Seminar 9

1. Fie $f:[-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1-x)$. Dezvoltați funcția f în serie de puteri ale lui x.

Sol.: $f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\, x^n \quad \forall x\in(-1,1)$.

Integrăm „termen cu termen" și obținem că $\exists C\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}x^{n+1} + C \quad \forall x\in(-1,1)$.

$f(0) = \ln(1-0) = 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}\cdot 0^{n+1} + C = 0 + C = C$.

Deci $C = 0$.

Așadar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x\in(-1,1)$.

Are loc această relație și pentru $x=-1$?

Dacă $x=-1$, avem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}(-1)^{n+1} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ conv. (Crit. lui Leibniz).

Conform Teoremei a doua a lui Abel avem că

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}(-1)^{n+1}.$$

$$\|$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \ln(1-x)$$

$$\|$$

$$\ln 2$$

$$\|$$

$$f(-1)$$

Deci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in [-1, 1).$ $\square$

2. a) Studiați continuitatea funcției f;

b) Det. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$;

c) Studiați diferențiabilitatea funcției f,

unde:

i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$

<u>Sol</u>.: a) Vezi Seminar 6.

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(xy)'_x (x^2+y^2) - xy(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(xy)'_y (x^2+y^2) - xy(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x(x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{0^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă

$\xRightarrow[\text{de diferențiabilitate}]{\text{Criteriul}}$ f dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$.

f nu e cont. în $(0,0)$ (Vezi Seminar 6) $\Rightarrow$ f nu e dif. în $(0,0)$. $\square$

ii) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 y^2}{x^8+y^4} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Sol.:

a) f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Varianta 1

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4} - 0 \right| = \frac{|x^5 y^2|}{x^8 + y^4} =$$

$$= |x| \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} \leq \frac{1}{2} |x| \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0).$$

$\leq \frac{1}{2}$ (Explicație: $\frac{x^8 + y^4}{2} \geq \sqrt{x^8 y^4} = |x^4 y^2| = x^4 y^2$)

Varianta 2

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4} - 0 \right| = \frac{|x^5 y^2|}{x^8 + y^4} =$$

$$= \left(\frac{|x|^8}{x^8 + y^4} \right)^{\frac{5}{8}} \cdot \left(\frac{|y|^4}{x^8 + y^4} \right)^{\frac{2}{4}} \cdot (x^8 + y^4)^{\frac{5}{8} + \frac{2}{4} - 1} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x^8}{x^8+y^4}\right)}_{\leq 1}^{\frac{5}{8}} \cdot \underbrace{\left(\frac{y^4}{x^8+y^4}\right)}_{\leq 1}^{\frac{2}{4}} \cdot (x^8+y^4)^{\frac{5+4-8}{8}} \leq$$

(Explicație: $x^8+y^4 \geq x^8$) (Explicație: $x^8+y^4 \geq y^4$)

$$\leq (x^8+y^4)^{\frac{1}{8}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0).$$

$\frac{1}{8} > 0$

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^5y^2)'_x\,(x^8+y^4) - x^5y^2(x^8+y^4)'_x}{(x^8+y^4)^2} =$$

$$= \frac{5x^4y^2(x^8+y^4) - x^5y^2\cdot 8x^7}{(x^8+y^4)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^5y^2)'_y\,(x^8+y^4) - x^5y^2(x^8+y^4)'_y}{(x^8+y^4)^2} =$$

$$= \frac{x^5\cdot 2y\,(x^8+y^4) - x^5y^2\cdot 4y^3}{(x^8+y^4)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^5 \cdot 0^2}{t^8 + 0^4} - 0}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t e_2) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{0^5 \cdot t^2}{0^8 + t^4} - 0}{t} = 0.$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ | $\Rightarrow$ f dif pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă |

Studiem diferențiabilitatea lui f în (0,0).

Dacă f ar fi diferențiabilă în (0,0), atunci

$$df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ df(0,0)(u,v) = \left[\begin{pmatrix} \underset{0}{\underset{\parallel}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}} & \underset{0}{\underset{\parallel}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right]^t = 0.$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^5y^2}{x^8+y^4} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^2}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^5 y_n^2}{(x_n^8+y_n^4)\sqrt{x_n^2+y_n^2}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^9}}{\frac{2}{n^8}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n^9}} \cdot \frac{\cancel{n^{10}}\,n}{2\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^2}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$, i.e. f nu e dif. în $(0,0)$. $\square$

iii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Sol.: a) f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{y^3}{x^4+y^2} - 0 \right| = \frac{|y|^3}{x^4+y^2} =$$

$$= |y| \cdot \frac{y^2}{x^4+y^2} \le |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ cont. în } (0,0).$$

≤ 1 (Explicație: $x^4+y^2 \ge y^2$)

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^3)'_x (x^4+y^2) - y^3 (x^4+y^2)'_x}{(x^4+y^2)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot (x^4+y^2) - y^3 \cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(y^3)'_y (x^4+y^2) - y^3 (x^4+y^2)'_y}{(x^4+y^2)^2} =$$

$$= \frac{3y^2(x^4+y^2) - y^3 \cdot 2y}{(x^4+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{0^3}{t^4+0^2} - 0}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3}{0^4+t^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\cancel{t^3}}{\cancel{t^2}}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}} = 1.$$

c) Vom rezolva în seminarul următor acest subpunct. $\square$