1.04.2022

C7 – GAL

Forme biliniare simetrice. Forme pătratice. Formă canonică. T. Gauss. Metoda Jacobi

Not $L(V,V;\mathbb{K}) = \{g: V\times V \to \mathbb{K} \mid g \text{ formă biliniară}\}$

$L^s(V,V;\mathbb{K}) = \{g \in L(V,V;\mathbb{K}) \mid g \text{ simetrică}\}$

$L^a(V,V;\mathbb{K}) = \{g \in L(V,V;\mathbb{K}) \mid g \text{ antisimetrică}\}$.

$\mathcal{R} = \{e_1,\dots,e_n\} \xrightarrow{C} \mathcal{R}' = \{e_1',\dots,e_n'\}$ repere în V

$G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ $\qquad G' = (g'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$ $\qquad g'_{ij} = g(e'_i, e'_j)$

$G' = C^T G C$ $\qquad$ ($\mathrm{rg}\, G = \mathrm{rg}\, G'$ = invariant la sch. de reper)

Def Aplicația $Q: V \to \mathbb{K}$ s.n. formă pătratică dacă $\exists\, g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară simetrică a.î. $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$

Prop $\exists$ o corespondență bijectivă între mulț. formelor pătratice și mulțimea formelor biliniare simetrice, definite pe V ($\mathrm{ch}\,\mathbb{K} \neq 2$ i.e. $1+1\neq 0$)

Dem

"$\Rightarrow$" Fie $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă bil. simetrică

Considerăm $Q: V \to \mathbb{K}$ a.î. $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$

"$\Leftarrow$" Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

Construim $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$ ai $g(x,x) = Q(x), \forall x \in V$

Fie $g(x+y, x+y) = Q(x+y)$

$$\overset{\shortparallel}{g(x,x) + g(y,y) + \underline{g(x,y) + g(y,x)}}$$

$$Q(x) + Q(y) + 2g(x,y) = Q(x+y)$$

$$g(x,y) = 2^{-1}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$$

forma polara asociata lui Q.

<u>Def</u> Fie $Q : V \to \mathbb{K}$ forma patratica

$$\text{rg}\, Q = \text{rg}\, g = \text{rg}\, G \text{ (invariant)}.$$

<u>OBS</u>

a) $g(x,y) = X^T G Y = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$

$= \sum_{i=1}^{n} g_{ii} x_i y_i + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j, \ g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$

b) $Q(x) = g(x,x) = X^T G X = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$

$= \sum_{i=1}^{n} g_{ii} (x_i)^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j$

$\boxed{\text{OBS}}$ $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$

$\text{Ker}\, g = \{x \in V \mid g(x,y) = 0, \forall y \in V\}$

g nedegenerata $\Leftrightarrow \text{Ker}\, g = \{0_V\} \Leftrightarrow \det G \neq 0$

$G \in GL(n, \mathbb{K})$

<u>Def</u> $(V, +, \cdot)/\mathbb{R}$ sp vect real

$Q : V \to \mathbb{R}$ forma patratica reala

Q s.n. <u>pozitiv definita</u> $\Leftrightarrow$ 1) $Q(x) > 0, \forall x \in V \setminus \{0_V\}$

2) $Q(x) = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0_V$.

$g \in L^s(V,V;\mathbb{R})$ s.n. poz. definită $\Leftrightarrow$ Q forma pătratică reală asociată este poz. definită.

Exemplu $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

$G = I_3$, $G = G^T$ $\qquad = X^T I_3 Y$

$g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\left.\begin{array}{l} Q(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}\right\} \Rightarrow Q, g \text{ poz. def.}$$

Prop Fie $g \in L^s(V,V;\mathbb{R})$ poz. definită $\Rightarrow$ g nedegenerată

Dem

Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x,y) = 0,\ \forall y \in V$

Considerăm $y = x \Rightarrow Q(x) = g(x,x) = 0 \xrightarrow{p.def} x = 0_V$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Rightarrow$ g nedegenerată.

Problemă Fie $Q : V \to \mathbb{K}$ formă pătratică.

$\exists\, \mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V a.î. $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este diagonală?

$rg\, G = r$ $\qquad G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$Q(x) = a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2$ (formă canonică).

Teorema Gauss

Fie $Q : V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\}$ a.î. Q are o formă canonică.

Dem.

1) $Q(x) = 0,\ \forall x \in V$ (f. canonică)

2) $Q(x) \neq 0$.

