Curs 13

Definiție. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n): D \to \mathbb{R}^n$ o funcție care admite toate derivatele parțiale în punctul a. Matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

se numește matricea jacobiană (sau matricea Jacobi) a lui φ în a și se notează cu $J_\varphi(a)$. Determinantul acestei matrice se numește jacobianul lui φ în a și se notează cu $\det J_\varphi(a)$.

Teoremă (Teorema de schimbare de variabilă - Varianta 1)

Fie D, G două mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$, $\varphi: D \to G$ un difeomorfism de clasă C^1 (i.e. φ bijectivă și φ, φ^{-1} sunt de clasă C^1), $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A = \overline{A} \subset D$ și $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \det J_\varphi : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann și

$$\int_A (f \circ \varphi)(x) \cdot |\det J_\varphi(x)| \, dx = \int_{\varphi(A)} f(y) \, dy.$$

Definiție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (D_k)_{k \geq 0}$ o familie de dreptunghiuri a.î. $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathring{D}_k$ și $\sum_{k=1}^{\infty} vol(D_k) < \varepsilon$.

Observații. 1) Orice submulțime a unei mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

2) Orice mulțime cel mult numărabilă este neglijabilă Lebesgue.

3) Orice reuniune cel mult numărabilă

de mulțimi neglijabile Lebesgue este neglijabilă Lebesgue.

4. Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(A)=0$, atunci A este neglijabilă Lebesgue.

Teoremă (Teorema de schimbare de variabilă - Varianta 2). Fie D, G două mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că $\operatorname{Fr} D$ este neglijabilă Lebesgue, $\varphi: D \to G$ un difeomorfism de clasă C^1, $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $A \subset D$ și $\exists\, M>0$ a.î. $\forall\, x \in A$, $\forall\, z \in \mathbb{R}^n$, avem $\|d\varphi(x)(z)\| \leq M\|z\|$ și fie $f: \varphi(A) \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \det J_\varphi : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann și $\int_A (f\circ\varphi)(x)\left|\det J_\varphi(x)\right| dx = \int_{\varphi(A)} f(y)\, dy$.

Schimbări standard de variabilă pentru integrala dublă

1. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă

Riemann.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$).

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$(x, y) \in A \Leftrightarrow (r, \theta) \in B \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$.

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r f(\alpha + r\cos\theta, \beta + r\sin\theta)\,dr\,d\theta$.

2. <u>Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare generalizate</u>

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = 0$).

Fie $a, b \in (0, \infty)$.

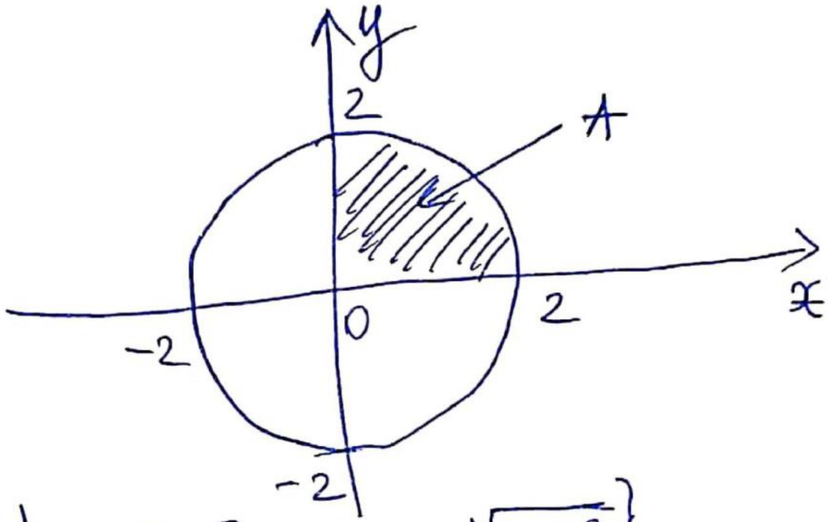
S.V. $\begin{cases} x = \alpha + ar\cos\theta \\ y = \beta + br\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$(x, y) \in A \Leftrightarrow (r, \theta) \in B \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$.

Avem $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B abr\, f(\alpha + ar\cos\theta,\ \beta + br\sin\theta)\,dr\,d\theta.$

<u>Exercițiu</u>. Determinați $\iint_A y\,dx\,dy$, unde $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

<u>Soluție</u>.



$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,2],\ 0\le y\le \sqrt{4-x^2}\}$.

Fie $\alpha,\beta : [0,2]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=0$, $\beta(x)=\sqrt{4-x^2}$.

α,β continue.

A compactă și $A\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$.

f continuă (deci f integrabilă Riemann).

