INTEGRALE IMPROPRII

A) NOTIUNI GENERALE

Intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ poate avea forma (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $\mathbb{R}$.

Pe parcursul cursului se alege $I = [a,b)$

Definitia 1. Functia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeste local integrabila pe I daca $\forall \alpha, \beta \in I$ cu $\alpha < \beta$ avem ca $f\mid_{[\alpha,\beta]}$ este functie integrabila Riemann pe $[\alpha,\beta]$.

Notatie. $\Re_{loc}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \ functie\ local\ integrabila\ pe\ I\}$

Teorema 1. a) Orice functie continua $f : I \to \mathbb{R}$ este local integrabila pe I.

b) Orice functie monotona $f : I \to \mathbb{R}$ este local integrabila pe I.

c) Fie o functie marginita $f : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $D_f = \{x \in I \mid f\ nu\ este\ continua\ in\ x\}$ este multime neglijabila Lebesgue. Atunci f este local integrabila pe I.

Definitia 2. Fie $f \in \Re_{loc}([a,b))$ cu $a < b \in \mathbb{R}$.

a) Spunem ca integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta daca $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int\limits_a^x f(t)dt \in \mathbb{R}$.

b) Spunem ca integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta daca aceasta nu este convergenta.

c) Spunem ca integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} |f(x)|\, dx$ este convergenta.

Criteriul lui Cauchy pentru integralele improprii. Fie $f \in \Re_{loc}([a,b))$.

a) Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta daca si numai daca $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel incat $\left|\int\limits_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$ $\forall x, y \in [a,b)$ cu $c_\varepsilon \le x < y < b$.

b) Integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca si numai daca $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel incat $\int\limits_x^y |f(t)|\, dt < \varepsilon$ $\forall x, y \in [a,b)$ cu $c_\varepsilon \le x < y < b$.

Teorema 2. Se considera $f \in \Re_{loc}([a,b))$. Daca integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta, atunci aceasta este convergenta.

Observatie. Reciproca Teoremei 2 este falsa.

Daca, in plus, $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b)$ sau $f(x) \le 0$ $\forall x \in [a,b)$, atunci integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca si numai daca aceasta este convergenta.

Criteriul lui Abel pentru integralele improprii. Se considera $f, g \in \Re_{loc}([a,b))$ care verifica urmatoarele proprietati:

i) f este functie descrescatoare si $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = 0$;

ii) $\exists M > 0$ astfel incat $\left| \int\limits_a^x f(t)dt \right| \leq M \ \forall x \in [a,b)$.

Atunci integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} f(x)g(x)dx$ este convergenta.

Criteriul lui Dirichlet pentru integralele improprii. Se considera $f, g \in \Re_{loc}([a,b))$ care verifica urmatoarele proprietati:

i) f este functie descrescatoare si $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \in (-\infty, +\infty]$;

ii) integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta.

Atunci integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} f(x)g(x)dx$ este convergenta.

Criteriul de comparatie cu inegalitati pentru integralele improprii. Fie $f, g \in \Re_{loc}([a,b))$ doua functii pozitive care verifica inegalitatea $f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [a,b)$.

a) Daca integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta, atunci integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta.

b) Daca integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta, atunci integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este divergenta.

Criteriul de comparatie cu limite pentru integralele improprii. Fie $f, g \in \Re_{loc}([a,b)$ doua functii pozitive pentru care $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

a) Daca $l \in (0, +\infty)$, atunci integralele improprii au aceiasi natura.

b) Daca $l = 0$ si integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta, atunci integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta.

c) Daca $l = +\infty$ si integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ este divergenta, atunci integrala impropie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta.

B) METODE DE CALCUL PENTRU INTEGRALELE IMPROPRII

Formula Leibniz-Newton pentru integralele improprii. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o functie local integrabila care admite primitive, $F : [a, b) \to \mathbb{R}$ fiind una dintre primitive. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta

b) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x) \in \mathbb{R}$.

In plus, $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x) - F(a)$.

Formula de integrare prin parti pentru integralele improprii. Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile astfel ca $f', g' \in \Re_{loc}([a, b)$ *si* $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} f'(x)g(x)dx$ este convergenta

b) integrala improprie $\int\limits_a^{b-0} g'(x)f(x)dx$ este convergenta.

In plus, $\int\limits_a^{b-0} f'(x)g(x)dx = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int\limits_a^{b-0} g'(x)f(x)dx$.

Teorema de schimbare de variabila pentru integralele improprii. Fie $f \in \Re_{loc}([a, b))$ si $g : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ o functie bijectiva, derivabila, strict monotona cu $g' \in \Re_{loc}([a, b))$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int\limits_\alpha^{\beta-0} f(g(t))g'(t)dt$ este convergenta

b) integrala improprie $\int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta-0)} f(x)dx$ este convergenta.

In plus, $\int\limits_\alpha^{\beta-0} f(g(t))g'(t)dt = \int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta-0)} f(x)dx$.

C) FUNCTIILE BETA SI GAMMA ALE LUI EULER

Teorema 3. a) Oricare ar fi $p, q > 0$ integrala improprie $\int\limits_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ este convergenta.

b) Oricare ar fi $p > 0$ integrala improprie $\int\limits_{0+0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ este convergenta.

Definitia 3. a) Functia $B:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita prin $B(p,q)=\int\limits_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$ se numeste functia Beta a lui Euler.

b) Functia $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita prin $\Gamma(p)=\int\limits_{0+0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\ \forall p\in(0,+\infty)$ se numeste functia Gamma a lui Euler.

Teorema 4. (Proprietatile functiei Gamma) Functia Gamma are urmatoarele proprietati:

a) $\Gamma(1)=1$

b) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)\ \ \forall p>0$

c) $\Gamma(n+1)=n!\ \forall n\in\mathbb{N}$

d) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\ \ \forall p\in(0,1)$

e) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Teorema 5. (Proprietatile functiei Beta) Functia Beta are urmatoarele proprietati:

a) $B(p,q)=B(q,p)\ \ \forall p,q\in(0,+\infty)$

b) $B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)\ \ \forall p,q\in(0,+\infty)$

$B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)\ \ \forall p,q\in(0,+\infty)$

c) $B(p,q)=2\int\limits_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0}\sin^{2p-1}x\cos^{2q-1}x dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$

d) $B(p,q)=\int\limits_{0+0}^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$.

Teorema 6. (Legatura intre functiile Beta si Gamma) Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ \ \forall p,q\in(0,+\infty)$

b) $B(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\ \ \forall p\in(0,1)$.

Exemple. Sa se calculeze $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x dx$ si $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-0}\sqrt{tgx}dx$.

Integralele se calculeaza folosind functiile Gamma si Beta.

$B(p,q)=2\int\limits_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0}\sin^{2p-1}x\cos^{2q-1}x dx\ \forall p,q\in(0,+\infty)$.

Rezolvam sistemul $\begin{cases}2p-1=n\\2q-1=m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\frac{n+1}{2}\\q=\frac{m+1}{2}\end{cases}$

$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\frac{m+1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}$

Vom calcula $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ pe doua cazuri.

Cazul 1. $n=2k+1$

$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)=\Gamma(k+1)=k!$

Cazul 2. $n=2k$

$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-1\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-2\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)....\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)....\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\left(k+\frac{1}{2}-2\right)....\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tgx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x dx$$

Rezolvam sistemul $\left\{ \begin{array}{c} 2p-1=\frac{1}{2} \\ 2q-1=-\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} p=\frac{3}{4} \\ q=\frac{1}{4} \end{array} \right.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tgx}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$