PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES LETRAS
Matemáticas para Economía y Finanzas 2
Semestre 2023-2

Prof. Andrés Beltrán

# 1. Formas cuadráticas

## 1.1. Introducción

**Definición 1.** Una *forma cuadrática* es una función de la forma $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x) = x^t Ax \tag{1}$$

donde $A$ es una matriz simétrica, llamada matriz asociada a $Q$.

**Ejemplo 1.** Las siguientes funciones son ejemplos de formas cuadráticas:

i) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ii) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 6x_2x_3 == \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

**Ejemplo 2.**

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 5x_3^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Definición 2.** Sea $Q(x) = x^t Ax$ una forma cuadrática, siendo $A$ una matriz simétrica real de orden $n \times n$. Se dice que la forma cuadrática $Q$ es:

1. **Definida positiva:**
$$Q(x) = x^t Ax > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq \mathbf{0}$$

2. **Semidefinida positiva:**
$$Q(x) = x^t Ax \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

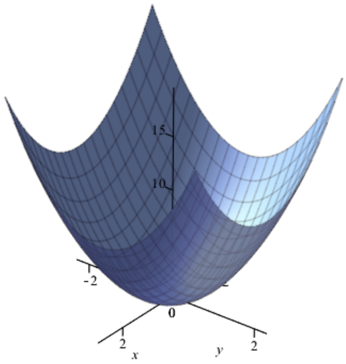
3. **Definida negativa:**
$$Q(x) = x^t Ax < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \neq \mathbf{0}$$

4. **Semidefinida negativa:**
$$Q(x) = x^t Ax \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

5. **Indefinida:** si existen puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Q(x) < 0 < Q(y)$$

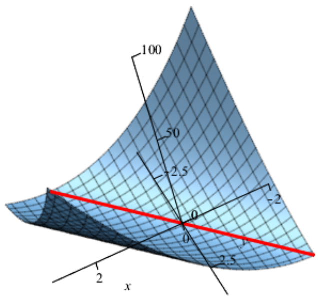
**Ejemplo 3.** La forma cuadrática $Q(x,y) = x^2 + 3y^2$ es definida positiva, pues $Q(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$



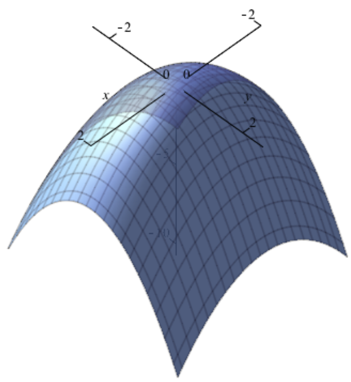

**Ejemplo 4.** La forma cuadrática

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x+y)^2 \geq 0$$

es semidefinida positiva. Note que $Q(x,y) = 0$ cuando $y = -2x$.



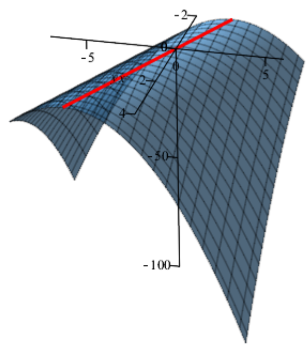

**Ejemplo 5.** La forma cuadrática $Q(x,y) = -x^2 - y^2$ es definida negativa.




**Ejemplo 6.** La forma cuadrática

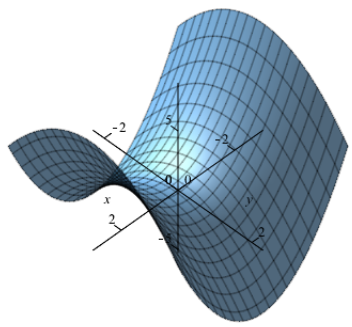
$$Q(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 0$$

es semidefinida negativa. Note que $q(x,y) = 0$ cuando $y = -x$.




**Ejemplo 7.** La forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ es indefinida, pues

$$Q(1,0) = -1 \quad \text{y} \quad Q(0,1) = 1.$$



## 1.2. Métodos para clasificar formas cuadráticas:

Teniendo en cuenta que toda matriz simétrica es diagonalizable se tiene el siguiente resultado

**Proposición 1.** Toda forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^t A x$$

puede ser escrita en la forma siguiente

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

donde $\lambda_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ son los valores propios de la matriz simétrica $A$ y los términos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son combinaciones lineales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**Criterio 1 (Usando valores propios).** Sea $Q(x) = x^t A x$ una forma cuadrática, siendo $A$ una matriz simétrica y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios de $A$. Entonces

1. $Q(x)$ es definida positiva $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i > 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
2. $Q(x)$ es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i \geq 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
3. $Q(x)$ es definida negativa $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i < 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
4. $Q(x)$ es semidefinida negativa $\Longleftrightarrow$ $\lambda_i \leq 0$, $\forall$ $i = 1, \ldots, n$
5. $Q(x)$ es indefinida $\Longleftrightarrow$ existen $\lambda_i$, $\lambda_j$, tales que $\lambda_i < 0 < \lambda_j$.

