Curs 4

<u>Propoziție.</u> Fie (X, d) un spațiu metric, $A \subset X$ și $x \in X$. Atunci:

1) $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$.

2) $x \in A' \iff \exists (x_n)_n \subset A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$.

<u>Observație.</u> $(\mathbb{R}, d)$ este spațiu metric, unde $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.

<u>Observație.</u> Considerăm spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$, $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$.

1) $B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(y,x) < r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r\} =$
$= \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y-x < r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x-r < y < x+r\} =$
$= (x-r, x+r)$.

2) $B[x,r] = \overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$.

<u>Observație.</u> În spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$:

1) Intervalele de forma $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, (a, b) sunt mulțimi deschise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$.

2) Intervalele de forma $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $[a, b]$

sunt mulțimi închise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

<u>Exercițiu.</u> Faceți analiza topologică a mulțimilor $A \subset \mathbb{R}$ (i.e. determinați $\mathring{A}$, $\overline{A}$, A', $Fr(A)$ și $Izo(A)$), unde:

a) $A = \mathbb{Q}$.

<u>Soluție.</u> 1) $\mathring{A} = ?$

$$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ a.î. } \underbrace{B(x, r)}_{\substack{\parallel \\ (x-r,\, x+r)}} \subset \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Q}.}}{A}$$

Deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale rezultă că $\mathring{A} = \emptyset$.

2) $\overline{A} = ?$

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, \text{ avem } \underset{\substack{\parallel \\ (x-r,\, x+r)}}{B(x, r)} \cap \underset{\substack{\parallel \\ \mathbb{Q}}}{A} \neq \emptyset.$$

$\overline{A} \subset \mathbb{R}$ (din definiție)

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x - r, x + r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

Deci $x\in\overline{A}=\overline{\mathbb{Q}}$, i.e. $\mathbb{R}\subset\overline{A}$.

Prin urmare $\overline{A}=\mathbb{R}$.

3) $A'=?$

$x\in A' \Leftrightarrow \forall\, r>0$, avem $\underset{\displaystyle (x-r,x+r)}{\underset{\parallel}{B(x,r)}}\cap\underset{\displaystyle (\mathbb{Q}\setminus\{x\})}{\underset{\parallel}{(A\setminus\{x\})}}\neq\emptyset$.

$A'\subset\overline{A}=\mathbb{R}$

Fie $x\in\mathbb{R}$. Fie $r>0$. Avem $(x-r,x+r)\cap(\mathbb{Q}\setminus\{x\})\neq\emptyset$, deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

Deci $\mathbb{R}\subset A'=\mathbb{Q}'$.

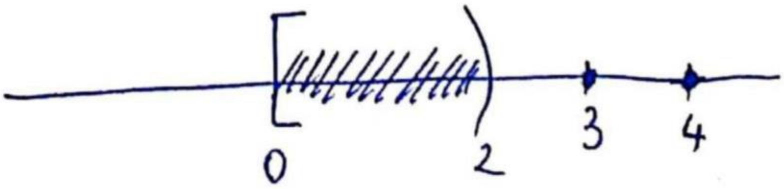
Prin urmare $A'=\mathbb{R}$.

4) $Fr(A)=\overline{A}\setminus\mathring{A}=\mathbb{R}\setminus\emptyset=\mathbb{R}$.

5) $Izo(A)=\overline{A}\setminus A'=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\emptyset$. □

b) $A=[0,2)\cup\{3,4\}$.

Soluție.



1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $(x - r, x + r) \subset A$.

$\mathring{A} \subset A$

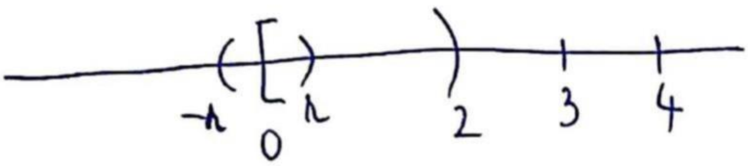
$(0,2) \subset A$

$(0,2)$ deschisă $\Big\} \Rightarrow (0,2) \subset \mathring{A}$.

Deci $(0,2) \subset \mathring{A} \subset A = [0,2) \cup \{3,4\}$.

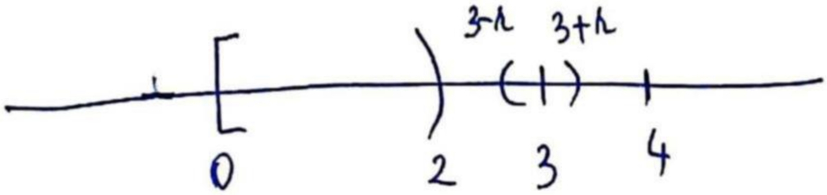
Studiem dacă $0 \in \mathring{A}$, $3 \in \mathring{A}$, $4 \in \mathring{A}$.

