Seminar 12

1. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xy+yz+zx$. Să se determine punctele de extrem local ale funcției f condiționate de relațiile $-x+y+z=1$ și $x-z=0$.

<u>Sol.</u>: $\mathbb{R}^3$ deschisă.

Fie $g_1, g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_1(x,y,z)=-x+y+z-1$,

$g_2(x,y,z)=x-z$ și $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z)=g_2(x,y,z)=0\}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=y+z$.

$\frac{\partial f}{\partial y}=x+z$.

$\frac{\partial f}{\partial z}=y+x$.

$\frac{\partial g_1}{\partial x}=-1$.

$\frac{\partial g_1}{\partial y}=1$.

$\frac{\partial g_1}{\partial z}=1$.

$\frac{\partial g_2}{\partial x}=1$.

$$\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} = -1.$$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \ \forall$$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \supset A.$$

Fie $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g_1(x,y,z) +$

$+ \mu g_2(x,y,z) = xy + yz + zx + \lambda(-x+y+z-1) + \mu(x-z)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z - \lambda + \mu = 0 \\ x + z + \lambda = 0 \\ y + x + \lambda - \mu = 0 \\ -x + y + z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$x-z=0 \Leftrightarrow x=z.$

$-x+y+z-1=0 \underset{x=z}{\Leftrightarrow} y=1.$

$x+z+\lambda=0 \underset{x=z}{\Leftrightarrow} \lambda=-2x.$

$$\begin{cases} y+z-\lambda+\mu=0 \\ y+x+\lambda-\mu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2x+\mu=-1 \\ x-2x-\mu=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\mu=-1 \\ -x-\mu=-1 \end{cases}$$

$$\overline{2x=-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \mu=2. \end{cases}$$

Avem: $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \\ \lambda=2 \\ \mu=2. \end{cases}$

Singurul punct staționar (critic) al lui f cu legăturile $g_1(x,y,z)=0$ și $g_2(x,y,z)=0$ este $(-1,1,-1)$.

Avem $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z)=xy+yz+zx+2(-x+y+z-1)+$

$+2(x-z).$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 1.$$

Toate derivatele parțiale de ordinul doi de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

$$d^2L(-1,1,-1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-1,1,-1)\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(-1,1,-1)\,dy^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(-1,1,-1)\,dz^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(-1,1,-1)\,dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(-1,1,-1)\,dy\,dx +$$

$$+ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(-1,1,-1)\,dx\,dz + \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}(-1,1,-1)\,dz\,dx + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(-1,1,-1)\,dy\,dz +$$

$$+ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}(-1,1,-1)\,dz\,dy = 2\left(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz\right).$$

Diferențiem legăturile $\begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-z=0. \end{cases}$

Avem $\begin{cases} -dx+dy+dz=0 \\ dx-dz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy=0 \\ dx=dz. \end{cases}$

Așadar $d^2L(-1,1,-1)_{leg} = 2(dx\cdot 0 + dx\cdot dx + 0\cdot dz) =$

$= 2dx^2$.

Deci $d^2L(-1,1,-1)_{leg}$ este pozitiv definită, i.e. $(-1,1,-1)$ este punct de minim local al lui f cu legăturile $g_1(x,y,z)=0$ și $g_2(x,y,z)=0$. $\square$

2. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+y$ și $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=y$. Arătați că $(0,0)$ este punct staționar (critic) al lui f cu legătura $g(x,y)=0$, dar nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y)=0$.

Sol.: $\mathbb{R}^2$ deschisă.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1.$$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.

Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} =$
$= \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \supset A.$$

Fie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^3 + y + \lambda y$.

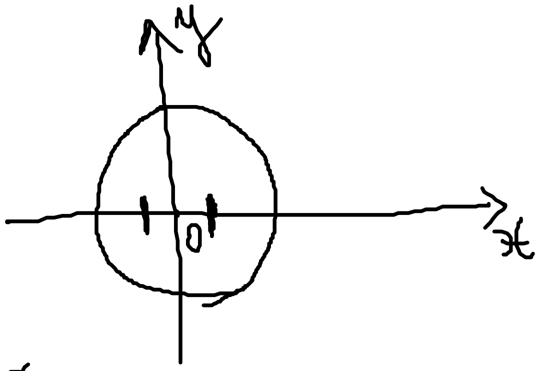
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 1 + \lambda = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Singurul punct staționar (critic) al lui f cu legătura $g(x,y) = 0$ este $(0,0)$.

