FUNCTII INTEGRABILE RIEMANN

A) NOTIUNI GENERALE

Definitia 1. Se numeste diviziune a intervalului $[a,b]$ cu $a < b \in \mathbb{R}$ o multime finita de elemente $\Delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ astfel incat $x_0 < x_1 < ..... < x_n = b$.

Notatie.$\Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$

$D([a,b]) = \{\Delta | \, \Delta \; diviziune \; a \; intervalului \; [a,b]\}$

Definitia 2. Fie $\Delta \in D([a,b]), \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$.

a) Numarul real $\|\Delta\| = \max\{|x_{i+1} - x_i| \, | \, 0 \le i \le n-1\}$ se numeste norma diviziunii Δ.

b) O multime finita $t_\Delta = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ cu $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall 1 \le i \le n$ se numeste sistem de puncte internediare asociat diviziunii Δ.

Definitia 3. Se considera o functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Delta \in D([a,b])$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ si $t_\Delta = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Numarul real $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ se numeste suma Riemann asociata functiei f, diviziunii Δ si sistemului de puncte intermediare t_Δ.

Notatie.$\sigma_\Delta(f; t_\Delta) \overset{not}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$

Definitia 4. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita, $\Delta \in D([a,b]), \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ si $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \forall 1 \le i \le n$.

a) Numarul real $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ se numeste suma Darboux superioara asociata functiei f si diviziunii Δ.

b) Numarul real $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ se numeste suma Darboux inferioara asociata functiei f si diviziunii Δ.

Notatie. $S_\Delta(f) \overset{not}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$

$s_\Delta(f) \overset{not}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

Definitia 5. O functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeste integrabila Riemann pe $[a,b]$ daca $\exists I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $|\sigma_\Delta(f; t_\Delta) - I| < \varepsilon \forall \Delta \in D([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ si $\forall t_\Delta$ sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ.

Notatie. a) $I \overset{not}{=} \int\limits_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ -integrala Riemann a functiei f pe $[a,b]$

b) $\Re([a,b]) \overset{not}{=} \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | \, f \; functie \; integrabila \; Riemann \; pe \; [a,b]\}$

Teorema 1. Fie $f \in \Re([a,b])$. Pentru orice sir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} \|\Delta_n\| = 0$ si pentru orice t_{Δ_n} sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n exista $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_{\Delta_n}(f; t_{\Delta_n}) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Criteriul de integrabilitate al lui Darboux. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) $f \in \Re\left([a,b]\right)$

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $S_\Delta\left(f\right) - s_\Delta\left(f\right) < \varepsilon \, \forall \Delta \in D\left([a,b]\right)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Definitia 6. O multime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeste neglijabila Lebesgue daca $\forall \varepsilon > 0 \varepsilon$ $\exists \left((a_n, b_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sir de intervale deschise astfel incat $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Teorema 2 (Proprietatile multimilor neglijabile Lebesgue). Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) Daca $A \subseteq \mathbb{R}$ este multime neglijabila Lebesgue si $B \subseteq A$, atunci B este multime neglijabila Lebesgue.

b) Daca $A \subseteq \mathbb{R}$ este multime finita sau multime numarabila, atunci A este neglijabila Lebesgue.

c) Daca $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un sir de multimi neglijabile Lebesgue, atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este multime neglijabila Lebesgue.

d) Multimea vida $\varnothing$ este neglijabila Lebesgue.

Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue. O functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$ daca si numai daca f este functie marginita si $D_f = \{x \in [a,b] | \, f \textit{ nu este continua in } x\}$ este multime neglijabila Lebesgue.

Observatie. 1) Daca $f, g \in \Re\left([a,b]\right)$, atunci $\alpha f + \beta g \in \Re\left([a,b]\right)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si $\int\limits_a^b \left(\alpha f\left(x\right) + \beta g\left(x\right)\right) dx = \alpha \int\limits_a^b f\left(x\right) dx + \beta \int\limits_a^b g(x) dx$.

2) Daca $f, g \in \Re\left([a,b]\right)$, atunci $f \cdot g \in \Re\left([a,b]\right)$.

Teorema 3. a) Orice functie continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$.

b) Orice functie monotona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$.

Demonstratie. a) In demonstratie folosim criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.

$[a,b]$ multime compacta in $\mathbb{R}$

f functie continua pe $[a,b] \Rightarrow f$ functie marginita pe $[a,b]$ (1)

$D_f = \varnothing \Rightarrow D_f$ multime neglijabila Lebesgue (2)

Din relatiile (1) si (2), folosind criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezulta ca $f \in \Re\left([a,b]\right)$.

b) Vom utiliza criteriul de integrabilitate al lui Darboux.

Presupunem, fara a restrange generalitatea, ca f este functie crescatoare.

