Curs 6

Teoremă (Teorema lui l'Hospital). Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval astfel încât $(a,b) \subset I \subset [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ și $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$).

ii) f și g sunt derivabile și $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

iii) Există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci:

α) $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ (respectiv $\exists V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (I \cap V) \setminus \{x_0\}$).

β) Există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (A nu este neapărat interval) și $a \in A \cap A'$.

Definiție. Spunem că f este derivabilă de două ori în punctul a dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f este derivabilă pe V și derivata $f' : V \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a. În acest caz, derivata lui f' în a se numește derivata a doua a lui f în a și se notează $f''(a)$ sau $f^{(2)}(a)$.

Definiție. Dacă f este derivabilă de două ori pe o mulțime $B \subset A$, funcția $(f')' \overset{not.}{=} f'' \overset{not.}{=} f^{(2)} : B \to \mathbb{R}$ se numește derivata a doua a funcției f.

Inductiv se definește derivata de ordin n, $f^{(n)}$.

Fie, în continuare, $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $n \in \mathbb{N}$ și $f : I \to \mathbb{R}$.

Definiție. Spunem că f este de clasă C^n (pe I) dacă f este derivabilă de n ori (pe I) și $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ este continuă (pe I).

Notație. $C^n(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ este de clasă C^n (pe I)$\}$ $(C^0(I) = C(I))$.

Definiție. Spunem că f este de clasă C^∞ (pe I) dacă f este derivabilă de orice ordin (pe I).

Notație. $C^\infty(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ este de clasă C^∞ (pe I)$\}$.

Teoremă (Formula lui Taylor cu rest Lagrange).

Fie, în plus, $a \in I$. Presupunem că f este derivabilă de $n+1$ ori pe I. Atunci, pentru orice $x \in I$, $x \neq a$, există c între x și a (i.e. $c \in (x, a)$ sau $c \in (a, x)$) astfel încât

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\substack{\| \text{not.} \\ T_n(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\substack{\| \text{not.} \\ R_n(x)}}.$$

(polinomul Taylor de ordin n) (restul de ordin n al Formulei lui Taylor)

Definiție. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $f, F : I \to \mathbb{R}$ a.î. F este derivabilă (pe I) și $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$. Spunem că F este o primitivă a lui f.

Șiruri de funcții

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : X \to \mathbb{R}$ și $f : X \to \mathbb{R}$.

Definiție. 1) Spunem că șirul de funcții $(f_n)_n$ converge simplu (sau punctual) către funcția f și scriem $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ (sau $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} f$) dacă, $\forall x \in X$, avem $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (i.e. $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_{\varepsilon,x}$, avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$).

2. Spunem că șirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform către funcția f și scriem $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall x \in X$, avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

<u>Propoziție</u>. Dacă $(f_n)_n$ converge uniform către f, atunci $(f_n)_n$ converge simplu către f.

<u>Observație</u>. Reciproca propoziției precedente nu este, în general, adevărată.

<u>Definiție</u>. O funcție $g: X \to \mathbb{R}$ se numește mărginită dacă $\exists M > 0$ a.î. $|g(x)| \leq M$ $\forall x \in X$.

<u>Propoziție</u>. Presupunem că $(f_n)_n$ este un șir de funcții mărginite. Sunt echivalente:

i) $(f_n)_n$ converge uniform către f.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$.

Exercițiu. Fie $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Studiați convergența simplă și uniformă pentru $(f_n)_n$.

Soluție. Convergența simplă

Fie $x\in[-1,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f, \text{ unde}$$

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

Convergența uniformă

Variantа 1 (cu majorări, minorări)

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right|=$$

$$=\sup_{x\in[-1,1]}\frac{|x|}{1+n^2x^2}$$

$\le a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

$\ge b_n>0$ și $b_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

Folosim inegalitatea $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Luăm $a=1$ și $b=n|x|$.

Deci $1+n^2x^2 \geq 2\cdot 1\cdot n|x|$, i.e. $1+n^2x^2 \geq 2n|x|$, i.e.

$$\frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

Așadar $\sup\limits_{x\in[-1,1]} \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, i.e.

