Seminar 7 - GAL

§1. Endomorfisme. Diagonalizare

① Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

a) $\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(e_1) = e_3 \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = e_1 \end{cases}$

Precizați dacă există câte un reper R în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală.

② Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

a) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Precizați dacă $\exists$ un reper R în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală. În caz afirmativ, să se det acesta.

③ Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $[f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

a) Det valorile proprii și subspațiile proprii coresp.

b) Det R reper în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{R,R} = A'$ = diagonală

c) $R_0 \xrightarrow{C} R$ Det. C

d) Să se calculeze A^n.

(4) Fie şirul Fibonacci $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

a) Determinaţi matricea A a.î.

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

b) Diagonalizaţi A şi calculaţi A^n.

c) $f_n = ?$

(5) $f \in End(\mathbb{R}^3)$

Dacă $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ sunt valorile proprii şi $v_1 = (-3,2,1)$, $v_2 = (-2,1,0)$, $v_3 = (-6,3,1)$ sunt vectorii proprii coresp, atunci care este matricea $A = [f]_{R_0, R_0}$?

(6) Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (4x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 4x_3)$

Precizaţi dacă $\exists$ un reper R în rap. cu care $[f]_{R,R}$ este diagonală.

§2 Forme biliniare.

(7) Fie $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formă biliniară antisimetrică

$R_0 = \{e_1, e_2\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^2$ şi $g(e_1, e_2) = 5$.

Precizaţi matricea asoc. lui g în raport cu R_0.

(8) Fie $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$

a) $g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

b) Precizaţi matricea G asociată lui g în rap cu $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$

c) $\ker g = ?$. Este g nedegenerată?

d) Să se afle matricea G' asociată lui g în rap. cu reperul $R' = \{e_1' = (1,1,1), e_2' = (1,2,1), e_3' = (0,0,1)\}$.

Ex9. Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

Fie $g_f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_f(x,y) = g(f(x), y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$

a) $g_f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

b) Dacă $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

sunt matricele asociate lui g și f, în raport cu reperul canonic R_0 să se afle $\tilde{G}$ matricea asociată lui g_f în raport cu R_0.

Ex10 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3$, G matricea asoc. în rap cu R_0.

Fie $G^s = \frac{1}{2}(G + G^T)$, $G^a = \frac{1}{2}(G - G^T)$

Să se det $g^s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g^a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a.î. G^s, G^a sunt matricele asoc. în rap cu R_0

$$g = \underset{L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})}{\underset{\cap}{g^s}} + \underset{L^a(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})}{\underset{\cap}{g^a}}$$