# Exerciții

1. Studiați convergența simplă și uniformă pentru următoarele șiruri de funcții:

a) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

b) $f_n : [1,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{-nx^2} \sin nx\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

d) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x+n}{x+n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

e) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

f) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^x + x^n}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

g) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{e^x \cdot x^n}{1+x^n}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

h) $f_n : [3,5] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(x+n)^3}{n^4}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n(1-x^n)\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

j) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n(1-x)^n\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

k) $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^3}{n^3+x^3}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

l) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

2. Arătați că următoarele serii de funcții converg uniform:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^8 x^2}.$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n(n+1)}.$$

3. Determinați mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n.$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+1}} x^n.$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1) \cdot 2^n}.$$

d) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3^n}} (x+2)^n.$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)\sqrt{n}}.$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[5]{n+1}} x^n$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\,\sqrt[4]{n+2}} (x-2)^n$.

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5} x^n$.

4. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui $x$ următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

b) $f:(-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$.

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)$.