$0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $(0 - r, 0 + r) = (-r, r) \subset A$.



Deci $0 \notin \mathring{A}$.

$3 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $(3 - r, 3 + r) \subset A$.



Deci $3 \notin \mathring{A}$.

Analog $4 \notin \mathring{A}$.

Prin urmare $\mathring{A} = (0,2)$.

2) $\overline{A} = ?$

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, r > 0$, avem $(x - r, x + r) \cap A \neq \emptyset$.

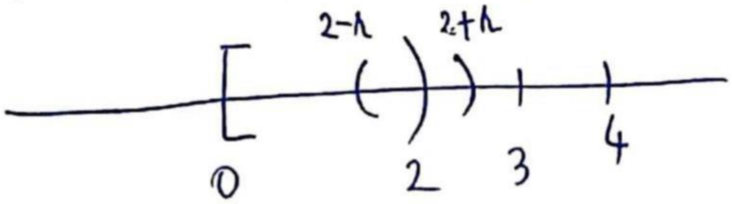
$A \subset \overline{A}$

$$\left.\begin{array}{l}[0,2]\cup\{3,4\} \text{ închisă} \\ A \subset [0,2]\cup\{3,4\}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \subset [0,2]\cup\{3,4\}.$$

Deci $[0,2)\cup\{3,4\} \subset \overline{A} \subset [0,2]\cup\{3,4\}$.

Studiem dacă $2 \in \overline{A}$.

$2 \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, r>0$, avem $(2-r, 2+r) \cap A \neq \phi$.



Deci $2 \in \overline{A}$.

Prin urmare $\overline{A} = [0,2]\cup\{3,4\}$.

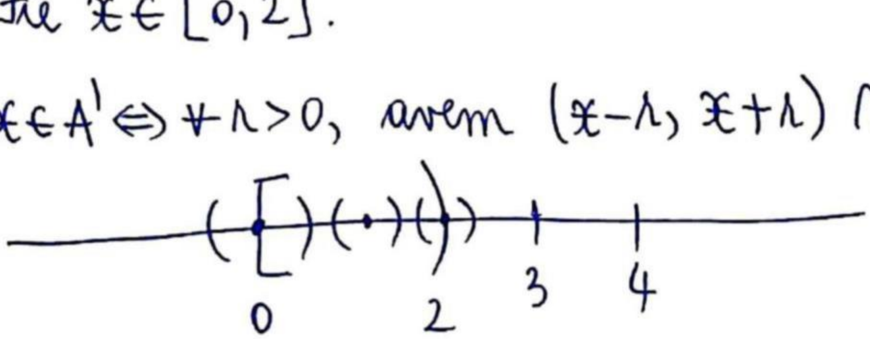
3) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow \forall\, r>0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$.

$A' \subset \overline{A} = [0,2]\cup\{3,4\}$.

Fie $x \in [0,2]$.

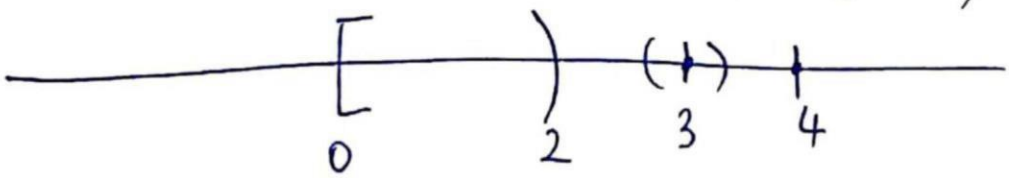
$x \in A' \Leftrightarrow \forall\, r>0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$.



Deci $x \in A'$, i.e. $[0,2] \subset A'$.

Studiem dacă $3 \in A'$ și $4 \in A'$.

$3 \in A' \iff \forall r>0$, avem $(3-r, 3+r) \cap (A \setminus \{3\}) \neq \emptyset$.



Deci $3 \notin A'$.

Analog $4 \notin A'$.

Prin urmare $A' = [0,2]$.

4) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0,2,3,4\}$.

5) $Izo(A) = \bar{A} \setminus A' = \{3,4\}$. $\square$

Considerăm spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d_2(\underbrace{x}_{=(x_1,\dots,x_n)}, \underbrace{y}_{=(y_1,\dots,y_n)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Observație. Dacă $n=1$, atunci $d_2(x,y) = |x-y|$.

Definiție. Metrica d_2 se numește distanța euclidiană a lui $\mathbb{R}^n$.

Notație. Atunci când nu este pericol de confuzie, $d_2 \overset{not}{=} d$.