**Ejemplo 8.** La forma cuadrática

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 - 2x_3^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es semidefinida negativa pues los valores propios de la matriz que define $Q$ verifican $\lambda_i \leq 0$, $\forall\, i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -10$.

**Ejemplo 9.** La forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es indefinida, pues existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que $\lambda_i < 0 < \lambda_j$, donde $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ son los valores propios de la matriz $A$.

**Definición 3.** Se llama **menor principal dominante de orden** $k$ de una matriz $A$ de orden $n \times n$ al determinante $D_k$ de la submatriz de de orden $k \times k$ formado por las primeras $k$ filas y las primeras $k$ columnas de $A$.

**Ejemplo 10.** Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

- El menor principal dominante de orden 1, $D_1 = a_{11}$.
- El menor principal dominante de orden 2,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- El menor principal dominante de orden 3,

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Ejemplo 11.** Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $n \times n$, entonces

- El menor principal dominante de orden 1 es $D_1 = a_{11}$
- El menor principal dominante de orden 2 es $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- El menor principal dominante de orden 3 es

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- el menor principal dominante de orden $k$ es el determinante

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

- El menor principal dominante de orden $n$ es el determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Criterio 2 (Criterio de menores principales dominantes).** Sean $Q(x) = x^t Ax$ una forma cuadrática y $D_k$, los menores principales dominantes de la matriz simétrica $A$. Se cumple:

1. $Q(x)$ es definida positiva $\Longleftrightarrow$ $D_k > 0$, $\forall$ $k = 1, \dots, n$

2. $Q(x)$ es definida negativa $\Longleftrightarrow$ $(-1)^k D_k > 0$, para cada $k = 1, \dots, n$. Esto es,

$$D_k < 0 \text{ si } k \text{ es impar} \quad \text{y} \quad D_k > 0 \text{ si } k \text{ es par}$$

3. $Q(x)$ es indefinida si no cumple ni (1) ni (2) y $\det(A) \neq 0$

**Definición 4.** Se llama **menor principal de orden** $k$ de una matriz $A$ de orden $n \times n$ al determinante $P_k$ de cualquier submatriz de orden $k \times k$ que resulta de eliminar $n-k$ filas y $n-k$ columnas correspondientes de $A$.

**Ejemplo 12.** Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

- Menores principales de orden 1, $P_1$: $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$.
- Menores principales de orden 2, $P_2$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Menor principal de orden 3, $P_3$: $\det(A)$. Esto es,

$$P_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Ejemplo 13.** Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $n \times n$, entonces el menor principal de orden $k$ es el determinante

$$P_k = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & \cdots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

**Ejemplo 14.** La forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es indefinida, pues los menores principales dominantes asociados a la matriz $A$ que define la forma cuadrática son, $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = -3$ y $D_3 = -3$.

**Ejemplo 15.** La forma cuadrática

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

es definida positiva, pues los menores principales dominantes asociados a la matriz $A$ que define la forma cuadrática son todos positivos: $D_1=1,\ \ D_2=\frac{3}{4}$ y $D_3=\frac{1}{2}$.

**Criterio 3 (Criterio de menores principales).** Sean $Q(x)=x^tAx$ una forma cuadrática y $P_k$ los menores principales dominantes de la matriz simétrica $A$. Se cumple:

1. $Q(x)$ es definida positiva $\Longleftrightarrow\ P_k>0\ \forall\ k=1,2,\ldots,n$.

2. $Q(x)$ es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow\ P_k\geq 0\ \forall\ k=1,\ldots,n$.

3. $Q(x)$ es definida negativa si $(-1)^kP_k>0$, para cada $k=1,\ldots,n$. Es decir, $P_k<0$ cuando $k$ es impar y $P_k>0$ cuando $k$ es par.

