1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 8 & 12 & 10 & 7 & 6 & 11 & 9 & 13 \end{pmatrix} \in S_{13}$

(i) Descomp. lui σ în produs de cicluri disjuncte și de transpoziții.

Sol: $\sigma = (1\ 2\ 4\ 3\ 5)(6\ 8\ 10)(7\ 12\ 9)(11)(13)$

$= (11)(13)(6\ 8\ 10)(7\ 12\ 9)(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$

σ are tipul de descompunere $(2, 0, 2, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$(i_1\ i_2 \dots i_k) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3) \dots (i_{k-1}\ i_k)$

$\sigma = (6\ 8)(8\ 10)(7\ 12)(12\ 9)(1\ 2)(2\ 4)(4\ 3)(3\ 5)$

(ii) $o(\sigma) = ?$, $o(\sigma^{2021}) = ?$, $\sigma^{2021} = ?$, $\varepsilon(\sigma) = ?$

$o(\sigma) = [\,o((6\ 8\ 10)), o((7\ 12\ 9)), o((1\ 2\ 4\ 3\ 5))\,]$

$= [3, 3, 5] = 15$

$o(\sigma^{2021}) = \dfrac{o(\sigma)}{(2021, o(\sigma))} = \dfrac{15}{(2021, 15)} = 15$

$\sigma^{2021} = (6\ 8\ 10)^{2021} (7\ 12\ 9)^{2021} (1\ 2\ 4\ 3\ 5)^{2021}$

ordin 3 comută 2 câte 2. ordin 5

$= (6\ 8\ 10)^2 (7\ 12\ 9)^2 (1\ 2\ 4\ 3\ 5)$

$= (6\ 10\ 8)(7\ 9\ 12)(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nr. de transp. din descomp.}} = (-1)^8 = 1.$

$\Rightarrow \sigma =$ permutare pară ($\sigma \in A_{13}$)

(iii) Rez. ec. $x^2 = \sigma$ în S_{13}.

$$x^2 = (6\ 8\ 10)(7\ 12\ 9)(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$$

Fie $x = \theta_1 \cdots \theta_t$ descomp. în produs de cicluri disjuncte

$$\underbrace{\theta_1^2 \cdots \theta_t^2}_{\uparrow} = (6\ 8\ 10)(7\ 12\ 9)(1\ 2\ 4\ 3\ 5)$$

cont descomp. sa în produs de cicluri disjuncte

(ca să folosesc unicitatea descompunerii în produs de cicluri disjuncte)

$(a\ b)^2 = e$

$(a\ b\ c)^2 = (a\ c\ b)$ ✓

$(a\ b\ c\ d)^2 = (a\ c)(b\ d)$

$(a\ b\ c\ d\ e)^2 = (a\ c\ e\ b\ d)$ ✓

$(a\ b\ c\ d\ e\ f)^2 = (a\ c\ e)(b\ d\ f)$ ✓

$(\ell_7)^2 = \ell_7$ (ciclu de lungime $7)^2$ = ciclu de lungime 7)

$(\ell_8)^2 = \ell_4 \times \ell_4$ $\qquad$ $\ell_{11}^2 = \ell_{11}$

$(\ell_9)^2 = \ell_9$ $\qquad$ $\ell_{12}^2 = \ell_6 \times \ell_6$

$(\ell_{10})^2 = \ell_5 \times \ell_5$ $\qquad$ $\ell_{13}^2 = \ell_{13}$

Sau $\boxed{I}$ $x = (a\ b\ c)(d\ e\ f)(i_1\ i_2 \ldots i_5)$ cu $\begin{cases} (a\ b\ c)^2 = (6\ 8\ 10) \\ (d\ e\ f)^2 = (7\ 12\ 9) \\ (i_1 \ldots i_5)^2 = (1\ 2\ 4\ 3\ 5) \end{cases}$

sau $x = (a\ b\ c)(d\ e\ f)(i_1 \ldots i_5)\underbrace{(i\ j)}_{\substack{\parallel \\ (11\ 13)}}$ cu $a, b, \ldots, i_5$ ca mai sus și $(i\ j)^2 = (11)(13)$

Know $(a\ c\ b) = (6\ 8\ 10) = (8\ 10\ 6) = (10\ 6\ 8)$

$(a\ b\ c) = (6\ 10\ 8) = (8\ 6\ 10) = (10\ 8\ 6)$

$(d\ f\ e) = (7\ 12\ 9) \Rightarrow (d\ e\ f) = (7\ 9\ 12)$

$(i_1 \ldots i_5)^2 = (i_1\ i_3\ i_5\ i_2\ i_4) = (1\ 2\ 4\ 3\ 5)$

Rezultă $x = (6\ 10\ 8)(7\ 9\ 12)(1\ 3\ 2\ 5\ 4)$

sau $x = (6\ 10\ 8)(7\ 9\ 12)(1\ 3\ 2\ 5\ 4)(11\ 13)$

(II) $x = (a\ b\ c\ d\ e\ f)(i_1 \dots i_5)$ cu $\begin{cases} (a\,b\,c\,d\,e\,f)^2 = (6\ 8\ 10)\cdot(7\ 12\ 9) \\ (i_1 \dots i_5)^2 = (1\ 2\ 4\ 3\ 5) \end{cases}$

