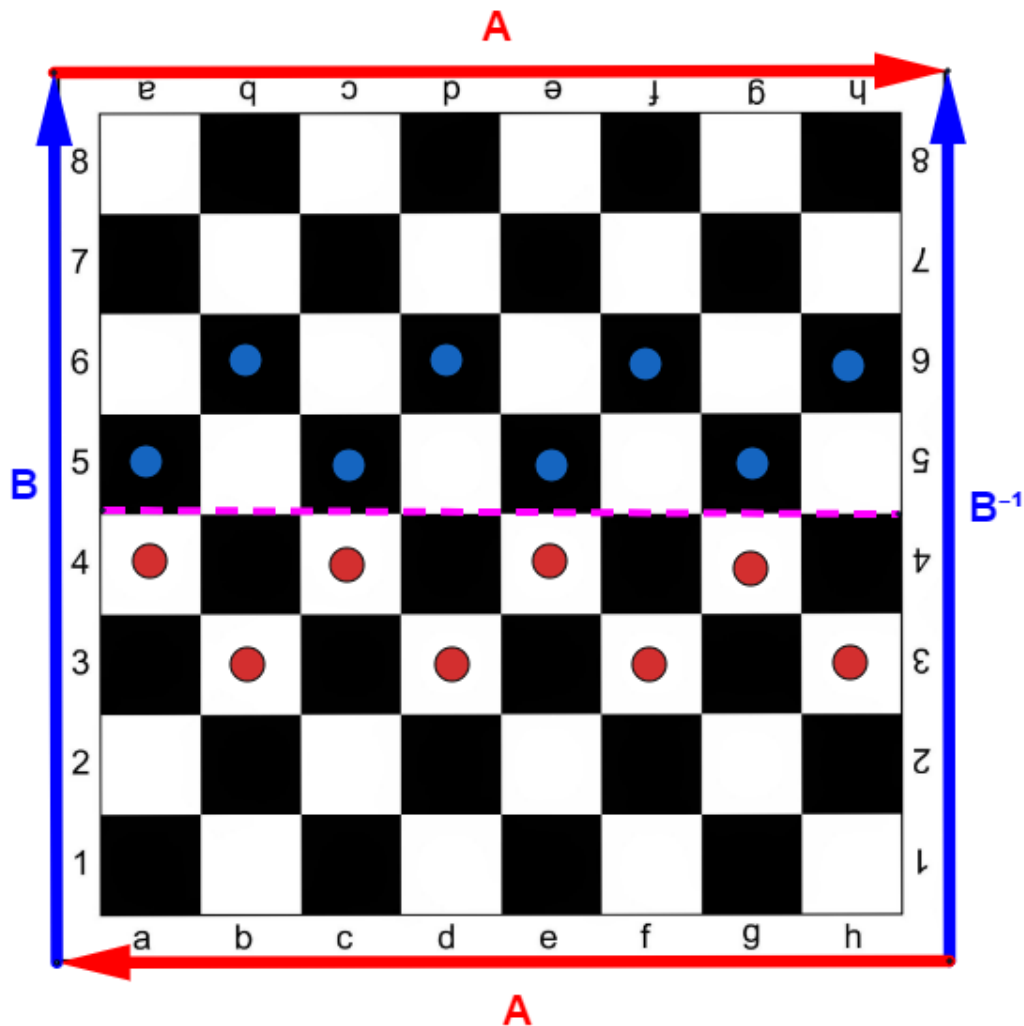


Tablero

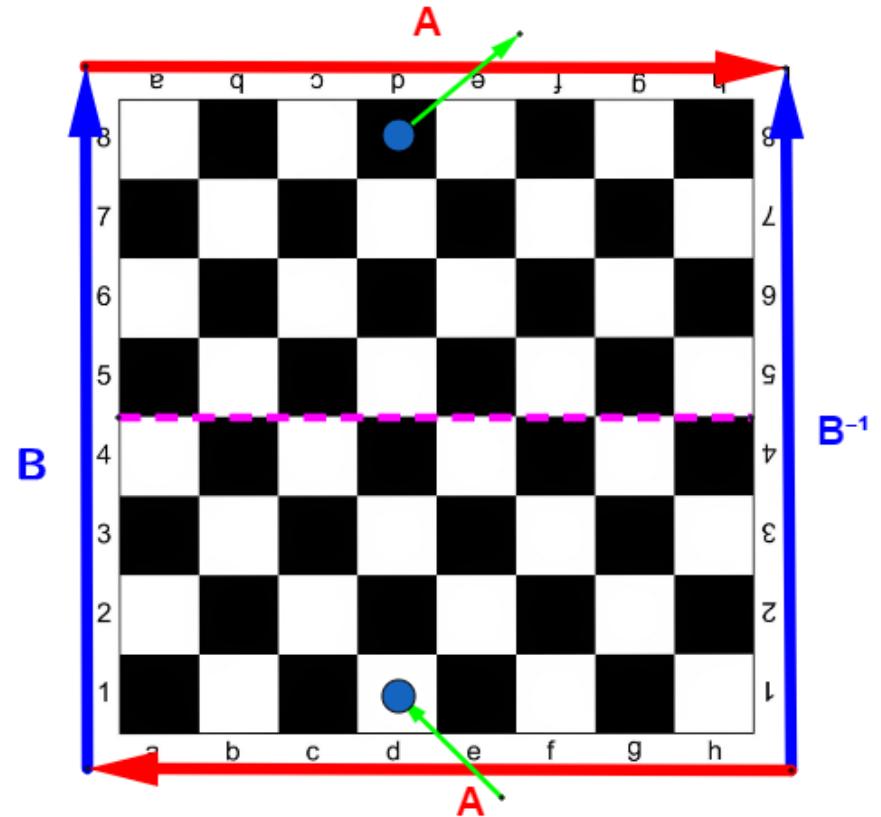
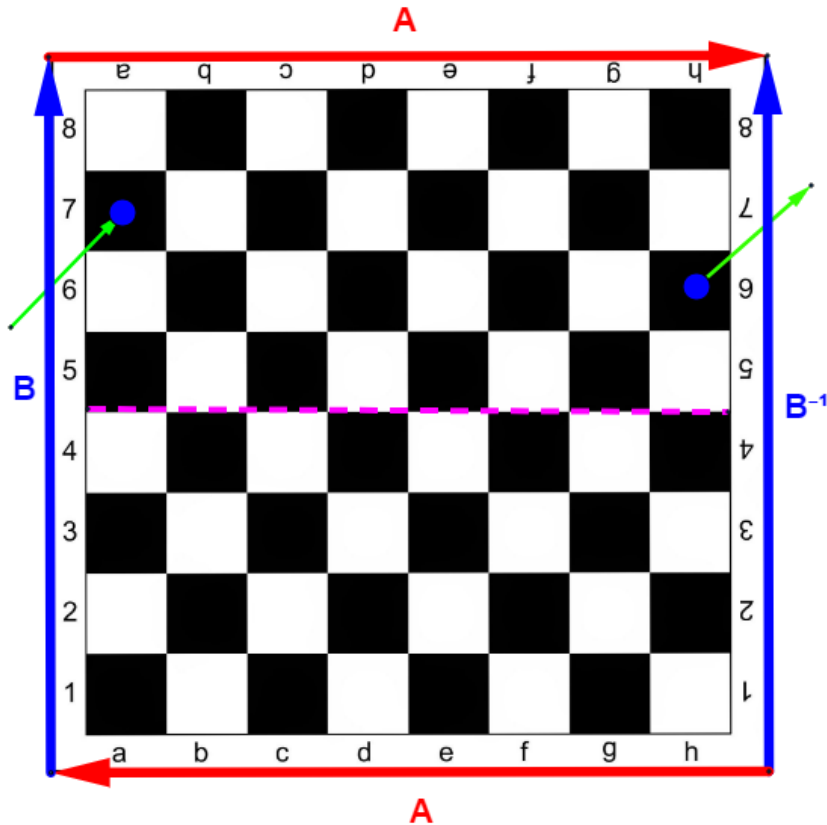


REGLAS Y PROPIEDADES

- Las fichas del “campo” superior se situarán en las casillas negras y las del inferior en las blancas.
- En la parte central del tablero situamos una frontera, la cuál no se puede traspasar.
- Las fichas empiezan la partida en medio del tablero y sólo pueden ir en dirección opuesta a la frontera.

