Seminar 3

Observație: Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii de numere reale.

1) Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă și $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ este convergentă.

2) Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă și $\sum_n y_n$ este divergentă (sau $\sum_n x_n$ este div. și $\sum_n y_n$ este conv.), atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ este div.

3) Dacă $\sum_n x_n$ este div. și $\sum_n y_n$ este div., atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ poate fi conv. sau div.

1. Studiați natura seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1} \right)^n$, $a>0$.

Sol: $x_n = \left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1} = \frac{a}{2}.$$

Conform crit. rad. avem:

1) Dacă $\frac{a}{2} < 1$ (i.e. $a \in (0,2)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv.

2) Dacă $\frac{a}{2} > 1$ (i.e. $a \in (2,\infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este div.

3) Dacă $\frac{a}{2} = 1$ (i.e. $a=2$), atunci crit. rad. nu decide, dar, în acest caz, $x_n = \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n$ $\forall$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1} - 1\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\cancel{2n^2}+3n+4-\cancel{2n^2}-n-1}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n+3}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2n+3}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{2n+3}}\right]^{\frac{2n+3}{2n^2+n+1}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n^2+n+1}\cdot n} = e^1 = e \neq 0.$$

Conform Criteriului suficient de divergență rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este div. $\square$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.

Sol.: $x_n = \sin\frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{n^2} \in (0,1] \subset (0,\pi)$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $y_n = \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \overset{\uparrow}{=} 1 \in (0,\infty).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Conform Crit. de comparație cu limită rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ (cele două serii au aceeași natură).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. (serie armonică generalizată cu $\alpha = 2$).

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv. $\square$

b') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n} \cos\frac{1}{n+1}}$.

Sol.: Rezolvați-l voi! $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) x^n$, $x>0$.

Sol.: $x_n = \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) x^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $x \in \mathbb{R}^*$.

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\cos x = 1 - 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 1-\cos x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2\,\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \Rightarrow 4\,\frac{1-\cos x}{x^2} = 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \Rightarrow \underline{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \underline{\frac{1}{2}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)\cancel{x^{n+1}}^{\,x}}{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cancel{x^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)\cdot x}{1-\cos\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\cos\frac{1}{n+1}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\cdot x}{\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{\frac{1-\cos\frac{1}{n+1}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}}}{\underbrace{\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}}}\cdot \underbrace{\frac{n^2}{(n+1)^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty}1}\cdot x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot x = x.$$

Conform Crit. rap. avem:

1) Dacă $x<1$ (i.e. $x\in(0,1)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv.

2) Dacă $x>1$ (i.e. $x\in(1,\infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este div.

3) Dacă $x=1$, atunci Crit. rap. nu decide, dar, în acest caz, $x_n = \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cdot 1^n = 1-\cos\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

Fie $y_n = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Conform crit. de comparație cu limită rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. (serie armonică generalizată cu $\alpha=2$).

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv. $\square$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)} x^n$, $x>0$.

<u>Sol.</u>: $x_n = \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)} x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}\cdot(6(n+1)+1)}{\cancel{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot(5(n+1)+3)}\cdot \cancel{x^{n+1}}^{\,x}}{\frac{\cancel{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}}{\cancel{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)}}\cdot \cancel{x^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n+7}{5n+8} x = \frac{6}{5} x.$$

Conform Crit. rap. avem:

1) Dacă $\frac{6}{5}x<1$ (i.e. $x\in\left(0,\frac{5}{6}\right)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este conv.

2) Dacă $\frac{6}{5}x>1$ (i.e. $x\in\left(\frac{5}{6},\infty\right)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este div.

3) Dacă $\frac{6}{5}x=1$ (i.e. $x=\frac{5}{6}$), atunci Crit. rap. nu decide, dar, în acest caz, $x_n=\frac{7\cdot13\cdot19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot13\cdot18\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot13\cdot19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot13\cdot18\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{5n+8}{6n+7}\cdot\frac{6}{5}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\cancel{30n}+48-\cancel{30n}-35}{30n+35}=\lim_{n\to\infty}\frac{13n}{30n+35}=$$

$$=\frac{13}{30}<1.$$

Conform Crit. Raabe-Duhamel rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este divergentă. $\square$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+n}{3^n+n^3}$, $a>0$.

Sol.: $x_n = \frac{a^n+n}{3^n+n^3}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$x_n = \frac{a^n}{3^n+n^3} + \frac{n}{3^n+n^3} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\frac{n}{3^n+n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. (serie armonică generalizată cu $\alpha=2$).

Conform Crit. de comparație cu ineg. rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+n^3}$ este conv.

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3^n+n^3}$.

Fie $a_n = \frac{a^n}{3^n+n^3}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Fie $b_n = \frac{a^n}{3^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^n}}{3^n+n^3} \cdot \frac{3^n}{\cancel{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} = \frac{1}{1+0} = 1 \in (0,\infty).$$

Am folosit faptul că $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ (se poate demonstra cu ajutorul crit. rap. pentru șiruri cu termeni strict pozitivi).

Conform crit. de comp. cu limită rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n \begin{cases} \text{conv., dacă } a\in(0,3) \\ \text{div., dacă } a\in[3,\infty). \end{cases}$$

(serie geometrică cu $q=\frac{a}{3}$) $\quad a>0$

Așadar $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \begin{cases} \text{conv., dacă } a\in(0,3) \\ \text{div., dacă } a\in[3,\infty). \end{cases}$ $\square$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n)}\right)^2$

<u>Sol</u>: Se aplică crit. Raabe-Duhamel. Rezolvați-l voi! $\square$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$.

<u>Sol</u>: $x_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

$$x_n = \frac{(-1)^n \cancel{\sqrt{n}}}{\underset{\sqrt{n}}{\cancel{n}}} + \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ conv. (Criteriul lui Leibniz)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div. (serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$).

Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă. $\square$