

Curs Probabilitati mate-info

2021-2022

Cuprins

1	Cursul 1	3
2	Cursul 2	11

Rezumat

In aceasta lucrare raspundem la intrebarea ”care e cea mai importanta intrebare din lume?”.

1 Cursul 1

Sa incepem cu cateva exemple simple de calcul de probabilitati, dar al caror scop este mai profund, anume importanta stabilirii modelului probabilist intr-un cadru cat mai clar fundamentat matematic.

Exemplul 1.1. *Intr-o urna se afla sapte bile albe si trei bile negre. Cat este probabilitatea $\mathbb{P}(H)$ ca la o extragere intamplatoare sa fie extrasa o bila alba?*

Soluție. In mod evident,

$$\mathbb{P}(H) = \frac{\#\{\text{cazuri favorabile}\}}{\#\{\text{cazuri posibile}\}} = \frac{7}{10}.$$

□

Exemplul 1.2. *Consideram o moneda cu fetele $\{H, T\}$, unde H inseamna “head(cap)” iar T inseamna “tail(pajura)”. Care este probabilitatea ca la o aruncare cu moneda sa pice H ?*

Soluție. Iarasi raspunsul este evident, insa de remarcat este ca putem gandi in mai multe moduri. De exemplu, putem considera ca cele doua cazuri posibile sunt $\{H, T\}$, iar cel favorabil este $\{H\}$. Asadar

$$\mathbb{P}(H) = \frac{\#\{H\}}{\#\{H, T\}} = \frac{1}{2}.$$

O alta varianta este sa consideram ca fata H se identifica cu o bila alba, iar fata T cu una neagra, ambele bile aflate intr-o urna din care facem o extragere intamplatoare. Asadar, aplicand modelul urnei, putem iarasi concluziona ca probabilitatea sa pice “head” este totuna cu probabilitatea sa extragem o bila alba, adica $1/2$.

Putem merge si mai departe, si sa consideram un model de urna in care avem n bile albe si tot n bile negre, cu aceeasi analogie ca mai sus.

Morala aici este ca acelasi fenomen aleator se poate formaliza in mai multe moduri echivalente.

□

Exemplul 1.3. *Intr-un cazino, dealer-ul arunca de 100 de ori cu aceeasi moneda si ne lasa sa observam rezultatele. In urma aruncarilor contabilizam 70 H -uri si 30 T -uri. Care e probabilitatea*

ca la a 101-a aruncare sa pice H ?

Soluție. Desigur, primele 100 aruncari nu influenteaza rezultatul urmatoarei aruncari. Insa in functie de ipotezele pe care le presupunem, rezultatele primelor 100 aruncari pot fi ignorate sau, contrar, pot fi cat se poate de informative. Distingem doua variante:

1. Daca moneda e corecta, atunci in mod a priori stim ca $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(T) = 0.5$, deci raspunsul este 0.5.
2. Fiind intr-un casino, este intru totul realist sa presupunem ca moneda este totusi masluita. In acest caz nu cunoastem in mod a priori valoarea teoretica $\mathbb{P}(H)$. In schimb, putem sa folosim informatia acumulata in urma celor 100 de experimente si sa propunem urmatorul model:

$$\mathbb{P}(H) = \frac{\#\{\text{cazuri favorabile}\}}{\#\{\text{cazuri posibile}\}} = \frac{70}{100} = 0.7, \quad \mathbb{P}(T) = 0.3.$$

□

Exemplul 1.4. *Un cod secret ales de Mihai pentru lantul de la bicicleta e format din patru cifre de la 0 la 9. Care este probabilitatea ca cifrul sa fie 1985. Dar 9762?*

Soluție. Iarasi, raspunsul depinde de ipotezele cu care lucram. Pe de o parte, daca presupunem ca fiecare cifra e la fel de probabil sa apara pe oricare dintre cele patru pozitii, atunci fiecare cifru este la fel de probabil, deci

$$\mathbb{P}(\text{Codul este 1985}) = \frac{\#\{\text{cazuri favorabile}\}}{\#\{\text{cazuri posibile}\}} = \frac{1}{10^4} = 0.0001 = \mathbb{P}(\text{Codul este 9762}).$$

Pe de alta parte, modelul de mai sus este oarecum nerealist. Daca am avea acces la o baza de date cu coduri alese de un numar suficient de mare de biciclisti, probabil am observa ca cele care incep cu 1 sunt mai frecvente decat cele care incep cu 9. Un motiv ar fi ca de obicei avem tendinta de a folosi un an de nastere pe post de cifru. Daca un individ are acces la o astfel de baza de date, ar putea potrivi probabilitatile intr-un mod mai realist si si-ar putea mari sansele de a-si insusi in mod necuvenit o bicicleta.

