Cours 6

Testernà (Testerna lui l'Hospital). Fie a, b $\in \mathbb{R}$, a < b, $I \subset \mathbb{R}$ un interval authel incât (a, b) $\subset I \subset \mathbb{C}$ [a, b], $\mathfrak{X}_0 \in [a,b]$ si $\mathfrak{f},\mathfrak{g}: I \setminus \{\mathfrak{X}_0\} \to \mathbb{R}$ en un-matoarele proprietati:

i) lim $\mathfrak{f}(\mathfrak{X}) = \lim_{\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_0} \mathfrak{g}(\mathfrak{X}) = 0$ (respectiv $\lim_{\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_0} |\mathfrak{g}(\mathfrak{X})| = \infty$).

ii) f sû g sunt derivabile sû $g'(x) \neq 0 + x \in [1 \le x_0]$.

iii) Existà $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$.

Atanci:

x) $y(x) \neq 0 + x \in I \setminus \{x_0\}$ (respective $\exists V \in V_{x_0}$ a.2. $g(x) \neq 0 + x \in (I \cap V) \setminus \{x_0\}$).

B) Caistà lim $f(x) \in \mathbb{R}$ si lim $f(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$. $f(x) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.

Fie f: ACR>R (A mu este neaparat interval) si REANA! Definitie. Junem că f este derivabilă de două si în junctul a dacă $\exists V \in Va \ a. \bar{c}. f$ este derivabilă în a. În acest ϵa_{Z} , derivata lui f' în a se numeste derivata a doua a lui f în a si se notiază f''(a) sau $f^{(2)}(a)$.

Definitie. Dacă f este derivabilă de două sii pe so multime $B \subset A$, funcția $(f')' : B \to \mathbb{R}$ se numeș-

f 11 not.

te derivata a doua a functiei f.

Inductiv se definente derivata de ordin n, $f^{(n)}$. Fie, în continuare, $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $n \in \mathbb{N}$ și $f: I \to \mathbb{R}$. Definitie. Younem cà f'este de clasa cⁿ (pe I) daca f'este derivabilà de n sri (pe I) si f⁽ⁿ⁾: I > R este continua (pe I).

Thotatie. $C^{n}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ este de clasa } C^{n}\}$ (pe I)} ($C^{o}(I) = C(I)$).

Sefinitie. Spunem cà f este de clasa Cⁿ (pe I) dans f este derivabilà de since ordin (pe I).

Thatatie. $C^{\infty}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ extende classic } C^{\infty} \mid (\text{pe } I)\}$.

Jerema (Formula lui Taylor ou rest Lagrange).

Fie, în plus, $\alpha \in I$. The supernem că f este strivabilă de m+1 shi pe I. Itunci, pentru sice $x \in I$, $x \neq \alpha$, există x între x și x (i. e. $x \in X$) sau $x \in X$ axista x între x și x (i. e. $x \in X$) axiste $x \in X$ axiste $x \in X$

 $f(x) = f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f(n)(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f(n+1)(x)}{(n+1)!}(x-a)^n$ $||nnt| \qquad ||nnt| \qquad ||nnt| \qquad \qquad ||nnt| \qquad$

Definiție. Fie I c R un interval nedegenerat, f, F:I->

-> IR M. R. F. este derivabilă (pe I) și F'(X)=f(X) + X EI.

Spunem că F este so primitivă a lui f.

Firmi de funcții

Tie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un și de funcții, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ și $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definitie. 1) Younem cà sirul de funcții (fn) n-converge rimplu (sau punctual) către funcția f și scriem fn nos f (sau fn nos f) dacă, + × EX,