sau $x = (a\ b\ c\ d\ e\ f)(i_1 \dots i_5)(11\ 13)$

Avem $(a\ c\ e)(b\ d\ f) = (6\ 8\ 10)(7\ 12\ 9) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1°) $\begin{cases} (a\ c\ e) = (6\ 8\ 10) \\ (b\ d\ f) = (7\ 12\ 9) \end{cases} \Rightarrow (a\ b \dots f) = (6\ 7\ 8\ 12\ 10\ 9)$

$= (8\ 7\ 10\ 12\ 6\ 9)$

$= (10\ 7\ 6\ 12\ 8\ 9)$

$(i_1 \dots i_5) = (1\ 3\ 2\ 5\ 4)$ + $(11\ 13)$

6 soluții

2°) $\begin{cases} (a\ c\ e) = (7\ 12\ 9) \\ (b\ d\ f) = (6\ 8\ 10) \end{cases} \Rightarrow (a\ b \dots f) = (7\ 6\ 12\ 8\ 9\ 10)$

o avem!

nu avem soluții noi

Avem deci 8 soluții.

2) $\forall n \geq 2$, S_n este generat de următ. familii de permutări:

(i) $(12), (13), \dots, (1n)$;

(ii) $(12), (23), \dots, (n-1\ n)$;

(iii) $\tau = (12)$, $\sigma = (12\dots n)$.

Sol: $\forall \pi \in S_n$ se scrie ca un produs de transpoziții.

(i) E suf să arătăm că orice transpoziție (ij) se scrie ca un produs de transp. din familia de la (i)

$(ij) = (1i)(1j)(1i)$ $\forall i, j \neq 1$ (ptr $i=1$ sau $j=1$ transp. (ij) este una din familie).

(ii) $S_n = \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle$

E suf să arăt că orice $(1i)$ este un produs de transp. din familia (ii)

$\forall i \geq 3$: $(1i) = (12)(23)\dots(i-1\ i)(i-2\ i-1)\dots(k\ k+1)(k-1\ k)(k-2\ k-1)\dots(23)(12)$

$2 \to 1 \to 2$; $3 \to 2 \to 3$; $\underset{\neq 1, i}{k} \to k-1 \to k$

Altfel, folosim $(1\ i+1) = (i\ i+1)(1\ i)(i\ i+1)$ $\forall i$ și inducția matematică

(iii) $S_n = \langle \tau = (12), \sigma = (12\dots n) \rangle$

E suf să arăt că orice transp. din familia (ii) se scrie ca un produs de permutări din familia (iii)

$(12) = \tau$ ✓

$(i\ i+1) = \sigma^{i-1} \tau \sigma^{-i+1}$, $\forall i = \overline{2, n-1}$ $\Leftrightarrow (i\ i+1)\sigma^{i} = \sigma^{i}(12)$ #

$\Leftrightarrow (i\ i+1)(12\dots n)^{i-1} = (12\dots n)^{i-1}(12)$ #

Inducție după i: $i=2$

$(23)(12\dots n) = (12\dots n)(12)$

$1 \to 2 \to 3$ $\quad$ $1 \to 2 \to 3$

$2 \to 3 \to 2$ $\quad$ $2 \to 1 \to 2$

$\underset{<n}{k(\geq 3)} \to k+1$ $\quad$ $k \to k+1$ $\quad$ ✓

$n \to 1$ $\quad$ $n \to 1$

$i \mapsto i+1$: $\quad (1\,2 \dots n)^i (1\,2) = (1\,2 \dots n) \underbrace{(1\,2 \dots n)^{i-1} (1\,2)}_{\text{ip. de ind}}$

$$= \underbrace{(1\,2 \dots n)(i\;\; i+1)}_{=} (1\,2 \dots n)^{i-1} \stackrel{?}{=} (i+1\;\; i+2)(1\,2 \dots n)^{i}$$

$$(1 \dots i-1\;\; i\;\; i+2\;\; i+3 \dots n)$$

$$\| ?$$

$$(i+1\;\; i+2)(1\,2 \dots n)$$

$$\|$$

$$(1 \dots i-1\;\; i\;\; i+2\;\; i+3 \dots n)$$

Obs: $n-1$ este nr. minim de transpoziții care generează pe S_n.

Temă:

1) În S_4 nu există elemente de ordin 6.

2) În A_4 nu există subgrupuri cu 6 elemente (deși $6 \mid |A_4| = 12$).