De fapt, pentru a spori securitatea unor astfel de coduri secrete, așa numitele token-uri care generează coduri de unică folosință au la bază algoritmi performanți de generare de numere aleatoare, tocmai cu scopul de a evita un anumit profil (pattern) de generare ce ar facilita un posibil atac informațional (hack). \square

În toate exemplele simple de mai sus am putut să asociem destul de ușor diverse răspunsuri în funcție de ipotezele pe care le considerăm naturale. În următoarea situație celebră alegerea cadrului de lucru este mult mai delicată.

Exemplul 1.5 (Paradoxul lui Joseph Bertrand). *Considerăm două cercuri concentrice de centru O , unul de rază $\frac{1}{2}$ și celălalt de rază 1. Alegând o coardă la întâmplare pe cercul de rază 1, care este probabilitatea ca aceasta să intersecteze cercul de rază $\frac{1}{2}$?*

Soluție. În mod paradoxal, putem produce trei soluții la fel de valide:

Varianta 1. Să considerăm o coardă AB pe cercul de rază 1. Mai departe construim dreapta d determinată de punctul A și centrul O . În acest cadru este limpede că AB intersectează cercul de rază $1/2$ dacă și numai dacă $\angle(d, AB) \in [0, \pi/6]$; faptul că alegem A sau B este irelevant, din simetrie. Pe de altă parte avem întotdeauna $\angle(d, AB) \in [0, \pi/2]$. Putem deduce astfel răspunsul

$$\mathbb{P}(\text{intersecție}) = \frac{l([0, \pi/6])}{l([0, \pi/2])} = \frac{1}{3},$$

unde $l(I)$ desemnează lungimea intervalului I .

Varianta 2. O altă abordare este să considerăm că o coardă intersectează cercul de rază $1/2$ dacă și numai dacă centrul ei cade în discul de rază $1/2$. Cum o coardă este unic determinată de centrul ei (mai puțin cele de lungime maximă a căror șansă de apariție este în mod natural 0), putem reformula în felul următor: alegând un centru la întâmplare în interiorul discului de rază 1, care este probabilitatea ca acesta să cadă în discul de rază $1/2$? Evident, răspunsul de data asta este

$$\mathbb{P}(\text{intersecție}) = \frac{\text{Aria}(D(0, 1/2))}{\text{Aria}(D(0, 1))} = \frac{1}{4}.$$

Varianta 3. In fine, o a treia abordare este sa identificam coarda cu centrul ei C ca in cazul anterior, dar de data aceasta sa consideram diametrul pe cercul de raza 1 determinat de punctul C si sa remarcam ca intersectia corzii cu cercul de raza $1/2$ se produce doar daca C pica pe diametrul construit mai sus, la distanta mai mica de $1/2$ de centrul O . Folosind lungimi de segmente de data aceasta, deducem $\mathbb{P}(\text{intersectie}) = 1/2$. \square

Concluzia pe care o putem trage in urma exemplurilor de mai sus este ca definirea in mod clar a modelului probabilist folosit e cruciala. In cele ce urmeaza ne preocupam sa construim si sa intelegem axiomatica ce sta la baza modelelor probabiliste in acceptiunea moderna.

Definiția 1.6. *Dat un fenomen aleator, prin experiment intelegem orice rezultat posibil. Multimea tuturor experimentelor (rezultatelor posibile) se numeste spatiul total asociat fenomenului aleator. De obicei, un experiment se noteaza cu ω , iar spatiul total cu Ω . Asadar,*

$$\Omega := \{\omega : \omega \text{ este rezultat posibil} \}.$$

Exemplul 1.7. i) *La aruncarea cu o moneda, fenomenul aleator este aruncarea insasi, un rezultat posibil este H , altul este T , iar spatiul total este $\Omega := \{H, T\}$.*

ii) *Daca aruncam cu doua monede, atunci un rezultat posibil este (H, T) , iar spatiul total este produsul cartezian $\Omega := \{H, T\}^2$.*

iii) *La aruncarea cu un zar, un rezultat posibil este 1, sau 2, sau \dots 6, iar spatiul total este $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

