Seminar 6

1. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții continue în x_0 și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x); & x \in \mathbb{Q} \\ g(x); & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Arătați că h este continuă în x_0 dacă și numai dacă $f(x_0) = g(x_0)$ $(= h(x_0))$.

Sol.: „$\Rightarrow$"

Presupunem că h este continuă în x_0. Arătăm că $f(x_0) = g(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow \exists (a_n)_n \subset \mathbb{Q} \text{ a.î. } \lim_{n\to\infty} a_n = x_0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow \exists (b_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ a.î. } \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

$$h \text{ cont. în } x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(a_n) = h(x_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} h(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ cont în } x_0}}{=} f(x_0).$$

Așadar $f(x_0) = h(x_0)$.

Analog $g(x_0)=h(x_0)$.

Prin urmare $f(x_0)=g(x_0)=h(x_0)$.

"$\Leftarrow$"

Presupunem că $f(x_0)=g(x_0)\ (=h(x_0))$. Arătăm că h e continuă în x_0.

Fie $(z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$.

$$|h(z_n)-h(x_0)| = \begin{cases} |f(z_n)-f(x_0)| & ; z_n\in\mathbb{Q} \\ |g(z_n)-g(x_0)| & ; z_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(z_n)-f(x_0)|}_{\substack{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (f \text{ cont. în } x_0)}} + \underbrace{|g(z_n)-g(x_0)|}_{\substack{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (g \text{ cont. în } x_0)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} h(z_n)=h(x_0)$, i.e. h cont. în x_0. $\square$

2. Studiați continuitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, unde:

a) $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Sol.: f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| =$$

$$= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \implies$$

≤ 1 (Explicație: $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$)

$$\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \implies f \text{ continuă în } (0,0). \quad \square$$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Sol.: f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{2}{\cancel{n^2}}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Deci f nu este continuă în $(0,0)$. $\square$

3. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Studiați uniform continuitatea funcției f.

Sol.: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in (0,\infty)$.

$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in [1,\infty)$.

Deci f este uniform continuă pe $[1,\infty)$ (i.e. $f|_{[1,\infty)}$ este uniform continuă).

Fie $f|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f|_{[0,1]}(x) = \sqrt{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} f|_{[0,1]} \text{ continuă} \\ [0,1] \text{ mulțime compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f|_{[0,1]} \text{ este u.c.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ u.c. pe $[0,1]$.

Așadar f este u.c. (pe $[a,\infty)$). $\square$

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0. \end{cases}$

Studiați continuitatea și uniform continuitatea funcției f.

Sol.: f continuă pe $\mathbb{R}^*$.

Studiem continuitatea lui f în 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ 0\cdot\text{mărginit}=0}}{=} 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ cont. în } 0.$$

f derivabilă pe $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \left(x\sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} + x\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \sin\frac{1}{x} + x\cdot\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*.$$

$$|f'(x)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right| \le \left|\sin\frac{1}{x}\right| + \left|-\frac{1}{x}\right|\cdot\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{|x|} \le 2 \quad \forall x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty).$$

Deci f este u.c. pe $(-\infty,-1]$ și f este u.c. pe

$[1,\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont. pe } [-1,1] \\ [-1,1] \text{ mulțime compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ u. c. pe } [-1,1].$$

Așadar f este uniform continuă pe $(-\infty,1]$ și f este uniform continuă pe $[1,\infty)$.

Prin urmare f este uniform continuă (pe $\mathbb{R}$). □

5. Studiați uniform continuitatea funcțiilor:

a) $f:[1,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

Sol.: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in[1,2)$.

$|f'(x)|\leq 1$ $\forall x\in[1,2)$.

Deci f este u. c. □

b) $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

Sol.: Alegem $x_n=\frac{1}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $y_n=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\cancel{n}+1-\cancel{n})=1\neq 0$. Deci f nu este u. c. □

6. Fie $a \geq 0$ și $f:(a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Arătați că f este u.c. dacă și numai dacă $a > 0$.

Sol.: „$\Leftarrow$"

Presupunem că $a>0$. Arătăm că f este u.c.

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall\, x \in (a,\infty)$.

Avem $|f'(x)| < \frac{1}{a}$ $\forall\, x \in (a,\infty)$.

Deci f este u.c.

„$\Rightarrow$"

Presupunem că f este u.c. Arătăm că $a>0$.

Presupunem prin absurd că $a=0$.

Alegem $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n) - f(y_n)\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln n = \infty \neq 0.$$

Deci f nu este u.c., contradicție.

Așadar $a>0$. $\square$