CURSUL 1: MULŢIMI

SAI

1. Mulţimi

Definiţia 1. *(Cantor) O mulţime este o "grupare" într-un tot a unor "obiecte" distincte ale intuiţiei sau gândirii noastre.*

Vom nota faptul că obiectul x este element al mulţimii M prin $x \in M$.

Vom considera că **două mulţimi sunt egale dacă şi numai dacă au aceleaşi elemente**.

Cea mai naturală metodă de a reprezenta o mulţime este de a enumera efectiv elementele acesteia; în mod standard, elementele respective se scriu între acolade, fără repetiţii şi în orice ordine dorim.

Exemplul 2. a) $\{1, 3, -5\}$; $\{-\frac{7}{3}, \pi\}$; $\{$a;b;$1, 2(3)\}$, $\{3, -5, 1\}$, $\{-3, 5, 1\}$.
Reamintim aici şi mulţimile „uzuale" de numere:
b) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - mulţimea numerelor naturale.
c) $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - mulţimea numerelor întregi.

Observaţia 3. $\{1, 3, -5\} = \{3, -5, 1\}$, dar $\{1, 3, -5\} \neq \{-1, 3, 5\}$.

Nu toate mulţimile pot fi reprezentate de maniera sintetică propusă anterior, de cele mai multe ori motivul fiind acela că respectivele mulţimi au ,"prea multe" elemente pentru a fi posibilă (sau utilă!) o astfel de reprezentare. În astfel de situaţii, apelăm la reprezentarea mulţimilor cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice elementelor lor.

Exemplul 4. a) $\{a \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\ a = 2k + 1\}$ - mulţimea numerelor naturale impare
b) $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$ - mulţimea numerelor raţionale.
c) $\mathbb{R}$ = mulţimea numerelor ce corespund punctelor unei drepte[1] - mulţimea numerelor reale.
d) $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ - mulţimea numerelor complexe.

[1] pe care am fixat originea şi unitatea

Definiţia 5. Spunem că mulţimea A este **inclusă** în mulţimea B dacă orice element al lui A îi aparţine şi lui B. Această situaţie este descrisă şi de exprimarea „**A este submulţime a mulţimii B**”.

Desemnăm situaţia în care mulţimea A este inclusă în mulţimea B prin notaţia $A \subseteq B$.

Observaţia 6. Dacă $A \subseteq B$, putem avea $A = B$ sau nu. Dacă nu are loc egalitatea celor două mulţimi, spunem că A **este inclusă strict în** B şi scriem $A \subset B$ sau $A \subsetneq B$.

Observaţia 7. Dată fiind o mulţime M şi o proprietate $\mathcal{P}$ care are sens pentru cel puţin unul dintre elementele lui M, admitem că

$$\{x \in M \mid x \text{ are proprietatea } \mathcal{P}\}$$

este o submulţime a lui M. Acest lucru conferă legitimitate manierei "analitice” de prezentare a mulţimilor pe care am amintit-o mai sus[2].

Observaţia 8. Mulţimile A şi B sunt egale dacă şi numai dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$.

O consecinţă foarte importantă a observaţiei 8 este următoarea:

Observaţia 9. Întotdeauna egalitatea de mulţimi se demonstrează prin dublă incluziune.

Observaţia 10. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Niciuna dintre aceste incluziuni nu este egalitate.

Definiţia 11. Considerăm că există o mulţime care nu are niciun element. Ea se notează cu $\emptyset$ şi se numeşte **mulţimea vidă**.

Observaţia 12. Pentru orice mulţime M avem $\emptyset = \{x \in \mathrm{M} \mid x \neq x\}$. Prin urmare, $\emptyset \subset M$.

Se consideră că, dată fiind o mulţime M, submulţimile sale constituie o mulţime.

Definiţia 13. Dată fiind mulţimea M, mulţimea $\{A \mid A \subset M\}$ se numeşte **mulţimea părţilor lui** M. Vom nota această mulţime cu $\mathcal{P}(M)$.

[2]Atragem atenţia asupra faptului că, în lipsa unei mulţimi iniţiale M în cadrul căreia să punem problema elementelor cu proprietatea $\mathcal{P}$, nu avem garanţia că acestea constituie o mulţime. Persistenţa în a lucra cu astfel de "mulţimi” poate conduce la paradoxuri.

2. Operaţii cu mulţimi

În fiecare dintre situaţiile care urmează, în lipsa vreunei alte menţiuni, vom considera că există o mulţime „mare” care conţine toate mulţimile în discuţie.

Considerăm mulţimile A şi B.

Definiţia 14. Mulţimea $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ se numeşte **reuniunea** mulţimilor A şi B.

