PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES LETRAS
Matemáticas para Economía y Finanzas 2
Semestre 2023-2

Prof. Andrés Beltrán

1. Teorema de la función implícita

Sean F_1 y F_2 funciones con variables x_1, x_2, u, v, que admite derivadas parciales en un punto $a \in \mathbb{R}^4$. Bajo esas condiciones supongamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, u, v) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, u, v) &= 0 \end{cases}$$

define implícitamente u y v como funciones de x_1 y x_2. Al derivar en cada una de estas ecuaciones respecto de la variable x_1 y usando la regla de la cadena resulta,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

Similarmente al derivar en cada una de las ecuaciones resulta respecto a variable x_2 y usando la regla de la cadena resulta, resulta,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Si la matriz jacobiana de $F = (F_1, F_2)$ verifica su determinante es diferente de cero, es posible determinar las derivadas parciales de u y v respecto de las variables x_1 y x_2.

Teorema 1. *Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_1(x_1,x_2,u,v) & = & 0 \\ F_2(x_1,x_2,u,v) & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

donde F_1 y F_2 son funciones en las variables (x_1,x_2,u,v) que admiten derivadas parciales y son continuas en un entorno del punto $P=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{u},\overline{v})$ verificando las condiciones siguientes

i) El punto P verifica el sistema (1). Esto es, $F_1(P)=0$, $F_2(P)=0$

ii) $\det JF(P)\neq 0$ en un entorno del punto P.

Entonces el sistema de ecuaciones (1) define implícitamente a u y v como funciones de x_1 y x_2 que admiten derivadas parciales en un entorno del punto $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$. Además, sus derivadas parciales puede obtenerse a través del método descrito anteriormente.

Ejemplo 1. Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} u^2+uv & = & x^2+y \\ u^2+v & = & x-y^2 \end{array}\right.$

a) Determine en qué puntos el sistema dado definen a u y v como funciones implícitas de las variables x e y.

b) Halle las derivadas parciales de u y v respecto a x e y

<u>*Solución*</u>

a) Sean $F_1(x,y,u,v)=x^2+y-u^2-uv$, $\quad F_2(x,y,u,v)=x-y^2-u^2-v \quad$ y $\quad F=(F_1,F_2)$. Se cumple:

   i) La función F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^4$.

   ii) Además,

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2u-v & -u \\ -2u & -1 \end{pmatrix}$$

   Se verifica,

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right)=(2u+v-2u^2)\neq 0, \quad \text{si } v\neq 2(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$$

   Luego, los puntos donde se garantiza lo pedido es el conjunto de puntos (x,y,u,v) verificando la siguiente propiedad $v\neq 2(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$.

El teorema de la función implícita garantiza que alrededor de estos puntos el sistema dado define u y v como funciones implícitas de x e y: $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$.

b) Derivando respecto a x en el sistema dado y ordenando se obtiene,

$$\begin{cases} (2u+v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x \\ \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes $\Delta = \begin{vmatrix} 2u+v & u \\ 2u & 1 \end{vmatrix} = 2u+v-2u^2 \neq 0$, por la regla de cramer resulta,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2x & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2x-u}{2u+v-2u^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2u+v & 2x \\ 2u & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2u+v-4ux}{2u+v-2u^2}.$$

En forma análoga, derivando el sistema respecto a la variable y en el sistema dado y ordenando se obtiene,

$$\begin{cases} (2u+v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1 \\ \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y \end{cases}$$

Puesto que el determinante de la matriz de coeficientes $\Delta = \begin{vmatrix} 2u+v & u \\ 2u & 1 \end{vmatrix} = 2u+v-2u^2 \neq 0$, por la regla de cramer resulta,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u \\ -2y & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1+2uy}{2u+v-2u^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 2u+v & 1 \\ 2u & -2y \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-4uy-2vy-2u}{2u+v-2u^2}$$

2. Formas cuadráticas

2.1. Introducción

Definición 1. Una *forma cuadrática* es una función de la forma $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x) = x^t Ax \tag{2}$$

donde A es una matriz simétrica, llamada matriz asociada a Q.

