PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESTUDIOS GENERALES LETRAS
Matemáticas para Economía y Finanzas 2
Semestre 2023-2

Prof. Andrés Beltrán

1. Funciones convexas y cóncavas

Definición 1. Un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cada par de puntos x, y en D, el segmento $[x, y]$ que los une está contenido en D, siendo

$$[x, y] = \{z = (1-t)x + ty : \ t \in [0,1]\}.$$

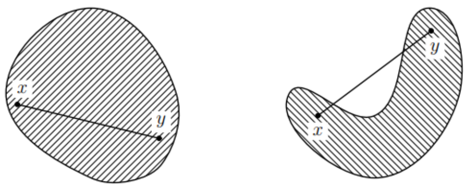


Figura 1: Conjunto convexo y conjunto no convexo

Ejemplo 1. Los siguientes conjuntos son convexos:

a) La bola abierta $D = B_r(a)$ centrada en a y radio r,

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4\}$

c) El espacio $\mathbb{R}^n$ es convexo

d) El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$ es convexo

Ejemplo 2. Los siguientes conjuntos no son convexos:

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 > 4\}$

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| > 1\}$

Proposición 1 (Propiedades). Se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si D_1 y D_2 son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces $D_1 \cap D_2$ es un conjunto convexo,

b) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

entonces los siguientes conjuntos son convexos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq c\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > c\},$$

cualquiera sea el valor de c.

Definición 2. Sean D un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. La función f es **convexa** en D cuando para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se cumple
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1}$$
2. La función f es **estrictamente convexa** en D cuando para todo $x, y \in D$ con $x \neq y$ y para todo $t \in]0,1[$ se cumple
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

Ejemplo 3. La función exponencial es estrictamente convexa.

Definición 3. Sean D un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. La función f es **cóncava** en D cuando para todo $x, y \in D$ y para todo $t \in [0,1]$ se cumple
$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in [0,1] \tag{3}$$
2. La función f es **estrictamente cóncava** en D si, para todo $x, y \in D$ con $x \neq y$, y para todo $t \in]0,1[$ se cumple
$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y) \tag{4}$$

Ejemplo 4. La función logaritmo es cóncava en $\mathbb{R}_+$.

Proposición 2 (Propiedades o caracterización de funciones convexas y cóncavas). Sea D un subonjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se cumple

1. Una función lineal $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ es convexa y cóncava a la vez en $\mathbb{R}^n$.
2. Si f es una función estrictamente convexa (respectivamente cóncava) en D, entonces f es convexa (respectivamente cóncava) en D.
3. f es una función convexa en D si y solo si $-f$ es cóncava en D.
4. La función f es estrictamente convexa D si y solo si $-f$ es estrictamente cóncava en D.
5. Si f es una función convexa en D y $c \geq 0$, entonces cf es convexa en D.
6. Si f es una función convexa en D y $c \leq 0$ entonces cf es cóncava en D.

7. Si f y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son convexas en D, entonces $f+g$ también es convexa en D.

8. Si f y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son cóncavas en D, entonces $f+g$ también es cóncava en D.

9. Si f es una función convexa en D y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente y convexa, entonces la función compuesta $g \circ f$ es convexa en D.

10. Si f es una función cóncava en D y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente y cóncava, entonces la función compuesta $g \circ f$ es cóncava en D.

11. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa en D entonces el conjunto

$$\{x \in D : \ f(x) \leq c\}$$

es convexo para cada $c \in \mathbb{R}$.

12. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava en D, entonces el conjunto

$$\{x \in D : \ f(x) \geq c\}$$

es convexo para cada $c \in \mathbb{R}$.

13. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa en D si y solo si el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ x \in D : \ f(x) \leq y\}$$

que se encuentran por encima del gráfico de f es un conjunto convexo. Este conjunto es llamado *epígrafo* de f y se denota por $\text{Epi}(f)$.

14. Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava en D si y solo si el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ x \in D : \ f(x) \geq y\}$$

es un conjunto convexo. Este conjunto es llamado *Hipógrafo* de f y se denota por $\text{Hip}(f)$.

Ejemplo 5. Si $f(x,y)$ es una función convexa en $\mathbb{R}^2$ y $g(x,y)$ es una función cóncava en $\mathbb{R}^2$, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) La función $G(x,y) = 5f(x,y) - 2g(x,y)$ es una función convexa en $\mathbb{R}^2$.

b) Si $f(0,0) = 2$ y $f(1,2) = 4$, entonces $f(\frac{1}{2}, 1) \geq 3$.