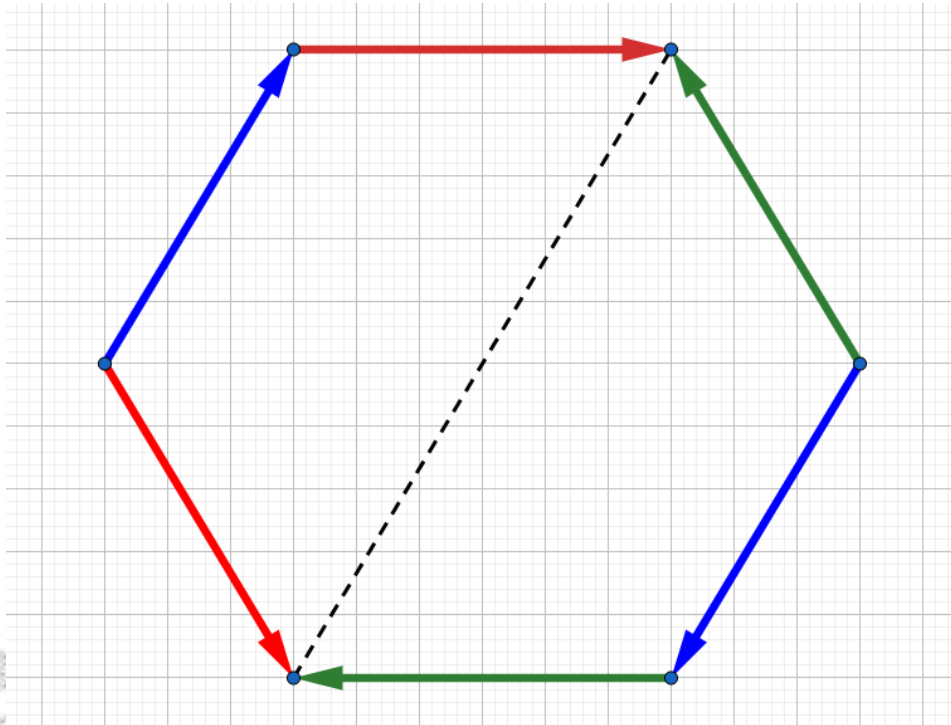


MOVIMIENTOS

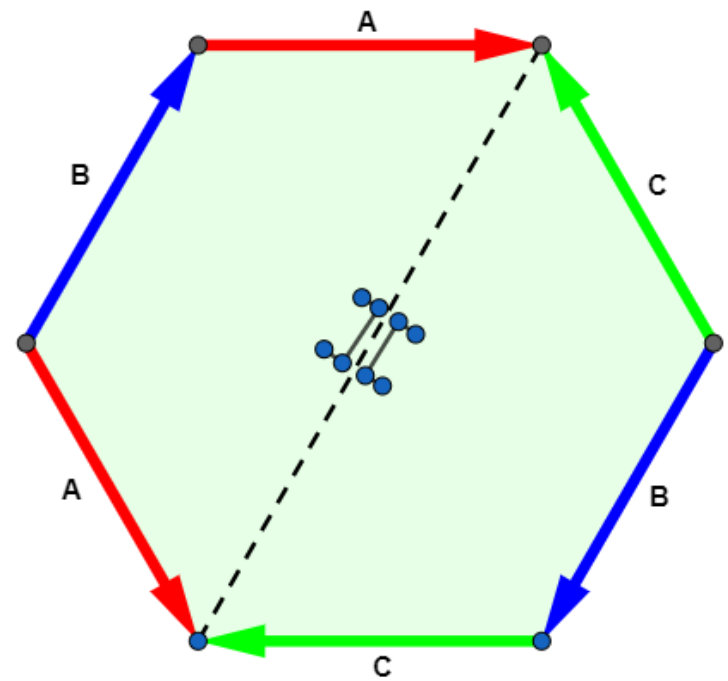


FÚTBOL

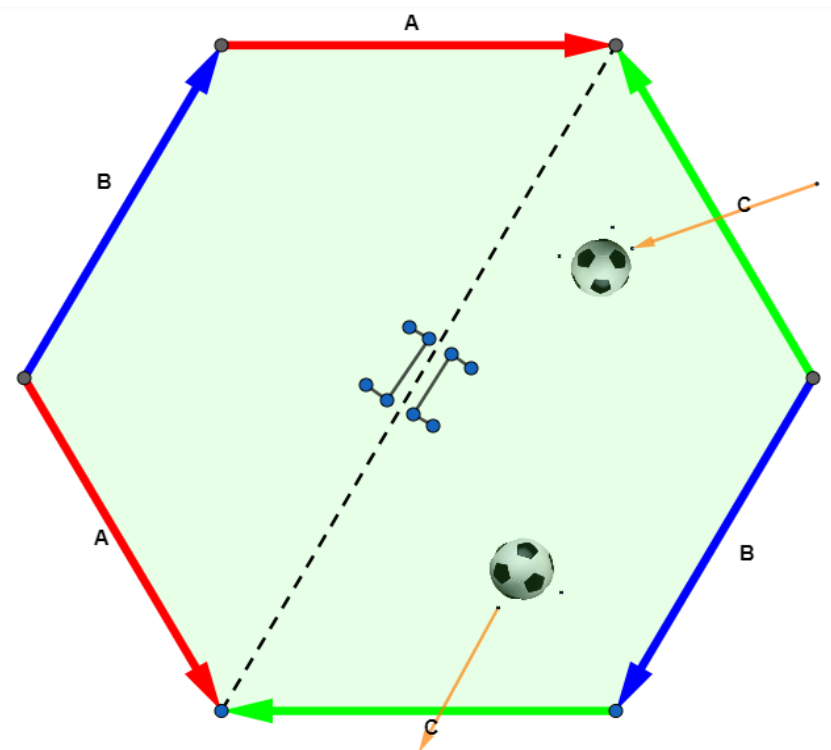
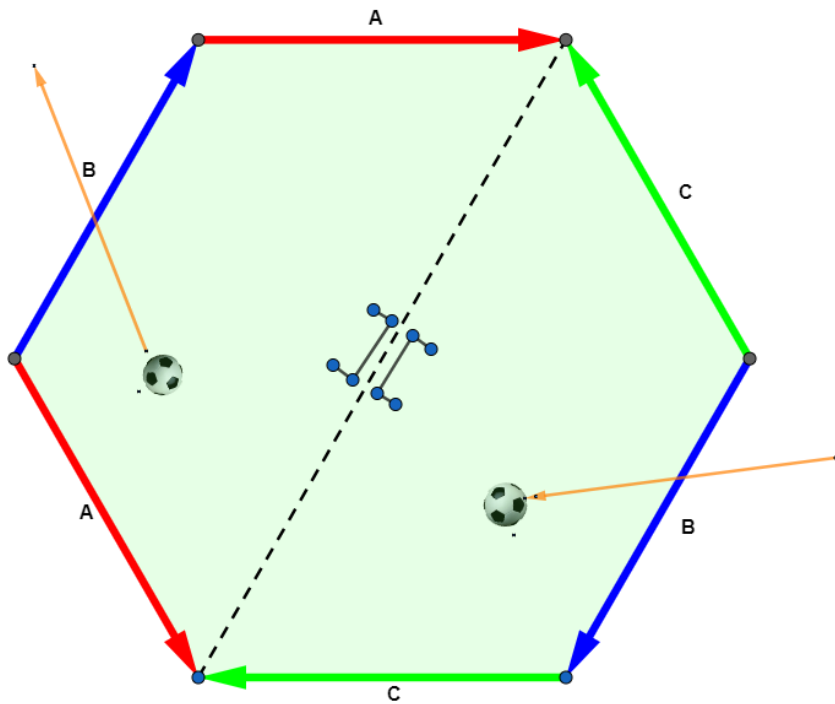
Superficie



Terreno de juego



MOVIMIENTOS



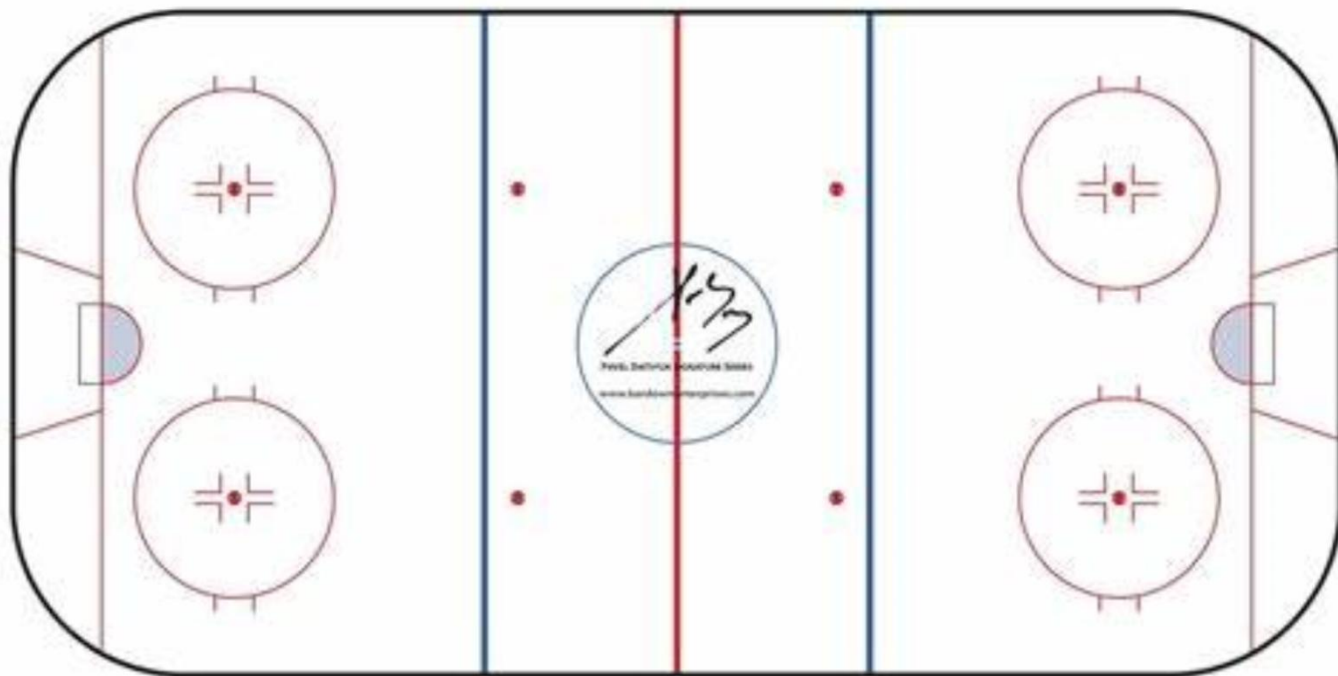
AIR HOCKEY

REGLAS DEL JUEGO:

