Cursul 2

De data trecută:

Ω = sp. total

$\omega \in \Omega$ s.n. experiment.

$A \subseteq \Omega$ $\left(A \in \mathcal{P}(\Omega) \right)$ s.n. eveniment

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ s.n. algebră dacă:

  i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

  ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (inductiv $\Rightarrow A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$)

  iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ s.n. σ-algebră dacă

  i) la fel

  ii). $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

  iii) la fel

- Fie $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

i) $\mathcal{A}(\mathcal{C}) :=$ cea mai mică algebră ce conține $\mathcal{C}$

$$:= \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ alg} \\ \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}}} \mathcal{A}$$

ii) $\sigma(\mathcal{C}) :=$ ——— " ——— σ-algebră ——— " ———

$$= \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \ \sigma\text{-alg.} \\ \mathcal{F} \supseteq \mathcal{C}}} \mathcal{F}$$

Prop 1. Fie Ω cel mult nt, i.e. $\Omega = \{\omega_1, \dots\}$.

$$\mathscr{C} = \{ \{\omega_i\} : i \geq 1 \}$$

$$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{P}(\Omega).$$

Dem. $\underline{\mathscr{P}(\Omega) \subseteq \sigma(\mathscr{C})}$

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow A = \bigcup_{\omega_i \in A} \overbrace{\{\omega_i\}}^{\in \mathscr{C}} \in \sigma(\mathscr{C}).$$

cel mult nt.

$\underline{\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{P}(\Omega)}$

trivial.

Ex 1. Fie $\Omega = \mathbb{R}$

$$\mathcal{C} = \{ \{x\} : x \in \mathbb{R} \}$$

Cine e $\sigma(\mathcal{C}) = ?$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{ \overbrace{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ este cel mult nr sau } A^c \text{ e cel mult nr}}^{\mathcal{F}} \}$$

Rem. Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ e interval $\Rightarrow I \notin \sigma(\mathcal{C})$

Morala: $\sigma(\mathcal{C})$ este f. săracă.

dem. Arătăm că ① $\mathcal{F}$ e o σ-algebră ce conține $\mathcal{C}$

② Dacă $\mathcal{G}$ e σ-alg ce conține $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

①. $\underline{\mathcal{F} \supseteq \mathcal{C}}.$

$\mathcal{C} \ni \{x\} \in \mathcal{F}$ trivial.

$\underline{\mathcal{F} \text{ e } \sigma\text{-algebră}}.$

i). $\emptyset \in \mathcal{F}$ trivial ; $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$ da pt că $\mathbb{R}^c = \emptyset \in \mathcal{F}$

ii). Dacă $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

I. Dacă A_n e c.m.nr $\forall n \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n$ e c.m.nr $\in \mathcal{F}$

II. Dacă $\exists A_{n_0} \in \mathcal{F}$ nenumărabilă $\Rightarrow A_{n_0}^c$ e cel mult nr.

$$\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)^c = \bigcap_{n\geq 1} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c \text{ e cel mult nr.}$$

iii). $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ trivial.

② Fie $\mathcal{G}$ σ-algebră ce conține $\mathcal{C}$.

Vrem $\underline{\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}}$

Fie $A \in \mathcal{F}$ $\xrightarrow{A \text{ c.m.nr.}}$ $A = \bigcup_{x \in A} \underbrace{\{x\}}_{\in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}} \in \mathcal{G}$.