Ejemplo 2. Las siguientes funciones son ejemplos de formas cuadráticas:

i) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ii) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_2x_3 == \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 5x_3^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición 2. Sea $Q(x) = x^t Ax$ una forma cuadrática, siendo A una matriz simétrica real de orden $n \times n$. Se dice que la forma cuadrática Q es:

1. **Definida positiva:**
$$Q(x) = x^t Ax > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq \mathbf{0}$$

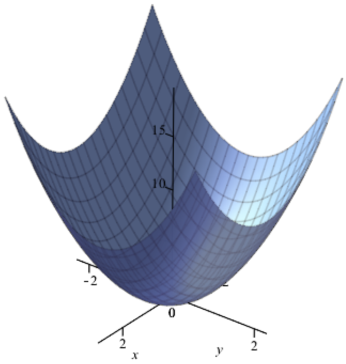
2. **Semidefinida positiva:**
$$Q(x) = x^t Ax \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3. **Definida negativa:**
$$Q(x) = x^t Ax < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \neq \mathbf{0}$$

4. **Semidefinida negativa:**
$$Q(x) = x^t Ax \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

5. **Indefinida:** si existen puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que
$$Q(x) < 0 < Q(y)$$

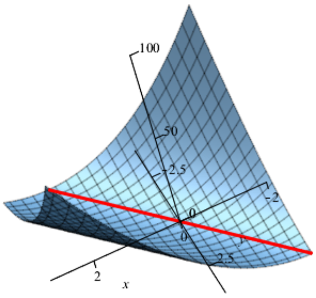
Ejemplo 4. La forma cuadrática $Q(x, y) = x^2 + 3y^2$ es definida positiva, pues $Q(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$



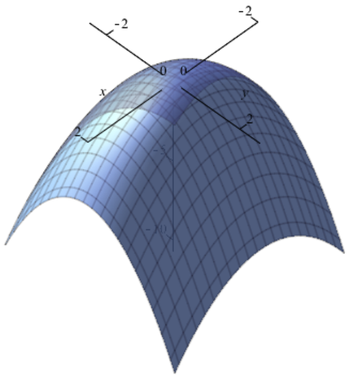
Ejemplo 5. La forma cuadrática

$$Q(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(2x+y)^2\geq 0$$

es semidefinida positiva. Note que $Q(x,y)=0$ cuando $y=-2x$.



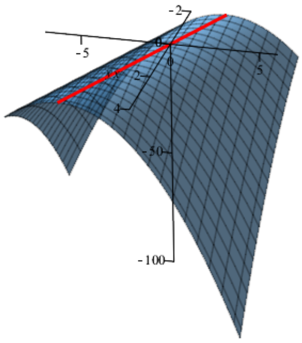
Ejemplo 6. La forma cuadrática $Q(x,y)=-x^2-y^2$ es definida negativa.



Ejemplo 7. La forma cuadrática

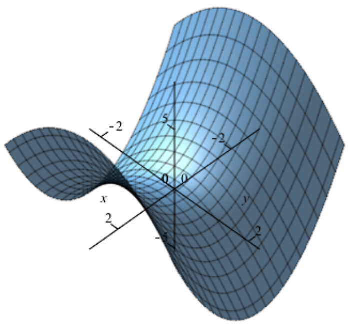
$$Q(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 0$$

es semidefinida negativa. Note que $q(x,y) = 0$ cuando $y = -x$.



Ejemplo 8. La forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ es indefinida, pues

$$Q(1,0) = -1 \quad \text{y} \quad Q(0,1) = 1.$$



2.2. Métodos para clasificar formas cuadráticas:

Teniendo en cuenta que toda matriz simétrica es diagonalizable se tiene el siguiente resultado

Proposición 2. Toda forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^t A x$$

puede ser escrita en la forma siguiente

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

donde λ_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$ son los valores propios de la matriz simétrica A y los términos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son combinaciones lineales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Criterio 1 (Usando valores propios). Sea $Q(x) = x^t A x$ una forma cuadrática, siendo A una matriz simétrica y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios de A. Entonces

1. $Q(x)$ es definida positiva $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i > 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
2. $Q(x)$ es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i \geq 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
3. $Q(x)$ es definida negativa $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i < 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
4. $Q(x)$ es semidefinida negativa $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i \leq 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
5. $Q(x)$ es indefinida $\Longleftrightarrow$ existen λ_i, λ_j, tales que $\lambda_i < 0 < \lambda_j$.

Ejemplo 9. La forma cuadrática

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 2x_3^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es semidefinida negativa pues los valores propios de la matriz que define Q verifican $\lambda_i \leq 0$, $\forall\, i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -10$.