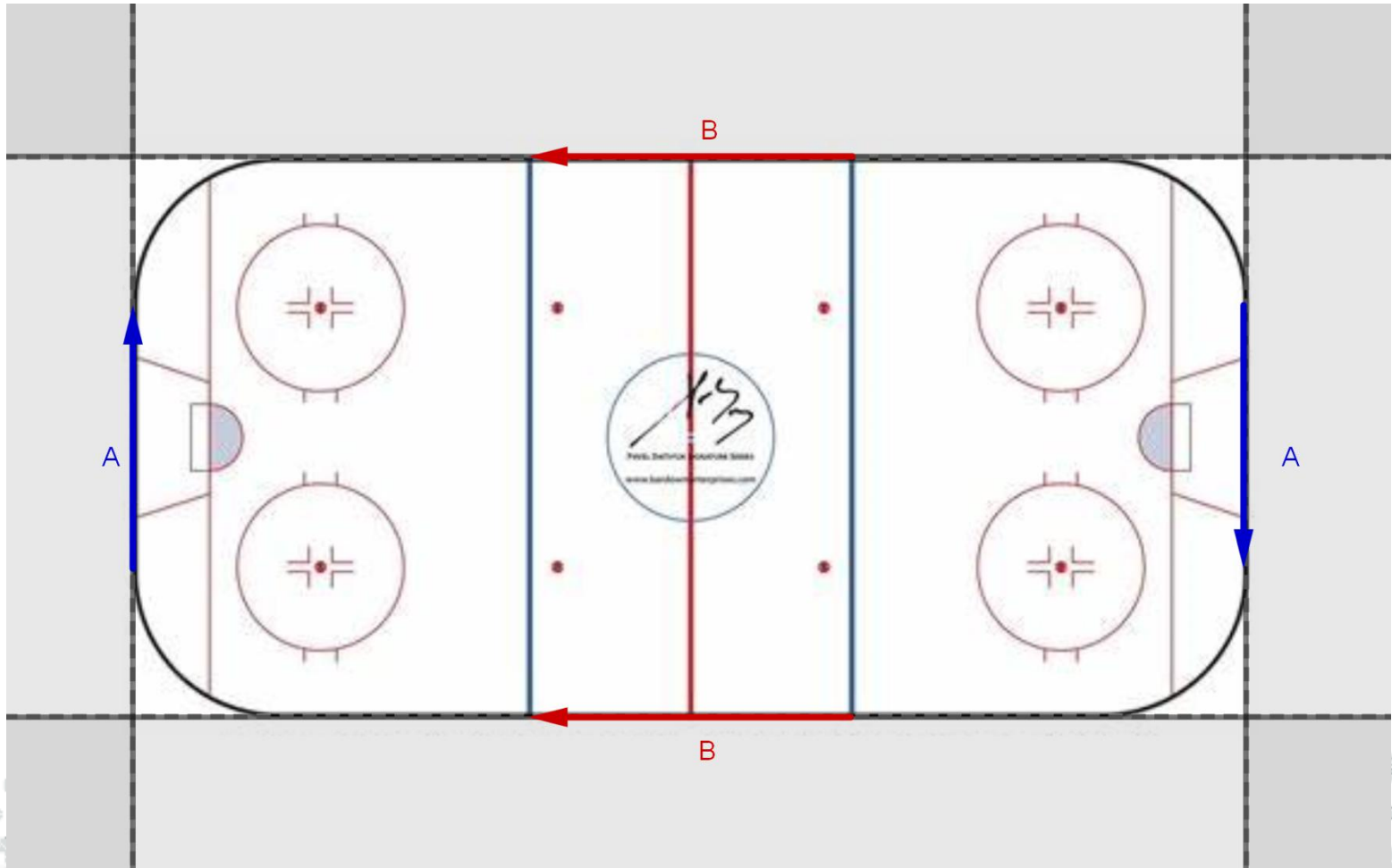
- Individuales o dobles.
- El saque inicial se determina por sorteo.
- Se juega con un mazo por jugador y un disco.
- Un gol, un punto.
- Tras una anotación, saca el jugador que ha recibido el tanto.
- Gana el jugador o pareja que anote primero 7 puntos.