A^c c.m.nr. $\Rightarrow A^c \in \mathcal{G} \Rightarrow \underbrace{(A^c)^c}_{= A} \in \mathcal{G}$ ∎

Ex 2. (temă). Fie $\Omega = \mathbb{R}$

și

$\mathcal{C}_1 = \{ [a,b] : -\infty < a < b < \infty \}$ $\quad \mathcal{C}_2 = \{ (a,b) : -\infty < a < b < \infty \}$

$\mathcal{C}_3 = \{ (-\infty, b] : b < \infty \}$ $\quad \mathcal{C}_4 = \{ (-\infty, b) : b < \infty \}$

$\mathcal{C}_5 = \{ [a, +\infty) : a > -\infty \}$ $\quad \mathcal{C}_6 = \{ (a, +\infty) : a > -\infty \}$

$\mathcal{C}_7 = \{ (a, b] : -\infty < a < b < \infty \}$ $\quad \mathcal{C}_8 = \{ [a, b) : -\infty < a < b < +\infty \}$

$\sigma(\mathcal{C}_i) = \sigma(\mathcal{C}_1) \ \forall i = \overline{1,8}$.

Def. $\sigma(\mathcal{C}_i) =: \mathcal{B}(\mathbb{R})$ s.n. σ-algebra Borel pe $\mathbb{R}$, iar

~~un~~ o mulțime $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ s.n. Borel măsurabilă.

Temă. ii) $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$ este Borel măsurabilă.

i) $\{x\}$ cu $x \in \mathbb{R}$ e Borel măsurabilă.

Probabilități (măsuri) pe spații măsurabile.

Def. Un spațiu total $\Omega \neq \emptyset$ împreună cu o σ-algebră $\mathcal{F}$ de mulțimi pe Ω, i.e. $(\Omega, \mathcal{F})$, s.n. spațiu măsurabil.

Ce vrem?

$\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A) \in [0,1]$ cu interpretarea că $\mathbb{P}(A)$ reprezintă o măsură pt șansa / riscul ca A să aibe loc.

Exemplul 1. (probabilitatea de numărare).

Fie Ω o mulțime finită $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$

$$\mathcal{C} = \{\{\omega_i\} : i \in \{1, \dots n\}\}$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\Omega)$$

Pt $A \in \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\Omega)$ vrem $\mathbb{P}(A) = ?$

de exemplu: Aruncăm cu zarul $\to \Omega = \{1, \dots, 6\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A)$

dacă $A = \{2, 4, 6\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

dacă $A = \{3, 6\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

Mai general, definim

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} \quad \forall \quad A \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).$$

$\hookrightarrow$ s.n. măsura (prob.) de numărare ∇

Ce proprietăți are $\mathbb{P}$?

① $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

② Dacă $A, B \in \mathcal{F}$ cu $A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

