1) Orice grup infinit G admite o infinitate de subgrupuri.

Sol: Caz 1 : $\exists\, x \in G$ cu $o(x) = \infty$.

~~Dacă~~ $H = \langle x \rangle \leq G$

$\downarrow$

ciclic infinit $\xRightarrow[\text{gr ciclice}]{\text{th str a}}$ $H \simeq (\mathbb{Z}, +)$

Subgr lui $\mathbb{Z}$ sunt $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ o infinitate, deci H (deci și G) are o infinitate de subgrupuri : $\langle x^n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Caz 2 $\forall x \in G$, $o(x) = n_x < \infty$ $(\in \mathbb{N}^*)$

$\underbrace{G}_{\text{infinit}} = \bigcup_{x \in G} \underbrace{\langle x \rangle}_{\text{finit}}$ $\Rightarrow$ G are o infinitate de subgrupuri ciclice, deci o infinitate de subgrupuri.

$\langle x \rangle \subseteq G\ \forall x \in G \Rightarrow$ "$\supseteq$"

$x \in \langle x \rangle\ \forall x \in G \Rightarrow$ "$\subseteq$"

Exemple:

1) În $(\mathbb{Z}, +)$ orice elem nenul are ordin ∞.

2) p-prim, $n \in \mathbb{N}$: $C_{p^n} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1 \} \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$

$\{1\} = C_{p^0} \subsetneqq C_p \subsetneqq C_{p^2} \subsetneqq \dots \subsetneqq C_{p^n} \subsetneqq C_{p^{n+1}} \subsetneqq \dots$

$C_{p^\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{p^n}$ - grup (subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$) în care orice element are ordin finit. (! Ex)

2) Determinați grupurile G care au exact 2 (resp. 3) subgrupuri.

Sol: 2.1) G are exact 2 subgrupuri: $\{e\}$, G. $(*)$

Cf. problema 1) avem G - grup finit

Dacă $e \neq x \in G$ atunci $\underset{x}{\{e\}} \underset{\#}{\subsetneqq} \underset{x}{\langle x \rangle} \leq G \overset{(*)}{\Longrightarrow} G = \langle x \rangle$

cu $o(x) = n < \infty$.

Teoria gr. ciclice $\Rightarrow$ $G \simeq \mathbb{Z}_n$ $\Rightarrow$

subgr. sunt de forma $\hat{d}\,\mathbb{Z}_n$ cu $d \mid n$.

$\Rightarrow$ nr. subgr. lui $G = 2 =$ nr. divizorilor lui n $\Rightarrow$

$\Rightarrow n = p$, p prim și $G \simeq \mathbb{Z}_p$. ($G = \langle x \rangle$, $o(x) = p$ prim)

2.2) G are exact 3 subgrupuri; $\{e\}$, $G \leq G$

Fie $e \neq x \in G$ $\Rightarrow$ $\{e\} \subsetneqq \langle x \rangle \leq G$.

Dacă · $\langle x \rangle = G \Rightarrow G$ - ciclic.

· $\langle x \rangle \subsetneqq G \Rightarrow \exists\, y \in G \setminus \langle x \rangle$ iar

$\{e\}$, $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ sunt subgrupuri distincte ale lui G

$\{e\} \neq G$, $\langle x \rangle \neq G$, $\langle y \rangle \ni y$

$\Rightarrow \langle y \rangle = G$, deci în orice situație G este ciclic.

Cf. probl. 1), G este finit $\Rightarrow$ $G \simeq \mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}^* \overset{(ca\ la\ 2.1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow n$ are fix 3 divizori $\Rightarrow n = p^2$, p - prim $\Rightarrow$

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$, p - prim ($G = \langle x \rangle$, $o(x) = p^2$, p - prim)

$\{\hat{0}\}$, $\hat{p}\,\mathbb{Z}_{p^2} = \{\hat{0}, \hat{p}, \widehat{2p}, \ldots, \widehat{(p-1)p}\}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$

Obs: Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$ este descomp. în prime distincte a lui n, atunci nr. divizorilor naturali ai lui n este $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_t + 1)$.

3) $Q = \langle A, B \rangle \leq GL_2(\mathbb{C}) \overset{def}{=} \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$,

unde $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$.

a) Descrieți grupul Q. (numit grupul cuaternionilor)

b) Det. subgr., subgr. normale și grupurile factor ale lui Q.

Sol: a) $\langle A, B \rangle = \{ \underbrace{A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} A^{\alpha_3} \dots}_{\text{nr finit}} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{Z} \}$.