Definiţia 15. Mulţimea $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ se numeşte **intersecţia** mulţimilor A şi B.

Definiţia 16. Dacă $A \cap B = \emptyset$, spunem că mulţimile A şi B sunt **disjuncte**.

Definiţia 17. Mulţimea $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ se numeşte **diferenţa** mulţimilor A şi B.

Definiţia 18. $(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$ se numeşte **perechea ordonată** determinată de elementele a şi b.

Observaţia 19. Drept consecinţă a axiomelor teoriei mulţimilor obţinem în acest context faptul că toate perechile ordonate (a,b) cu $a \in A$ şi $b \in B$ constituie o mulţime.

Definiţia 20. $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$ se numeşte **produsul cartezian** al mulţimilor A şi B.

Propoziţia 21. Pentru orice mulţimi A, B şi C au loc relaţiile:
a) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
b) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Exerciţiul 22. Demonstraţi propoziţia 21!

Punctul c) al propoziţiei 21 ne sugerează următoarele definiţii:

Definiţia 23. $A \cup B \cup C \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \cup C$;
$A \cap B \cap C \stackrel{\text{def}}{=} (A \cap B) \cap C$.

Fie E o mulţime.

Definiţia 24. Pentru $A \subset E$, definim **complementara lui A în raport cu E** ca fiind mulţimea $E \setminus A$.

Notaţia utilizată pentru complementara lui A în raport cu E este $\complement_E A$. Dacă E este subînţeleasă în context, atunci complementara lui A în raport cu E se mai notează şi $\complement A$ sau $\overline{A}$.

Regulile lui de Morgan: Dacă $A, B \subset E$, atunci:

$$\complement_E(A \cup B) = \left(\complement_E A\right) \cap \left(\complement_E B\right) \quad \text{şi} \quad \complement_E(A \cap B) = \left(\complement_E A\right) \cup \left(\complement_E B\right).$$

Exerciţiul 25. Demonstraţi regulile lui de Morgan!

Definiţia 26. Dacă E este o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie $\circ : E \times E \to E$ iar $A, B \subset E$, definim $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Dacă $a \in E$, notăm $a \circ E$ (respectiv, $E \circ a$) în loc de $\{a\} \circ E$ (respectiv, de $E \circ \{a\}$).

Exemplul 27. a) $\{1, 2, 3\} + \{10, 20\} = \{11, 12, 13, 21, 22, 23\}$
b) $\{1, 2, 3\} - \{10, 20\} = \{-19, -18, -17, -9, -8, -7\}$
c) $\{1, 2, 3\} \cdot \{10, 20\} = \{10, 20, 30, 40, 60\}$
d) $2\mathbb{Z}$ = mulţimea numerelor întregi pare.
e) $3\mathbb{Z} + 1$ = mulţimea acelor numere întregi care prin împărţire la 3 dau restul 1.
f) $\{-1, 1\} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

3. Familii de mulţimi

Pentru generalizarea chestiunilor din paragraful precedent, este necesară o modalitate de a gestiona „multe” mulţimi. Una dintre cele mai frecvente abordări ale chestiunii este următoarea[3]:

Definiţia 28. Prin **familie de mulţimi indexată după mulţimea** I înţelegem o funcţie definită pe I şi ale cărei valori sunt mulţimi.

Vom nota familia mulţimilor M_i, $i \in I$, cu $(M_i)_{i \in I}$.

O consecinţă imediată a axiomelor teoriei mulţimilor este aceea că putem defini reuniunea oricărei mulţimi de mulţimi. Este legitimă deci:

Definiţia 29. Prin **reuniunea** familiei de mulţimi $(M_i)_{i \in I}$ înţelegem mulţimea $\{x \mid \exists i \in I \ \ x \in M_i\}$.

Notaţia pe care o vom folosi pentru reuniunea familiei de mulţimi $(M_i)_{i \in I}$ este $\bigcup_{i \in I} M_i$. În situaţia în care $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, reuniunea

[3] Pentru a plasa aceste consideraţii imediat după cele pe care le generalizează, utilizăm aici noţiunea de funcţie; aceasta este definită în cursul 3, iar definiţia respectivă nu se bazează pe chestiunile din acest paragraf.

familiei menţionate se notează şi $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, reuniunea familiei $(M_i)_{i \in I}$ se notează şi $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ sau $\bigcup_{i \geq 0} M_i$

Definiţia 30. Prin **intersecţia** familiei de mulţimi $(M_i)_{i \in I}$ înţelegem mulţimea $\{x \mid \forall i \in I \;\; x \in M_i\}$.