iv) *Daca ne intereseaza numarul de accesari (nu neaparat unice) ale unei pagini web in decursul unei zile, atunci un experiment poate fi 0, 173, 10.000, sau oricare alt numar natural. Spatiul total este $\Omega := \mathbb{N}$, multimea numerelor naturale.*

v) *Daca suntem interesati sa generam un numar la intamplare in intervalul $[0, 1]$, atunci un posibil experiment este 0.73 sau $\sqrt{0.5}$, iar spatiul total este $\Omega := [0, 1]$.*

vi) *Daca ne intereseaza pozitia posibila a unui punct material intr-o suprafata plana, atunci un experiment este orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, iar spatiul total este $\Omega := \mathbb{R}^2$.*

Remarca 1.8. *De obicei, spatiul total se poate formaliza in mai multe moduri. De exemplu, la aruncarea cu o moneda, putem considera $\Omega := \{H, T\}$ sau $\Omega := \{0, 1\}$, dar avand in vedere identificarea $0 \equiv T$ si $1 \equiv H$.*

Definiția 1.9. *Dat un spatiu total Ω , o submultime $A \subset \Omega$ poarta numele de eveniment.*

Remarca 1.10. *Desi la nivel formal un eveniment nu este nimic altceva decat o submultime a lui Ω , semnificatia evenimentului capata mai mult sens daca este privit in raport cu fenomenul probabilist in cauza. De exemplu, la aruncarea cu zarul, multimea $\{2, 4, 6\}$ este un eveniment, insa interpretarea fenomenologica poate fi “pica numar par”. In termeni mai generali, un eveniment este o colectie a tuturor experimentelor posibile ce satisfac o proprietate comuna data. In exemplul de mai sus, proprietatea comuna pentru experimente este de a fi numar par.*

Exemplul 1.11. i) *La aruncarea cu o moneda, evenimentul de a pica H este multimea $A = \{H\}$.*

ii) *Daca aruncam cu doua monede, atunci evenimentul ca cele doua monede sa nu pice la fel este $A = \{(H, T), (T, H)\}$.*

iii) *La aruncarea cu un zar, evenimentul sa pice un numar divizibil cu 3 este $A = \{3, 6\}$.*

iv) *Daca ne intereseaza numarul de accesari (nu neaparat unice) ale unei pagini web in decursul unei zile, atunci evenimentul ca pagina sa fie accesata de cel mult 10 accesari este $A = \{0, 1, \dots, 10\}$.*

v) *Daca suntem interesati sa generam un numar la intamplare in intervalul $[0, 1]$, atunci evenimentul ca acesta sa fie cel putin $1/3$ si cel mult $1/2$ este $A = [1/3, 1/2]$.*

vi) *Daca ne intereseaza pozitia posibila a unui punct material intr-o suprafata plana, atunci evenimentul ca punctul material sa se afle la distanta cel mult 1 de origine este $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

In cursul viitor vom fi interesati sa atribuim unui eveniment un numar care sa cuantifice sansa/riscul ca acel eveniment sa aibe loc. De exemplu, daca din 100 de aruncari cu o moneda posibil masluita pica de 20 de ori numar divizibil cu trei, atunci putem deduce in mod “frecventionist” ca probabilitatea ca evenimentul $A := \{3, 6\}$ sa aibe loc este $20/100 = 0.2$. Esential de remarcat aici este faptul ca pentru a putea cuantifica probabilitatea de aparitie a evenimentului A , este crucial sa-l putem observa in mode repetat, in particular sa avem “acces” la el. Insa pe cale logica, daca putem observa aparitia a doua evenimente A si B , atunci putem observa si aparitia lui “A sau B”, adica $A \cup B$. Pe aceeasi cale logica, daca putem observa aparitia lui A , putem automat sa observam si daca A nu apare, deci putem observa $A^c := \Omega \setminus A$. Acest rationament profileaza un soi de structura asupra evenimentelor care sunt parte a unui fenomen probabilist si care au calitatea de a putea fi observate/accesate, rezultand urmatoarea definitie.

Definiția 1.12. Fie Ω un spatiu total si $\mathcal{P}(\Omega)$ multimea partilor. Atunci o colectie de evenimente $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se numeste algebra daca sunt verificate urmatoarele proprietati:

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii) Daca $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ atunci $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{A}$
- iii) Daca $A \in \mathcal{A}$ atunci $A^c \in \mathcal{A}$.