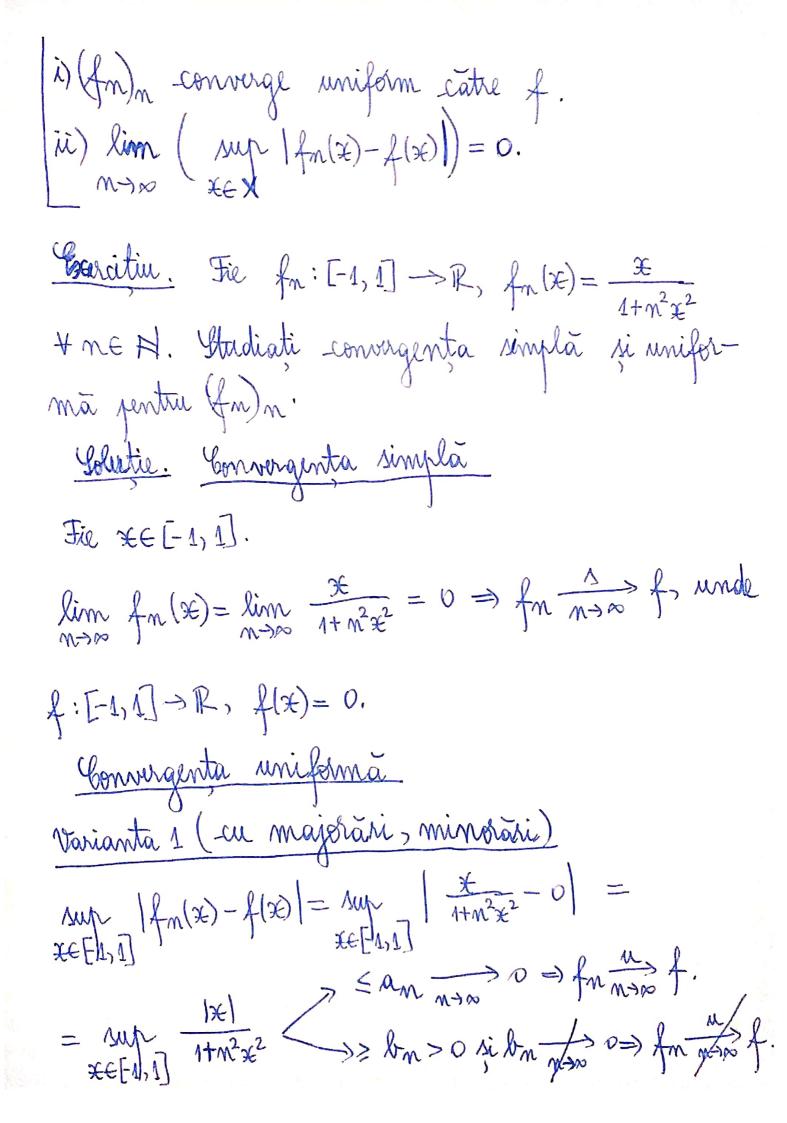
over lim $f_n(x) = f(x)$ (i.e. $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0$,
$\exists m_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ a.2. $\forall m \geq m_{\varepsilon, x}$, arem $ f_n(x) - f(x) < \varepsilon$).
2. Junem cà sirul de functii (fn) n converge u- niform catre functia f si scriem fn miss f dacă
$+\epsilon>0$, $\mp n_{\epsilon}\in\mathbb{N}$ a.D. $+m\geq n_{\epsilon}$, $+\approx\epsilon X$, aven $ f_{n}(x)-f(x) <\epsilon$.

Propozitie. Daca (fn)n converge uniform catre f, atunci (fn)n converge simple catre f.

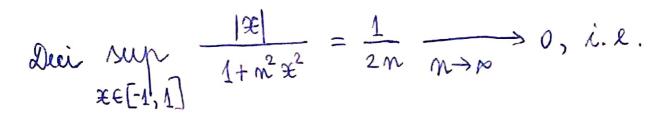
Observatie. Recipoca propozitiei precedente me este, In general, adevarata.

Définitie. O funcție $g: X \to \mathbb{R}$ se mumește marginită slacă $\exists M > 0$ a.C. $|g(x)| \leq M + x \in X$.

Propozitie. Presupernem sã (fn)n este un sir de functio marginiste. Sunt echivalente:



Folosion inegalitatia a2+b2 z 2 ab. Luam a=1 si b=n/x). Dia 1+n2x2=2·1·n/x/, i.e. 1+n2x2=2n/x/, i.e. $\frac{|\mathcal{X}|}{1+m^2n^2} \leq \frac{1}{2m}.$ Asadar sup $\frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} = 0$, i.e. for man f. Varianta 2 (salculul supremumului) $\left|f_{m}(x)-f(x)\right|=\left|\frac{x}{4m^{2}x^{2}}-0\right|=\frac{|x|}{1+m^{2}x^{2}}$ Fix $f_m: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. $f_{m}(x) = \frac{1 + n^{2} x^{2} - 2n^{2} x^{2}}{(1 + n^{2} x^{2})^{2}} = \frac{1 - n^{2} x^{2}}{(1 + n^{2} x^{2})^{2}}.$ fn(x)=0 (=) 1-m2x2=0 (=) x=± 1/m. 0+++++