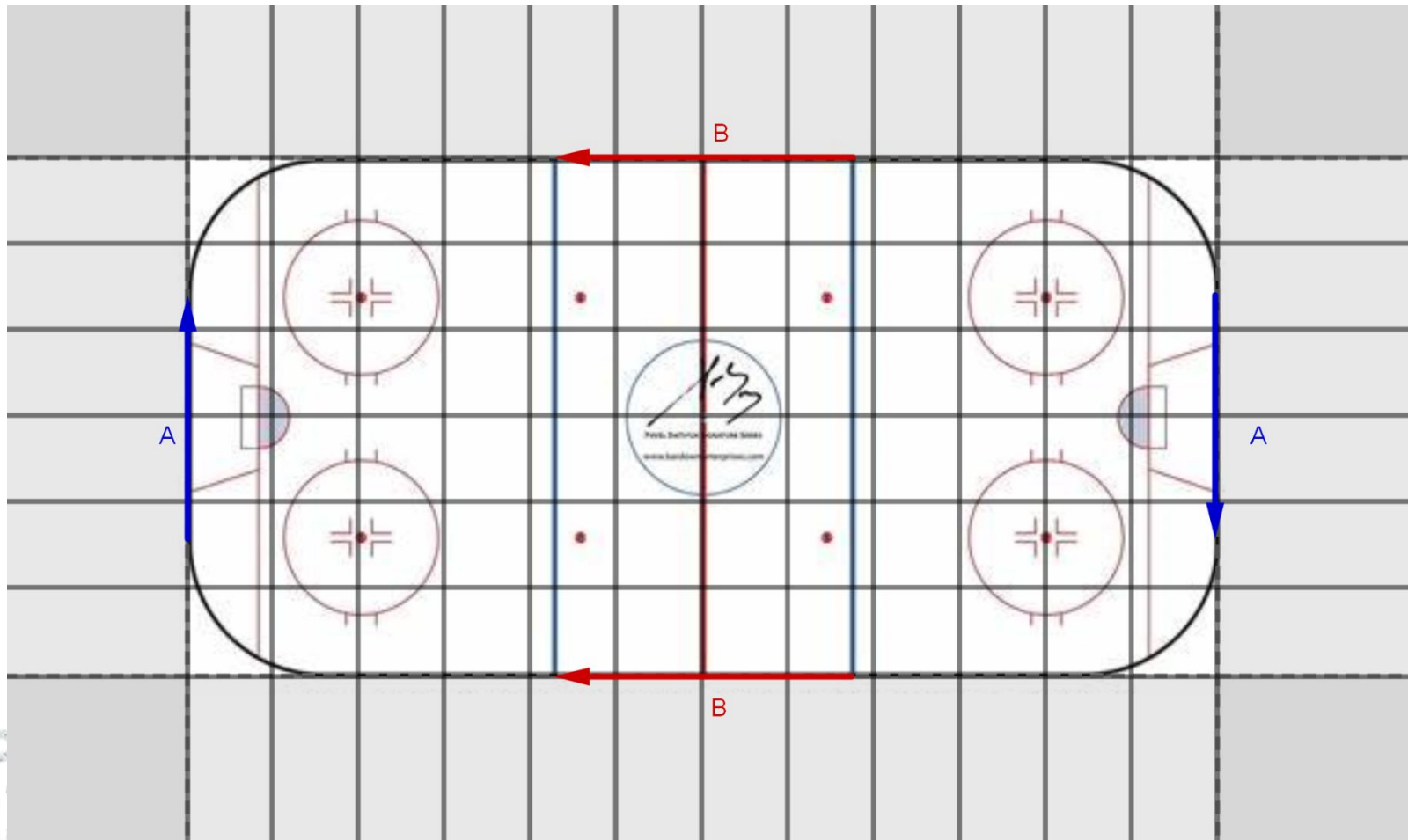
TABLERO



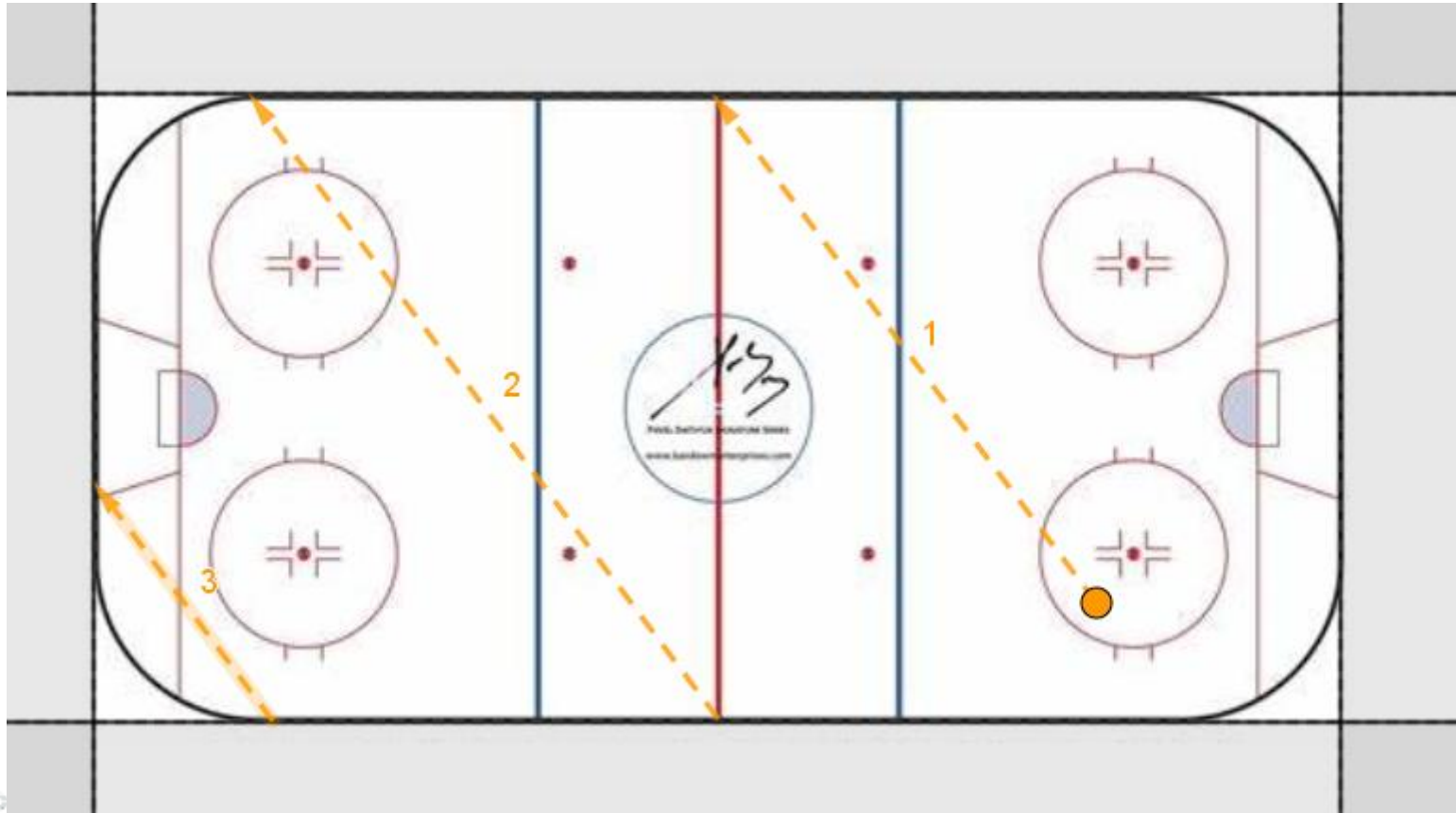
EN UNA BOTELLA DE KLEIN



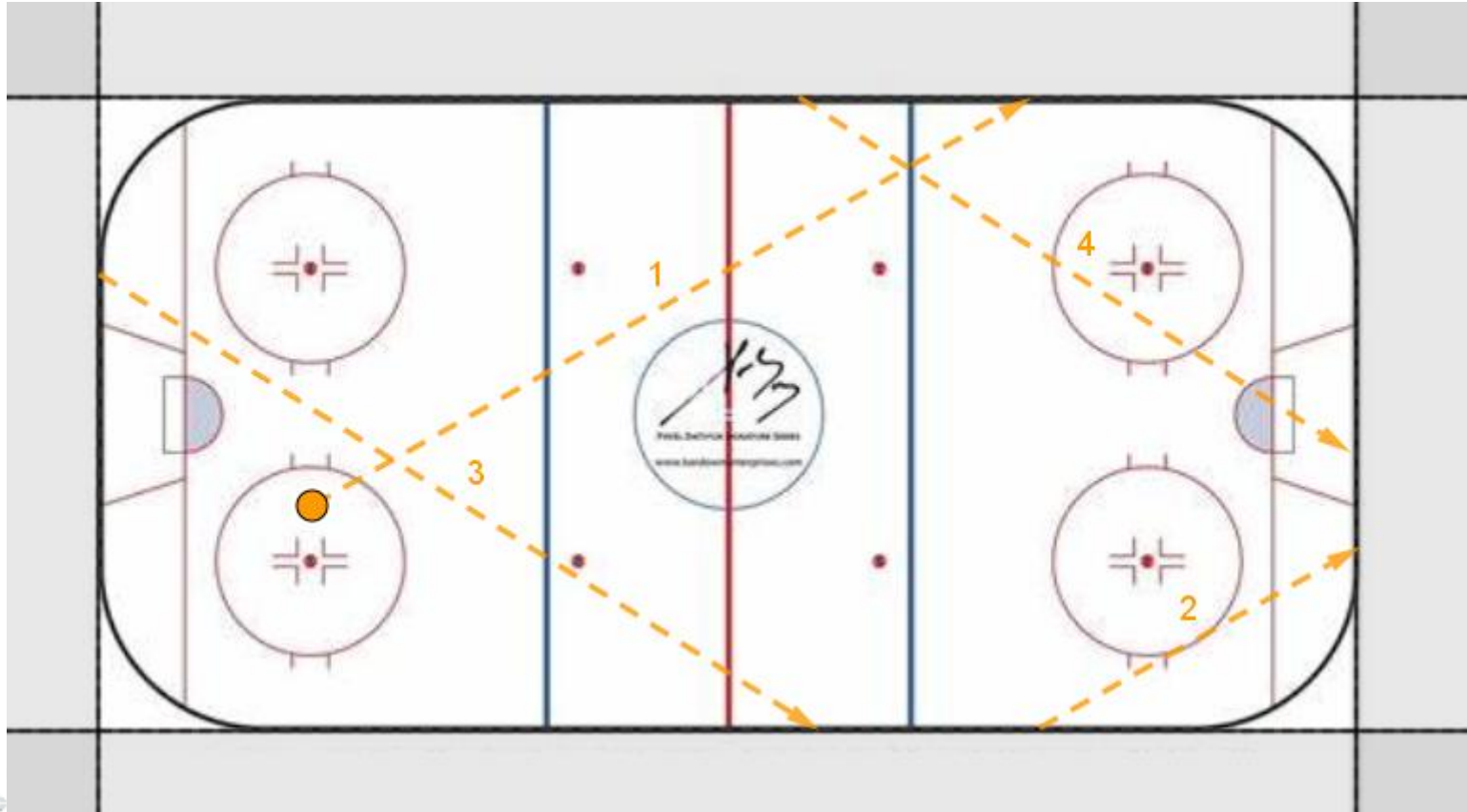
EN UNA BOTELLA DE KLEIN



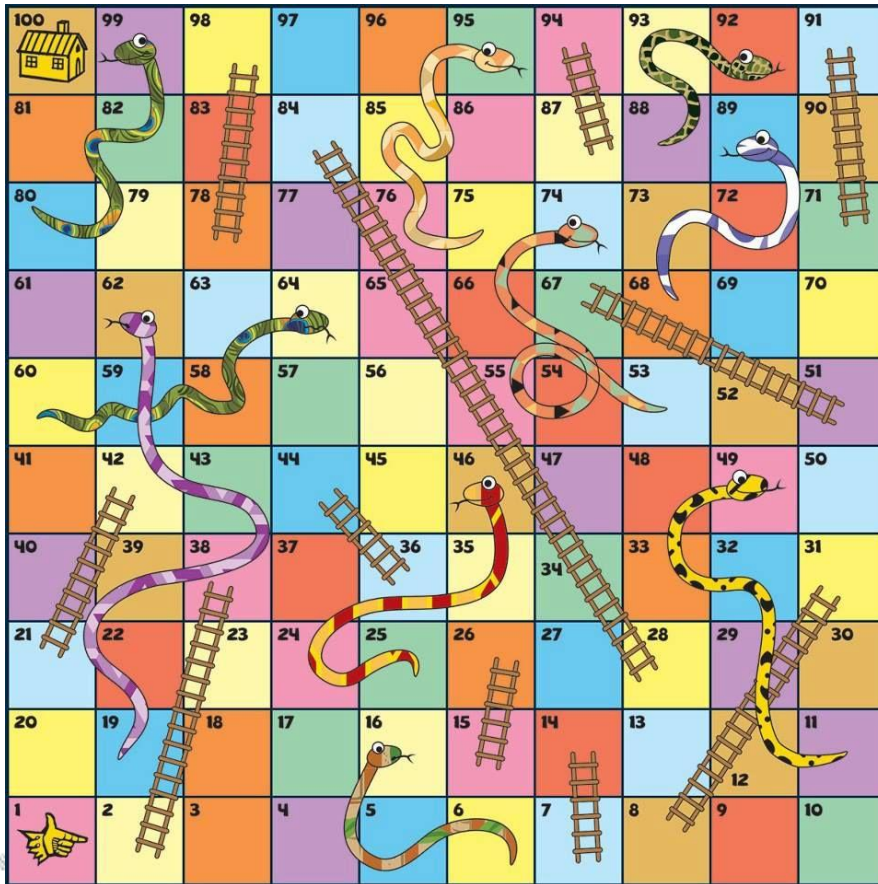
ESTRATEGIAS



ESTRATEGIAS



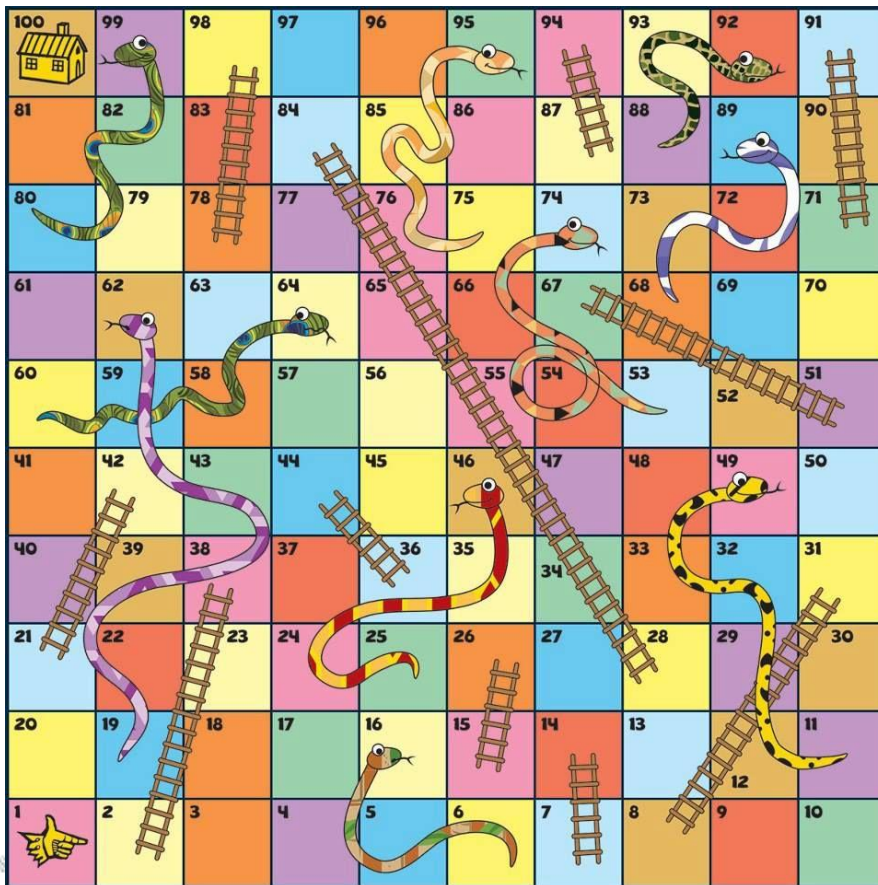
SERPIENTES Y ESCALERAS



REGLAS DEL JUEGO:

- Dos o más jugadores.
- Se juega con un dado y una ficha por jugador de colores distinguibles.
- El orden de salida se determina por sorteo.
- En cada turno se tira el dado y se avanza en función del resultado obtenido.
- Obtener un 6 otorga un turno extra.

SERPIENTES Y ESCALERAS



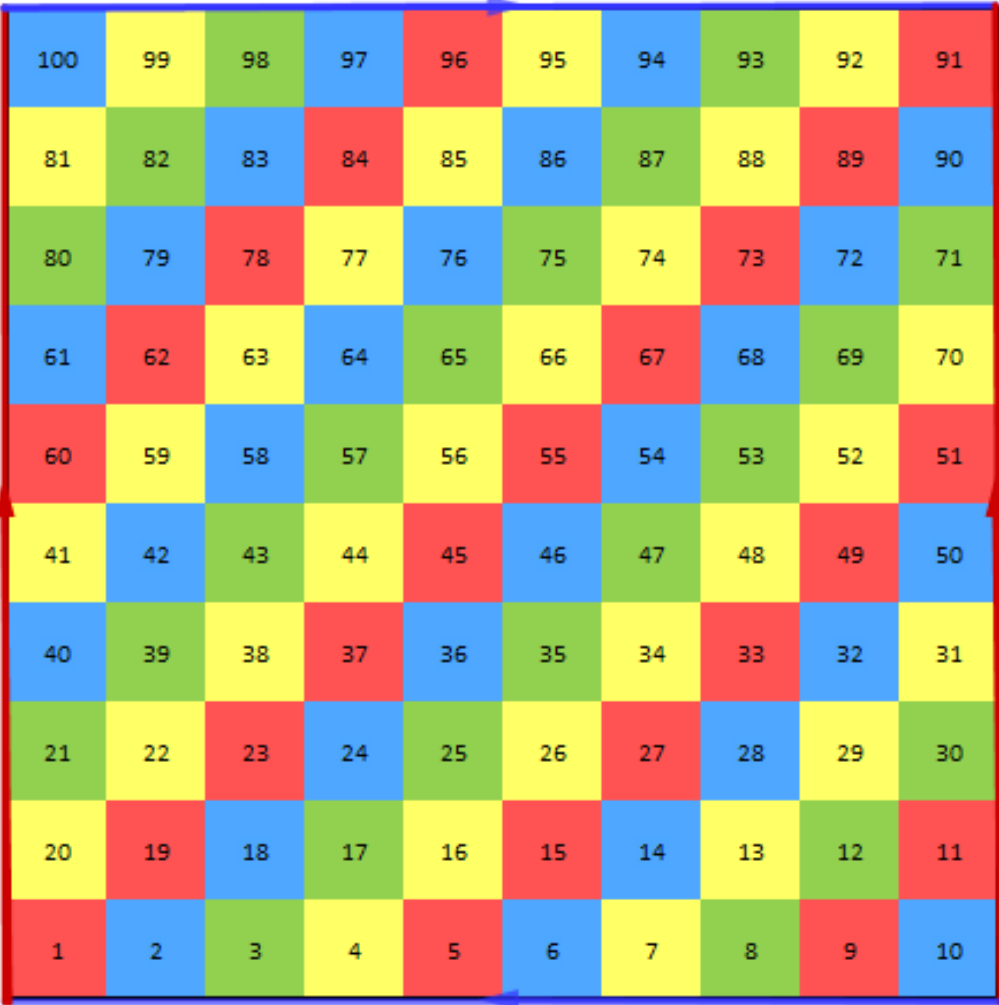
REGLAS DEL JUEGO:

- Al caer en una casilla que sea base de escalera “se sube” por ella hasta su casilla de destino.
- Al caer en una casilla que sea cola de serpiente “se baja” por ella hasta la casilla de la cabeza.
- Gana el jugador que alcance exactamente la casilla 100, si un jugador se pasa del 100 retrocede el número excedido de casillas.

TABLERO BASE

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

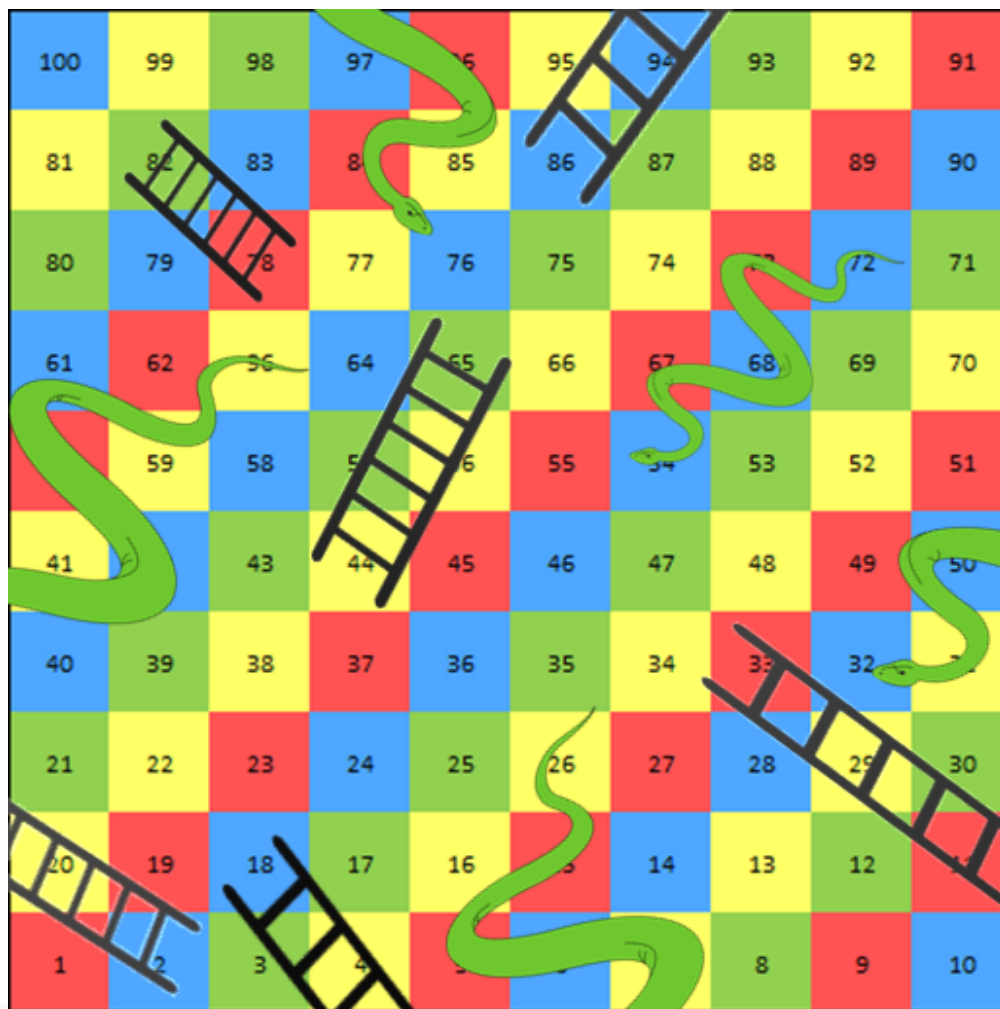
EN UNA BOTELLA DE KLEIN



A 10x10 grid representing a Klein bottle. The grid contains numbers from 1 to 100, arranged in a boustrophedon pattern. The colors of the cells repeat every 4 columns and 2 rows. The grid is bordered by a red line. Blue arrows labeled 'A' point to the top and bottom edges, and red arrows labeled 'B' point to the left and right edges, indicating the identification of opposite edges.

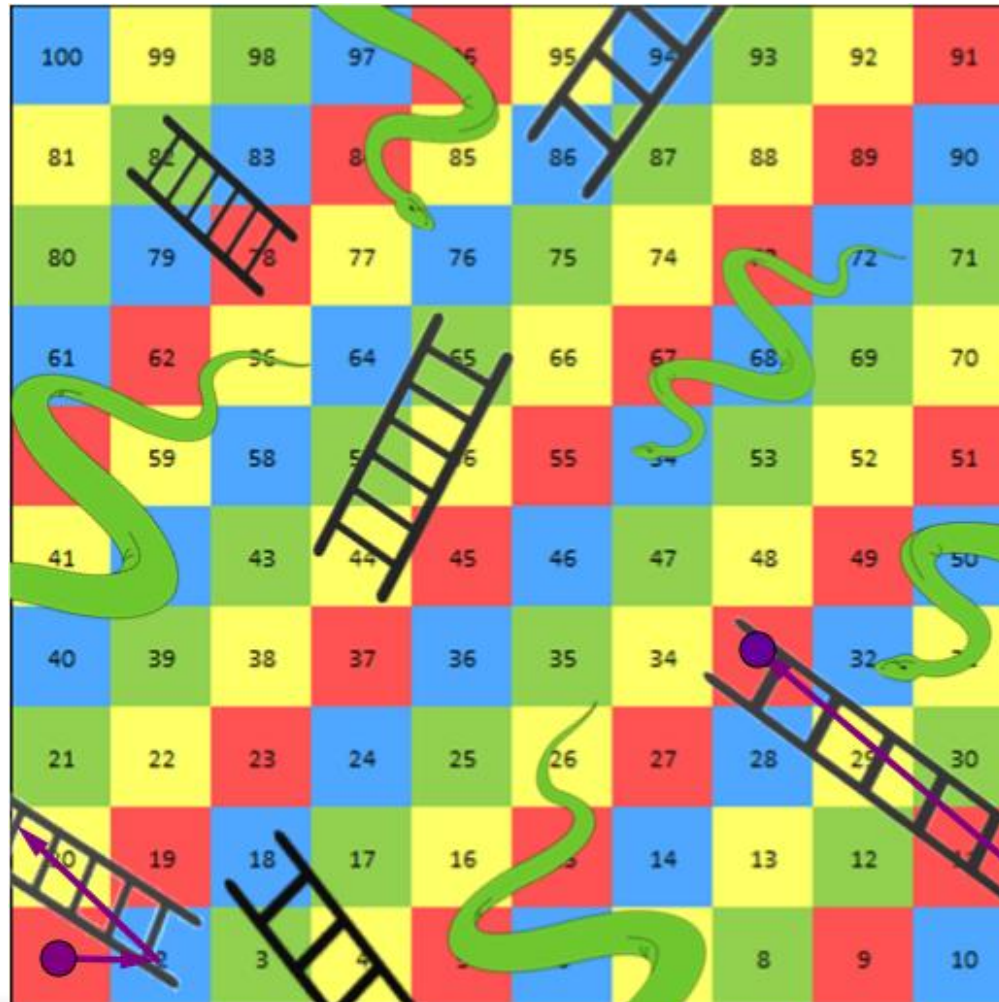
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