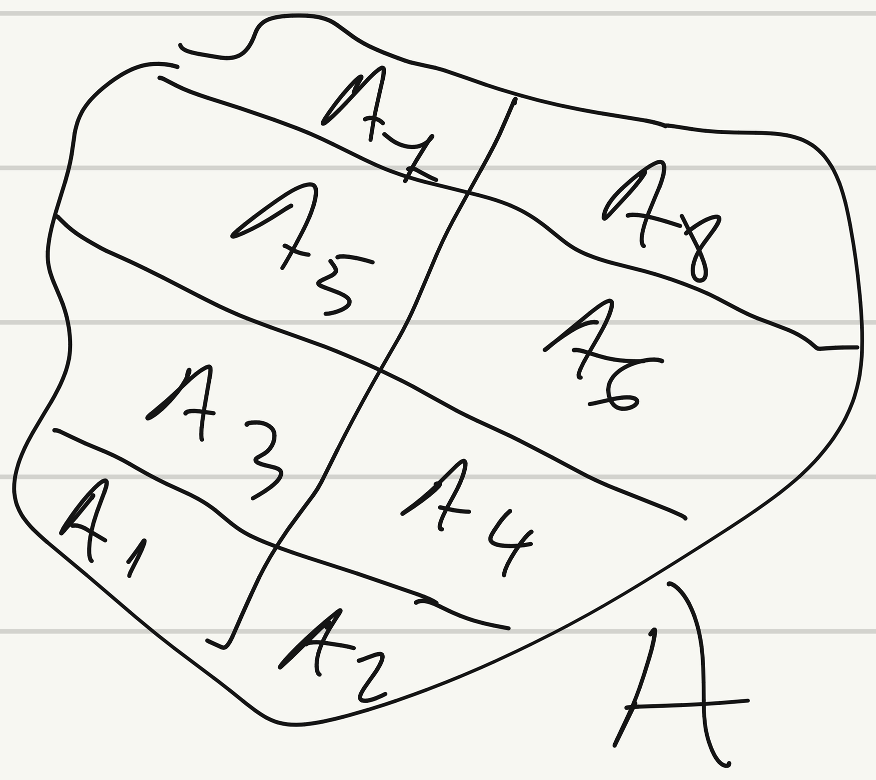
inducție

$A_1, \dots, A_k$ sunt disj.

$\Downarrow$

$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_k)$

③ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.



$\rightarrow$ Aria (A) = Aria $(A_1) + \dots +$ Aria (A_8).

Definiție. Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ un sp. măsurabil.

O aplicație $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ s.n. probabilitate dacă

i). $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii). Dacă $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ cu $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ $\Big\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$,

Teoremă (de structură pe sp. cel. mult. nr)

Fie $\Omega = \{w_1, \dots, w_n, \dots\}$ cel mult nr. și $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Atunci aplicația

$$\mathbb{P} \xmapsto{\ \Psi\ } (p_i)_{i \geq 1} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{unde } \mathbb{P} \text{ e o prob pe } (\Omega, \mathcal{F})$$

iar $p_i = \mathbb{P}(\{w_i\})$

este o bijecție între spațiul tuturor prob. pe $(\Omega, \mathcal{F})$ și spațiul $\{(p_i)_i \subseteq \mathbb{R} : p_i \geq 0, \forall i, \ \sum_{i \geq 1} p_i = 1\}$

<u>Dem</u>. Să arătăm că aplicația Ψ e bine definită.

i.e: Dacă $\mathbb{P}$ e o prob pe $(\Omega, \mathcal{F}) \Rightarrow$ șirul $(p_i)_{i \geq 1}$ definit

prin $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ satisfacee ① $p_i \geq 0$

② $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$?

$p_i \geq 0$ prin def pt că $\mathbb{P}(A) \geq 0 \ \forall A$.

$\sum_{i \geq 1} p_i = 1$
//

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \geq 1} \{\omega_i\}\Big) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i \geq 1} p_i.$$

disj.

- Este Ψ injectivă?

Dacă $\mathbb{P}$ și $\mathbb{P}'$ sunt două prob pe $(\Omega, \mathcal{F})$ a.î.

$\Psi(\mathbb{P}) = \Psi(\mathbb{P}') \Rightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}'$? $\left(\Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'(A) \ \forall A \in \mathcal{F}\right)$

$$\Psi(\mathbb{P}) = \Psi(\mathbb{P}') \iff (p_i)_{i\geq 1} = (p_i')_{i\geq 1} \iff p_i = p_i' \quad \forall\, i \geq 1.$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \; ?$$

$$A = \bigsqcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\} \quad \longleftarrow \quad \text{cel m. nr și disjuncte.}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A}' \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A}' p_i \\ &\mathbb{P}'(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'(A)$$

- Este Ψ surjectivă ?

Dat un șir $(p_i)_{i\geq 1}$ cu propr. că $p_i \geq 0 \;\forall i$ și $\sum_{i\geq 1} p_i = 1$

$\exists$? o prob $\mathbb{P}$ pe $(\Omega, \mathcal{F})$ a.î. $\underline{\underline{\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i \;\forall i}}$?

Construim $\mathbb{P}$ în doi pași:

I. Pt. $\{\omega_i\}$ setăm $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i \quad \forall i \geq 1$.

II. Pt $A \in \mathcal{F}$ definim $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A}' p_i$.

Q: este $\mathbb{P}$ definită ca mai sus o m.p. pe $(\Omega, \mathcal{F})$?

- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \begin{cases} \geq 0 & \text{pt } p_i \geq 0 \\ \leq 1 & \text{pt că } \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i \leq \sum\limits_{i \geq 1} p_i = 1. \end{cases}$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum\limits_{i \geq 1} p_i = 1$.

- $\left.\begin{matrix} A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \\ \text{disjuncte} \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i \geq 1} A_i\right) = \sum\limits_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$

$$\underline{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)} = \sum_{\omega_j \in \bigcup\limits_{i \geq 1} A_i}' p_j \underset{(A_i)_i \text{ disj.}}{=} \sum_{\omega_j \in A_1} p_j + \sum_{\omega_j \in A_2} p_j + \dots = \sum_i \underbrace{\sum_{\omega_j \in A_i} p_j}_{\mathbb{P}(A_i)} = \underline{\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i)}$$

Def. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cu Ω sp. total, $\mathcal{F}$ σ-alg și $\mathbb{P}$ prob. pe $(\Omega, \mathcal{F})$ s.n. spațiu de probabilitate. (sau sp. cu măsură de prob.).

Ex. 1. La aruncarea cu banul, care arată spațiile de prob. posibile?

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$\mathcal{C} = \{\{H\}, \{T\}\} \Rightarrow \underbrace{\sigma(\mathcal{C})}_{= \mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$$

A da o prob pe $(\Omega, \mathcal{F})$ e totuna cu a spune cine e $\underbrace{\mathbb{P}(\{H\})}_{= p_1}$ și cine e $\underbrace{\mathbb{P}(\{T\})}_{= p_2} = 1 - p_1$

2. La aruncarea cu zarul: care e spațiul de prob. posibile.

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $\mathcal{C} = \{\{1\}, \dots, \{6\}\} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

A da o prob pe Ω e totuna cu a da $p_i = \mathbb{P}(\{i\})$ cu $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

ex :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.35 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Care e prob să pice par?

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$$
$$= P_2 + P_4 + P_6 = 0.15 + 0.35 + 0.05$$
$$= 0.55.$$

<u>Problemă</u>. Putem modela următoarea situație? Avem o urnă în care punem toate nr naturale și extragem la întâmplare un nr.

i). care e prob. să pice par?

ii) care e prob să pice un nr mai mare ca 10

iii) care e prob să pice 72 ?

Modelăm: $\Omega = \mathbb{N}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

A da o prob pe $\mathcal{F}$ e totuna cu a furniza un șir $(p_i)_{i \geq 0}$

cu $p_i \geq 0$ și $\sum_{i \geq 0} p_i = 1$ unde $p_i = P(\{i\})$

Dacă pp. că fiecare nr e echiprobabil $\Rightarrow$ $p_i = p_0 \; \forall i$

ori $p_0 = 0 \Rightarrow p_i = 0 \; \forall i \Rightarrow \sum p_i = 0 \neq 1$ ∝.

ori $p_0 > 0 \Rightarrow p_i = p_0 > 0 \Rightarrow \sum_{i \geq 0} p_i + \infty \neq 1$ ∝.

Alte modele au sens.

ex: $p_i = \frac{1}{2^{i+1}}$, $i \geq 0$ $p_i \geq 0$ și $\sum p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 1$.

1 3 15 7 ca o prob?

$$\Downarrow$$

$$P_1 = \frac{1}{1+3+15+7}, \quad P_2 = \frac{3}{1+3+15+7} \quad \dots$$

$(a_i)_{i \geq 0}$ $\quad a_i \geq 0 \quad \sum_{i \geq 0} a_i < \infty$

$$\Downarrow$$

$$P_i = \frac{a_i}{\sum_{i \geq 0} a_i} \geq 0 \quad \text{și} \quad \sum P_i = \frac{\sum a_i}{\sum a_i} = 1.$$

Problemă. Dat un spațiu măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$ există măcar o prob pe $(\Omega, \mathcal{F})$?

