CURS 6
SERII DE PUTERI
DEZVOLTARI IN SERII TAYLOR

A) SERII DE PUTERI

Definitia 1. Se numeste serie de puteri in jurul punctului $x_0 \in \mathbb{R}$ seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, unde functia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definita prin $f_0(x) = a_0 \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = a_n (x - x_0)^n \, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Notatie. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Definitia 2. a) Numarul $R = \sup\{r \geq 0 | \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ } \textit{serie convergenta}\} \in [0, +\infty]$ se numeste raza de convergenta a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

b) Intervalul $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \mathbb{R}$ se numeste intervalul de convergenta al seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

c) Multimea $A = \{x \in \mathbb{R} | \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ } \textit{serie convergenta} \} \subseteq \mathbb{R}$ se numeste multimea de convergenta a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

d) Functia $f : A \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n \, \forall x \in A$ se numeste suma seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Observatie. 1) $x_0 \in A$

2) $f(x_0) = a_0$.

Teorema Cauchy-Hadamard. Se considera seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ si numarul $l = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$. Raza de convergenta a seriei de puteri este data de formula

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, l \in (0, +\infty) \\ +\infty, l = 0 \\ 0, l = +\infty \end{cases}$$

Teorema lui Abel. Se conseidera seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$ si R raza sa de convergenta. Atunci:

a) $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$ este absolut convergenta;

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$ seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$ este divergenta;

c) Daca $R > 0$, pentru orice numar real $r \in (0, R)$ seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \ (x - x_0)^n$ este absolut si uniform convergenta pe $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Corolar. a) Sunt adevarate incluziunile $A \subseteq \mathbb{R}$ si $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$.

b) Daca $R = +\infty$, atunci $A = \mathbb{R}$.

c) Daca $R = 0$, atunci $A = \{x_0\}$.

Teorema 1. Se considera seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \ (x - x_0)^n$ cu $R > 0$ si $f : A \to \mathbb{R}$ suma seriei de puteri. Atunci:

a) $f\mid_{(x_0 - R, x_0 + R)}$ este functie de clasa C^{∞} pe $(x_0 - R, x_0 + R)$. In plus,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x - x_0)^n\right)^{(k)} \ \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n.$$

b) f este functie continua pe A.

B) DEZVOTARI IN SERIE TAYLOR

Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^{∞} pe intervalul I.

Definitia 3. Seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ se numeste seria Taylor asociata functiei f in jurul punctului x_0.

Teorema 2. Fie $a < b \in \mathbb{R}, I = [a, b]$ *sau* $I = (a, b)$ *sau* $I = [a, b)$ *sau* $I = (a, b]$, $x_0 \in I$ si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^{∞} pe intervalul I pentru care $\exists M > 0$ astfel incat $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \ \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci seria Taylor asociata functiei f in jurul punctului x_0 este uniform convergenta pe I si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \ \forall x \in I$.

Dezvotari in serie Taylor in jurul punctului $x_0 = 0$ ale unor functii elementare

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \forall x \in \mathbb{R}$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ \forall x \in \mathbb{R}$

4) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \ \forall x \in (-1, 1)$

5) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ \forall x \in (-1, 1)$