Numere cardinale

A, B mulțimi ; $A \sim B$ (echipotente) $\Leftrightarrow \exists f : A \to B$ bijecție

$\sim$ = rel de echivalență : $A \sim A$: $\exists 1_A : A \to A$ bij

$A \sim B \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ bij $\Rightarrow \exists f^{-1} : B \to A$ bij $\Leftrightarrow B \sim A$

$A \sim B$ și $B \sim C \Rightarrow \exists f : A \to B,\ g : B \to C$ bij

$\Rightarrow \exists g \circ f : A \to C$ bij $\Rightarrow A \sim C$.

$\forall A$ mulțime , $\hat{A} \overset{not}{=} |A| = \{B$ mulțime $\mid B \sim A\}$.

s.n. cardinalul lui A

Obs:

A = finită , $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$|A| = \{B \mid B$ = finită cu n elemente $\} \equiv n \in \mathbb{N}$

Def: $|A| \preccurlyeq |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ funcție injectivă.

„$\preccurlyeq$" = bine def : $|A| = |A'| \Leftrightarrow A \sim A'$

$|B| = |B'| \Leftrightarrow B \sim B'$

$|A| \preccurlyeq |B|$

$\Rightarrow |A'| \preccurlyeq |B'|$.

$|A| \preccurlyeq |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ inj

$(A \sim A')$ bij u , v bij $(B \sim B')$, $A' \dashrightarrow B'$

$v \circ f \circ u$ = inj $\Rightarrow |A'| \preccurlyeq |B'|$.

1) $\preccurlyeq$ - rel de ordine

Sol: • reflexivă : $|A| \preccurlyeq |A|$ $\forall A$ mulțime $\Leftrightarrow \exists A \xrightarrow{1_A} A$ inj ✓.

• tranzitivă : $|A| \preccurlyeq |B|$ și $|B| \preccurlyeq |C| \Rightarrow |A| \preccurlyeq |C|$

$\exists A \xrightarrow{f} B$ și $B \xrightarrow{g} C$ inj $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists g \circ f : A \to C$ inj $\Rightarrow |A| \preccurlyeq |C|$.

• antisimetrică : $|A| \preccurlyeq |B|$ și $|B| \preccurlyeq |A| \Rightarrow |A| = |B|$,

adică : dacă $\exists A \xrightarrow{f} B$ inj și $B \xrightarrow{g} A$ inj ,

atunci $\exists A \xrightarrow{h} B$ bijectivă.

Cantor-Bernstein:

$$\left.\begin{array}{l} X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \\ X_0 \sim X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_0 \sim X_1.$$

Dem: $X_0 \sim X_2 \Rightarrow \exists f : X_0 \to X_2$ bij ; $X_2 = f(X_0)$

Inductiv: $X_3 = f(X_1) \subseteq f(X_0) = X_2$

$\vdots$

$X_{n+2} = f(X_n) \subseteq f(X_{n-1}) = X_{n+1}$

$\vdots$

Deci $\dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X_3 \subseteq X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_0$

Fie $A := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i$ și $B_n = X_n \setminus X_{n+1}$, $\forall n \geq 0$.

Arăt că $X_0 = A \cup \bigcup_{n \geq 0} B_n$ și $X_1 = A \cup \bigcup_{n \geq 1} B_n$ #

"$\supseteq$" $(A, B_n \subseteq X_0)$ "$\supseteq$" $(A, B_n \subseteq X_1)$

"$\subseteq$" (*) "$\subseteq$" (**)

"$\subseteq$" (*) $x \in X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq \dots$

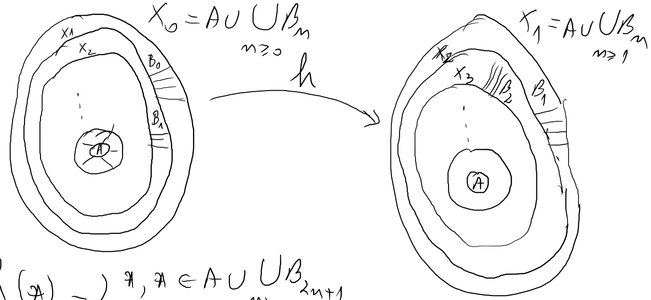
Dacă $x \in A$ e gata ✓.

$x \notin A = \bigcap_{n \geq 0} X_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x \notin X_n$ (clar $n \geq 1$)

Iau $n \geq 1$ minim a.î. $x \notin X_n \Rightarrow x \in X_{n-1} \Rightarrow x \in X_{n-1} \setminus X_n = B_{n-1}$

cu $n \geq 1 \Rightarrow x \in \bigcup_{n \geq 0} B_n$, e gata ✓

"$\subseteq$" (**) se arată similar (lucrez cu $n \geq 2$ minim a.î. $x \notin X_n$, atunci când iau un $x \in X_1$).



$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in A \cup \bigcup_{n\geq 0} B_{2n+1} \\ f(x), & x \in \bigcup_{n\geq 0} B_{2n} \end{cases}$$

$$f(B_n) = f(X_n \setminus X_{n+1}) = f(X_n) \setminus f(X_{n+1}) = X_{n+2} \setminus X_{n+3} = B_{n+2}$$

$$\operatorname{Im} h = h\Big(A \cup \bigcup_{n\geq 0} B_{2n+1} \cup \bigcup_{n\geq 0} B_{2n}\Big) = A \cup \bigcup_{n\geq 0} B_{2n+1} \cup \bigcup_{n\geq 0} B_{2n+2}$$

$$= A \cup \bigcup_{n\geq 1} B_n = X_1 \Rightarrow h : X_0 \to X_1 \text{ e surj.}$$

f = inj, la fel este aplicația identică $\Rightarrow h$ = inj, deci bij.