Exemplul 1.13. i) In mod trivial, avem ca $\{\emptyset\}$ si $\mathcal{P}(\Omega)$ sunt algebre. Orice alta algebra \mathcal{A} satisface $\{\emptyset\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

ii) Sa presupunem ca aruncam cu un zar al carui rezultat il putem observa complet. Asadar, putem observa direct toate evenimentele $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. Apoi, prin operatii logice avem acces si la evenimente de tipul “pica 1 sau 2” ($\{1; 2\}$), sau “pica par” ($\{2; 4; 6\}$). De fapt, pentru ca orice $A \in \mathcal{P}$ se poate scrie ca $A = \bigcup_{i \in A} \{i\}$, prin operatii logice de tip “sau” (adica reuniune) avem acces la intreaga algebra $\mathcal{P}(\Omega)$.

iii) O situatie diferita de cea anterioara apare daca ne imaginam ca Mihai arunca cu zarul dar noi nu putem vedea rezultatul. In schimb, Mihai ne spune doar daca rezultatul e par. In

mod nemijlocit avem acces doar la evenimentul "zarul e par", adica la $A = \{2; 4; 6\}$, iar prin operatii logice (complementare si reuniuni) deducem ca avem acces la (si doar la) $\mathcal{A} := \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ care este clar o algebra. In particular, daca zarul ar fi masluit, atunci prin observatii repetate asupra aparitiei evenimentului A nu putem masura/ asocia probabilitati decat pentru evenimentele din \mathcal{A} .

Exercițiul 1.14. Mihai arunca cu un zar (posibil) masluit de un numar mare de ori si ne spune la fiecare aruncare daca zarul este mai mic sau egal cu 2 si daca este mai mare sau egal cu 5. Care este algebra de evenimente pentru care putem asocia probabilitati in urma informatiilor furnizate de Mihai?

Propoziția 1.15 (Proprietati pentru algebre). *Daca \mathcal{A} este o algebra pe Ω , atunci:*

$$(i) \ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \ A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

Asa cum am discutat in exemplele de mai sus, o algebra se obtine in mod natural pornind de la o clasa initiala de evenimente pe care le putem observa in mod direct, care mai apoi se imbogatesc cat se poate de mult prin operatii logice. Acest procedeu se numeste "generare" si este definit in felul urmator:

Definiția 1.16. Fie Ω un spatiu total si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ o familie initiala de evenimente. Atunci algebra generata de \mathcal{C} este

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) := \bigcap_{\substack{A \text{ e alg.} \\ \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}}} \mathcal{A}.$$

Nu este dificil de aratat ca $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ este de fapt cea mai mica algebra care contine clasa \mathcal{C} , motiv pentru care aceasta caracterizare este de multe ori considerata ca definitie.

Exercițiul 1.17. Daca $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 6\}$ si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, descrieti $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Exercițiul 1.18. Fie $\Omega = \mathbb{N}$ si $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \dots\}$. Aratati ca $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \#A < \infty \text{ sau } \#A^c < \infty\}$. Remarcati ca $A := \{2k : k \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{A}(\mathcal{C})$, in particular $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercitiul anterior scoate in evidenta ca in cazul in care spatiul total nu este o multime finita, atunci algebra generata de evenimentele ce contin cate un singur experiment poate fi destul de saraca. Acest lucru conduce catre anumite restrictii tehnice in ce priveste teoria care urmeaza sa fie dezvoltata. De altfel, daca interpretam exemplul tocmai mentionat ca modeland numarul de accesari ale unei pagini web in decurs de o zi, atunci ar reiesi ca n-am avea acces la evenimente de tipul “numarul accesarilor este par”. Solutia este sa extindem dreptul de a efectua un numar finit de operatii logice cu evenimentele pe care le putem observa, la un numar cel mult numarabil. Obtinem astfel urmatoarea definitie cheie.

Definiția 1.19. *Dat Ω un spatiu total, spunem ca $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ este o σ -algebra (pe Ω) daca:*

$$(i) \quad \emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$$

$$(ii) \quad (A_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$$

$$(iii) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}.$$

Propoziția 1.20. *Orice σ -algebra este in particular o algebra. De asemenea, o σ -algebra este inchisa (stabila) la intersectii numarabile.*

2 Cursul 2

In acest curs continuam cu cateva proprietati si exemple despre σ -algebre, ca mai apoi sa introducem notiunea de spatiu de probabilitate.