NUESTRO TABLERO

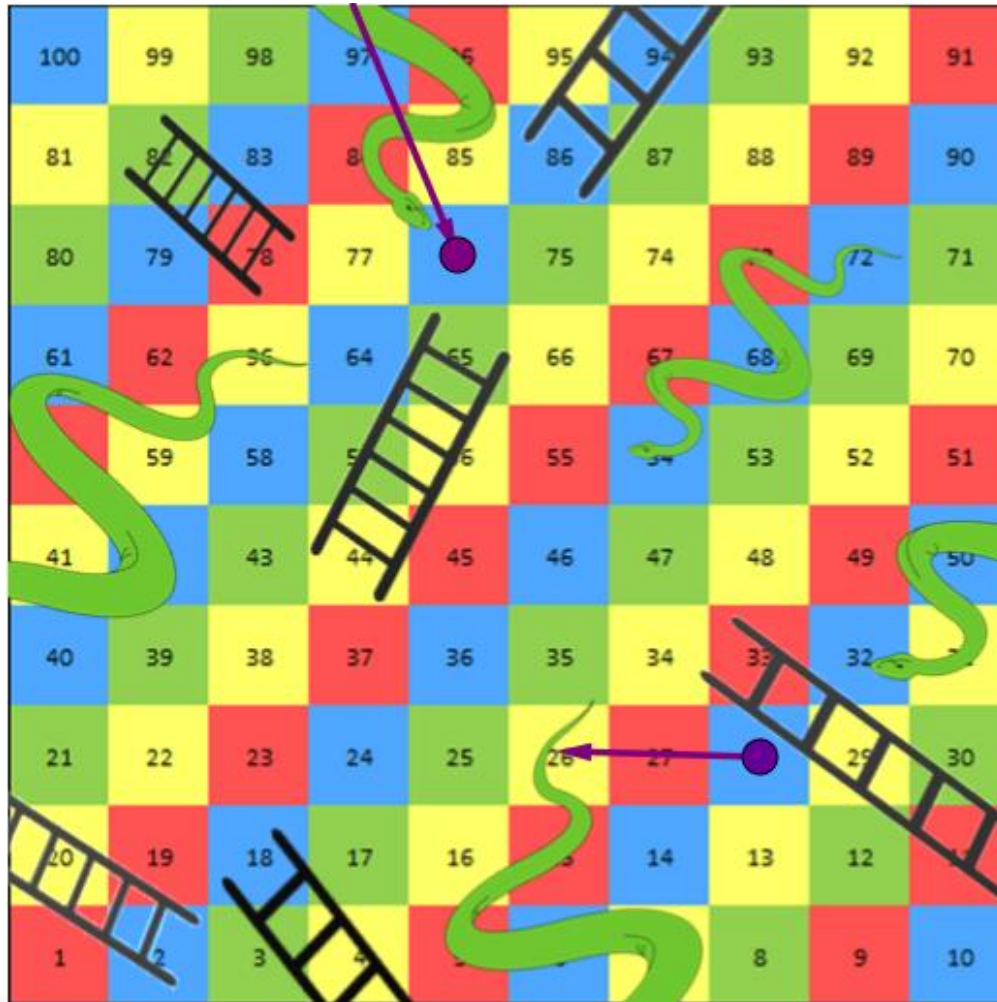


ESTRATEGIAS

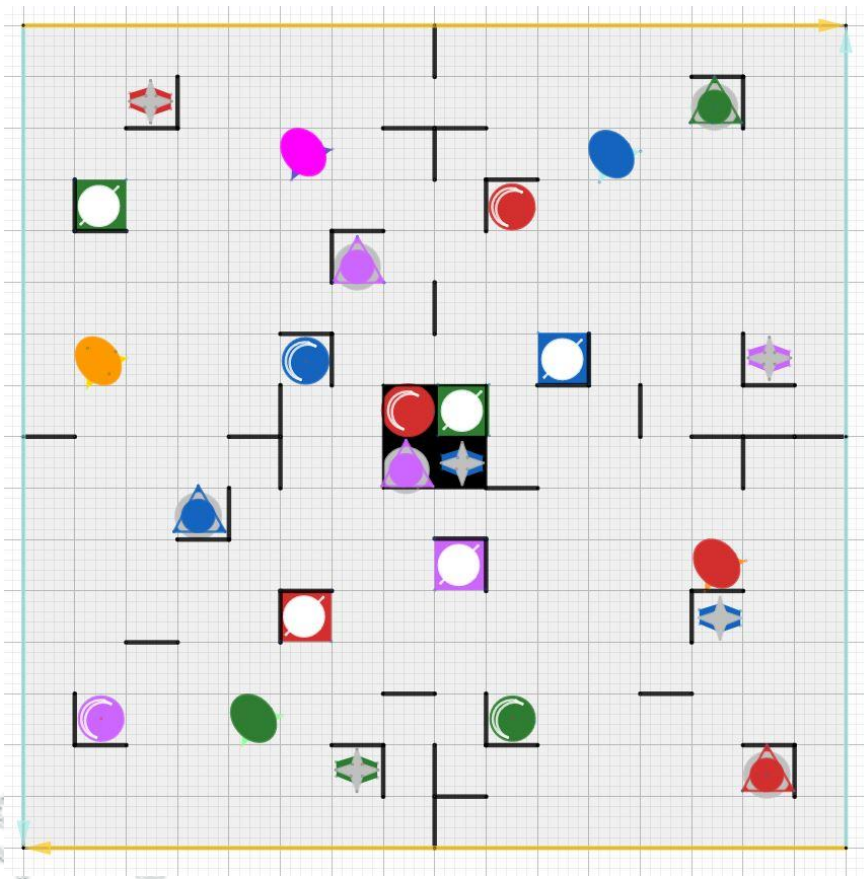
A 10x10 board game grid, likely for Snakes and Ladders. The grid is numbered 1 to 100 in a boustrophedon pattern, starting from the bottom-left (1) and ending at the top-right (100). The squares are colored in a repeating 2x2 pattern of blue, yellow, green, and red. The grid is decorated with several snakes and ladders. Snakes are green and connect higher numbers to lower numbers: one from 96 to 84, one from 85 to 73, one from 68 to 54, one from 50 to 32, and one from 10 to 4. Ladders are black and connect lower numbers to higher numbers: one from 4 to 34, one from 14 to 26, one from 28 to 84, one from 32 to 68, one from 44 to 64, one from 64 to 80, one from 80 to 96, and one from 96 to 100. A purple ball is shown on the square numbered 32. The grid is surrounded by decorative elements: a cluster of grey circles in the top-left, a cluster of grey circles in the top-right, and a cluster of grey circles in the bottom-left.



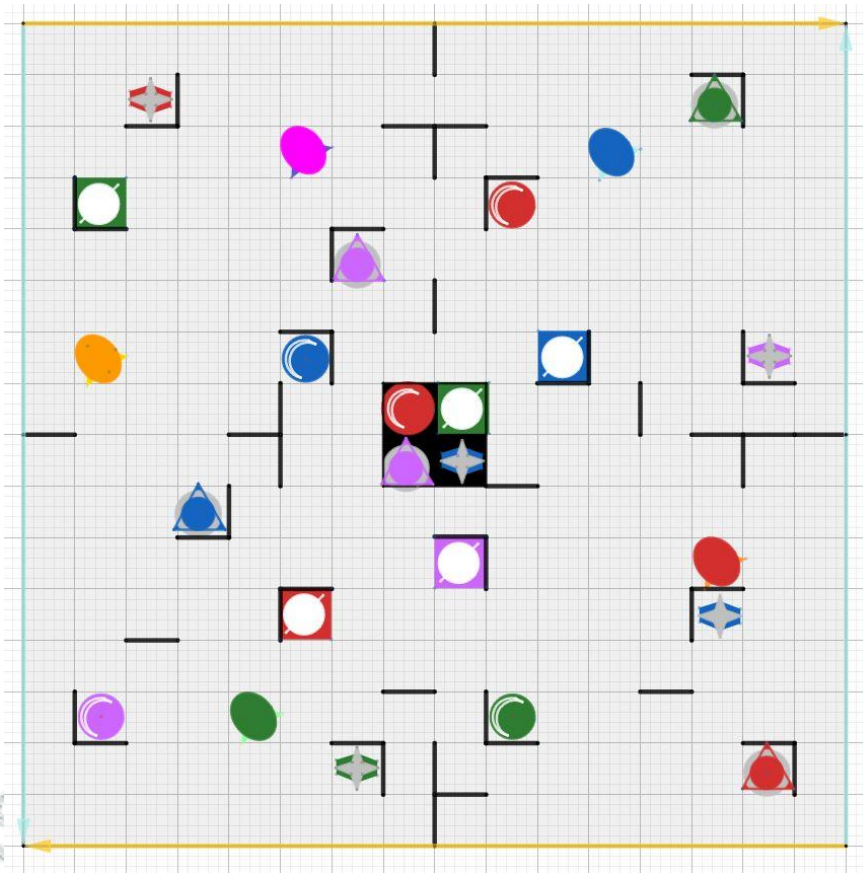
ESTRATEGIAS



RICOCHET



- Se elige aleatoriamente la casilla de comienzo de cada uno de los cuatro robots (el plateado no se utiliza en el juego estándar), colocando debajo de él su ficha de inicio. Estas casillas no pueden contener símbolos.
- Se mezclan las fichas de objetivo y se colocan boca abajo en una pila.

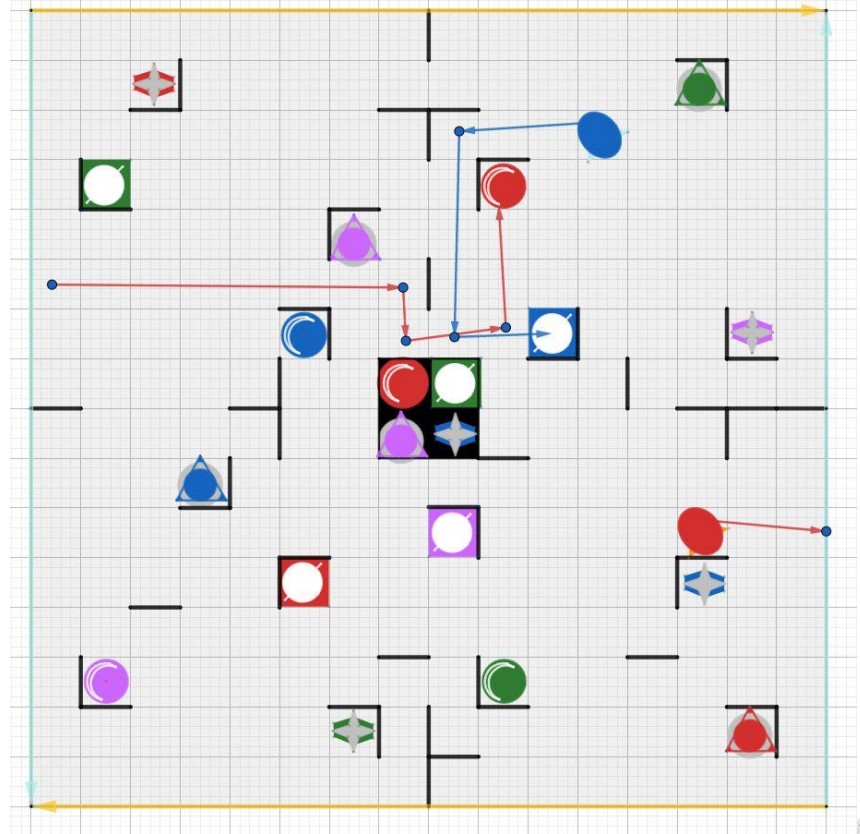


- Se elige aleatoriamente la casilla de comienzo de cada uno de los cuatro robots (el plateado no se utiliza en el juego estándar), colocando debajo de él su ficha de inicio. Estas casillas no pueden contener símbolos.
- Se mezclan las fichas de objetivo y se colocan boca abajo en una pila.

¿Cuál es el objetivo?

