Formule

MATRICE, RANGURI

1. $P_A(X) = \det(A - X I_n) = (-1)^n [X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n]$

   $\sigma_1 = Tr\,A$, $\sigma_n = \det A$, $\sigma_k = \sum \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$

2. T. Hamilton-Cayley: $P_A(A) = O_n$

   $A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n I_n = O_n$

3. $\exists\ C_m^{k+1} \cdot C_n^{k+1}$ minori de ordin $k+1$

4. $\exists\ (m-k)(n-k)$ minori de ord. $k+1$ care conțin Δ_k

5. $rg(AB) \le \min\{rgA, rgB\}$

   $\det A \ne 0 \Rightarrow rg(AB) = rg(BA) = rgB$

SISTEME

6. Sistem de ec. $AX = B$, $\bar{A} = (A \vdots B)$

   $m = n$, $\det A \ne 0 \Rightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\Delta}\right)$

   Δx_k – înlocuind c_k cu col B

7. ~~rg~~ $AX = B$ compatibil $\Leftrightarrow rgA = rg\bar{A}$

8. $AX = B$ compatibil $\Leftrightarrow$ toți minorii caract. sunt nuli

   $rgA = r$, $\exists\ \Delta_{car} \ne 0 \Rightarrow rg\bar{A} = r+1 \Rightarrow$ S.I.

   $\exists\ \Delta_{princ.} \ne 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_r$ var princ., $x_{r+1}, \dots, x_n$ var. secund.

9. $AX = O$ SLO – întotdeauna compatibil

   $m = n$ $\begin{cases} \Delta \ne 0 \Rightarrow SCD \text{ – sol. unică } (0, 0, \dots, 0) \\ \Delta = 0 \Rightarrow SCN \end{cases}$

   $m > n$ $\begin{cases} rgA = r = n\ SCD \\ rgA = r \ne n\ SCN \end{cases}$

   $m < n$ SCN

DETERMINANȚI

10. Th. Laplace $\Delta = \sum \Delta_p \cdot C_p = \sum \Delta_p \cdot (-1)^{i_1 + \dots + i_p + j_1 + \dots + j_p} \Delta_c$

    $\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ & \vdots & \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}$ Δ_c – A fără $l_{i_1}, \dots, l_{i_p}$; $c_{j_1}, \dots, c_{j_p}$

11. $\det A^* = (\det A)^{n-1}$

SPAȚII VECTORIALE

12. V spațiu vect: 1) $(V,+)$ grup abelian
2) $a(bx) = (ab)x$
3) $(a+b)x = ax + bx$
4) $a(x+y) = ax + ay$
5) $1_{K} \cdot x = x$, $\forall a,b \in K$, $\forall x,y \in V$

13. V' subspațiu vect $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x,y \in V' \Rightarrow x+y \in V' \\ \forall x \in V', \forall a \in K \Rightarrow a \cdot x \in V' \end{cases}$
$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \forall a,b \in K \\ \forall x,y \in V' \end{array} \right| \Rightarrow ax + by \in V'$

SLi, SLD, SG, Bază, Repere

14. $S \to SLi \Leftrightarrow \sum a_i x_i = 0_V \Rightarrow a_i = 0_K$, $\{x\}$ SLi
$S \to SLD \Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n$ nu toți nuli a.î. $\sum a_i x_i = 0_V$

15. ~~$\{x\}$ SLi~~ $\left. \begin{array}{l} S \text{ SLi} \\ S \text{ SG} \end{array} \right| \Leftrightarrow S$ bază

16. $\forall$ subm. SLi $\Rightarrow$ SLi
$\forall$ supram. SLD/SG $\Rightarrow$ SLD/SG

17. T. schimbului: $\left. \begin{array}{l} \{x_1, \dots, x_n\} \text{ SG} \\ \{y_1, \dots, y_m\} \text{ SLi} \end{array} \right| \Rightarrow \{y_1, \dots, y_m\}$ SG

18. card SG $\geq$ card SLi

19. B bază $\Rightarrow$ card $B = n$, $n = \dim_K V$

20. $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $\dim_K V = n$
B bază $\Leftrightarrow B$ SLi $\Leftrightarrow B$ SG

21. n – nr. max. de vectori care form. SLi și min. care form. SG $= \dim_K V$

22. $R \xrightarrow{A} R'$ $\quad X = AX'$

23. $S = \{v_1, \dots, v_m\}$, $m \leq n \Rightarrow S$ SLi $\Leftrightarrow$ rg $A = m$

