

Seminar 6 - GAL

Aplicații liniare

PROP $f: V_1 \rightarrow V_2$ liniară

f bijectivă $\Leftrightarrow f$ transf. \forall reper din V_1 într-un reper în V_2 .

① $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3)$

a) f nu este izomorfism de sp. vect.

b) $f|_{V'}: V' \rightarrow V''$ izomorfism, unde.

$$V' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

$$V'' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0\}$$

c) Să se afle $f(V' \cap V'')$.

d) $\mathbb{R}^3 = V' \oplus W$. Dati un exemplu de W .

Sie $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ proiecția pe V'

$s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ simetria față de V'

Să se calculeze $p(1, 3, 6)$, $s(1, 3, 6)$

OBS a) $p: V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2$ liniară

$$p(v) = p(\underbrace{v_1}_{V_1} + \underbrace{v_2}_{V_2}) = v_1 \quad \text{proiecția pe } V_1$$

b) $s: V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2$.

$$s = 2p - \text{id}_V \quad \text{simetria față de } V_1.$$

$$s(\underbrace{v_1}_{V_1} + \underbrace{v_2}_{V_2}) = v_1 - v_2$$

② $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

a) $[f]_{\mathcal{R}, \mathcal{R}}$, $\mathcal{R} = \{e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, e'_2 = e_1 + e_3, e'_3 = e_1 + e_2\}$

b) $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus W$

$\Delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ simetria față de W

$\Delta(0,1,1) = ?$

c) $\mathbb{R}^3 = f(V') \oplus U$

$V' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}\}$

$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ proiectia pe $f(V')$

$p(2, -1, 3) = ?$

③ $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$, $f(P) = P'$

a) $[f]_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'} = ?$ $\mathcal{R} = \{x^2, 1+x, 2-x\}$ reper în $\mathbb{R}_2[X]$
 $\mathcal{R}' = \{x, 1+3x\}$ — " — $\mathbb{R}_1[X]$.

b) $\mathbb{R}_2[X] = \text{Ker } f \oplus W$

$p_1: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ proiectia pe $\text{Ker } f$

$p_2: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ — " — W .

$p_1(1-x+3x^2), p_2(2x+x^2) = ?$

④ $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2^{\Delta}(\mathbb{R})$, $f(A) = A + A^T$

a) $[f]_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0'}$ $\mathcal{R}_0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ reper în $M_2(\mathbb{R})$
 $\mathcal{R}_0' = \{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ reper în $M_2^{\Delta}(\mathbb{R})$

b) $\text{Ker } f, \text{Im } f$.

c) $f(V) = ?$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

• $f \in \text{End}(V)$

$x \neq 0_V$ s.n. vector propriu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K$ aî $f(x) = \lambda x$
 $\lambda = \text{valoare proprie}$.

$V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ subspatiu propriu.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

• valorile proprii = răd din K ale polin. caracteristic

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k = \text{valori proprii distincte}$.

$m_1, \dots, m_k = \text{multiplicități}$.

Ⓙ \exists un reper R în V aî $[f]_{R,R}$ diagonală \Leftrightarrow

1) $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_i, \forall i = \overline{1, k}$

⑤ $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x) = (x_2 - x_3 + x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_4, x_4)$.

a) Să se afle valorile proprii

b) Precizați care sunt subspatiile proprii

c) \exists un reper R în \mathbb{R}^4 aî $[f]_{R,R}$ este diagonală?

⑥ Fie $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ liniară

$A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Să se afle valorile proprii și subsp. proprii coresp.

b) $U = \langle \{e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4\} \rangle$ Să se arate că U este subsp. invariant al lui f ie $f(U) \subset U$.

⑦ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_2, x_3, 2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$

Să se arate că f nu este un endomorfism diagonalizabil.