Seminar 1

1. Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați, folosind doar definiția, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Sol.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem

$|x_n - 0| < \varepsilon$.

$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Alegem $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ și rezultă concluzia. $\square$

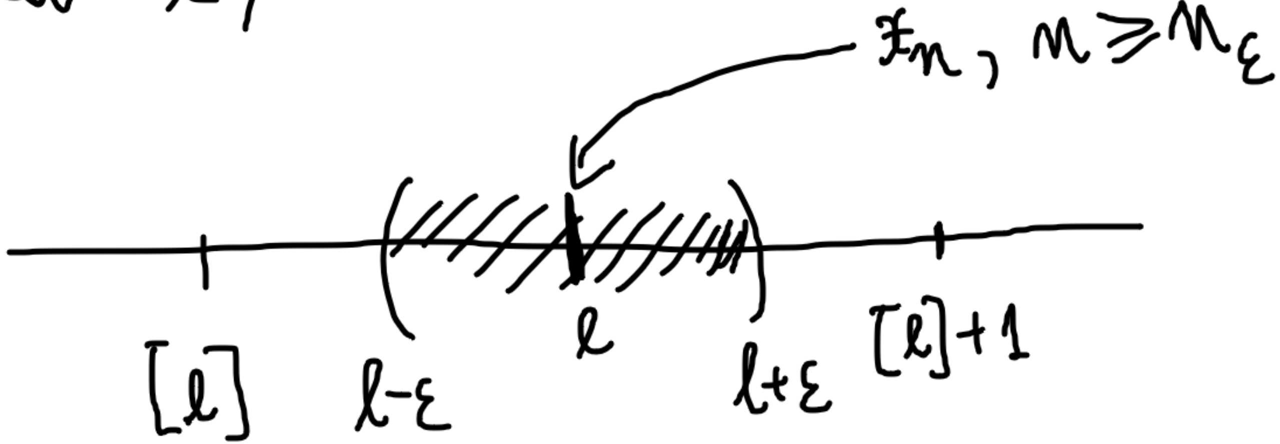
2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$. Arătați că $l \in \mathbb{Z}$.

__Def.__: $\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

$|x_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \iff$
$\iff x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Știm că $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, deci știm că $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

Presupunem că $l \notin \mathbb{Z}$.



Alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $[l] < l - \varepsilon$ și $l + \varepsilon < [l]+1$, i.e. $0 < \varepsilon < l - [l]$ și $0 < \varepsilon < [l]+1-l$. Acest lucru este posibil deoarece $l - [l] > 0$ $(l \notin \mathbb{Z})$ și $[l]+1-l > 0$.

De exemplu putem alege $\varepsilon \in \left(0, \min\{\underbrace{l-[l]}_{>0}, \underbrace{[l]+1-l}_{>0}\}\right)$

Pentru acest ε, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem

$x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Dar $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \phi$, contradicție cu $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap$

$\cap \mathbb{Z}$ $\forall n \geq n_\varepsilon$.

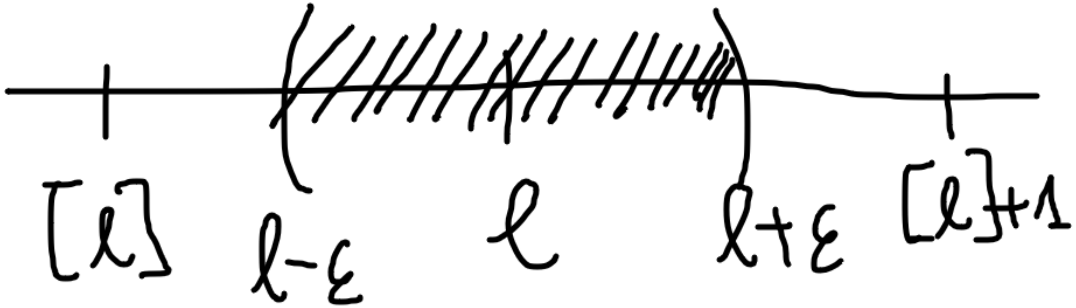
Prin urmare $l \in \mathbb{Z}$. $\square$