Solución

a) Si g es cóncava entonces $-2g$ es convexa, por lo tanto, G es convexa.

b) Si f es convexa en $\mathbb{R}^2$ se cumple que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ t \in [0,1].$$

En particular, cuando $x = (0,0)$ y $y = (1,2)$ se tiene,

$$f(t(0,0)+(1-t)(1,2)) \leq tf(0,0)+(1-t)f(1,2)$$

Luego,

$$f(1-t,2-2t) \leq 2t+4(1-t) = 4-2t, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

En particular, cuando $t = \frac{1}{2}$ resulta $f(\frac{1}{2},1) \geq 3$. ❑

Ejemplo 6. Analice la concavidad o convexidad de la función $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, con $a,b,c \geq 0$.
<u>*Solución*</u>
f es convexa por ser suma de funciones convexas

Ejemplo 7. Analice la convavidad o convexidad de la función $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{2x^2+5y^2+4z^2}$.
<u>*Solución*</u>
Sea $u = 2x^2 + 5y^2 + 4z^2$, entonces $z = f(u) = \mathrm{e}^u$. Del ejemplo anterior hemos visto que la función $2x^2+5y^2+4z^2$ es convexa y la función $f(u) = \mathrm{e}^u$ es convexa y creciente. Por lo tanto, la función $f(x,y,z)$ es convexa.

Proposición 3 (Caracterización de segundo orden para funciones convexas). Sea D un subconjunto abierto no vacío y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre D.

1. La función f es convexa en D si y solo si su matriz hessiana $H_f(x)$ es semidefinida positiva $\forall\, x \in D$.

2. Si la matriz hessiana $H_f(x)$ de f es definida positiva $\forall\, x \in D$, entonces la función f es estrictamente convexa en D.

Ejemplo 8. Analice si la función $f(x,y) = (x+y)^2 - y - \ln x$ es cónvexa en su dominio.
<u>*Solución*</u>
El dominio de f es $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, el cual es un conjunto abierto y convexo. Además, sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y) - \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y) - 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

La matriz hessiana de f es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\dfrac{1}{x^2} & 2 \\ \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y puesto que sus menores principales dominantes $M_1 = 2 + \dfrac{1}{x^2}$ y $M_2 = \dfrac{1}{x^2}$ son positivos en D_f, entonces por el teorema de caracterización de segundo orden para funciones convexas concluimos que f es estrictamente convexa en D_f, y por lo tanto, convexa en D_f.

Proposición 4 (Caracterización de segundo orden para funciones cóncavas). Sea D un subconjunto abierto no vacío y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre D.

1. La función f es cóncava en D si y solo su matriz hessiana $H_f(x)$ es semidefinida negativa $\forall\, x \in D$.

2. Si la matriz hessiana $H_f(x)$ de f es definida negativa $\forall\, x \in D$, entonces la función f es estrictamente cóncava en D.

2. Optimización

Sea f una función definida sobre un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$. En esta sección estudiaremos los siguientes problemas:

$$(P1) : \begin{cases} \text{máx} & f(x) \\ & x \in D \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (P2) : \begin{cases} \text{mín} & f(x) \\ & x \in D \end{cases}$$

Definición 4. Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a un punto de D y la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) f tiene un **máximo local** en a si existe una bola abierta $B_r(a)$ tal que

$$f(p) \leq f(a), \quad \text{para todo } p \in B_r(a) \cap D.$$

b) f tiene un **mínimo local** en a si existe una bola abierta $B_r(a)$ tal que

$$f(p) \geq f(a), \quad \text{para todo } p \in B_r(a) \cap D.$$

c) f tiene un **óptimo local** en a si, f tiene un máximo o mínimo local en a

Observación 1.

a) Si cualquiera de las propiedades descritas en la definición se cumple sobre todo D, se dice que f tiene un **óptimo global**.

b) El problema de maximizar una función f sobre D es equivalente al problemas de minimizar $-f$ sobre D.

c) Si en cualquiera de las definiciones anteriores la desigualdad es estricta, diremos que f tiene un óptimo local (respectivamente óptimo global) estricto.

d) Todo máximo global es un máximo local.

e) Cuando D es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, se dice que $(P1)$ es un problema de maximización sin restricciones y cuando D no es un conjunto abierto se dice que $(P1)$ es un problema de maximización con restricciones. Y se presentan dos casos:

i) Cuando el problema presenta restricciones de igualdad:

$$\begin{cases} \text{máx} & f(x) \\ & g_1(x) & = & 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) & = & 0 \end{cases}$$

En este caso,

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \, g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$$

ii) Cuando el problema presenta restricciones de desigualdad:

$$\begin{cases} \text{máx} & f(x) \\ & g_1(x) & \leq & 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) & \leq & 0 \end{cases}$$

En este caso,

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \, g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0\}$$

2.1. Optimización sin restricciones

Definición 5. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un punto crítico de f es un punto a del dominio de la función f tal que $\nabla f(a) = (0, \ldots, 0)$.