Revin la $\precsim$, antisimetria:

$\exists f : A \to B$ inj și $g : B \to A$ inj

$$\underset{A}{\underset{\|}{X_0}} \supseteq \underset{g(B)}{\underset{\|}{X_1}} \supseteq \underset{g(f(A))}{\underset{\|}{X_2}}, \quad X_0 \sim X_2$$

$g \circ f : A \to A$ inj $\Rightarrow A \sim (g\circ f)(A) = g(f(A)) \overset{CB}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow A \sim g(B)$

$B \xrightarrow{g} A$ inj $\Rightarrow B \sim g(B) \Rightarrow g(B) \sim B$ $\Big\} \overset{\text{tranz}}{\Longrightarrow} A \sim B$

$\Rightarrow \exists h : A \to B$ bij $\checkmark$.

Temă:

„$\precsim$" este rel de ordine totală

($\forall A, B$ mulțimi, avem $|A| \precsim |B|$ sau $|B| \precsim |A|$)

1) $|M| = n < \infty$

i) Câte legi de compoziție putem să definim pe M?

Sol: lege de compoziție pe M $\overset{def}{=}$ funcție $f : \underbrace{M \times M}_{n^2 \text{ elem}} \to \underbrace{M}_{n \text{ elem}}$.

Avem n^{n^2} funcții, deci n^{n^2} legi de comp. pe M.

ii) Câte legi de comp. cu elem neutru e putem să definim pe M?

Sol: $M = \{x_1, \dots, x_n\} \ni e \to$ are n posibilități

$e = x_i$; $e * x_j = x_j = x_j * e$, $\forall j = \overline{1,n}$

legea de comp. e determinată de $x_j * x_t$ cu $j, t \neq i$, adică de o funcție $\underbrace{(M \setminus \{x_i\}) \times (M \setminus \{x_i\})}_{(n-1)^2 \text{ elem}} \to \underbrace{M}_{n \text{ elem}}$

$\Rightarrow \exists\ n^{(n-1)^2}$ legi de comp. pe M cu elem. neutru x_i

Cum $1 \le i \le n \Rightarrow \exists\ n \cdot n^{(n-1)^2} = n^{n^2-2n+2}$ legi de comp. cu elem. neutru pe M.

(iii) Câte legi de comp. comutative putem să definim pe M?

Sol: $M = \{x_1, \dots, x_n\}$.

$x_i * x_j = x_j * x_i \quad \forall\, 1 \le i, j \le n$.

legea de comp. (com) e det. o funcție $\{(x_i; x_j) \mid 1 \le i \le j \le n\} \to \underbrace{M}_{n \text{ elem}}$

are $n + (n-1) + \dots + 1 = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{elem.}} = C^2_{n+1}$

$\Rightarrow \exists\, n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ legi de comp. com. pe M.

Temă:

(iv) Câte legi com. și cu elem. neutru putem să definim pe M?

Contra-exemplu stânga-dreapta:

$G=\mathbb{R}^*$ și $\circ : G\times G \to G$, $x\circ y = |x|y$ $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

- $(G,\circ)$ semigrup:

$$(x\circ y)\circ z = |x\circ y| z = ||x|y|z = |x||y|z$$

$$x\circ(y\circ z) = |x|(y\circ z) = |x||y|z \quad , \forall x,y,z\in G.$$

- $\exists e = 1\in\mathbb{R}^*$ a.î. $e\circ x = x$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$
- $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\exists x' := \frac{1}{|x|}\in\mathbb{R}^*$ a.î. $x\circ x' = 1$
- $(G,\circ)$ nu este grup pentru că $e' = -1\in\mathbb{R}^*$ este și el elem. neutru la stânga pentru G iar $e'\neq e$.

3) Fie G grup și $H \subseteq G$ finită. Atunci
$H \leq G \iff \forall h, h' \in H$ avem $hh' \in H$.

Sol: "$\Rightarrow$" evident

"$\Leftarrow$" $H \leq G$ dacă
- $\forall h, h' \in H \Rightarrow hh' \in H$
- $e \in H$
- $\forall h \in H, h^{-1} \in H$.

$h \in H$: $\underbrace{\{e, h, h^2, h^3, \ldots\} \subseteq H}_{\text{finită}} \Rightarrow \exists i \neq j$ a.î. $h^i = h^j$

$\Rightarrow \exists n_h \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\underbrace{h^{n_h}}_{\in H} = e \Rightarrow e \in H$

$n_h \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists h' = h^{n_h - 1} \in H$ a.î. $hh' = h'h = e$.

2) Fie $(G,\cdot)$ semigrup. U.A.S.E.

(a) $(G,\cdot)$ grup.

(b) (i) $\exists e \in G$ a.î. $ea = a$, $\forall a \in G$

(ii) $\forall a \in G, \exists a' \in G$ a.î. $a'a = e$.

Sol: (a) $\Rightarrow$ (b) e clar.

(b) $\Rightarrow$ (a) Fie $a \in G$ fixat.

Știm că $\exists a' \in G$ a.î. $a'a = e$.

Pentru $a' \in G$ știm că $\exists a'' \in G$ a.î. $a''a' = e$.

$$\Rightarrow a = ea = (a''a')a = a''(a'a) = a''e$$

$$\Rightarrow ae = (a''e)e = a''(ee) = a''e = a$$

Deci $ae = a = ea$, $\forall a \in G \Rightarrow e$ este elem neutru.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a = a''e = a'' \\ a''a' = e \end{array}\right\} \Rightarrow aa' = e = a'a \Rightarrow$$

$\Rightarrow a'$ este simetricul lui a, $\forall a \in G$.

Obs: Funcționează și varianta dreapta-dreapta, dar nu stânga-dreapta sau dreapta-stânga.