S.V. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$.

$$(x,y)\in A \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2\le 4 \\ r\cos\theta\ge 0 \\ r\sin\theta\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r\in[0,2] \\ \cos\theta\ge 0 \\ \sin\theta\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\in[0,2] \\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Deci $B=[0,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$=\iint_{[0,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r\cdot r\sin\theta\,dr\,d\theta = \int_0^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\theta\,d\theta\right)dr =$$

$$=\int_0^2 r^2(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^2 r^2\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)dr =$$

$$=\int_0^2 r^2(0+1)\,dr = \int_0^2 r^2\,dr = \frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=2} = \frac{8}{3}.\ \square$$

Schimbări standard de variabilă pentru integrala triplă

1. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann.

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$).

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta\sin\varphi \\ y = \beta + r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \gamma + r\cos\varphi \end{cases}$, $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$.

$(x, y, z) \in A \Leftrightarrow (r, \theta, \varphi) \in C \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

Avem $\iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$

$= \iiint_C r^2 \sin\varphi\, f(\alpha + r\cos\theta\sin\varphi, \beta + r\sin\theta\sin\varphi, \gamma + r\cos\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi.$

2. Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice generalizate

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann.

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (Putem avea $\alpha = \beta = \gamma = 0$)

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$.

S.V. $\begin{cases} x = \alpha + a r \cos\theta \sin\varphi \\ y = \beta + b r \sin\theta \sin\varphi \\ z = \gamma + c r \cos\varphi \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$.

$(x,y,z) \in A \Leftrightarrow (r, \theta, \varphi) \in C \subset [0,\infty) \times [0, 2\pi] \times [0,\pi]$.

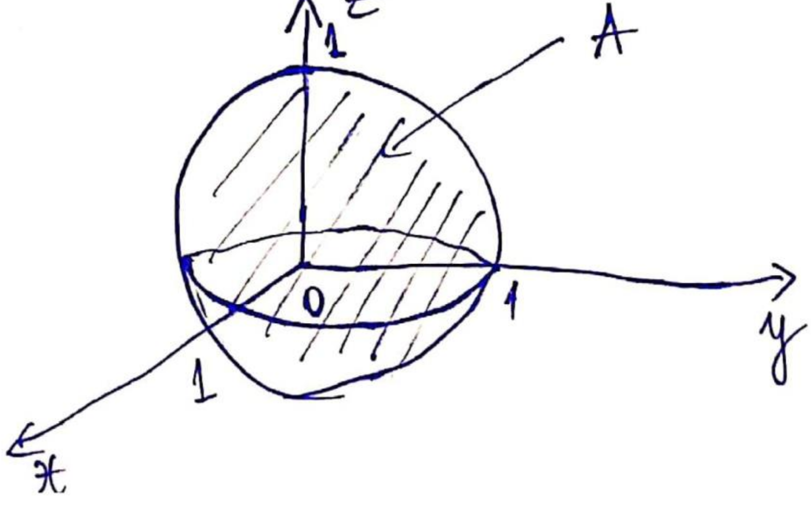
Avem $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$= \iiint_C abc\, r^2 \sin\varphi\, f(\alpha + a r\cos\theta\sin\varphi,\ \beta + b r \sin\theta \sin\varphi,\ \gamma + c r \cos\varphi)\, dr\, d\theta\, d\varphi.$

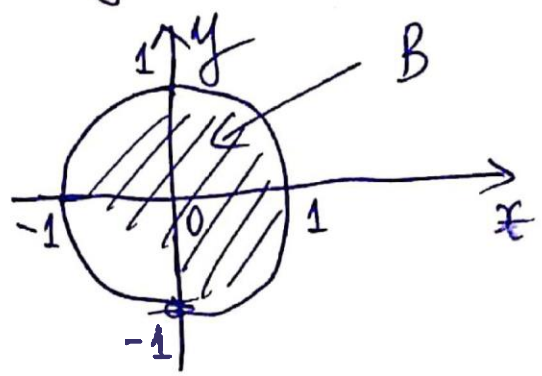
<u>Exercițiu.</u> Determinați $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$,

unde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

<u>Soluție.</u>



Fie $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.



$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

Fie $\alpha, \beta : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $\beta(x) = \sqrt{1-x^2}$.

α, β - continue

B compactă și $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B,\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

Fie $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, $\psi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

φ, ψ - continue

A compactă și $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

f continuă.

S. V. $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$.

$$(x,y,z)\in A \iff x^2+y^2+z^2 \le 1 \iff r^2 \le 1 \iff \begin{cases} r \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \\ \varphi \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Deci $C = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_C r^2 \sin\varphi\, f(r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} r^2\sin\varphi\sqrt{r^2}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} r^3\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} -r^3\cos\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\,d\theta\right)dr = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} -r^3(-1-1)\,d\theta\right)dr =$$

$$= \int_0^1 2r^3\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\,dr = 4\pi\int_0^1 r^3\,dr = 4\pi\cdot\frac{1}{4} = \pi. \quad \square$$

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann)

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Sunt echivalente:

1) f integrabilă Riemann

2) D_f este neglijabilă Lebesgue, unde $D_f = \{x \in A \mid f$ nu e continuă în $x\}$.