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f.$$

<u>Varianta 2 (calculul supremumului)</u>

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{|x|}{1+n^2x^2}.$$

Fie $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

$$f_n'(x)=0 \Leftrightarrow 1-n^2x^2=0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{n}.$$

x	-1		$-\frac{1}{n}$		0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$		$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	
$f_n(x)$	$-\frac{1}{1+n^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2n}$	$\nearrow$			$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

Deci $\sup\limits_{x\in[-1,1]} \dfrac{|x|}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, i.e.

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$. $\square$

<u>Teoremă.</u> Fie (X, τ) un spațiu topologic, $a \in X$, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n: X \to \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și f_n continuă în a pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci f este continuă în a.

<u>Teoremă (Teorema lui Dini).</u> Fie (X, τ) un spațiu topologic a.î. X este mulțime compactă, $(f_n)_n$ un șir de funcții continue, $f_n: X \to \mathbb{R}$ și $f: X \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Dacă $(f_n)_n$ este monoton și $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

<u>Teoremă (Teorema lui Polya).</u> Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții monotone, $f_n: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și fie

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă a.î. $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\Delta} f$. Atunci $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$.

Teoremă (Teorema lui Bernstein). Pentru orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ există un șir de funcții polinomiale $(f_n)_n$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$.

Teoremă (Teorema de permutare a limitei cu derivata).

Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăți:

i) I este interval nedegenerat și mărginit.

ii) Există $x_0 \in I$ a.î. șirul $(f_n(x_0))_n$ este convergent.

iii) f_n este derivabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

iv) Șirul de funcții $(f_n')_n$ converge uniform către o funcție $g : I \to \mathbb{R}$.

Atunci există o funcție derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$ și $f' = g$, i.e. $\left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'$.

Fie $X \neq \emptyset$, $p \in \mathbb{N}$, $(f_n)_{n \geq p}$ un șir de funcții, $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\forall n \geq p$ și $s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_p(x) + f_{p+1}(x) + \ldots + f_n(x)$ $\forall n \geq p$.

<u>Definiție</u>. Perechea $\left((f_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p}\right)$ se numește serie de funcții asociată șirului de funcții $(f_n)_{n \geq p}$ și se notează cu $\sum\limits_{n=p}^{\infty} f_n$ (sau $\sum\limits_{n \geq p} f_n$ sau $\sum\limits_{n} f_n$)

<u>Observație</u>. În general $p = 0$ sau $p = 1$.

Fie $\sum\limits_{n} f_n$ o serie de funcții ($f_n : X \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

<u>Definiție</u>. 1. Spunem că seria de funcții $\sum\limits_{n} f_n$ converge simplu (sau este simplu convergentă) dacă șirul de funcții $(s_n)_n$ converge simplu (sau este simplu convergent).

2. Spunem că seria de funcții

$\sum_n f_n$ converge uniform (sau este uniform convergentă) dacă șirul de funcții $(s_n)_n$ converge uniform (sau este uniform convergent).

3. Spunem că seria de funcții $\sum_n f_n$ converge absolut (sau este absolut convergentă) dacă, pentru orice $x \in X$, seria $\sum_n |f_n(x)|$ este convergentă.

<u>Definiție.</u> Dacă seria de funcții $\sum_n f_n$ converge simplu, limita (simplă) a șirului de funcții $(s_n)_n$ se numește suma seriei de funcții $\sum_n f_n$ și se notează tot cu $\sum_n f_n$

<u>Teoremă.</u> Presupunem că (X, τ) este spațiu topologic și că seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform către funcția $f: X \to \mathbb{R}$ (i.e. $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$).

Dacă f_n este continuă $\forall\, n \in \mathbb{N}$, atunci f este continuă.

<u>Teoremă (Teorema lui Weierstrass).</u> Presupunem că există un șir de numere reale $(\alpha_n)_n$ a.î.:

1) $\alpha_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) $\sum_n \alpha_n$ convergentă.

3) $|f_n(x)| \leq \alpha_n \ \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform și absolut.

Definiție. Mulțimea $A \stackrel{def.}{=} \{x \in X \mid \sum_n f_n(x)$ este convergentă$\}$ se numește mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum_n f_n$.

Exercițiu. Considerăm seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Arătați că această serie de funcții este uniform convergentă.

Soluție. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_n = \frac{1}{n^2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $|f_n(x)| \leq a_n \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Conform Teoremei lui Weierstrass rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă. $\square$