Seminar 3

<u>Observație.</u> Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii de numere reale.

1) Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă și $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ este convergentă.

2) Dacă $\sum_n x_n$ este conv. și $\sum_n y_n$ este div. (sau $\sum_n x_n$ este div. și $\sum_n y_n$ este conv.), atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ este div.

3) Dacă $\sum_n x_n$ este div. și $\sum_n y_n$ este div., atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ poate fi conv. sau div.

1. Studiați natura seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n$, $a>0$.

<u>Sol</u>.: $x_n = \left(\dfrac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1} = \frac{a}{2}.$$

Conform Crit. rad. avem:

1) Dacă $\frac{a}{2} < 1$ (i.e. $a \in (0,2)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv.

2) Dacă $\frac{a}{2} > 1$ (i.e. $a \in (2, \infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este div.

3) Dacă $\frac{a}{2} = 1$ (i.e. $a = 2$), atunci Crit. rad. nu decide, dar, în acest caz, $x_n = \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n \; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1} - 1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\cancel{2n^2}+3n+4-\cancel{2n^2}-n-1}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2n+3}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n+3}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{2n+3}}\right]^{\frac{2n+3}{2n^2+n+1}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n^2+n+1}\cdot n} = e^1 = e \neq 0.$$

Conform Criteriului suficient de divergență rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este div. $\square$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$.

Sol.: $x_n = \sin \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{n^2} \in (0,1] \subset (0, \pi) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $y_n = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \underset{\uparrow}{=} 1 \in (0,\infty).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Conform Crit. de comp. cu limită rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. (serie armonică generalizată cu $\alpha = 2$).

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv. $\square$

b') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$.

Sol. Rezolvați-l voi! $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) x^n, \; x > 0$.

Sol.: $x_n = \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{l'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)\cancel{x^{n+1}}^{\,x}}{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cancel{x^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)x}{1-\cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)x}{\frac{1}{(n+1)^2}}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1-\cos\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}}}{\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}} \cdot \frac{\frac{x}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1-\cos\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}}}{\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}} \cdot \frac{x\cdot n^2}{(n+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\cdot x = x.$$

$$\frac{1-\cos\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}, \qquad \frac{x\cdot n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} x, \qquad \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Conform Crit. rap. avem:

1) Dacă $x<1$ (i.e. $x\in(0,1)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv.

2) Dacă $x>1$ (i.e. $x\in(1,\infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este div.

3) Dacă $x=1$, atunci Crit. rap. nu decide, dar, în acest caz, $x_n=\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cdot 1^n = 1-\cos\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

Fie $y_n=\frac{1}{n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vezi mai sus}}}{=} \frac{1}{2}\in(0,\infty).$$

Conform Crit. de comp. cu limită $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (cele două serii au aceeași natură).

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ conv. (serie armonică generalizată cu $\alpha=2$).

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv. $\square$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)} x^n,\ x>0.$

Sd.: $x_n = \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)} x^n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{\cancel{7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n+1)}\cdot(6(n+1)+1)}{\cancel{8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot(5(n+1)+3)}\cancel{x^{n+1}}^{\,x}}{\dfrac{\cancel{7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n+1)}}{\cancel{8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n+3)}}\cancel{x^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n+7}{5n+8} x = \frac{6}{5} x.$$

Conform Crit. rap. avem:

1) Dacă $\frac{6}{5}x < 1$ (i.e. $x\in\left(0, \frac{5}{6}\right)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este conv.

2) Dacă $\frac{6}{5}x > 1$ (i.e. $x\in\left(\frac{5}{6}, \infty\right)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este div.

3) Dacă $\frac{6}{5}x = 1$ (i.e. $x = \frac{5}{6}$), atunci Crit. rap. nu decide, dar, în acest caz, $x_n = \frac{7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*.$

Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\left(\frac{5}{6}\right)^n.$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{5n+8}{6n+7}\cdot\frac{6}{5}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\cancel{30n}+48-\cancel{30n}-35}{30n+35}=\lim_{n\to\infty}\frac{13n}{30n+35}=$$

$$=\frac{13}{30}<1.$$

Conform Crit. Raabe-Duhamel rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este div. $\square$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+n}{3^n+n^3}$, $a>0$.

<u>Sol</u>.: $x_n=\frac{a^n+n}{3^n+n^3}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$x_n=\frac{a^n}{3^n+n^3}+\frac{n}{3^n+n^3}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\frac{n}{3^n+n^3}\le\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ conv. (serie armonică generalizată cu $\alpha=2$).

Conform Crit. de comp. cu ineg. avem că $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+n^3}$ este conv.

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3^n+n^3}$.

Fie $a_n = \frac{a^n}{3^n+n^3}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $b_n = \frac{a^n}{3^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^n}}{3^n+n^3}\cdot\frac{3^n}{\cancel{a^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{n^3}{3^n}} = \frac{1}{1+0} =$$

$= 1 \in (0,\infty)$.

Am folosit mai sus faptul că $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}=0$ (se poate folosi Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi).

Conform Criteriului de comparație cu limită rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n$ $\begin{cases}\to \text{conv., dacă } a\in(0,3)\\ \to \text{div., dacă } a\in[3,\infty)\end{cases}$

serie geometrică cu $q=\frac{a}{3}$

$a>0$ din ipoteză

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $\begin{cases}\to \text{conv., dacă } a\in(0,3)\\ \to \text{div., dacă } a\in[3,\infty).\end{cases}$ $\square$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)} \right)^2$

Sol.: Se aplică Criteriul Raabe-Duhamel. Rezolvați-l voi! $\square$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\lambda}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Sol.: Vom aplica Crit. Abel-Dirichlet (I)

Fie $x_n = \frac{1}{n^{\lambda}}$, $y_n = \cos nx$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Șirul $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (1)

? $\exists M > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|y_1 + y_2 + \ldots + y_n| \leq M$.

M de mai sus nu poate depinde de n, dar poate depinde de x.

$|y_1 + \ldots + y_n| = |\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx|$.

Notăm $z = \cos x + i \sin x$

Avem: $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$

$\ldots\ldots\ldots$

$z^n = \cos nx + i \sin nx$.

$z + z^2 + \ldots + z^n = ?$

Continuăm această rezolvare în seminarul următor.