Caz concret

$l = \frac{1}{2}$

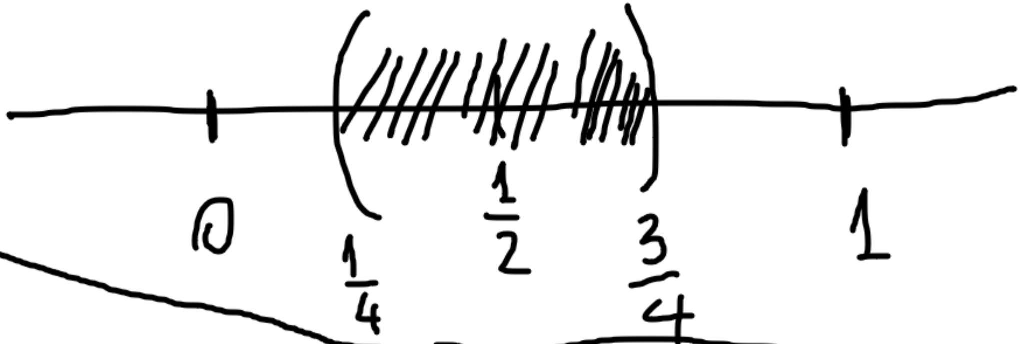
$[l] = 0$

$[l]+1 = 1$



$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$\varepsilon = \frac{1}{4}$



$\frac{1}{2} - \varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$

$= \frac{1}{4}$

Criteriul raportului pentru şiruri cu termeni strict pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset (0,\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} l \in [0,\infty] \overset{not.}{=}$

$\overset{not.}{=} [0,\infty) \cup \{\infty\}$.

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

3. Fie $a>0$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n$.

<u>Sol.</u>: Fie $x_n = n\cdot a^n \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Aplicăm crit. rap. pt. şiruri cu termeni strict pozitivi.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\overset{a}{\cancel{a^{n+1}}}}{n\cancel{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}a=a.$$

1) Dacă $a<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

2) Dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

3) Dacă $a=1$, atunci acest criteriu nu decide, dar, în acest caz, $x_n = n \cdot 1^n = n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Am obținut $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 \ ; & a \in (0,1) \\ \infty \ ; & a \in [1,\infty). \end{cases}$ $\square$

3'. Fie $a>0$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n}$.

<u>Sol</u>.: Rezolvați-l voi! $\square$

Criteriul radicalului pentru șiruri cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset [0, \infty)$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{\text{not.}}{=} l \in [0, \infty]$.

1) Dacă $l < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $l > 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

4. Fie $a, b \in (0, \infty)$. Det. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{a \cdot n^2 + 3n + 5}{bn^2 + 2n + 3} \right)^n$.

<u>Sol</u>: Fie $x_n = \left(\dfrac{an^2 + 3n + 5}{bn^2 + 2n + 3} \right)^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicăm crit. rad. pt. șiruri cu termeni pozitivi.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{an^2 + 3n + 5}{bn^2 + 2n + 3} = \frac{a}{b}.$$

1) Dacă $\frac{a}{b} < 1$ (i.e. $a<b$), atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $\frac{a}{b} > 1$ (i.e. $a>b$), atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $\frac{a}{b} = 1$ (i.e. $a=b$), atunci acest criteriu nu decide, dar, în acest caz, $x_n = \left(\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3} - 1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\cancel{an^2} + 3n + 5 - \cancel{an^2} - 2n - 3}{an^2 + 2n + 3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^{\frac{an^2+2n+3}{n+2}}\right]^{\frac{n+2}{an^2+2n+3}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{an^2+2n+3} \cdot n} = e^{\frac{1}{a}}. \quad \square$$

4'. Fie $a \in (0, \infty)$. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{an+1}\right)^n$.

Sol.: Rezolvați-l voi! $\square$

Propoziție. Fie $(x_n)_n \subset (0, \infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} l \in [0, \infty]$.
Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

5. Det. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

<u>Sol</u>.: Fie $x_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Conform propoziției de mai sus avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, deci

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\square$

6. Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $(x_n)_n$ este convergent.

<u>Sol.</u>: Folosim Teorema lui Weierstrass.

<u>Schiță de rezolvare</u>: 1) $(x_n)_n$ strict crescător.

2) $(x_n)_n$ mărginit.

$1 \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \ \forall k = \overline{2,n}$.

Vom obține $x_n < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} < 2.$

Terminați voi rezolvarea! $\square$