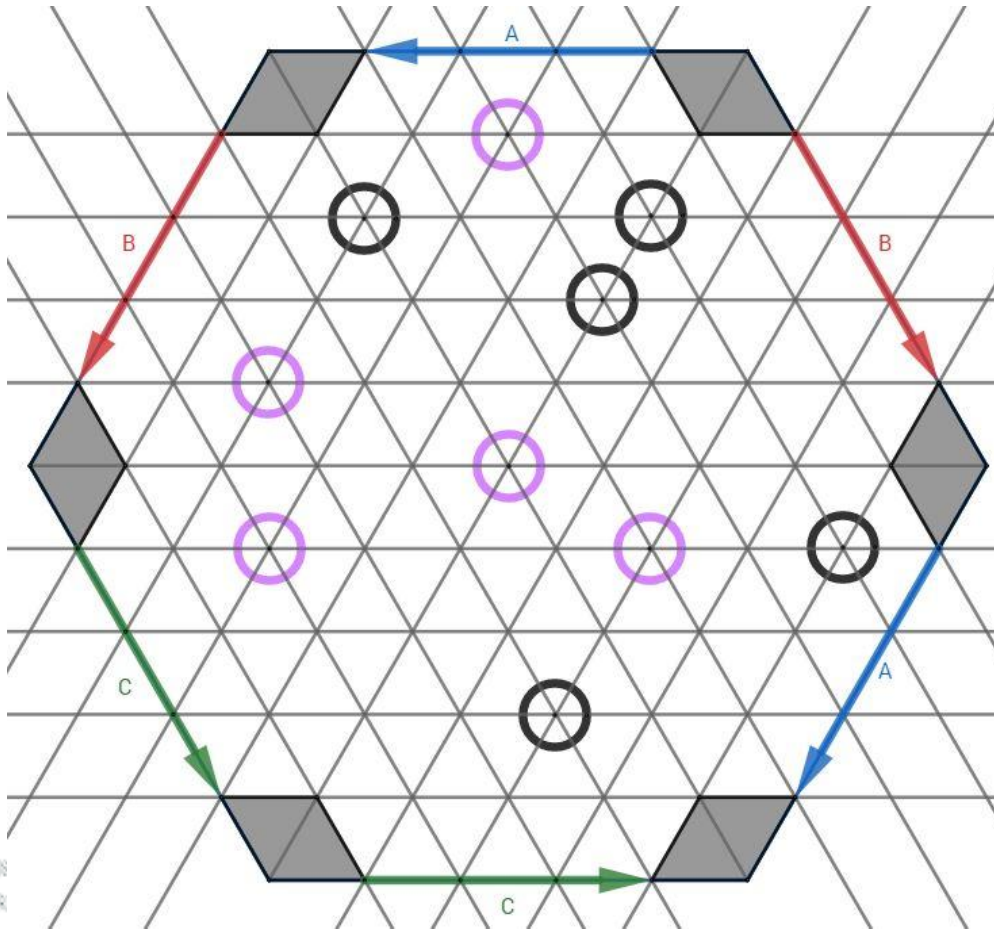
Al sacar una ficha aleatoria que mostrará una figura hay que llevar a la ficha del mismo color en el menor número de movimientos.

¿Cómo lo consigo?



Ahora un reto

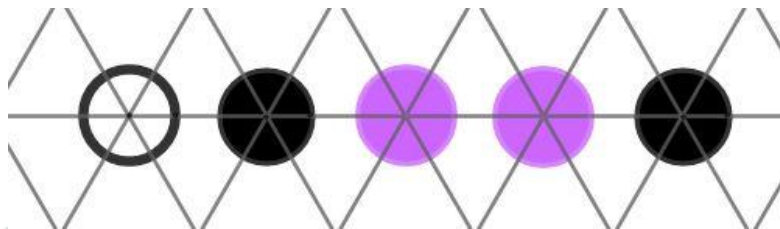
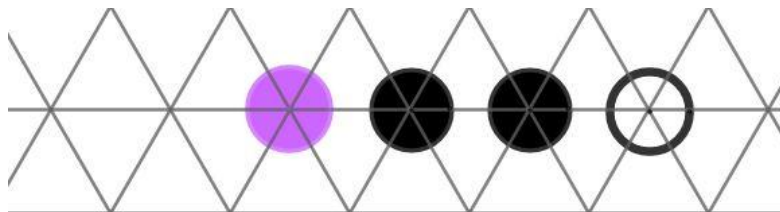
YINSH



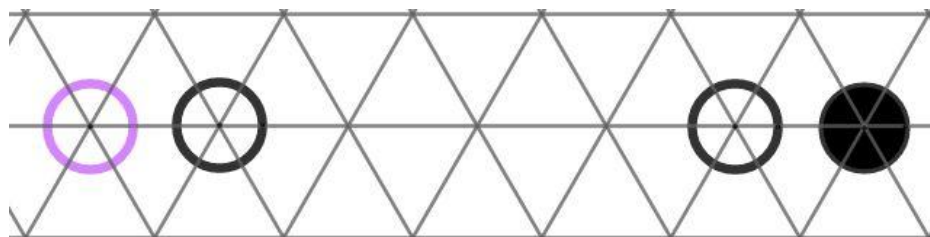
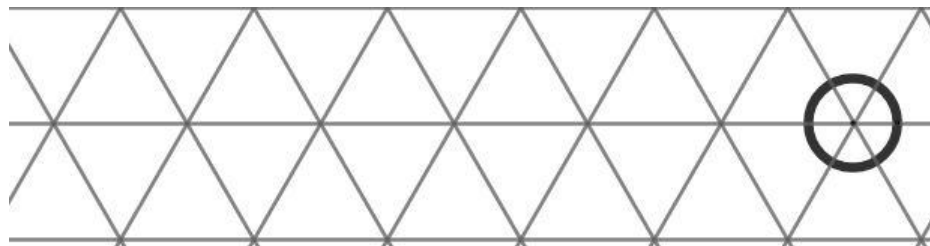
Por turnos se colocan las damas en las intersecciones que se deseen.

¿Cuál es el objetivo?

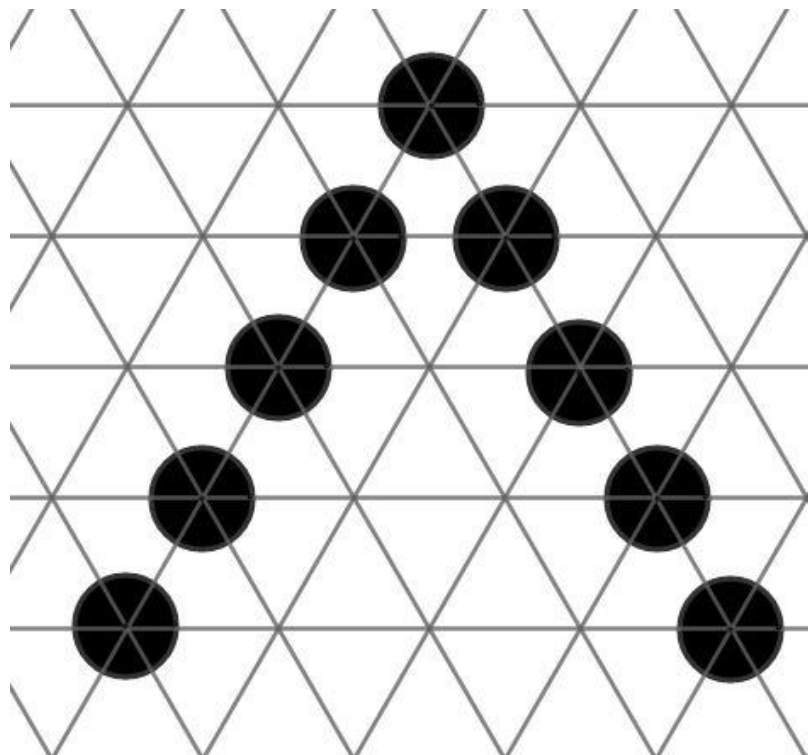
Realizar filas de 5 fichas seguidas en cualquier dirección.



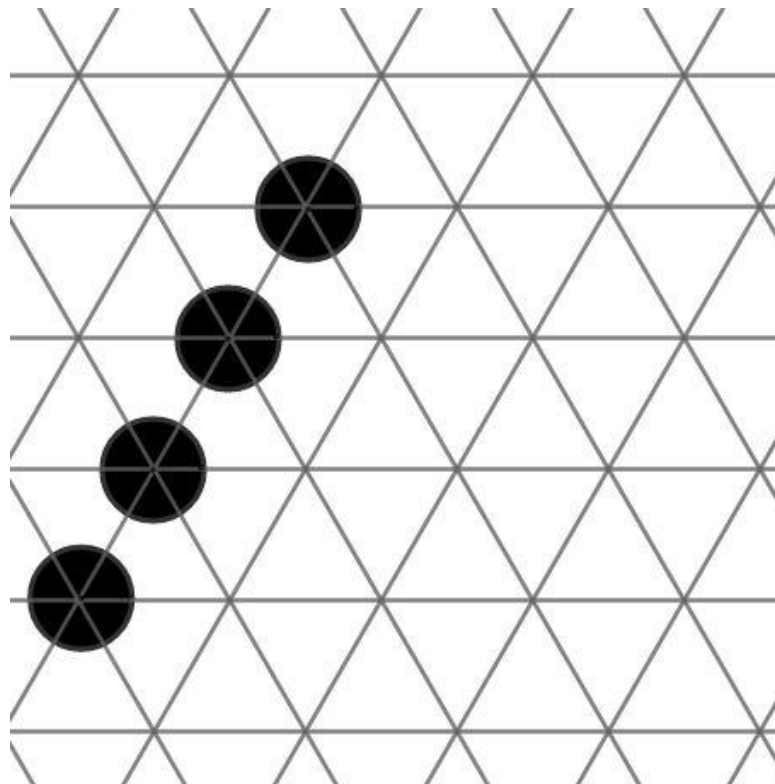
¿Cómo lo consigo?