Ejemplo 10. La forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es indefinida, pues existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que $\lambda_i < 0 < \lambda_j$, donde $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ son los valores propios de la matriz A.

Definición 3. Se llama **menor principal dominante de orden** k de una matriz A de orden $n \times n$ al determinante D_k de la submatriz de de orden $k \times k$ formado por las primeras k filas y las primeras k columnas de A.

Ejemplo 11. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

- El menor principal dominante de orden $1, D_1 = a_{11}$.
- El menor principal dominante de orden 2,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- El menor principal dominante de orden 3,

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 12. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $n \times n$, entonces

- El menor principal dominante de orden 1 es $D_1 = a_{11}$
- El menor principal dominante de orden 2 es $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- El menor principal dominante de orden 3 es

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- el menor principal dominante de orden k es el determinante

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

- El menor principal dominante de orden n es el determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Criterio 2 (Criterio de menores principales dominantes). Sean $Q(x) = x^t A x$ una forma cuadrática y D_k, los menores principales dominantes de la matriz simétrica A. Se cumple:

1. $Q(x)$ es definida positiva $\iff D_k > 0, \ \forall \ k = 1, \ldots, n$
2. $Q(x)$ es definida negativa $\iff (-1)^k D_k > 0$, para cada $k = 1, \ldots, n$. Esto es,

$$D_k < 0 \text{ si } k \text{ es impar} \quad \text{y} \quad D_k > 0 \text{ si } k \text{ es par}$$

3. $Q(x)$ es indefinida si no cumple ni (1) ni (2) y $\det(A) \neq 0$

Definición 4. Se llama **menor principal de orden** k de una matriz A de orden $n \times n$ al determinante P_k de cualquier submatriz de orden $k \times k$ que resulta de eliminar $n-k$ filas y $n-k$ columnas correspondientes de A.

Ejemplo 13. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

- Menores principales de orden 1, P_1: a_{11}, a_{22}, a_{33}.
- Menores principales de orden 2, P_2 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Menor principal de orden 3, P_3: $\det(A)$. Esto es,

$$P_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 14. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $n \times n$, entonces el menor principal de orden k es el determinante

$$P_k = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & \cdots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 15. La forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es indefinida, pues los menores principales dominantes asociados a la matriz A que define la forma cuadrática son, $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = -3$ y $D_3 = -3$.

Ejemplo 16. La forma cuadrática

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es definida positiva, pues los menores principales dominantes asociados a la matriz A que define la forma cuadrática son todos positivos: $D_1 = 1$, $D_2 = \frac{3}{4}$ y $D_3 = \frac{1}{2}$.

Criterio 3 (**Criterio de menores principales**). Sean $Q(x) = x^t Ax$ una forma cuadrática y P_k los menores principales dominantes de la matriz simétrica A. Se cumple:

1. $Q(x)$ es definida positiva $\Longleftrightarrow$ $P_k > 0 \ \forall \ k = 1,2,\ldots,n$.

2. $Q(x)$ es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow$ $P_k \geq 0 \ \forall \ k = 1,\ldots,n$.

3. $Q(x)$ es definida negativa si $(-1)^k P_k > 0$, para cada $k = 1,\ldots,n$. Es decir, $P_k < 0$ cuando k es impar y $P_k > 0$ cuando k es par.

4. $Q(x)$ es semidefinida negativa si $(-1)^k P_k \geq 0$ para $k = 1,\ldots,n$. Esto es, $P_k \leq 0$ si k es impar y $P_k \geq 0$ si k es par.

Ejemplo 17. La forma cuadrática

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva, pues los menores principales P_k asociados a la matriz A que define la forma cuadrática son no negativos:

$$P_1 : 5,2,0, \quad P_2 : \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad P_3 = \det(A) = 0.$$

Ejemplo 18. Clasifique la forma cuadrática $Q(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + az^2 + 6xy$, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
Solución
La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 6 & 0 \\ 6 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Analizando las raíces del polinomio característico asociado a esta matriz obtenemos

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2a-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 2a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2a-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2a + 6)(\lambda - 2a)(-\lambda + 2a + 6)$$

Esto es, $\lambda_1 = -6 + 2a$, $\lambda_2 = 2a$, $\lambda_3 = 2a + 6$. Luego, se presentan los siguientes casos:

i) Q es definida positiva $\Longleftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$. Esto implica que $a > 3$.

ii) Q es definida negativa $\Longleftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$. Esto implica que $a < -3$.

iii) Q es indefinida cuando sucede uno de los siguientes casos:

   a) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, es decir cuando $0 < a < 3$
   b) $\lambda_1 < 0 < \lambda_3$. Este caso no produce nada
   c) $\lambda_2 < 0 < \lambda_3$, es decir cuando $-3 < a < 0$.
   d) Cuando $a = 0$ se obtiene que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = 6$. Por lo tanto es indefinida.