Putem considera $g_{11} \neq 0$.

a) Dacă $g_{11} = 0$ și $\exists\, i \in \{2,.., n\}$ a.î. $g_{ii} \neq 0$.
atunci renumerotăm indicii a.î. $g_{11} \neq 0$

b) $g_{ii} = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$

$Q(x) \neq 0 \Rightarrow G \neq O_n$

$\exists\, g_{ij} \neq 0$, $i \neq j$

Efectuam sch. de reper.

$$\begin{cases} y_i = x_i + x_j \\ y_j = x_i - x_j \\ y_k = x_k, \ \forall k \in \{1,.., n\} \setminus \{i,j\} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2}(y_i + y_j) \\ x_j &= \frac{1}{2}(y_i + x_j) \end{aligned}$$

$$Q(x) = 2\sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j$$

$$2 g_{ij} x_i x_j = 2 \cdot g_{ij} \cdot \frac{1}{4}(y_i^2 - y_j^2) = \frac{1}{2} \overset{0}{\overset{\#}{g_{ij}}} y_i^2 - \frac{1}{2} g_{ij} y_j^2$$

Se aplică a) și obținem $g_{11} \neq 0$

Dem prin inducție după numărul de coordonate ale lui x; $R = \{e_1,.., e_n\}$ reper $\forall$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Pp. P_{k-1} este adev: Dacă Q conține $k-1$ coordonate ale lui x, atunci $\exists$ un reper în V a.î. Q are o formă diagonală.

Dem P_k adev: Dacă Q conține k coordonate $(x_1,.., x_k)$ ale lui x, at. $\exists$ un reper în V a.î. Q are o formă diagonală.

$$Q(x) = g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + \dots + 2g_{1k}x_1x_k + Q'(x)$$

$\downarrow$ apar coordonatele $x_2, \dots, x_k$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}}\left(g_{11}^2x_1^2 + 2g_{12}g_{11}x_1x_2 + \dots + 2g_{1k}g_{11}x_1x_k\right) + Q'(x)$$

$$= \frac{1}{g_{11}}\left(g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1k}x_k\right)^2 + Q''(x)$$

apar coord $x_2, \dots, x_k$.

Considerăm sch. de reper.

$y_1 = g_{11}x_1 + \dots + g_{1k}x_k$.

$y_i = x_i, \ \forall i = \overline{1,n}$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}}y_1^2 + Q''(x)$$

$\downarrow$ apar $y_2, \dots, y_k$.

Din P_{k-1} de inducție $\Rightarrow \exists$ un reper R a.î.

$Q''(x) = a_2z_2^2 + \dots + a_rz_r^2$ $\qquad z_1 = y_1$.

$Q(x) = \frac{1}{g_{11}}z_1^2 + a_2z_2^2 + \dots + a_rz_r^2$ $\qquad \frac{1}{g_{11}} = a_1$.

$Q(x) = a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + \dots + a_rz_r^2$ f. canonică, $r = rg\,Q$.

<u>Def</u> $(V, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ forma normală a lui Q

$(p, r-p)$ signatura

$\downarrow$ nr. „+" $\qquad \downarrow$ nr. „−"

<u>Prop</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ un reper în V aî $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ (are forma normală)

<u>Dem</u> Cf. Th. Gauss $\exists$ un reper aî Q are o f. canonică

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$, $r = rg\, Q$.

Eventual renumerotăm și considerăm

$a_1, \dots, a_p > 0$

$a_{p+1}, \dots, a_r < 0$.

$Q(x) = (\sqrt{a_1}\, x_1)^2 + \dots + (\sqrt{a_p}\, x_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1})^2 - \dots - (\sqrt{-a_r}\, x_r)^2$

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} y_i = \sqrt{a_i}\, x_i, & i = \overline{1,p} \\ y_j = \sqrt{-a_j}\, x_j, & j = \overline{p+1,r} \\ y_k = x_k, & k = \overline{r+1,n} \end{cases}$$

$Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$.

<u>Teorema de inerție Sylvester</u>

$Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.

Nr de "+" din forma normală (resp nr "−", deci și signatura) reprezintă un invariant la sch. de repere.

<u>OBS</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ f. pătratică

Q poz def $\Leftrightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $n = rg\, Q$.

signatura este $(n, 0)$

Aplicații

① $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea asociată lui g în rap cu reperul canonic.

a) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

b) Să se aducă Q la o formă canonică. Q este poz def?