Exercițiu. Fie $f: [0,1] \times [2,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x+3y & ; (x,y) \in ([0,1]\times[2,3]) \setminus \{(0,2)\} \\ 1 & ; (x,y) = (0,2) \end{cases}$$

Arătați că f este integrabilă Riemann.

Soluție. $[0,1] \times [2,3] \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

$|f(x,y)| = |2x+3y| = 2x+3y \leq 2+9 = 11 \; \forall (x,y) \in [0,1]\times[2,3] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ mărginită.

$$\left.\begin{array}{l} D_f \subset \underbrace{\{(0,2)\}}_{\text{neglijabilă Lebesgue}} \end{array}\right| \Rightarrow D_f \text{ neglijabilă Lebesgue.}$$

Deci f este integrabilă Riemann. $\square$

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ o descompunere Jordan a lui A.

Considerăm $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall\, i = \overline{1,m}$ și $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in A_i\}$ $\forall\, i = \overline{1,m}$.

<u>Definiție.</u> 1) $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{m} M_i \mu(A_i)$ se numește suma Darboux superioară asociată funcției f și descompunerii $\mathcal{A}$.

2) $s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{i=1}^{m} m_i \mu(A_i)$ se numește suma Darboux inferioară asociată funcției f și descompunerii $\mathcal{A}$.

3) $\overline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$

$= \inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\}$ se numește integrala Darboux superioară asociată funcției f.

4) $\underline{\int_A} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$

$= \sup\{s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\}$ se numește integrala Darboux inferioară asociată funcției f.

Observații. 1) $s_{\mathcal{A}}(f) \leq S_{\mathcal{A}}(f)$

2) $\underline{\int_A} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n \leq \overline{\int_A} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$

Teoremă (Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann). Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f e integrabilă Riemann.

2) $\underline{\int_A} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \overline{\int_A} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$

(caz în care avem $\int_A f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n =$

$= \underline{\int_A} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \overline{\int_A} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$).

3) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \mathcal{A}_\varepsilon$ o descompunere Jordan a lui A a.î. $S_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) - s_{\mathcal{A}_\varepsilon}(f) < \varepsilon$.

4) $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui A, $\|\mathcal{A}\|<\delta_\varepsilon$, avem $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$.

Exercițiu. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, $\mu(A)>0$ și $f: A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \,; & x,y \in \mathbb{Q} \\ 1 \,; & \text{altfel.} \end{cases}$$

determinați $\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$, $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$ și precizați dacă f e integrabilă Riemann.

Soluție. Fie $\mathcal{A}=(A_i)_{i=\overline{1,m}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ o descompunere Jordan a lui A.

$$S_{\mathcal{A}}(f)=\sum_{i=1}^{m} M_i\,\mu(A_i)=\sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{m} M_i\,\mu(A_i).$$

$$s_{\mathcal{A}}(f)=\sum_{i=1}^{m} m_i\,\mu(A_i)=\sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{m} m_i\,\mu(A_i).$$

$\mu(A_i)>0 \Rightarrow \mu_*(A_i)>0 \Rightarrow \exists\, D\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $vol(D)>0$ a.î. $D\subset A_i$ (1)

Fie $B=\{(x,y)\in A \mid x,y\in\mathbb{Q}\}$ și $C=\{(x,y)\in A \mid x\notin\mathbb{Q}$ sau $y\notin\mathbb{Q}\}$.

Conform relației (1), $\forall\, i\in\{1,\dots,m\}$ a.î. $\mu(A_i)>0$, avem $A_i\cap B\neq\emptyset$ și $A_i\cap C\neq\emptyset$, deci $\forall\, i\in\{1,\dots,m\}$ a.î. $\mu(A_i)>0$, avem $m_i=0$ și $M_i=1$.

Așadar $S_{\mathcal{A}}(f)=\sum_{\substack{i=1\\ \mu(A_i)>0}}^{m} 1\cdot\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)=\mu(A)$ și

$$s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mu(A_i)>0}}^{m} 0 \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot \mu(A_i) = 0.$$

Prin urmare $\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy = \inf\{S_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\} = \mu(A)$ și $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy =$

$= \sup\{s_{\mathcal{A}}(f) \mid \mathcal{A}$ descompunere Jordan a lui $A\} = 0$.

$\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy \neq \underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow f$ nu e integrabilă Riemann.