Definiție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește mărginită dacă există $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ și $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a.î. $A \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Teoremă (Teorema Heine-Borel). În spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d)$, o mulțime $K \subset \mathbb{R}^n$ este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

Exercițiu. Studiați dacă mulțimile $K \subset \mathbb{R}$ de mai jos sunt compacte (în spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$).

a) $K = \mathbb{N}$.

Soluție. K nu e mărginită $\Rightarrow K$ nu e compactă. $\square$

b) $K = (0, 1)$.

Soluție. $\overline{K} = [0, 1] \supsetneq K \Rightarrow K$ nu e închisă $\Rightarrow K$ nu e compactă. $\square$

c) $K = [0, 1] \cup \{2\}$.

Soluție. $K \subset [0, 2] \Rightarrow K$ mărginită.

$\overline{K} = [0, 1] \cup \{2\} = K \Rightarrow K$ închisă.

Deci K este compactă. $\square$

Observație. Pe $\overline{\mathbb{R}} \overset{def.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se introduce distanța $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $\overline{d}(x, y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)|$, unde $\overline{\varphi}$ este aplicația bijectivă $\overline{\varphi} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1] \subset \mathbb{R}$,

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & ; \text{ dacă } x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & ; \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 & ; \text{ dacă } x = +\infty. \end{cases}$$

Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este spațiu metric și perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \tau_{\overline{d}})$ este spațiu topologic.

Definiție. Fie (X, τ) un spațiu topologic. Spunem că (X, τ) este spațiu topologic Hausdorff (sau separat) dacă $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists\, V \in \mathcal{V}_x$, $\exists\, W \in \mathcal{V}_y$ a.î. $V \cap W = \phi$.

Propoziție. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci (X, τ_d) este spațiu topologic Hausdorff.

Limite de funcții

Definiție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A'$, $f : A \to Y$ și $l \in Y$. Spunem că f are limita l în x_0 dacă $\forall\, W \in \mathcal{V}_l$, $\exists\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $\forall\, x \in V \cap A$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \in W$.

Observație. În contextul definiției de mai sus, dacă (Y, τ_2) este spațiu topologic Hausdorff, atunci $l \in Y$ cu proprietatea din definiție este unic determinat și vom scrie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Propoziție. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, $A \subset X$, $a \in A'$, $f : A \to Y$ și $l \in Y$. Sunt echivalente:

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

b) $\forall\, (x_n)_n \subset A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{d_1}{=} a$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} l$.

Propoziție. Fie $f: A \subset \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in A'$ (x_0 poate fi și $\pm\infty$) și $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Presupunem că $x_0 \in \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

2) Presupunem că $x_0 \in \mathbb{R}$ și $l = \infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem $f(x) > \varepsilon$.

3) Presupunem că $x_0 \in \mathbb{R}$ și $l = -\infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem $f(x) < \varepsilon$.

4) Presupunem că $x_0 = \infty$ și $l = \infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $\infty > x > \delta_\varepsilon$, avem $f(x) > \varepsilon$.

5) Presupunem că $x_0 = \infty$ și $l = -\infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $\infty > x > \delta_\varepsilon$, avem $f(x) < \varepsilon$.

6) Presupunem că $x_0 = -\infty$ și $l = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $-\infty < x < \delta_\varepsilon$, avem $f(x) > \varepsilon$.

7) Presupunem că $x_0 = -\infty$ și $l = -\infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $-\infty < x < \delta_\varepsilon$, avem $f(x) < \varepsilon$.

8) Presupunem că $x_0 = +\infty$ și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $\infty > x > \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

9) Presupunem că $x_0 = -\infty$ și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $-\infty < x < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

<u>Limite remarcabile.</u> 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

5) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; 6) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$;

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; 8) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, unde $a\in$

$\in(0;+\infty)$; 9) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$, unde $r\in\mathbb{R}$.

<u>Propoziție</u>. Fie (X,τ) un spațiu topologic, $A\subset X$, $x_0\in A'$, $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$, $g:A\to\overline{\mathbb{R}}$, $l_1\in\overline{\mathbb{R}}$ și $l_2\in\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\lim_{x\to x_0}f(x)=$ $=l_1$ și $\lim_{x\to x_0}g(x)=l_2$. Atunci:

1) $l_1, l_2\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=l_1+l_2$.

2) $l_1, l_2\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=l_1\cdot l_2$.

3) $f(x)\neq 0\ \forall x\in A$ și $l_1\neq 0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{l_1}$.

4) $l_1=+\infty$ și $l_2>-\infty\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$.

5) $l_1=-\infty$ și $l_2<+\infty\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$.