Notaţia pe care o vom folosi pentru intersecţia familiei de mulţimi $(M_i)_{i \in I}$ este $\bigcap_{i \in I} M_i$. În situaţia în care $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, intersecţia familiei menţionate se notează şi $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, intersecţia familiei $(M_i)_{i \in I}$ se notează şi $\bigcap_{i=0}^{\infty} M_i$ sau $\bigcap_{i \geq 0} M_i$

Afirmaţiile propoziţiei 21 se generalizează astfel:

Propoziţia 31. *Pentru orice familie de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ şi pentru orice mulţime B au loc relaţiile*[4]*:*

a') $\forall i \in I \qquad \bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

c') Dacă $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, iar mulţimile familiei $(I_j)_{j \in J}$ sunt disjuncte două câte două, atunci

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I_j} A_i \right) \quad \text{şi} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} A_i \right).$$

d') $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$ şi $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$.

e') $B \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)$ şi $B \times \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i)$.

Toate consideraţiile anterioare sunt, desigur, valabile şi pentru familii de submulţimi ale unei mulţimi date. În acest context funcţionează următoarea variantă generalizată a regulilor lui de Morgan:

---

[4]Punctul b) al propoziţiei 21 se generalizează la:
b') Pentru orice funcţie bijectivă $\sigma : I \to I$,
$\bigcup_{i \in I} A_{\sigma(i)} = \bigcup_{i \in I} A_i$ şi $\bigcap_{i \in I} A_{\sigma(i)} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Propoziţia 32. Dată fiind familia $(A_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale mulţimii E, au loc relaţiile:

$$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement_E A_i \quad \text{şi} \quad \complement_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement_E A_i$$

4. Corespondenţe, relaţii, compunerea relaţiilor

Definiţia 33. Numim **corespondenţă** orice triplet de mulţimi $\alpha = (A, B, \rho)$ cu proprietatea $\rho \subseteq A \times B$. ρ se numeşte relaţie de la A la B sau **graficul** corespondenţei α.

Definiţia 34. Considerăm corespondenţele $\alpha = (A, B, \rho)$ *şi* $\beta = (B, C, \sigma)$. Corespondenţa $\beta \circ \alpha = (A, C, \sigma \circ \rho)$, unde

$$\sigma \circ \rho = \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B \quad (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma\},$$

se numeşte **compusa corespondenţelor** β **şi** α iar $\sigma \circ \rho$ se numeşte **compusa relaţiilor** σ **şi** ρ.

Propoziţia 35. Date fiind corespondenţele $\alpha = (A, B, \rho)$, $\beta = (B, C, \sigma)$ şi $\gamma = (C, D, \tau)$, are loc egalitatea

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

Definiţia 36.

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

Definiţia 37. Date fiind $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, şi corespondenţele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pentru care expresiile de mai jos au sens, definim

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_{n-1}) \circ \alpha_n.$$

Observaţia 38. Operaţiile de compunere din expresia $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_n$ pot fi făcute în orice ordine dorim[5].

Definiţia 39. Dată fiind corespondenţa $\alpha = (A, A, \rho)$,

(i) $\alpha^1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$ şi

(ii) Pentru $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\alpha^n \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \circ \alpha^{n-1}$.

Observaţia 40. $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$, iar $\alpha^3 = \alpha \circ \alpha^2$.

Definiţia 41. Dată fiind o mulţime A, corespondenţa $\mathrm{id}_A = (A, A, \Delta_A)$, unde $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ se numeşte **corespondenţa identică** (sau **corespondenţa unitate**) a mulţimii A.

Propoziţia 42. Dată fiind corespondenţa $\alpha = (A, B, \rho)$, au loc egalităţile

$$\mathrm{id}_B \circ \alpha = \alpha \quad \text{şi} \quad \alpha \circ \mathrm{id}_A = \alpha.$$

[5] fără a modifica însă ordinea **termenilor**!

4.1. **Inversarea corespondenţelor.**

Definiţia 43. Numim **inversa** corespondenţei $\alpha = (A, B, \rho)$ corespondenţa $\alpha^{-1} = (B, A, \rho^{-1})$, unde $\rho^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \rho\}$. ρ^{-1} *se numeşte inversa relaţiei* ρ.

Observaţia 44. Dacă $\alpha = (A, B, \rho)$ este o corespondenţă, nu este obligatoriu ca $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_B$ sau ca $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Propoziţia 45. Date fiind corespondenţele $\alpha = (A, B, \rho)$ şi $\beta = (B, C, \sigma)$, au loc egalităţile:
(i) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$
(ii) $(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$.

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
[4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.