Ejemplo 9. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = xy^2 - xy + x^2 y$
2. $f(x, y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3} + x - y^2}$
3. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Solución

1) Es inmediato que f es diferenciable sobre $\mathbb{R}^2$, pues f es un polinomio. Además, sus derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 - y + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - x + x^2.$$

La solución del sistema $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & 0 \end{cases}$ Al resolver el sistema de ecuaciones resultan los siguiente puntos críticos para la función f, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (1, 0)$, $P_4 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

2) Los puntos críticos para función f resultan al resolver el siguiente sistema de ecuaciones,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (1-x^2)e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}, \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}$$

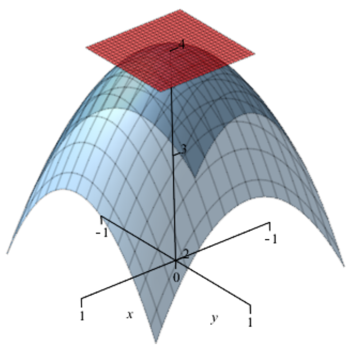
$$P_1 = (1,0), \qquad P_2 = (-1,0)$$

3) Procediendo en forma similar a los casos anteriores se obtienen los puntos críticos para f,

$$P_1 = (2,1), \quad P_2 = (1,2), \quad P_3 = (-1,-2), \quad P_4 = (-2,-1).$$

Teorema 5 (**Condición necesaria de primer orden para óptimos locales**)**.** *Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto a y alcanza en dicho punto un óptimo local, entonces $\nabla f(a) = \mathbf{0}$.*

Observación 2. En el caso que f es una función de dos variables $z = f(x,y)$ diferenciable en un punto (a,b) interior de su dominio, su gráfico admite un plano tangente cuya escuación es dada por $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$. Por lo tanto, si f alcanza un óptimo local en un punto (a,b) interior a su dominio, el teorema (5) nos dice que el gráfico de una función con estas características admite un plano tangente de la forma $z = f(a,b)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$.



Ejemplo 10. La función $f(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$. Además, sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2y + 2x,$$

De manera que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0$$

resulta como único punto crítico el punto $a = (0,0,0)$. El teorema de condiciones necesarias nos dice que el punto a es el único candidato a ser óptimo local para f. ❑

Definición 6. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que un punto $a \in U$ es llamado **punto silla de** f si verifica las siguientes condiciones

a) a es punto crítico de f.

b) Para todo $r > 0$ existen puntos $x, y \in B_r(a)$ tal que
$$f(x) \leq f(a) \leq f(y).$$

Ejemplo 11. Dada la función $f(x, y) = y^2 - x^2$, el único punto crítico para f es $(0,0)$. Dicho punto es un punto silla, pues cualquiera sea $r > 0$ se cumple
$$f(0, y) \leq f(0,0) = 0 \leq f(x,0).$$

Proposición 6 (Condiciones suficientes para óptimos locales). Suponga que U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 sobre un entorno del punto a verificando $\nabla f(a) = \mathbf{0}$. Entonces se cumple:

a) Si la matriz $H_f(a)$ es definida positiva, entonces f alcanza un mínimo local estricto en el punto a.

b) Si la matriz $H_f(a)$ es definida negativa, entonces f alcanza un máximo local estricto en el punto a.

c) Si la matriz $H_f(a)$ es indefinida, entonces a es un punto de silla para f.

donde $H_f(a)$ es la matriz hessiana asociada a la función f en el punto a.

Ejemplo 12. Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$.

Solución
La función f tiene un único punto crítico, $P = (-1,1)$. La función alcanza un mínimo local en P, pues los menores principales dominantes de orden 1 y 2 de $H_f(P) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ son positivos.
❏

Ejemplo 13. Halle y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 10x - 14y - 3$

*Solución*Para obtener los puntos críticos de f resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones
$$0 = f_x = -4x + 4y + 10, \qquad 0 = f_y = 4x - 6y - 14$$
resultando, $P = (\frac{1}{2}, -2)$. Además, la matriz hessiana asociada a f es dada por
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = H_f(P).$$
Luego, los menores principales de esta matriz de orden 1 y 2 respectivamente son $M_1 = -4$ y $M_2 = 8$. Por lo tanto, f alcanza un máximo local en P.

Ejemplo 14. Halle y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2), \text{ donde } a \neq 0.$$

Solución
Los puntos críticos de f son $P_1 = (0,0), P_2 = (a,0), P_3 = (-a,0)$ se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$0 = f_x(x,y) = 4x(x^2+y^2-a^2), \qquad 0 = f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+a^2).$$

Además, la matriz hessiana asociada a f es,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2+4y^2-4a^2 & 8xy \\ 8xy & 12y^2+4x^2+4a^2 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 \\ 0 & 4a^2 \end{pmatrix}, \quad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 8a^2 \end{pmatrix}, \quad H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, P_1 es un punto silla para f, y alcanza un mínimo local en P_2 y P_3. ❑

2.2. Optimización global sin restricciones

Proposición 7 (Condición necesaria y suficiente para óptimos globales). Si f es una función diferenciable y convexa sobre un conjunto abierto y convexo D. Sea a un punto de D. Se cumple: a es punto crítico de f si y solo si admite un mínimo global sobre D en a.

Proposición 8 (Condición necesaria y suficiente para óptimos globales). Si f es una función diferenciable y cóncava sobre un conjunto abierto y convexo D. Sea a un punto de D. Se cumple: a es punto crítico de f si y solo si admite un máximo global sobre D en a.

Observación 3. En ambas proposiciones se tiene que la función alcanza un óptimo global estricto si f es estrictamente convexa o cóncava.