6) $l_1=+\infty$ și $l_2>0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=+\infty$.

7) $l_1=+\infty$ și $l_2<0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=-\infty$.

8) $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=-\lim_{x\to x_0}f(x)=-l_1$.

9) $f(x)\neq 0\ \forall x\in A$ și $l_1\in\{\pm\infty\}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=0$.

Funcții continue

Definiție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $x_0 \in X$ și $f: X \to Y$. Spunem că f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice $W \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$, avem $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_{x_0}$.

Definiție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice și $f: X \to Y$. Dacă f este continuă în fiecare punct din X, vom spune simplu, că f este continuă.

Propoziție. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$ și $\tau_A = \{D \cap A \mid D \in \tau\}$. Atunci (A, τ_A) este spațiu topologic.

Propoziție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A$ și $f: A \to Y$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $W \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$, există $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât

$f(V \cap A) \subset W$.

<u>Observație.</u> Din definiție rezultă că dacă $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic, atunci aplicația identică a lui X (i.e. $id_X : X \to X$, $id_X(x) = x \ \forall x \in X$) este continuă. De asemenea dacă $(X, \mathcal{T}_1)$ și $(Y, \mathcal{T}_2)$ sunt spații topologice, atunci pentru orice $y_0 \in Y$, funcția constantă de la X la Y, egală în orice $x \in X$ cu y_0 este continuă.

<u>Propoziție.</u> Fie $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ și $(Z, \mathcal{T}_3)$ trei spații topologice și $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ două funcții continue în $x_0 \in X$ și, respectiv, în $y_0 = f(x_0) \in Y$. Atunci funcția $g \circ f : X \to Z$ este continuă în x_0.

<u>Propoziție.</u> Fie $(X, \mathcal{T}_1)$ și $(Y, \mathcal{T}_2)$ două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A$ și $f : X \to Y$.

1) Dacă f este continuă în x_0 atunci restricția

$f|_A : A \to Y$ este continuă în x_0.

2) Dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ și $f|_A : A \to Y$ este continuă în x_0, atunci f este continuă în x_0.

Observații. 1) Fie (X, τ) un spațiu topologic, $x_0 \in X$ și $f : X \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_{x_0}$ cu proprietatea că $\forall x \in V_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, $x_0 \in X$ și $f : X \to Y$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in X$ astfel încât $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

(i.e. $\forall x \in B(x_0, \delta_\varepsilon)$, avem $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$).

3) Fie $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in A$ astfel încât $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) -$

$- f(x_0)| < \varepsilon$.

4) Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}} \overset{def.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a.î. $+\infty \in A$ şi $f: A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în $+\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in A$, $x > \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(\infty)| < \varepsilon$.

5) Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}} \overset{def.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a.î. $+\infty \in A$ şi $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(+\infty) = +\infty$. Atunci f este continuă în $+\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in A$, $x > \delta_\varepsilon$, avem $f(x) > \varepsilon$.

<u>Propoziţie.</u> Fie $(X, \mathcal{T}_1)$ şi $(Y, \mathcal{T}_2)$ două spaţii topologice şi $f: X \to Y$. Sunt echivalente:

1) f continuă.

2) $\forall G \in \mathcal{T}_2$, avem $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1$.

3) $\forall F \subset Y$, F închisă (i.e. $CF \in \mathcal{T}_2$), avem $f^{-1}(F)$ închisă (i.e. $Cf^{-1}(F) \in \mathcal{T}_1$).

4) $\forall B \subset Y$, avem $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$.

5) $\forall A \subset X$, avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

<u>Propoziție</u>. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, A compactă și $f : A \to Y$, f continuă. Atunci $f(A)$ compactă.

<u>Propoziție</u>. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, $x \in X$ și $f : X \to Y$. Atunci f este continuă în x dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_n \subset X$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d_1}{=} x$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} f(x)$.

<u>Propoziție</u>. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $g : A \to \mathbb{R}$.

Dacă f și g sunt continue în x_0, atunci funcțiile $f+g$, $f \cdot g$ și $|f|$ sunt continue în x_0.

Dacă f este continuă în x_0 și $f(x) \neq 0$ $\forall x \in A$

atunci funcția $\frac{1}{f}$ este continuă în x_0.

<u>Teoremă.</u> Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A \cap A'$ și $f: A \to Y$. Sunt echivalente:

1) f continuă în x_0.

2) f are limita $f(x_0)$ în x_0.

<u>Teoremă (Teorema privind mărginirea funcțiilor continue).</u> Fie (X, τ) un spațiu topologic, $K \subset X$ o mulțime compactă și $f: K \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci există $x^*, x_* \in K$ astfel încât $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in K\}$ și $f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in K\}$.