Seminar 1

1. Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați, folosind doar definiția, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

<u>Sol</u>.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$. Căutam $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Alegem $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$.

Deci, $\forall\, n \geq n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, avem

$n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Arătați că $l \in \mathbb{Z}$.

<u>Sol</u>.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

În acest exercițiu știm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, deci știm că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

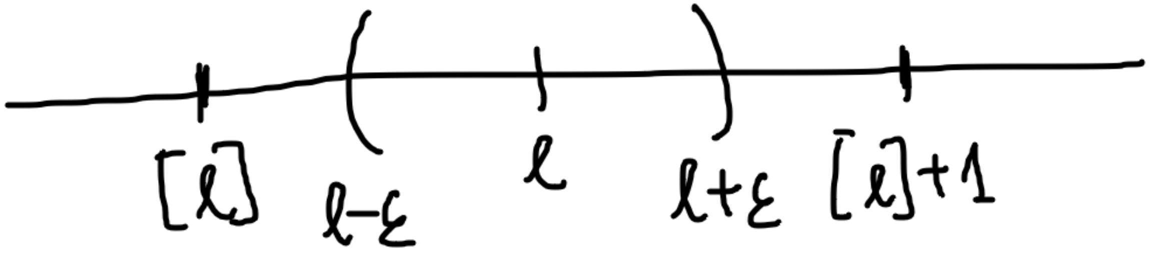
$$|x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + l < x_n < \varepsilon + l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

Deci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

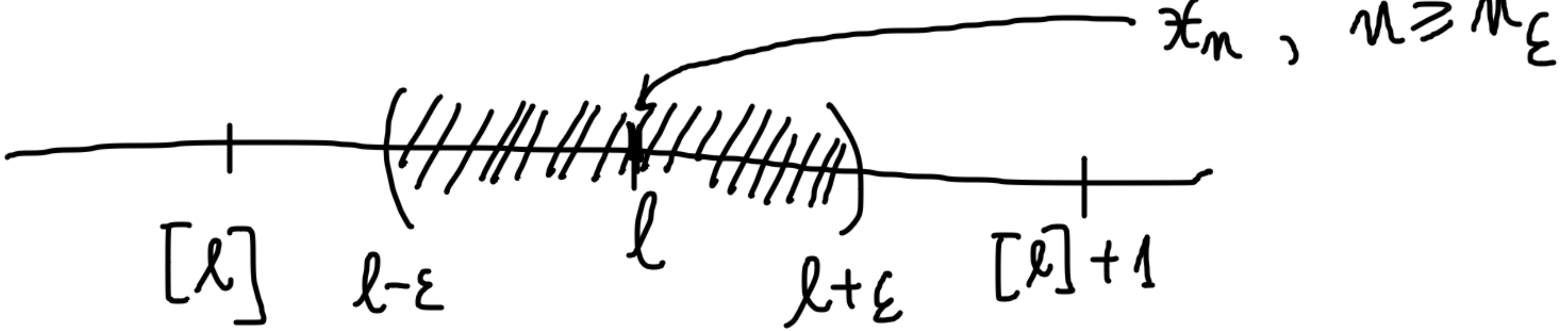
Presupunem prin absurd că $l \notin \mathbb{Z}$.



Alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $[l] < l-\varepsilon$ și $l+\varepsilon < [l]+1$, deci $0 < \varepsilon < l-[l]$ și $0 < \varepsilon < [l]+1-l$. Acest lucru este posibil deoarece $[l] < l$ (pentru că $l \notin \mathbb{Z}$) și $l < [l]+1$.

De exemplu putem alege $\varepsilon \in \left(0, \min\{\ell-[\ell], [\ell]+1-\ell\}\right)$.

Pentru acest ε există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$.



Dar, $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \phi$, contradicție cu $x_n \in$

$\in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon$.

Prin urmare $l \in \mathbb{Z}$. $\square$

<u>Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi.</u>

Fie $(x_n)_n \subset (0,\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} l \in [0,\infty] \overset{not.}{=} [0,\infty) \cup \{\infty\}$.

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

3. Fie $a>0$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a^n$.

<u>Sol</u>.: Fie $x_n = n a^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicăm Crit. rap. pt. șiruri cu termeni strict poziitivi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,\overset{a}{\cancel{a^{n+1}}}}{n\,\cancel{a^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\,a=a.$$

1) Dacă $a<1$ $\left(\text{i.e. } a\in(0,1)\right)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

2) Dacă $a>1$ $\left(\text{i.e. } a\in(1,\infty)\right)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

3) Dacă $a=1$, atunci acest criteriu nu decide, dar, în acest caz, $x_n=n\cdot 1^n=n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Am obținut: $\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & ; a\in(0,1) \\ \infty & ; a\in[1,\infty). \end{cases}$ $\square$

3'. Fie $a>0$. Det. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$.

Sol.: Rezolvați-l voi! $\square$

Criteriul radicalului pentru șiruri cu termeni pozitivi. Fie $(x_n)_n \subset [0,\infty)$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{\text{not.}}{=} l \in [0,\infty]$.

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

4. Fie $a, b \in (0,\infty)$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a\cdot n^2+3n+5}{b\cdot n^2+2n+3}\right)^n$.

<u>Sol</u>.: Fie $x_n = \left(\dfrac{a n^2+3n+5}{b n^2+2n+3}\right)^n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicăm crit. rad. pt. şiruri cu termeni pozitivi.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+3n+5}{bn^2+2n+3} = \frac{a}{b}.$$

1) Dacă $\frac{a}{b} < 1$ (i.e. $a < b$), atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $\frac{a}{b} > 1$ (i.e. $a > b$), atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $\frac{a}{b} = 1$ (i.e. $a = b$), atunci acest criteriu nu

decide, dar, în acest caz, $x_n = \left(\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}\right)^n \; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}-1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{an^2}+3n+5-\cancel{an^2}-2n-3}{an^2+2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^{\frac{an^2+2n+3}{n+2}}\right]^{\frac{n+2}{an^2+2n+3}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{an^2+2n+3} \cdot n} = e^{\frac{1}{a}}. \quad \square$$

4'. Fie $a \in (0,\infty)$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a \cdot n}{3n+1}\right)^n$.

__Sol.__: Rezolvați-l voi! $\square$

[__Propoziție__. Fie $(x_n)_n \subset (0,\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{\text{not.}}{=} l \in [0,\infty]$.
Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

5. Det. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

<u>Sol</u>: Fie $x_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Conform propoziției de mai sus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, i.e.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\square$

5. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Sol: Rezolvați-l voi! $\square$

6. Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $(x_n)_n$ este convergent.

Sol: Folosim Teorema lui Weierstrass.

Monotonia

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Deci $(x_n)_n$ este strict crescător. (1)

Mărginirea.

Deoarece $(x_n)_n$ este strict crescător, avem $\underset{\substack{\| \\ 1}}{x_1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

i.e. $(x_n)_n$ este mărginit inferior.

$$2^2 > 1 \cdot 2 \Rightarrow \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$3^2 > 2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

....

$$n^2 > (n-1)n \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

„+"

Deci $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$

$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) \cancel{+} \ldots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$

Așadar $(x_n)_n$ este mărginit superior.

Prin urmare $(x_n)_n$ este mărginit. (2)

Din (1) și (2) rezultă, conform Teoremei lui Weierstrass,

că $(x_n)_n$ este convergent. $\square$