4. $Q(x)$ es semidefinida negativa si $(-1)^kP_k\geq 0$ para $k=1,\ldots,n$. Esto es, $P_k\leq 0$ si $k$ es impar y $P_k\geq 0$ si $k$ es par.

**Ejemplo 16.** La forma cuadrática

$$Q(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+4x_1x_2=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva, pues los menores principales $P_k$ asociados a la matriz $A$ que define la forma cuadrática son no negativos:

$$P_1:\ 5,2,0,\quad P_2:\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=5\quad \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,\quad P_3=\det(A)=0.$$

**Ejemplo 17.** Clasifique la forma cuadrática $Q(x,y,z)=ax^2+ay^2+az^2+6xy$, según los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$.
<u>*Solución*</u>
La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$A=\begin{pmatrix}2a & 6 & 0\\ 6 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 2a\end{pmatrix}$$

Analizando las raíces del polinomio característico asociado a esta matriz obtenemos

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}2a-\lambda & 6 & 0\\ 6 & 2a-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2a-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2a+6)(\lambda-2a)(-\lambda+2a+6)$$

Esto es, $\lambda_1=-6+2a, \lambda_2=2a, \lambda_3=2a+6$. Luego, se presentan los siguientes casos:

i) $Q$ es definida positiva $\Longleftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$. Esto implica que $a > 3$.

ii) $Q$ es definida negativa $\Longleftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$. Esto implica que $a < -3$.

iii) $Q$ es indefinida cuando sucede uno de los siguientes casos:

a) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, es decir cuando $0 < a < 3$

b) $\lambda_1 < 0 < \lambda_3$. Este caso no produce nada

c) $\lambda_2 < 0 < \lambda_3$, es decir cuando $-3 < a < 0$.

d) Cuando $a = 0$ se obtiene que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = 6$. Por lo tanto es indefinida.

Cuando $a = -3$, los valores propios correspondientes respectivamente son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -12, \lambda_3 = -6$. Es decir, la forma cuadrática es semidefinida negativa.
Finalmente, cuando $a = 3$, los valores propios asociados respectivamente son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 12$. Por lo tanto, la forma cuadrática es semidefinida positiva.

## 1.3. Formas cuadráticas restringidas

Sea $A$ una matriz simétrica. Ahora estamos interesados en conocer el signo de una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = x^t A x$ cuando los valores de $x$ se encuentran en el subespacio $S$ definido por la igualdad $Bx = 0$, donde $B$ es una matriz de orden $m \times n$, siendo $m < n$,

$$\begin{cases} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & = & 0 \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & \cdots & + & b_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}x_1 & + & b_{m2}x_2 & + & \cdots & + & b_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

La matriz que se analiza en este caso es la llamada *matriz orlada*, descrita por la matriz $A$ que define a la forma cuadrática y $B$, matriz que define al subespacio $S$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & A \end{pmatrix}$$

De esta manera se obtiene el siguiente criterio:

**Criterio 4** (**Matriz Orlada**).

a) Si los $(n - m)$ últimos menores principales dominantes de la matriz $M$ tienen el mismo signo que el término $(-1)^m$, entonces la forma cuadrática $Q(x)$ restringida a la restricción $Bx = 0$ es definida positiva.

b) Si los signos de los $(n - m)$ últimos menores principales dominantes de la matriz $M$ alternan el signo, comenzando con el término $(-1)^{m+1}$, entonces la forma cuadrática $Q(x)$ restringida a la condición $Bx = 0$ es definida negativa.

**Ejemplo 18.** Analice la forma cuadrática $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ restringida al subespacio $S=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ 4x_1-2x_2-x_3=0\}$.
*Solución*
La forma cuadrática en su forma matricial es dada por

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x^tAx=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Además, la restricción puede reescribirse en la forma $Bx=0$, esto es

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

Luego, la matriz orlada es dada por

$$M=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ B^t & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Notese que $n=3$ y $m=1$, entonces requerimos analizar los $n-m=2$ últimos menores principales dominantes de la matriz orlada $M$, esto es:

$$D_3=\begin{vmatrix}0 & 4 & -2\\ 4 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-52<0,\qquad D_4=\begin{vmatrix}0 & 4 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-81<0$$

Como estos menores tiene signo igual a $(-1)^m=-1$, concluimos, de acuerdo al criterio, que la forma cuadrática restringida al subespacio es definida positiva.

