Curs 5

Funcții uniform continue.

Definiție. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice. O funcție $f: X \to Y$ se numește uniform continuă dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall\, x, x' \in X$ cu proprietatea că $d_1(x, x') < \delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Propoziție. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice și $f: X \to Y$ o funcție uniform continuă. Atunci f este continuă.

Observație. Reciproca propoziției precedente nu este, în general, adevărată.

Teoremă. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice a.î. X este mulțime compactă (ne referim la topologia τ_{d_1}) și $f: X \to Y$ o funcție continuă.

Atunci f este uniform continuă.

<u>Propoziție.</u> Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval <u>nedegenerat</u> (i.e. $I \neq \emptyset$ și I nu se reduce la un punct) și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata mărginită. Atunci f este uniform continuă.

<u>Propoziție.</u> Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (A nu este neapărat interval). Sunt echivalente:

1) f uniform continuă.

2) $\forall (x_n)_n \subset A$, $\forall (y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

<u>Propoziție.</u> Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f uniform continuă (pe A).

2) $\exists\, a \in A$ a.î. f este uniform continuă pe $A \cap (-\infty, a]$ (i.e. $f|_{A \cap (-\infty, a]}$ este uniform continuă) și f este uniform continuă pe $A \cap [a, \infty)$ (i.e. $f|_{A \cap [a,\infty)}$ este uniform continuă).

Propoziție. Fie $f:(a,b]\to\mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f uniform continuă.

2) $\exists\ \tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ continuă a.î. $\tilde{f}\big|_{(a,b]}=f$

($\tilde{f}$ prelungire continuă a lui f).

Definiție. Fie (X,d) un spațiu metric și $(x_n)_n\subset X$. Spunem că $(x_n)_n$ este șir Cauchy în raport cu metrica d dacă $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall\ m,n\in\mathbb{N}$, $m\geq n_\varepsilon$, $n\geq n_\varepsilon$, avem $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

Observație. Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X,d)".

Propoziție. Fie (X,d_1) și (Y,d_2) două spații metrice, $f:X\to Y$ o funcție uniform continuă și $(x_n)_n\subset X$ un șir Cauchy în raport cu metrica d_1. Atunci $(f(x_n))_n$ este șir Cauchy în raport cu metrica d_2.

Funcții derivabile

Definiție. Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $a \in A \cap A'$.

1) Spunem că f are derivată în a dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2) Spunem că f este derivabilă în a dacă există în $\mathbb{R}$ limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Notație. În ipotezele definiției precedente, dacă f are derivată în a, notăm $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
(derivata lui f în a)

Definiție. Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $B \subset A \cap A'$. Dacă f este derivabilă în toate punctele din B, spunem că f este derivabilă pe mulțimea B și putem defini $f': B \to \mathbb{R}$, $\underset{B}{\underset{\cap}{x}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{f'(x)}}$.

Definiție. Funcția f' din definiția precedentă se numește derivata funcției f.

<u>Teoremă.</u> Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

<u>Observație.</u> Reciproca teoremei precedente nu este, în general, adevărată.

<u>Propoziție.</u> Fie $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile în a și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

a) $f+g$ este derivabilă în a și $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

b) αf este derivabilă în a și $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.

c) $f \cdot g$ este derivabilă în a și $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$.

d) Dacă $g(a) \neq 0$ (rezultă că există $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $g(x) \neq 0 \ \forall x \in V \cap A$), atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în a și $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

<u>Teoremă.</u> Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ două intervale <u>nedegenerate</u> (i.e. nevide și nu se reduc la un singur punct), $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$ și $a \in I$.

Dacă f este derivabilă în a și g este derivabilă în $f(a)$, atunci $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a și $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

<u>Teoremă.</u> Fie $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ două intervale nedegenerate, $f: I \to J$ o funcție continuă și bijectivă și $a \in I$.

Dacă f este derivabilă în a și $f'(a) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă în punctul $b = f(a)$ și $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

<u>Definiție.</u> Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ (A nu este neapărat interval).

1) Spunem că a este punct de minim local al lui f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)\ \forall x \in V \cap A$.

2) Spunem că a este punct de maxim local al lui f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \geq f(x)\ \forall x \in V \cap A$.

3) Punctele de minim local și punctele de maxim local ale lui f se numesc puncte de extrem local ale lui f.

<u>Teoremă (Teorema lui Fermat)</u>. Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $a \in A$ a.î.:

i) $a \in \mathring{A}$.

ii) a este punct de extrem local al lui f.

iii) f este derivabilă în a.

Atunci $f'(a) = 0$.

<u>Demonstrație</u>. Putem presupune, fără pierderea generalității că a este punct de maxim local al lui f. Deci există $\delta > 0$ a.î. $f(a) \geq f(x)$ pentru orice $x \in (a-\delta, a+\delta) \subset A$. Așadar $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

pentru orice $x \in (a, a+\delta)$ și $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ pentru orice $x \in (a-\delta, a)$.

Prin urmare $0 \leq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$, deci $f'(a)=0$. $\square$

<u>Teoremă (Teorema lui Rolle).</u> Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ și $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ având proprietățile:

i) f continuă pe $[a,b]$.

ii) f derivabilă pe (a,b).

iii) $f(a)=f(b)$.

Atunci există $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c)=0$.

<u>Demonstrație.</u> Printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $f-f(a)$, putem presupune că $f(a)=f(b)=0$. De asemenea, putem presupune că f nu este identic nulă (altfel concluzia este evidentă) și

că ia și valori strict pozitive (printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $-f$). Conform Teoremei privind mărginirea funcțiilor continue (vezi Cursul 4), există $c \in [a, b]$ a.î. $f(c) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Arătăm că $c \in (a, b)$.

Dacă $c \in \{a, b\}$, atunci $0 = f(a) = f(b) = f(c) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \geq f(x) \; \forall \, x \in [a, b]$, ceea ce contrazice faptul că f ia și valori strict pozitive.

Deci $c \in (a, b)$. Conform Teoremei lui Fermat avem că $f'(c) = 0$. $\square$

<u>Teoremă (Teorema lui Lagrange).</u> Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

i) f continuă pe $[a,b]$.

ii) f derivabilă pe (a,b).

Atunci există $c\in(a,b)$ a.î. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

<u>Demonstrație.</u> Fie $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=f(x)-f(a)-$

$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Avem: 1) φ continuă pe $[a,b]$.

2) φ derivabilă pe (a,b).

3) $\varphi(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$.

$$\varphi(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cdot\cancel{(b-a)}=$$

$$=\cancel{f(b)}-\cancel{f(a)}-\cancel{f(b)}+\cancel{f(a)}=0$$

Conform Teoremei lui Rolle există $c\in(a,b)$ a.î. $\varphi'(c)=0$.

$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\forall\ x\in(a,b)$.

Așadar $\exists\ c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Propoziție. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă.

1) Dacă $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$, atunci f este constantă.

2) Dacă $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, atunci f este crescătoare.

3) Dacă $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, atunci f este descrescătoare.

Teoremă (Teorema lui Cauchy). Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ având proprietățile:

1) f și g sunt continue pe $[a, b]$.

2) f și g sunt derivabile pe (a, b).

Atunci există $c \in (a, b)$ a.î. $(f(b) - f(a))\, g'(c) =$

$= (g(b) - g(a))\, f'(c)$.

Teoremă (Teorema lui Darboux). Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci, pentru orice interval $J \subset I$, avem că $f'(J)$ este interval (i.e. f' are proprietatea lui Darboux).