Incepem cu o remarca evidenta:

Remarca 2.1. *Daca $\#\Omega < \infty$, atunci notiunile de “algebra” si “ σ -algebra” coincid.*

Propoziția 2.2 (Structura σ -algebrelor pe spatii cel mult numarabile). *Fie Ω o multime cel mult numarabile si \mathcal{F} o σ -algebra. Atunci exista o unica familie cel mult numarabila de evenimente $(A_i)_{i \geq 1}$ cu proprietatile:*

- i) $A_i \in \mathcal{F}$ pentru orice $i \geq 1$
- ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j \geq 1$
- iii) $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \Omega$
- iv) Orice eveniment $A \in \mathcal{F}$ se scrie ca $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, cu $I \subset \mathbb{N}^*$.

Elementele A_i ale familiei cu proprietatile de mai sus se numesc “atomi”; denumirea decurge de la faptul ca un astfel de A_i joaca rolul de eveniment elementar si indivizibil in \mathcal{F} , cu ajutorul carora se pot construi (prin reuniuni) toate celelalte evenimente din \mathcal{F} .

Demonstrație. Pentru fiecare pereche $\omega \neq \tilde{\omega} \in \Omega$ alegem un eveniment $A(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{F}$ cu proprietatea ca $\omega \in A(\omega, \tilde{\omega}) \not\subset \tilde{\omega}$ daca un astfel de eveniment exista in \mathcal{F} , iar daca nu, atunci consideram $A(\omega, \tilde{\omega}) := \Omega$. Mai departe, pentru fiecare $\omega \in \Omega$ definim

$$A(\omega) := \bigcap_{\tilde{\omega} \in \Omega} A(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathcal{F}.$$

Lasam ca exercitiu faptul ca evenimentele $A(\omega), \omega \in \Omega$ satisfac urmatoarele proprietati:

$$1. \bigcup_{\omega \in \Omega} A(\omega) = \Omega$$

2. Dacă $\omega \neq \tilde{\omega} \in \Omega$, atunci ori $A(\omega) \cap A(\tilde{\omega}) = \emptyset$, ori $A(\omega) = A(\tilde{\omega})$.

3. Pentru orice $\omega \in \Omega$, $A(\omega)$ are proprietatea ca nu exista $A \in \mathcal{F}$ cu $A \subsetneq A(\omega)$.

Mai departe, din primele doua proprietati deducem ca $\{A(\omega) : \omega \in \Omega\} \subset \mathcal{F}$ formeaza o partitie disjuncta a spatiului Ω . De asemenea, este clar ca daca $A \in \mathcal{F}$, atunci

$$A = \bigcup_{\omega \in A} A(\omega),$$

deci orice eveniment A din \mathcal{F} se poate construi ca o reuniune cel mult numarabila (pentru ca Ω este cel mult numarabila si la fel orice submultime a sa A) de evenimente de tipul $A(\omega)$, ceea ce incheie demonstratia. \square

Exercițiul 2.3. Folosind notatiile din Propoziția 2.2, aratati ca $A(\omega) = \bigcap_{\omega \in A \in \mathcal{F}} A$. Cu alte cuvinte, atomul $A(\omega)$ reprezinta “cel mai mic” eveniment din \mathcal{F} ce contine ω .

Exemplul 2.4. Sa presupunem ca putem masura (arbitrar de precis) temperatura unui sistem. Consideram ca spatiul total este $\Omega = \mathbb{R}$ si ca putem observa fiecare masuratoare. Asta inseamna ca putem porni cu clasa evenimentelor observate direct, anume $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$, iar mai apoi putem construi σ -algebra generata $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{C})$. In acest caz, lasam ca exercitiu faptul ca

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ sau } A^c \text{ este cel mult numarabila}\}.$$

Remarca importanta este ca \mathcal{F} este desul de saraca, de exemplu evenimentul ca temperatura sa se fie intre a si b , adica intreg intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$, nu se afla in \mathcal{F} . Exista insa o σ -algebra pe \mathbb{R} generata in mod natural si care este suficient de bogata incat sa contina toate multimile deschise din \mathbb{R} , dupa cum vedem mai departe.