**Observación 1.** Un método alternativo al anterior es sustituir $x_3=4x_1-2x_2$ en la forma cuadrática resultando

$$q(x_1,x_2)=Q(x_1,x_2,4x_1-2x_2)=25x_1^2+10x_2^2-28x_1x_2=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25 & -14\\ -14 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es $\begin{pmatrix}25 & -14\\ -14 & 10\end{pmatrix}$ donde sus menores principales dominantes $D_1=25$ y $D_2=54$ son positivos, entonces la forma cuadrática $q$ es definida positiva. Esto implica que la forma cuadrática $Q$ restringida al susbespacio es definida positiva.

**Ejemplo 19.** Analice la forma cuadrática $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2+6x_1x_2$ restringida al subespacio dada por las ecuaciones $x_1-x_2=0$ y $x_1-x_3$=0.

*Solución*
La forma cuadrática en su forma matricial es dada por

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x^tAx = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Además, la restricción puede reescribirse en la forma $Bx = 0$, esto es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Luego, la matriz orlada es dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ B^t & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notese que $n = 3$ y $m = 2$, entonces requerimos del $n - m = 1$ último menor principal dominante de la matriz orlada:

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

el signo del menor coincide con e signo de $(-1)^m = (-1)^2 = 1$, entonces la forma cuadrática dada es definida positiva.

## 2. Funciones convexas y cóncavas

**Definición 5.** Un subconjunto $D$ de $\mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cada par de puntos $x, y$ en $D$, el segmento $[x, y]$ que los une está contenido en $D$, siendo

$$[x, y] = \{z = (1-t)x + ty : \ t \in [0, 1]\}.$$

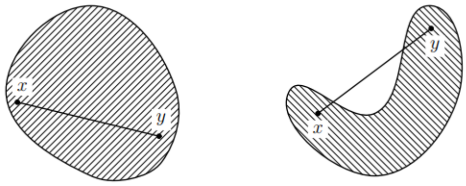



Figura 1: Conjunto convexo y conjunto no convexo

**Ejemplo 20.** Los siguientes conjuntos son convexos:

a) La bola abierta $D = B_r(a)$ centrada en $a$ y radio $r$,

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4\}$

c) El espacio $\mathbb{R}^n$ es convexo

d) El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$ es convexo

**Ejemplo 21.** Los siguientes conjuntos no son convexos:

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 > 4\}$

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| > 1\}$

**Proposición 2 (Propiedades).** Se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si $D_1$ y $D_2$ son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces $D_1 \cap D_2$ es un conjunto convexo,

b) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

entonces los siguientes conjuntos son convexos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq c\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > c\},$$

cualquiera sea el valor de $c$.

**Definición 6.** Sean $D$ un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. La función $f$ es **convexa** en $D$ cuando para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se cumple

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

2. La función $f$ es **estrictamente convexa** en $D$ cuando para todo $x, y \in D$ con $x \neq y$ y para todo $t \in ]0,1[$ se cumple

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \tag{3}$$

**Ejemplo 22.** La función exponencial es estrictamente convexa.

**Definición 7.** Sean $D$ un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. La función $f$ es **cóncava** en $D$ cuando para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se cumple

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in [0,1] \tag{4}$$

2. La función $f$ es **estrictamente cóncava** en $D$ si, para todo $x, y \in D$ con $x \neq y$, y para todo $t \in ]0,1[$ se cumple

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y) \tag{5}$$

**Ejemplo 23.** La función logaritmo es cóncava en $\mathbb{R}_+$.

**Proposición 3** (**Propiedades o caracterización de funciones convexas y cóncavas**)**.** Sea $D$ un subonjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se cumple

1. Una función lineal $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ es convexa y cóncava a la vez en $\mathbb{R}^n$.
2. Si $f$ es una función estrictamente convexa (respectivamente cóncava) en $D$, entonces $f$ es convexa (respectivamente cóncava) en $D$.
3. $f$ es una función convexa en $D$ si y solo si $-f$ es cóncava en $D$.
4. La función $f$ es estrictamente convexa $D$ si y solo si $-f$ es estrictamente cóncava en $D$.
5. Si $f$ es una función convexa en $D$ y $c \geq 0$, entonces $cf$ es convexa en $D$.
6. Si $f$ es una función convexa en $D$ y $c \leq 0$ entonces $cf$ es cóncava en $D$.
7. Si $f$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son convexas en $D$, entonces $f + g$ también es convexa en $D$.
8. Si $f$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son cóncavas en $D$, entonces $f + g$ también es cóncava en $D$.
9. Si $f$ es una función convexa en $D$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente y convexa, entonces la función compuesta $g \circ f$ es convexa en $D$.
10. Si $f$ es una función cóncava en $D$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente y cóncava, entonces la función compuesta $g \circ f$ es cóncava en $D$.

11. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa en $D$ entonces el conjunto
$$\{x \in D : \ f(x) \leq c\}$$
es convexo para cada $c \in \mathbb{R}$.
12. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava en $D$, entonces el conjunto
$$\{x \in D : \ f(x) \geq c\}$$
es convexo para cada $c \in \mathbb{R}$.
13. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa en $D$ si y solo si el conjunto
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ x \in D : \ f(x) \leq y\}$$
que se encuentran por encima del gráfico de $f$ es un conjunto convexo. Este conjunto es llamado *epígrafo* de $f$ y se denota por Epi$(f)$.
14. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava en $D$ si y solo si el conjunto
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ x \in D : \ f(x) \geq y\}$$
es un conjunto convexo. Este conjunto es llamado *Hipógrafo* de $f$ y se denota por Hip$(f)$.

**Ejemplo 24.** Si $f(x,y)$ es una función convexa en $\mathbb{R}^2$ y $g(x,y)$ es una función cóncava en $\mathbb{R}^2$, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) La función $G(x,y) = 5f(x,y) - 2g(x,y)$ es una función convexa en $\mathbb{R}^2$.

b) Si $f(0,0) = 2$ y $f(1,2) = 4$, entonces $f(\frac{1}{2},1) \geq 3$.

*Solución*

a) Si $g$ es cóncava entonces $-2g$ es convexa, por lo tanto, $G$ es convexa.

b) Si $f$ es convexa en $\mathbb{R}^2$ se cumple que
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ t \in [0,1].$$
En particular, cuando $x = (0,0)$ y $y = (1,2)$ se tiene,
$$f(t(0,0) + (1-t)(1,2)) \leq tf(0,0) + (1-t)f(1,2)$$
Luego,
$$f(1-t, 2-2t) \leq 2t + 4(1-t) = 4 - 2t, \quad \forall\ t \in [0,1]$$
En particular, cuando $t = \frac{1}{2}$ resulta $f(\frac{1}{2},1) \geq 3$. ❑

**Ejemplo 25.** Analice la concavidad o convexidad de la función $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, con $a,b,c \geq 0$.

*Solución*

$f$ es convexa por ser suma de funciones convexas

**Ejemplo 26.** Analice la convavidad o convexidad de la función $f(x,y,z) = e^{2x^2+5y^2+4z^2}$.
<u>*Solución*</u>
Sea $u = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2$, entonces $z = f(u) = e^u$. Del ejemplo anterior hemos visto que la función $2x^2+5y^2+4z^2$ es convexa y la función $f(u) = e^u$ es convexa y creciente. Por lo tanto, la función $f(x,y,z)$ es convexa.

**Proposición 4 (Caracterización de segundo orden para funciones convexas).** Sea $D$ un subconjunto abierto no vacío y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2$ sobre $D$.

1. La función $f$ es convexa en $D$ si y solo si su matriz hessiana $H_f(x)$ es semidefinida positiva $\forall\, x \in D$.

2. Si la matriz hessiana $H_f(x)$ de $f$ es definida positiva $\forall\, x \in D$, entonces la función $f$ es estrictamente convexa en $D$.

**Ejemplo 27.** Analice si la función $f(x,y) = (x+y)^2 - y - \ln x$ es cónvexa en su dominio.
<u>*Solución*</u>
El dominio de $f$ es $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, el cual es un conjunto abierto y convexo. Además, sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y) - \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y) - 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

La matriz hessiana de $f$ es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \dfrac{1}{x^2} & 2 \\ & \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y puesto que sus menores principales dominantes $M_1 = 2 + \dfrac{1}{x^2}$ y $M_2 = \dfrac{1}{x^2}$ son positivos en $D_f$, entonces por el teorema de caracterización de segundo orden para funciones convexas concluimos que $f$ es estrictamente convexa en $D_f$, y por lo tanto, convexa en $D_f$.

**Proposición 5 (Caracterización de segundo orden para funciones cóncavas).** Sea $D$ un subconjunto abierto no vacío y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2$ sobre $D$.

1. La función $f$ es cóncava en $D$ si y solo su matriz hessiana $H_f(x)$ es semidefinida negativa $\forall\, x \in D$.

2. Si la matriz hessiana $H_f(x)$ de $f$ es definida negativa $\forall\, x \in D$, entonces la función $f$ es estrictamente cóncava en $D$.