Arătăm că $(0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $y = 0$.

$f(x,0) = x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(0,0) = 0$.



$f(x,0) = x^3 > 0 = f(0,0) \quad \forall\, x > 0.$

$f(x,0) = x^3 < 0 = f(0,0) \quad \forall\, x < 0.$

Deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y) = 0$. $\square$

3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$. Determinați valorile extreme ale funcției f pe mulțimea

$$\overline{B}(\underbrace{0}_{(0,0,0)},1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$ (i.e. valorile extreme ale funcției $f|_{\overline{B}(0,1)}$).

Sol.: $\left.\begin{array}{l}\overline{B}(0,1) \text{ compactă (închisă și mărginită)} \\ f \text{ continuă pe } \mathbb{R}^3 \supset \overline{B}(0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f|_{\overline{B}(0,1)}$ își atinge marginile (pe $\overline{B}(0,1)$).

Căutăm punctele de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ în

$B(0,1)$ și în $\partial B(0,1) = \mathrm{Fr}\, B(0,1)$.

1) Căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{\bar{B}(0,1)}$ situate în $B(0,1)$.

Notăm $h = f|_{B(0,1)}$.

$B(0,1)$ deschisă.

h cont.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x.$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y.$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 6z.$$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \text{ cont. pe } B(0,1) \\ B(0,1) \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Longrightarrow h$ dif. pe $B(0,1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Singurul posibil punct de extrem global al lui $f|_{\overset{\circ}{B}(0,1)}$ situat în $\overset{\circ}{B}(0,1)$ este $(0,0,0)$.

2) Căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ situate în $\underset{\underset{\mathrm{Fr}\,B(0,1)}{\|}}{\partial B(0,1)} = \overline{B}(0,1) \setminus \underset{\underset{B(0,1)}{\|}}{\overset{\circ}{B}(0,1)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

Fie $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ şi $A = \partial B(0,1) = \mathrm{Fr}\,B(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}$.

$\mathbb{R}^3$ deschisă

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

$\frac{\partial f}{\partial z} = 6z$.

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$.

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$.

Toate derivatele parţiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\end{pmatrix} = 1 \ \forall$$

$\forall (x,y,z) \in A =$
$= \partial B(0,1) =$
$= Fr\, B(0,1)$.

Fie $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$
$= 2x^2 + y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0\\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0\\ g(x,y,z) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}4x + 2\lambda x = 0\\ 2y + 2\lambda y = 0\\ 6z + 2\lambda z = 0\\ x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases} \iff \begin{cases}2x(2+\lambda) = 0\\ 2y(1+\lambda) = 0\\ 2z(3+\lambda) = 0\\ x^2+y^2+z^2 = 1.\end{cases}$$

Avem soluțiile: $\lambda_1 = -2 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(-1,0,0),(1,0,0)\}$.

$\lambda_2 = -1 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,-1,0),(0,1,0)\}$.

$\lambda_3 = -3 \Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,0,-1),(0,0,1)\}$.

Posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{\bar{B}(0,1)}$ situate în $\partial B(0,1) = Fr\, B(0,1)$ sunt: $(-1,0,0),(1,0,0),(0,-1,0),(0,1,0),$

$(0,0,-1),\ (0,0,1).$

$f(0,0,0)=0.$

$f(1,0,0)=f(-1,0,0)=2.$

$f(0,1,0)=f(0,-1,0)=1.$

$f(0,0,1)=f(0,0,-1)=3.$

Valorile extreme ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ sunt: 3 (valoarea maximă) și 0 (valoarea minimă).

(Punctele de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ sunt: $(0,0,1),(0,0,-1)$ (punctele de maxim global) și $(0,0,0)$ (punctul de minim global)). $\square$

4. Fie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ 2x+2y+z=1\}$ și $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x+y+z$. Determinați punctele de extrem global ale lui $f|_A$.

Sol.: Rezolvați-l voi! $\square$