Exercițiul 2.5. Pe $\Omega = \mathbb{R}$ consideram urmatoarele clase de evenimente:

$$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_5 = \{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_6 = \{[a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}_7 = \{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{C}_8 = \{[a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}.$$

Aratati ca $\sigma(\mathcal{C}_i) = \sigma(\mathcal{C}_1) \quad \forall 1 \leq i \leq 8$.

Definiția 2.6. Pastrand notatiile din Exercițiul 2.5, $\sigma(\mathcal{C}_i)$ se noteaza cu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ si se numeste σ -algebra Borel pe \mathbb{R} . Un eveniment $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se numeste multime masurabila Borel.

Exercițiul 2.7. Aratati ca urmatoarele multimi sunt masurabile Borel pe \mathbb{R} :

- i) Orice multime cel mult numarabila, in particular $\{x\}$ cu $x \in \mathbb{R}$ sau \mathbb{Q} .
- ii) Orice multime deschisa pe \mathbb{R} .
- iii) Orice multime inchisa pe \mathbb{R} .
- iv) Multimea de discontinuitati ale unei functii crescatoare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- v) Multimea de discontinuitati ale unei functii $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile Riemann.
- vi) Pentru un sir de functii continue $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$, multimea

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ exista in } \overline{\mathbb{R}} \right\}.$$

Definiția 2.8. O pereche (Ω, \mathcal{F}) unde $\Omega \neq \emptyset$ si \mathcal{F} este o σ -algebra pe Ω se numeste spatiu masurabil.

Dat un spatiu masurabil (Ω, \mathcal{F}) , in cele ce urmeaza dorim sa stabilim cadrul general in care putem asocia fiecarui eveniment $A \in \mathcal{F}$ un numar real intre 0 si 1 care sa “masoare” sansa/riscul de aparitie a evenimentului A . Mai precis, suntem interesati de definirea unei aplicatii de tipul

$$\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A) \in [0, 1],$$

ale carei proprietati sa fie compatibile cu notiunea de “masurare” in general, si “masurare a sansei” in particular.

Sa incepem cu un exemplu simplu: aruncam cu un zar corect. Asadar $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. In ceea ce priveste definirea aplicatiei $\mathcal{F} \ni A \mapsto \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$, este clar ca $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$ pentru orice $1 \leq i \leq 6$. Mai departe, daca ne intereseaza probabilitatea sa pice par, atunci $A = \{2, 4, 6\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\# \text{ cazuri favorabile}}{\# \text{ cazuri posibile}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Analog, putem considera aceeasi formula pentru orice eveniment $A \in \mathcal{P}$, astfel ca in cazul aruncarii cu un zar corect avem

$$\mathcal{F} \ni A \mapsto \mathbb{P}(A) := \frac{\#A}{\#\Omega} \in [0, 1].$$

Sa observam ca in mod trivial

$$\text{Daca } A \cap B = \emptyset, \quad \text{atunci} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B). \quad (1)$$

Ce sa intampla in cazul in care avem de-aface cu un zar masluit? Pentru a intelege, sa presupunem ca aruncam de 1000 de ori si obtinem urmatoarele frecvente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 100 & 150 & 350 & 50 & 250 & 100 \end{pmatrix}.$$

Desigur, Ω si \mathcal{F} raman aceleasi, dar e clar ca nu mai putem considera $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$. In schimb, inca putem folosi definitia $\mathbb{P}(A) = \frac{\# \text{ cazuri favorabile}}{\# \text{ cazuri posibile}}$. De exemplu, probabilitatea sa pice par este

$$\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{150 + 50 + 100}{1000} = 0.3.$$

Sa remarcam ca $\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\})$, de fapt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} \mathbb{P}(\{i\}), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Mai general, putem deduce usor ca proprietatea (1) este iarasi satisfacuta. Esenta aici este ca prin aditivitate, a defini \mathbb{P} pe \mathcal{F} se reduce, de fapt, la a defini $\mathbb{P}(\{i\})$ pentru orice $1 \leq i \leq 6$, in cazul nostru

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{1\}) & \mathbb{P}(\{2\}) & \mathbb{P}(\{3\}) & \mathbb{P}(\{4\}) & \mathbb{P}(\{5\}) & \mathbb{P}(\{6\}) \\ 0.1 & 0.15 & 0.35 & 0.05 & 0.25 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Principiul general pe care dorim sa-l scoatem in evidenta este ca o aplicatie menita sa “masoare” diverse entitati satisface in general proprietatea: *Daca o entitate E este o reuniune disjuncta a doua subentitati E_1 si E_2 , atunci “masura”(E)=“masura”(E_1)+“masura”(E_2).* Inductiv, aceasta proprietate se extinde pentru o reuniune finita.

