$\boxed{S_8 - GAL}$

7.04.2022.

Forme pătratice. Formă canonică. Metoda Gauss. Metoda Jacobi

Ex1 Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

a) G = matricea asociată în raport cu $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

b) $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma polară asociată

c) Să se aducă Q la o formă canonică, utilizând metoda Gauss, resp. Jacobi. Este Q poz. definită?

Generalizare.

Ex2 Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Să se aducă la o formă canonică (met. Gauss / Jacobi)

Precizați signatura.

Ex3 Fie $Q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$.

Să se aducă la o f. canonică.

Ex4 Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă pătratică și

$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea asociată în rap. cu $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$

Să se diagonalizeze Q.

Ex5 Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă pătratică

$G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu

$R' = \{e_1' = (1,1,1), e_2' = (0,1,0), e_3' = (1,0,0)\}$

Să se aducă Q la o f. canonică.

EX6. $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

a) $G = ?$ în rap cu R_0

b) $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f. polară asociată

c) Să se aducă la o f. canonică prin diverse metode și să se verifice Th. inerției Sylvester.

EX7. Fie $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma pătratică și
$G = AA^T$ = matricea asociată în raport cu R_0,
unde $A \in GL(n, \mathbb{R})$.
Să se arate că Q este ~~poz~~ definită

EX8. Fie $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$g(X, Y) = 2Tr(X \cdot Y) - Tr(X)Tr(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) $g \in L^s(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \mathbb{R})$

b) $G = ?$ matricea în rap cu $R_0 = \{E_{ij}\}_{i,j=\overline{1,2}}$

c) Să se afle expresia analitică a lui $Q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

d) Să se aducă Q la o f. canonică.

EX9 $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ matricea în rap cu R_0.
$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată lui $g^s \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$
(unde $G^s = \frac{1}{2}(G + G^T)$ este matr. asoc. în rap cu R_0)
Să se aducă Q la o f. canonică.