SPAȚII VECTORIALE

24. V_1, V_2 sp. vect $\Rightarrow V_1 \cap V_2$ sp. vect

25. $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

26. T. Grassman $\dim_K (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim$

27. $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

Scanned with CamScanner

SPAȚII VECTORIALE

28. $\dim V_1 \oplus V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$

29. $V_1 \oplus V_2$, B_i bază în $V_i \Rightarrow B = B_1 \cup B_2$ bază în $V_1 \oplus V_2$

30. B bază în V, $B = B_1 \cup B_2$, $V_1 = \langle B_1 \rangle$, $V_2 = \langle B_2 \rangle$
$\Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$

31. $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \forall v \in V_1 + V_2, \exists !\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \underline{v = v_1 + v_2}$

BAZE, SUBSPAȚII

32. S SLI
$|S| = \dim_{K} V$ $\Big| \Rightarrow S$ bază (reper) etc)

33. $S(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$
$S(A)$ ssp. vect, $\dim S(A) = \underline{n - \text{rg} A}$

APLICAȚII LINIARE

34. $f: V_1 \to V_2$ $\underline{\text{semiliniară}}$ $\qquad \theta: K_1 \to K_2$
$f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \theta(\alpha) f(x)$
f $\underline{\text{liniară}}$ dacă $\theta = id_K$ (morf. de sp. vect.)
f izom. $\Leftrightarrow f$ bijectivă $\qquad f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$

35. f liniară $\Leftrightarrow f(ax+by) = af(x) + bf(y)$

DIMENSIUNI

36. $\text{Ker} f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\}$
$\text{Im} f = \{y \in V_2 \mid \exists x$ a.î. $f(x) = y\}$

f lin $\Rightarrow \text{Ker} f, \text{Im} f$ subsp. vect.

f inj $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_{V_1}\}$, f surj $\Leftrightarrow \dim \text{Im} f = \dim V_2$

37. $V' \subset V$ ssp. vect
$\dim V' = \dim V$ $\Big| \Rightarrow V' = V$

38. T. dim: $\dim V_1 = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$

39. f inj $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim \text{Im} f$
f surj $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim \text{Ker} f + \dim V_2$
f bij $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

40. $V_1 \simeq V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

APL. LINIARE

41. f inj $\Leftrightarrow f$ transf. $\forall$ SLI în SLI
f surj $\Leftrightarrow f$ transf. $\forall$ SG în SG
f bij $\Leftrightarrow f$ transf. $\forall$ reper în reper

$\dim(V_1 \cap V_2)$

42. f liniară $\Leftrightarrow \exists A$ a.î. $Y = AX$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ în R_1, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $y = f(x)$ în R_2

43. $\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{A} & R_2 \\ C\downarrow & & \downarrow D \\ R_1' & \xrightarrow{A'} & R_2' \end{array} \Rightarrow A' = D^{-1}AC$ | $\begin{array}{ccc} R_0 & \xrightarrow{A} & R_0 \\ C\downarrow & & \downarrow C \\ R' & \xrightarrow{A'} & R' \end{array} \Rightarrow A' = C^{-1}AC$

44. f inj $\Leftrightarrow \dim V_1 = \operatorname{rg} A$

f surj $\Leftrightarrow \dim V_2 = \operatorname{rg} A$

f bij $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = \operatorname{rg} A \Leftrightarrow A \in GL(n, \mathbb{K})$

PROIECȚII, SIMETRII

45. p proiecție $\Rightarrow p(v_1 + v_2) = v_1$

$\Leftrightarrow p \circ p = p$

$V = V_1 \oplus V_2 = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$

R reper $\Rightarrow [p]_{R,R} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $k = |R_1|$

46. s simetrie $\Rightarrow s = 2p - id_V = v_1 - v_2$

$\Leftrightarrow s \circ s = id_V$

$[s]_{R,R} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right)$, $k = |R_1|$

VECTORI, VALORI PROPRII

47. $V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ - vect. propr., λ - val. propr.

V_λ ssp vect, $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$

48. Vect. prop. coresp la val. prop. dist. ~~formează~~ SLi

49. $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$, m_λ - multiplicitatea

50. $\exists R$ a.î. $[f]_{R,R}$ diag $\Leftrightarrow$

1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_i$

FORME BILINIARE

51. g formă biliniară $\Leftrightarrow g$ lin. în fiecare arg. $\begin{cases} g(ax+by, z) = ag(x,z) + bg(y,z) \\ g(x, ay+bz) = ag(x,y) + bg(x,z) \end{cases}$

g sim $\Leftrightarrow g(x,y) = g(y,x)$, $G = G^T$

g antisim $\Leftrightarrow g(x,y) = -g(y,x)$, $G = -G^T$

$g(x,y)$ lin. într-un arg și sim $\Rightarrow g$ bilin.

52. $g(x,y) = X^T G Y$ $\qquad G' = C^T G C$

g nedegenerată $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Leftrightarrow \det G \neq 0$