Asadar, introducem notiunea centrala a acestui curs:

Definiția 2.9. Fie (Ω, \mathcal{F}) un spatiu masurabil. O aplicatie $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ ce satisface $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ se numeste

i) “probabilitate finit aditiva” daca

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{F} \text{ cu } A \cap B = \emptyset;$$

ii) “probabilitate σ -aditiva”, sau pe scurt “probabilitate”, daca pentru orice sir $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ cu $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, are loc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

Definiția 2.10. Un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unde (Ω, \mathcal{F}) este un spatiu masurabil, iar \mathbb{P} este o probabilitate pe el, se numeste “spatiu cu masura de probabilitate”, sau mai pe scurt “spatiu de probabilitate”.

In cele ce urmeaza studiem cateva aspecte de baza ce tin de constructia unor astfel de probabilitati.

Teorema 2.11 (Teorema de structura a probabilitatilor pe spatii cel mult numarabile). Fie (Ω, \mathcal{F}) un spatiu masurabil cu Ω cel mult numarabila; in particular, conform Propoziția 2.2, \mathcal{F} este

generata de o clasa de atomi $\{A_i, i \geq 1\}$. Atunci, a defini o probabilitate pe (Ω, \mathcal{F}) se reduce la a preciza un sir de numere reale pozitive de suma unu. Mai precis, daca notam

$$\mathcal{P} := \{\mathbb{P} : \mathbb{P} \text{ e o probabilitate pe } (\Omega, \mathcal{F})\}$$

$$S_1^+ := \{(p_i)_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}_+ : \sum_{i \geq 1} p_i = 1\}$$

atunci aplicatia Ψ

$$\mathcal{P} \ni \mathbb{P} \mapsto (p_i)_{i \geq 1} \in S_1^+,$$

dada de $\Psi(\mathbb{P}) = (p_i)_{i \geq 1}$ cu $p_i := \mathbb{P}(A_i), i \geq 1$, este o bijectie. Mai mult,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{A_i \subset A} p_i \quad \text{pentru orice } A \in \mathcal{F}.$$

Demonstrație. □

Corolarul 2.12. *Daca $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$ si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, atunci o probabilitate \mathbb{P} pe (Ω, \mathcal{F}) este complet determinata de sirul de numere reale pozitive de suma unu $p_i := \mathbb{P}(\{i\}), i \geq 1$ prin*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i \quad \text{pentru orice } A \in \mathcal{F}.$$

Exemplul 2.13 (Nu exista probabilitate uniforma pe spatii numarabile). *Sa presupunem ca intr-o urna punem toate numerele naturale, cu proprietatea ca toate numerele sunt la fel de probabil de a fi extrase. Daca extragem un numar la intamplare, ce putem spune despre probabilitatea*

i) *sa pice numar par?*

ii) *sa pice 10?*

iii) *sa pice ≤ 10 ?*

iv) *sa pice ≥ 10 ?*

Tentatia este de raspunde astfel: i) 0.5, ii) 0, iii) 0, iv) 1. Insa pe acelasi principiu ca la ii), putem spune ca $\mathbb{P}\{i\} = 0$ pentru orice $i \geq 0$, dar prin definitie, daca \mathbb{P} e o probabilitate pe $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, atunci

$$1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(\{i\}) = 0, \text{ contradictie.}$$

De fapt, cu acelasi tip de calcul ca mai sus, daca $\mathbb{P}(\{i\}) = c \forall i \geq 0$ atunci daca $c = 0$ ajungem la contradictia $1 = 0$, iar daca $c > 0$, la contradictia $1 = \infty$. Concluzia este ca nu exista un model de probabilitate pe un spatiu numarabil cu proprietatea ca toate elementele sunt echiprobabile. Inca o remarca interesanta este ca daca \mathbb{P} este o probabilitate pe $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ cu $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i, i \geq 1$, pentru ca $\sum_{i \geq 0} p_i = 1 < \infty$ avem ca $\lim_i p_i = 0$, ceea ce inseamna ca numerele mari sunt obligatoriu din ce in ce mai putin probabile/frecvente.