Dacă $\Omega \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ \omega_0 \in \Omega$

Definim $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \omega_0 \in A \\ 0 & \text{dacă } \omega_0 \notin A \end{cases}$

$\quad\ \ \|$

$\delta_{\omega_0}(A) \leftarrow$ s.n. prob / măsura Dirac în punctul ω_0.

Verificați că δ_{ω_0} e o prob pe $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dacă $\exists\ \omega_1 \neq \omega_2 \in \Omega$ atunci $\exists$ o inf. de prob. pe $(\Omega, \mathcal{F})$.

Două clar avem: δ_{ω_1} și δ_{ω_2}.

$\mathbb{P}(A) = \alpha\, \delta_{\omega_1}(A) + (1-\alpha)\, \delta_{\omega_2}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$ e o prob pe $(\Omega, \mathcal{F})$ dacă $\alpha \in [0,1]$.

Temă. i). Dacă $\mathbb{P}$ și $\mathbb{Q}$ sunt două prob. dif. pe $(\Omega, \mathcal{F})$

și $\alpha \in [0,1]$, atunci

$$\mu(A) := \alpha\, \mathbb{P}(A) + (1-\alpha)\, \mathbb{Q}(A) \quad \text{e o prob pe } (\Omega, \mathcal{F}).$$

ii). Dar dacă $\mu(A) := \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{Q}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}$?

Rămâne μ o prob?

dar $\max(\ldots, \ldots)$?

Exemplu. Mihai aruncă cu un zar (posibil măsluit) de 100 de ori și ne spune la sfârșit că a picat "par" de 60 de ori și "nr ≥ 4" de 55 de ori.

Mihai ne invită să pariem pe faptul că pică "2" la următoarea aruncare. Putem modela?

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$\mathcal{C} = \{\{2,4,6\}, \{4,5,6\}\}$ $\quad \sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega, \underbrace{\{2\}, \{4,6\}, \{5\}, \{1,3\}}_{\text{atomi}}$

$\mathbb{P}(2,4,6) = 0.6 = p_1 + p_3 \qquad p_2 + p_3 = 0.55$ $\quad$ "$\mathcal{F}$" $\quad \{2,5\}, \{2,4,6\}, \{4,5,6\}, \{1,2,3\}$

$(\Omega, \mathcal{F})$ Vrem $\mathbb{P}$. $\quad \{1,3,5\}$

Analog ca la T. de structură $\quad \rightarrow \{2,5,4,6\}, \{1,2,3,5\}, \{1,3,4,6\},$

e suf. să definim $\mathbb{P}(\text{atomi})$ $\quad \{1,2,3,4,6\}, \{1,3,4,5,6\}\}$

i.e. $\underset{"p_1}{\mathbb{P}(\{2\})}$, $\underset{"p_2}{\mathbb{P}(\{5\})}$, $\underset{-21- = p_3}{\mathbb{P}(\{4,6\})}$, $\underset{"p_4}{\mathbb{P}(\{1,3\})}$

$$\begin{cases} P_i \geq 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \\ P_1 + P_3 = 0.6 \\ P_2 + P_3 = 0.55 \end{cases}$$

<u>Fixăm P_1</u>.

prost să pice {??}

$\Rightarrow P_3 = 0.6 - P_1$

$P_2 = 0.55 - P_3 = 0.55 + P_1 - 0.6 = P_1 - 0.05 \geq 0$

$\Downarrow$

$P_1 \geq 0.05$

$P_4 = 1 - \cancel{P_1} + \cancel{P_1} - 0.6 - P_1 + 0.05$

$= 0.45 - P_1 \geq 0 \Rightarrow P_1 \leq 0.45$

Deci cu restricția $\underbrace{P_1 \in [0.05, 0.45]}$.