SOL

a) $G = G^T \Rightarrow g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

b) $$Q(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2$$

Fie schimbarea de reper

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

$(2,1)$ signatura

Q nu este poz def.

② $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3 = X^TGY.$$

a) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

b) Să se aducă Q la o f. canonică. Este Q poz def?

SOL.

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{4}(y_1^2 - y_2^2) + 4 \cdot \frac{1}{2} y_3(y_1 + y_2)$$

Considerăm sch. de reper:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}y_1^2 + y_1y_3\right) - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2y_3^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}y_2^2 - y_2y_3\right) - 2y_3^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right) \\ z_3 = y_3 \end{cases} \qquad Q(x) = z_1^2 - z_2^2$$

$(1,1)$ Q nu e poz. def.

Metoda Jacobi

Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.
Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ un reper arbitrar în V.
Dacă matricea G asociată lui Q în raport cu R verifică: minorii diagonali

$$\Delta_1 = \det(g_{11});\ \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \dots, \Delta_n = \det G.$$

sunt nenuli, atunci $\exists$ un reper R' în V a.î. Q se scrie:

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n'^2$$

Mai mult, dacă $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, atunci Q este poz. definită.

OBS a) Metoda Jacobi este restrictivă
b) Metoda Gauss se poate aplica totdeauna.

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{g_{11}} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Aplicatie</u> $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$.

Să se aducă la o formă canonică, utilizând met. Jacobi, resp. Gauss

<u>SOL</u> $\mathcal{R}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ reperul canonic

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 \ ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

$$\Delta_4 = \det G = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}$$

$\exists\, \mathcal{R}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ reper în $\mathbb{R}^4$ a.î.

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_4} x_4'^2$$

$$= x_1'^2 - 4 x_2'^2 + x_3'^2 - 4 x_4'^2 \qquad (2,2) \text{ signatura}$$

În reperul $\mathcal{R}'' = \{e_1', e_3', e_2', e_4'\}$ avem: $Q(x) = x_1''^2 + x_2''^2 - 4x_3''^2 - 4x_4''^2$

Aplicăm Met Gauss

$Q(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$

$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_3 x_4$

$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{4}x_4^2$.

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' = x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3' = \frac{1}{2}x_2 \\ x_4' = \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$$

Spații vectoriale euclidiene reale

Def $(V, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$, $g: V \times V \to \mathbb{R}$ s.n. produs scalar

$\Leftrightarrow$ 1) $g \in L^s(V, V; \mathbb{R})$

2) g este poz. definită i.e $g(x,x) > 0$, $\forall x \in V \setminus \{0_V\}$

$g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$.

Notații (V, g), (E, g), $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Def $\|x\| = \sqrt{g(x,x)}$, $\forall x \in V$

norma vectorului

Def $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r, $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper

1) R s.n. reper ortogonal $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$

2) R s.n reper ortonormat $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

(vectorii sunt mutual ortogonali și versori)

OBS $\mathcal{R}=\{e_1,..,e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}'=\{e_1',..,e_n'\}$ repere ortonormate

$\Longrightarrow A \in O(n)$ ie $A \cdot A^T = I_n$.

$\langle e_r', e_s' \rangle = \delta_{rs}$.

$$\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ir} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{js} e_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ir} a_{js} \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} \cdot a_{is}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir} a_{is} = \delta_{rs} \Rightarrow A^T A = I_n \Rightarrow A \in O(n).$$

OBS Dacă $\det A > 0$ ($\mathcal{R}$ și $\mathcal{R}'$ sunt la fel orientate), atunci $A \in SO(n)$ ($\det A = 1$, $A \cdot A^T = I_n$)

Prop $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r. și $S = \{x_1, .., x_k\}$, $k \le n = \dim V$
Dacă S este un sist de vect nenuli, mutual ortog, atunci S este SLI.

Dem Fie $a_1, .., a_k \in \mathbb{R}$ ai $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0_V$ $\langle \cdot, x_1 \rangle$

$\langle a_1 x_1 + ... + a_k x_k, x_1 \rangle = 0 \Rightarrow$

$a_1 \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle}_{= \|x_1\|^2} + a_2 \underbrace{\langle x_2, x_1 \rangle}_{=0} + ... + a_k \underbrace{\langle x_k, x_1 \rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

Repetăm raționamentul și considerăm $\langle \cdot, x_i \rangle$, $i = \overline{2,k}$ și obținem succesiv $a_2 = 0, .., a_k = 0$

$a_i = 0$, $\forall i = \overline{1,k} \Rightarrow S$ este SLI.