Cuando $a = -3$, los valores propios correspondientes respectivamente son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -12, \lambda_3 = -6$. Es decir, la forma cuadrática es semidefinida negativa.
Finalmente, cuando $a = 3$, los valores propios asociados respectivamente son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 12$. Por lo tanto, la forma cuadrática es semidefinida positiva.

2.3. Formas cuadráticas restringidas

Sea A una matriz simétrica. Ahora estamos interesados en conocer el signo de una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = x^tAx$ cuando los valores de x se encuentran en el subespacio S definido por la igualdad $Bx = 0$, donde B es una matriz de orden $m \times n$, siendo $m < n$,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & = & 0 \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & \cdots & + & b_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}x_1 & + & b_{m2}x_2 & + & \cdots & + & b_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

La matriz que se analiza en este caso es la llamada *matriz orlada*, descrita por la matriz A que define a la forma cuadrática y B, matriz que define al subespacio S.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & A \end{pmatrix}$$

De esta manera se obtiene el siguiente criterio:

Criterio 4 (Matriz Orlada).

a) Si los $(n - m)$ últimos menores principales dominantes de la matriz M tienen el mismo signo que el término $(-1)^m$, entonces la forma cuadrática $Q(x)$ restringida a la restricción $Bx = 0$ es definida positiva.

b) Si los signos de los $(n - m)$ últimos menores principales dominantes de la matriz M alternan el signo, comenzando con el término $(-1)^{m+1}$, entonces la forma cuadrática $Q(x)$ restringida a la condición $Bx = 0$ es definida negativa.

Ejemplo 19. Analice la forma cuadrática $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ restringida al subespacio $S=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : 4x_1-2x_2-x_3=0\}$.
<u>*Solución*</u>
La forma cuadrática en su forma matricial es dada por

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x^tAx=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Además, la restricción puede reescribirse en la forma $Bx=0$, esto es

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

Luego, la matriz orlada es dada por

$$M=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ B^t & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Notese que $n=3$ y $m=1$, entonces requerimos analizar los $n-m=2$ últimos menores principales dominantes de la matriz orlada M, esto es:

$$D_3=\begin{vmatrix}0 & 4 & -2\\ 4 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-52<0,\qquad D_4=\begin{vmatrix}0 & 4 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-81<0$$

Como estos menores tiene signo igual a $(-1)^m=-1$, concluimos, de acuerdo al criterio, que la forma cuadrática restringida al subespacio es definida positiva.

Observación 1. Un método alternativo al anterior es sustituir $x_3=4x_1-2x_2$ en la forma cuadrática resultando

$$q(x_1,x_2)=Q(x_1,x_2,4x_1-2x_2)=25x_1^2+10x_2^2-28x_1x_2=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25 & -14\\ -14 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es $\begin{pmatrix}25 & -14\\ -14 & 10\end{pmatrix}$ donde sus menores principales dominantes $D_1=25$ y $D_2=54$ son positivos, entonces la forma cuadrática q es definida positiva. Esto implica que la forma cuadrática Q restringida al susbespacio es definida positiva.

Ejemplo 20. Analice la forma cuadrática $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2+6x_1x_2$ restringida al subespacio dada por las ecuaciones $x_1-x_2=0$ y x_1-x_3=0.

<u>*Solución*</u>
La forma cuadrática en su forma matricial es dada por

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x^t A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Además, la restricción puede reescribirse en la forma $Bx = 0$, esto es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Luego, la matriz orlada es dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^t & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notese que $n = 3$ y $m = 2$, entonces requerimos del $n - m = 1$ último menor principal dominante de la matriz orlada:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

el signo del menor coincide con e signo de $(-1)^m = (-1)^2 = 1$, entonces la forma cuadrática dada es definida positiva.