Fie $\Delta \in D\left([a,b]\right), \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$. Vom evalua $S_\Delta\left(f\right) - s_\Delta\left(f\right)$.

$S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

$s_\Delta\left(f\right) = \sum\limits_{i=1i}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$

$S_\Delta\left(f\right) - s_\Delta\left(f\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f\left(x_{i-1}\right))(x_i - x_{i-1}) \leq \|\Delta\| \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f\left(x_{i-1}\right)) = \|\Delta\| \left(f\left(b\right) - f\left(a\right)\right)$

Fie $\varepsilon > 0$.

Alegem $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$

$\forall\Delta \in D([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem ca $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \|\Delta\|(f(b) - f(a)) \leq \delta_\varepsilon(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.

Aplicand criteriul de integrabilitate al lui Darboux, deducam ca $f \in \Re([a,b])$.

Teorema 4. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii astfel ca $f \in \Re([a,b])$ si $A = \{x \in [a,b] |\, f(x) \neq g(x)\}$ este multime finita. Atunci $g \in \Re([a,b])$ si $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

Exemplu. Sa se arate ca functia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data de $f(x) = \begin{cases} x^2, x \in (0,1] \\ 2, x = 0 \end{cases}$ este integrabila Riemann pe $[0,1]$ si sa se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

Se observa ca f este continua pe multimea $(0,1]$ si ca f nu este continua in punctul $x_0 = 0$.

$D_f = \{0\}$ multime finita$\Rightarrow D_f$ multime neglijabila Lebesgue

$0 \leq f(x) \leq 2\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ functie marginita

Aplicand criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, avem ca f este integrabila Riemann pe $[0,1]$.

Alegem $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = x^2\ \forall x \in [0,1]$.

g functie continua pe $[0,1] \Rightarrow g$ functie integrabila Riemann pe $[0,1]$.

$A = \{x \in [0,1] |\, f(x) \neq g(x)\} = \{0\}$ multime finita.

Din teorema 4 avem ca

$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\ |_0^1 = \frac{1}{3}$.

B) PROPRIETATILE FUNCTIILOR INTEGRABILE RIEMANN

Definitia 7. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f, F : I \to \mathbb{R}$ doua functii. Spunem ca F este o primitiva a functiei f daca F este functie derivabila pe I si $F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in I$.

Teorema 5. Fie $f \in \Re([a,b])$ si functia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita prin $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt\ \forall x \in [a,b]$. Atunci F este functie continua pe $[a,b]$. Daca, in plus, f este continua in punctul $x_0 \in [a,b]$, atunci F este derivabila in x_0 si $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corolar. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat. Orice functie continua $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I.

Teorema 6. Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ doua intervale nedegenerate, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua pe I si $g, h : J \to I$ doua functii derivabile pe J. Atunci functia $F : J \to \mathbb{R}$ definita prin $F(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ este derivabila pe J si $F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)\ \ \forall x \in J$.

Formula Leibniz-Newton. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann care admite primitive, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fiind una dintre primitivele functiei f. Atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Formula de integrare prin parti pentru integrala Riemann. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile astfel ca $f', g' \in \Re([a,b])$. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Teorema 7. Se considera $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii integrabile Riemann.

a) Daca $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Daca $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

c) Daca $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ si $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

d) Daca $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ si $\exists x_0 \in [a,b]$ astfel incat f este continua in x_0, atunci $f(x_0) = 0$.

e) Avem ca $|f| \in \Re([a,b])$ si ca

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Teorema de medie pentru functii integrabile Riemann. Se considera $f, g \in \Re([a,b])$ cu urmatoarele proprietati:

a) f are proprietatea lui Darboux

b) $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel incat $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Corolar. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua. Atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel incat $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Teorema convergentei uniforme pentru integrala Riemann. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie astfel ca $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci $f \in \Re([a,b])$ si $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Teorema convergentei marginite pentru integrala Riemann. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f \in \Re([a,b])$ astfel ca:

a) $f_n \xrightarrow{s} f$

b) $\exists M > 0$ astfel incat $|f_n(x)| \leq M \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

Teorema convergentei monotone pentru integrala Riemann. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f \in \Re([a,b])$ astfel ca:

a) $f_n \xrightarrow{s} f$

b) $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_n \geq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Exemplu. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Se alege sirul de functii $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

f_n functie continua pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ integrabila Riemann pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Este clar ca $f_n \xrightarrow{s} f$.

f este functie marginita pe $[0,1]$ si $D_f = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ este multime neglijabila Lebesgue$\Rightarrow$ f este integtabila Riemann pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$|f_n(x)| = |\sin^n x| \leq 1 \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$

Se verifica ipotezele teoremei convergentei marginite pentru integrala Riemann. Asadar, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0.$