$A^2 = -I_2 \Rightarrow A^3 = -A \Rightarrow A^4 = I_2$; $o(A) = 4$

$B^2 = -I_2 \Rightarrow B^3 = -B \Rightarrow B^4 = I_2$; $o(B) = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = -BA$$

Atunci $Q = \{ \underbrace{A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} \dots}_{\text{nr finit}} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{Z} \}$

$u, v \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} B^u A = (-1)^u A B^u, \forall u \in \mathbb{N} \\ B^{-u} A = (-1)^{-u} A B^{-u}, \forall u \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow B^u A = (-1)^u A B^u \quad \forall u \in \mathbb{Z}$$

$B^{-1} A = B^3 A = -BA = AB = -AB^{-1}$

$\Rightarrow B^u A^v = (-1)^{u+v} A^v B^u$, $\forall u, v \in \mathbb{Z}$

Se obține că $Q = \{ \pm A^\alpha B^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \} \underset{\substack{\uparrow \\ A^2 = B^2 = -I_2}}{=} \{ \pm A^s B^t \mid 0 \leq s, t \leq 1 \}$

$\Rightarrow Q = \{ \pm I_2, \pm A, \pm B, \pm AB \}$; $|Q| = 8$

Deci Q = grup neabelian cu 8 elemente.

b) Fie $H \leq Q \xRightarrow{\text{T. Lagrange}} |H| \in \{1, 2, 4, 8\}$.

- $|H| = 1 \Rightarrow H = \{I_2\}$.
- $|H| = 2 \Rightarrow H = \{I_2, X\}$ cu $X \in Q$ de ordin 2.

$$Q = \{\pm I_2, \underbrace{\pm A}_{\text{ordin } 4}, \underbrace{\pm B}_{\text{ordin } 4}, \underbrace{\pm AB}_{\text{ordin } 4}\}.$$

$$(AB)^2 = A\underbrace{BA}_{-AB}B = -AABB = -A^2B^2 = -(-I_2)(-I_2) = -I_2$$

$o(I_2) = 1$, $o(-I_2) = 2 \Rightarrow H = \{\pm I_2\}$ e singurul subgrup cu 2 elem al lui Q.

- $|H| = 4$
  - H – ciclic, gen de un elem de ordin 4 $\Rightarrow H = \langle A \rangle = \langle -A \rangle = \{I_2, A, -I_2, -A\}$ sau $H = \langle B \rangle = \langle -B \rangle$ sau $H = \langle AB \rangle = \langle -AB \rangle$
  - $H = \langle X, Y \rangle$ cu $o(X) = o(Y) = 2$ și $XY = YX$
    $\cong$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

    Caz imposibil, $-I_2$ este singurul elem de ordin 2 din Q.

- $|H| = 8 = |Q| \Rightarrow H = Q$.

Subgr. normale ale lui Q :

- $H = \{I_2\} \trianglelefteq Q$, $H = Q \trianglelefteq Q$.
- $|H| = 2 \Rightarrow H = \{\pm I_2\} \overset{?}{\trianglelefteq} Q$, adică $\forall X \in Q$ și $\forall T \in H$, $XTX^{-1} \in H$.

  Cum $T \in \{\pm I_2\} \Rightarrow XTX^{-1} = TXX^{-1} = T \in H$, $\forall X \in Q$. Deci $H \trianglelefteq Q$.
- $|H| = 4 \Rightarrow |Q : H| \overset{\text{Lagrange}}{=} \dfrac{|Q|}{|H|} = \dfrac{8}{4} = 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow H \trianglelefteq Q$.

Concluzie: $\forall H \leq Q$, H este subgrup normal, însă Q nu este grup comutativ!

Grupurile factor

- $H = \{I_2\}$; $Q/_{\{I_2\}} \simeq Q$

- $H = \{\pm I_2\}$; $\underbrace{Q/_{\{\pm I_2\}}}_{\text{grup cu } \frac{8}{2} = 4 \text{ elem}} = \Big\{ \hat{I_2} = \{\pm I_2\}, \hat{A} = \{\pm A\}, \hat{B} = \{\pm B\}, \widehat{AB} = \{\pm AB\} \Big\}$.

$\left(G \text{ grup}, H \trianglelefteq G \text{ și } x \in G ; \hat{x} = xH = Hx = \{xh \mid h \in H\} = \{h'x \mid h' \in H\} \right)$

$\theta(\hat{A}) = 2$: $\hat{A} \cdot \hat{A} = \widehat{A^2} = \widehat{-I_2} = \widehat{I_2}$

$\theta(\hat{B}) = 2 = \theta(\widehat{AB})$

$\Big\} \Rightarrow Q/_{\{\pm I_2\}} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$BA = -AB \leadsto \underset{\hat{A} \cdot \hat{B}}{\widehat{AB}} = \underset{\hat{B} \cdot \hat{A}}{\widehat{BA}}$

- $|H| = 4 \Rightarrow |Q/_H| = 2 \Rightarrow Q/_H \simeq \mathbb{Z}_2$

$Q/_H = \{ H = \hat{I_2}, Q \setminus H = \hat{X} \text{ cu } X \in Q \setminus H \}$.

- $|H| = 8 \Rightarrow H = Q$ iar $Q/_Q \simeq \{I_2\}$

Temă: Det subgr., subgr. normale și grupurile factor ale grupului S_3.