Am vazut care este structura probabilitatilor pe spatii cel mult numarabile. Dar pe un spatiu masurabil oarecare (Ω, \mathcal{F}) , putem sa construim probabilitati? Un prim raspuns este dat de urmatorul exercitiu a carui demonstratie este usoara, motiv pentru care este lasata ca exercitiu.

Exercițiul 2.14. Fie (Ω, \mathcal{F}) un spatiu masurabil, in particular exista cel putin un $\omega_0 \in \Omega$. Atunci au loc urmatoarele:

i) Aplicatia

$$\delta_{\omega_0} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1], \quad \delta_{\omega_0}(A) := \begin{cases} 1, & \omega_0 \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

este o probabilitate pe (Ω, \mathcal{F}) .

ii) Daca \mathbb{P}_1 si \mathbb{P}_2 sunt doua probabilitati pe (Ω, \mathcal{F}) si $\alpha \in (0, 1)$, atunci

$$\mathbb{Q} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1], \quad \mathbb{Q}(A) := \alpha \mathbb{P}_1(A) + (1 - \alpha) \mathbb{P}_2(A) \in [0, 1]$$

este o probabilitate pe (Ω, \mathcal{F}) .

In particular, daca Ω contine cel putin doua elemente, atunci pe (Ω, \mathcal{F}) se pot defini o infinitate de

probabilitati.

Exercițiul 2.15. *Daca \mathbb{P}_1 si \mathbb{P}_2 sunt doua probabilitati pe (Ω, \mathcal{F}) , aratati ca aplicatia $\mathbb{Q}(A) := \min(\mathbb{P}_1(A), \mathbb{P}_2(A))$, $A \in \mathcal{F}$ nu este o probabilitate.*

Urmatorul exemplu este central pentru ceea ce urmeaza.

Exemplul 2.16 (Problema extensiei si a unicitatii). *Mihai arunca cu un zar posibil masluit de 100 de ori si ne spune la sfarsitul aruncarilor ca a picat numar par de 60 de ori si ca a picat numar mai mare sau egal cu 4 de 55 de ori. Mihai ne invita sa pariem o suma de bani pe evenimentul ca la urmatoarea aruncare sa pice 2. Cum putem sa analizam sansele de castig?*

Soluție. Este clar ca $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, iar $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$, unde $\mathcal{C} := \{\{2, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}\}$. De asemenea, este usor de verificat ca multimea atomilor lui \mathcal{F} este $\{A_1 := \{2\}, A_2 := \{5\}, A_3 := \{1, 3\}, A_4 := \{4, 6\}\}$. Asadar, conform Teorema 2.11, pentru a determina complet modelul de probabilitate \mathbb{P} , este suficient sa determinam $p_i := \mathbb{P}(A_i)$, $1 \leq i \leq 4$. Dar din datele problemei putem deduce urmatorul sistem

$$\begin{cases} p_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ p_1 + p_4 = 0.6 \\ p_2 + p_4 = 0.55 \end{cases},$$

care admite o infinitate de solutii de forma

$$p_1 \in [0.05, 0.45], \quad p_2 = p_1 - 0.05, \quad p_3 = 0.6 - p_1, \quad p_4 = 0.45 - p_1.$$

Oricare alegere ca mai sus pentru $(p_i)_{1 \leq i \leq 4}$ induce o probabilitate \mathbb{P} pe \mathcal{F} prin formula

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{A_i \subset A} p_i \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Asadar, concluzia este ca zarul poate fi masluit intr-o infinitate de moduri, fiecare mod fiind com-

patibil cu informatiile (partiale) furnizate de Mihai. Daca ar fi sa pariem pe aparitia lui 2 la o noua aruncare cu zarul, in cel mai rau caz am avea 5% sanse de castig, iar in cel mai bun 45%. \square

Exercițiul 2.17. *In contextul exemplului anterior, aratati ca daca Mihai ne-ar spune la fiecare aruncare daca a picat numar par si daca a picat numar mai mare sau egal cu 4, atunci probabilitatea \mathbb{P} se poate determina in mod unic pe (Ω, \mathcal{F}) .*

Exemplul de mai devreme scoate in evidenta doua problematici centrale:

1. Problema (existentei) extensiei unei probabilitati definita intai pe o clasa mai mica de evenimente; in cazul exemplului de mai sus, initial doar pe $\mathcal{C} = \{\{2, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}\}$.
2. Problema unicitatii extensiei, atunci cand ea se poate face.

Vom prezenta in cursul urmatore cateva rezultate generale care clarifica aceste doua probleme.