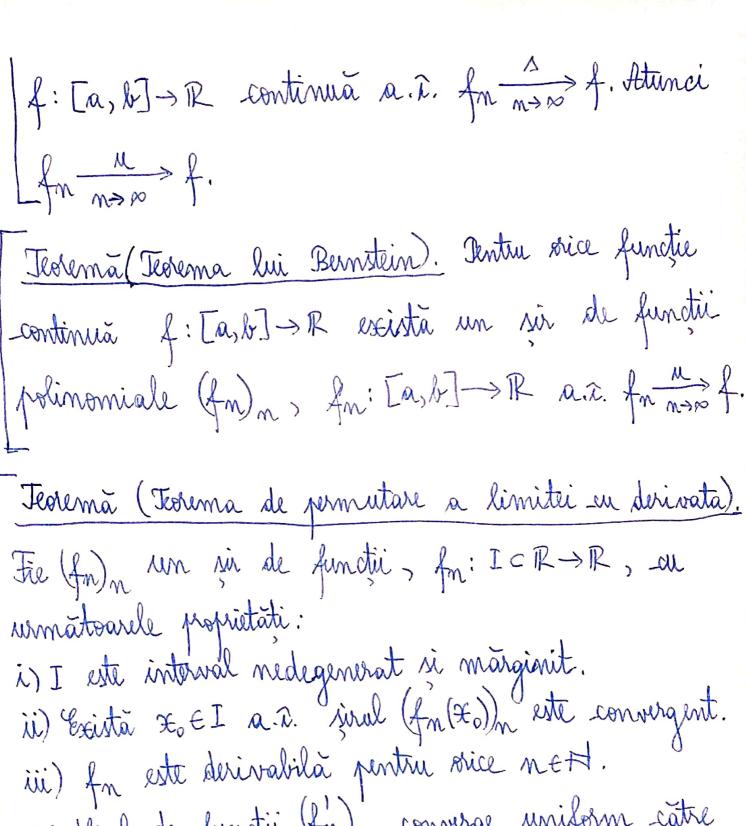
 $f_n \xrightarrow{N} f$.

Jestemā. Fie (X, T) un spaţiu topologic, a EX, (fm)_m un si de funcții, fn: X > R, f: X > R a.c. fn n > f și fn continuă în a pentru sice n E H. Atunci f est continuă în a.

Tessemà (Iessema lui Dini). Fie (X, E) un spațiu topologic a.î. X este multime compactă, (fn) un si de funcții continue, fn: X -> R și f: X -> R p funcție continue.

Daca (fn)n exte monston ji fn night, stunct fn min f.

Torema (Terema lui Bolya). Fie (fn)n un sur de functio monotone, fn: [a,b] < R > R si fie



iv) find de functii (fn)n converge uniform câtre & funcție g: I→R.

Attanci existà o functie derivabilà f:I > R a. 2. fm noof ji f=g, ie. (lim fn)=lim fn.

Fie X+p, pEH, (fn)n>p un sir de functii, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R} + n \geq p \leq \Delta_n: X \rightarrow \mathbb{R}, \Delta_n(X) = f_p(X) +$ +fpt1(x)+...+fm(x) + m>p. Definitie. Perchea ((fn)_{n>p}, (sn)_{n>p}) se mu-meste serie de functio associata sirului de functio [(fn)nzp si se noteaza en Zfn (san Zfn san Zfn) Observatie. În general p=0 sau p=1. Fie \(\int fn \) serie de funcții (fn: X -> \(\text{R} \) + n \(\text{H} \) Definitie. 1. Youren cà seria de funcții In In -converge rimplu (sau este simplu convergentà) dacà simble de function (Am)n converge simple (sau ette simple convergent). 2. Yourem cà seria de funcții

Z for converge uniform (som este uniform convergentà)
dacă sind de funcții (sn)n converge uniform (som
este uniform convergent).

3. Spunem cà seria de funcții $\sum fn$ converge absolut (sau este absolut convergentă) dacă, pentru sice $\times \in X$, seria $\sum |f_n(X)|$ este convergentă.

Definitie. Dacă seria de funcții $\sum fn convege simplu,$ limita (simpla) a simbii de funcții (sn)n se numerte suma serii de funcții $\sum fnsi se notează tot su <math>\sum fn$

Testerna. Presupersem ca (X, Z) este spotie topologic si ca seria de functii $\sum_{n} f_n$ convege uniform catre functia $f: X \to \mathbb{R}$ (i.e., $f_n \to f$).

Daca for este continua + n EH, atunci of este ntinua.

Terema (Jerema lui Weierstrass). Pusupunem ca exista un sir de numere reale (xn)n a.r.:

1) dm >0 + mEH.

2) \(\sum_{n} \) dn convergentà.

3) |fn(x) | < xn + xex, + ne >. Attance seria de funcții I fin converge uniform Definitie. Multimea A ! [X ∈ X] ∑ fn(x) este convergentais re numerte multimea de convergența a resiei de funcții $\sum_{n} f_{n}$. <u>Consideran</u> seria de function $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+\chi^2}$, XER. tratați că accentă suie de funcții este uniform convergenta.

Solutie. Fie fn: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $fn(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2} + n \in \mathbb{N}^*$ si an= 1 +nEN*. Aven Ifn(x) < an + x ∈ R, + meH* si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentà. Conform Ilvemei lui Weierstrass verulta sa Efn este uniform convergenta.