Seminar 6

1. Studiați continuitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0). \end{cases}$

<u>Sol.</u>: f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| =$$

$$= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x|\cdot \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow$$

(Explicație: $\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{y^2}=|y|$)

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0) \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0). \quad \square$$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0). \end{cases}$

<u>Sol.</u>: f cont. pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Avem

$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{2}{\cancel{n^2}}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Deci f nu este continuă în $(0,0)$. $\square$

2. Fie $f: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Stud. uniform continuitatea funcției f.

Sol.: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in (0,\infty)$.

Avem $|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in [1,\infty)$. Prin urmare

f este u.c. pe $[1,\infty)$ (i.e. $f|_{[1,\infty)}$ este u.c.)

Fie $f|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f|_{[0,1]}(x) = \sqrt{x}$.

$\left.\begin{array}{l} f|_{[0,1]} \text{ cont.} \\ [0,1] \text{ mulțime compactă} \end{array}\right\} \Longrightarrow f|_{[0,1]}$ este u.c. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ u.c. pe $[0,1]$.

Așadar f este u.c. (pe $[0,\infty)$).

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0. \end{cases}$

Stud. continuitatea și uniform continuitatea funcției f.

Sol.: f continuă pe $\mathbb{R}^*$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ 0\cdot\text{mărginit}=0}}{=} 0=f(0) \Rightarrow f \text{ cont. în } 0.$$

f derivabilă pe $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x)=\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'=\sin\frac{1}{x}+x\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*.$$

$$|f'(x)|=\left|\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|\le\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\left|-\frac{1}{x}\right|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le$$

$$\le 1+\frac{1}{|x|}\le 1+\frac{1}{1}=2 \quad \forall x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty).$$

Deci f este u.c. pe $(-\infty,-1]$ și f este u.c. pe $[1,\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont. pe } [-1,1] \\ [-1,1] \text{ mulțime compactă} \end{array}\right| \Longrightarrow f \text{ u.c. pe } [-1,1].$$

Deci f este uniform continuă pe $(-\infty, 1]$.

Cum f este u.c. și pe $[1,\infty)$ rezultă că f este u.c. (pe $\mathbb{R}$). □

4. Studiați uniform continuitatea funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

Sol.: Alegem $x_n=\frac{1}{n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $y_n=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\lim_{n\to\infty}n(n-1)=\infty\neq$$

$\neq 0$. Deci f nu este u.c. □

b) $f:[1,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

Sol.: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in[1,2)$.

$$|f'(x)|=\left|-\frac{1}{x^2}\right|\le 1 \quad \forall x\in[1,2).$$

Deci f este u.c. $\square$

5. Fie $a \geq 0$ și $f:(a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Arătați că f este u.c. dacă și numai dacă $a > 0$.

<u>Sol.</u>: „$\Leftarrow$"

Presupunem că $a > 0$. Arătam că f este u.c.

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in (a,\infty)$.

$|f'(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{a}$ $\forall x \in (a,\infty)$.

Deci f este u.c.

„$\Rightarrow$"

Presupunem că f este u.c. Arătăm că $a > 0$.

Presupunem prin absurd că $a = 0$.

Alegem $x_n = \frac{1}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{2\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}}{1}\right) =$

$= \ln\frac{1}{2} \neq 0.$

Deci f nu este u.c., contradicție.

Prin urmare $a > 0$. $\square$

6. Fie $f : (0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Arătați că f nu este u.c.

Sol.: Conform unei propoziții de la curs următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f este u.c.

2) $\exists \tilde{f} : [0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}$ cont. a.î. $\tilde{f}\big|_{(0, \frac{2}{\pi}]} = f$.

Presupunem prin absurd că f este u.c. Deci există $\tilde{f} : [0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}$ cont. a.î. $\tilde{f}\big|_{(0, \frac{2}{\pi}]} = f$.

$\tilde{f}$ cont. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \tilde{f}(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = \tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$.

Deci $\exists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Alegem $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0$ și $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$

deci $\nexists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$, contradicție.

Prin urmare f nu este u.c. $\square$

7. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile în x_0 și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x) ; & x \in \mathbb{Q} \\ g(x) ; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Arătați că h

este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f(x_0) = g(x_0)$ și $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Sol.: Rezolvați-l voi! $\square$