Caso especial

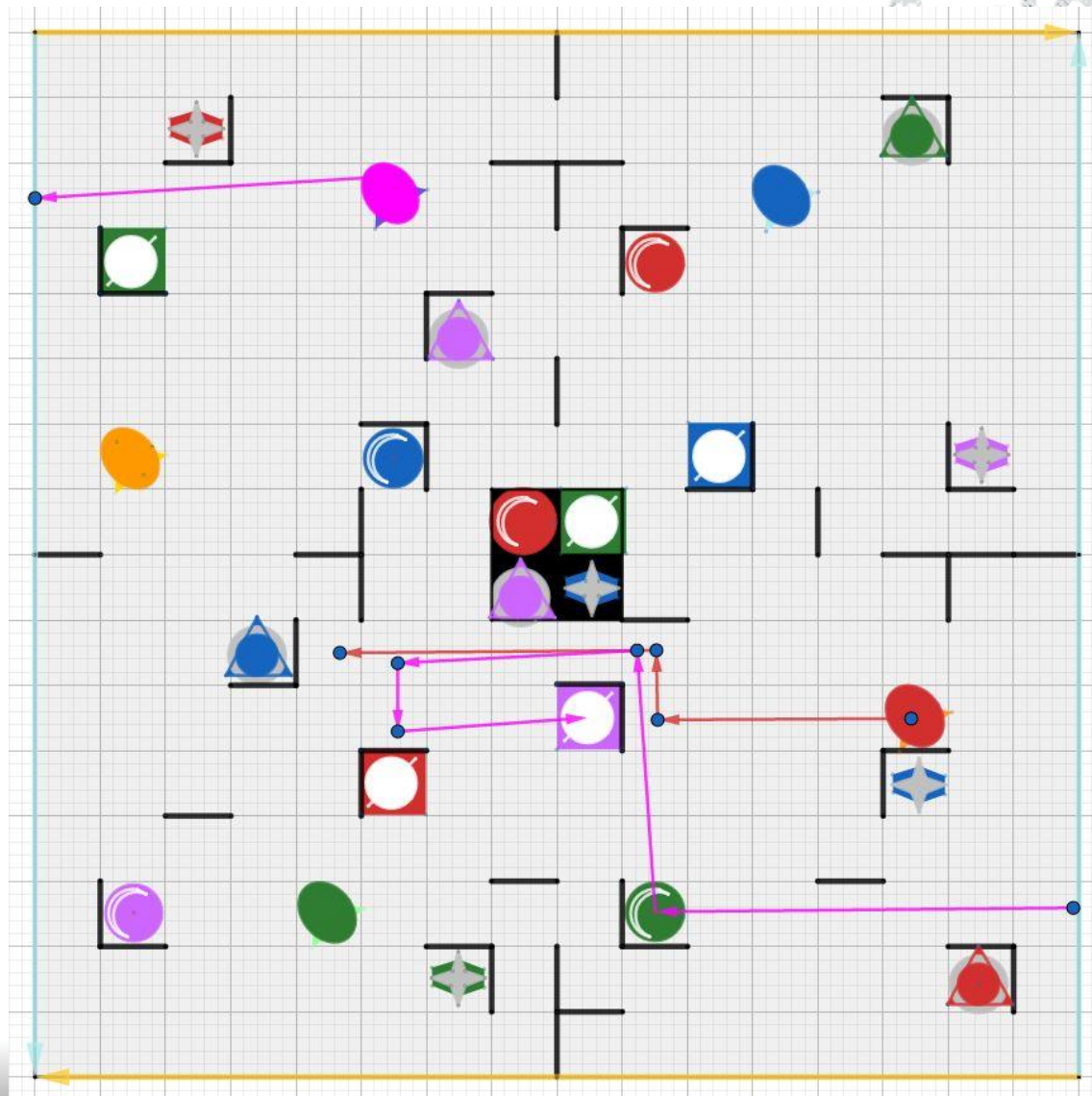


Solución



Solución al reto anterior

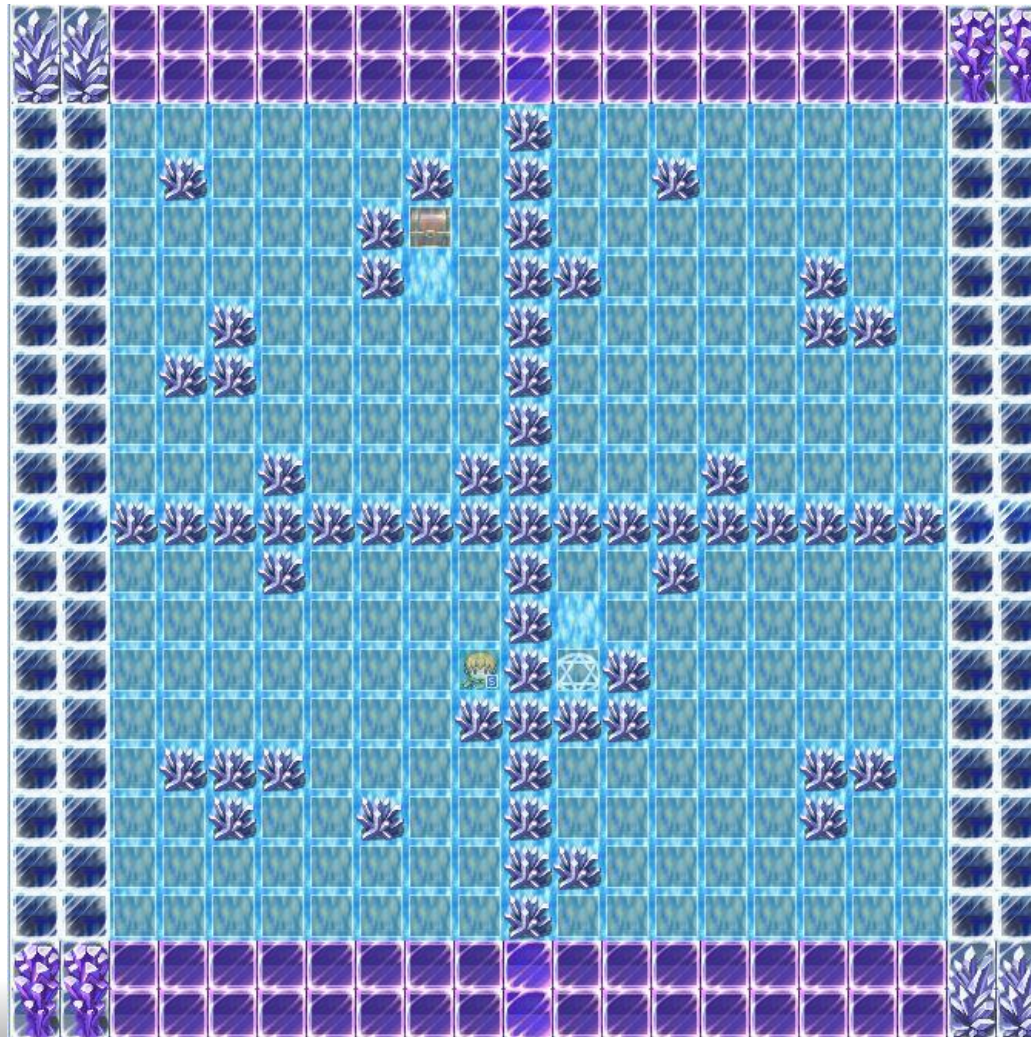
1. Movimiento de la ficha roja.
2. Movimiento de la ficha morada.



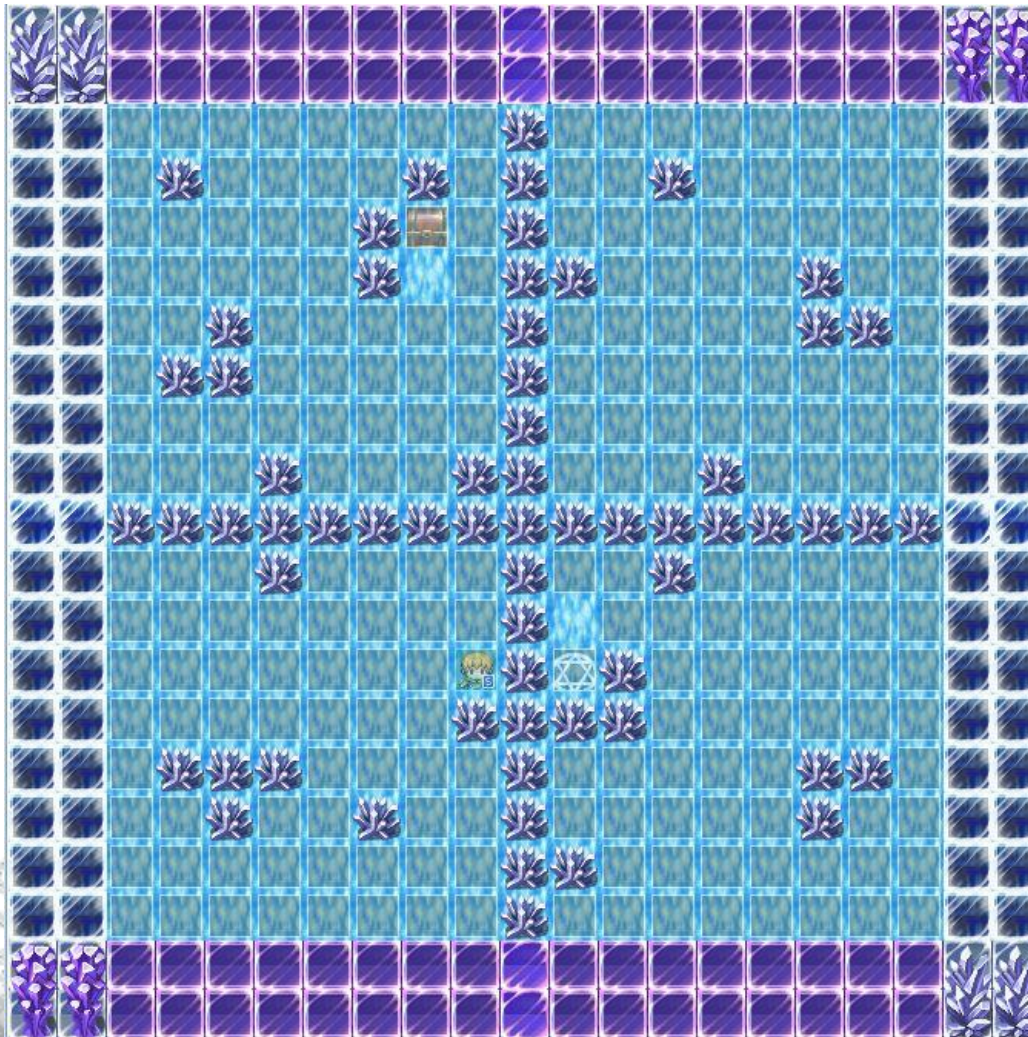
VIDEOJUEGOS



MAPA



SOLUCIÓN



TESORO:
izquierda, abajo,
izquierda, abajo,
derecha, abajo,
derecha y arriba.

SALIDA:
derecha, arriba,
derecha, abajo,
derecha, arriba,
derecha, abajo,
izquierda, arriba,
izquierda y abajo.