Curs 8

Teoremă (Criteriul de diferențiabilitate). Fie $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ($f = (f_1, \dots, f_n)$) și $a \in \mathring{D}$. Dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în toate punctele din V $\forall i = \overline{1,m}$ (i.e. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ $\forall c \in V$, $\forall i = \overline{1,m}$) și funcțiile

$\frac{\partial f}{\partial x_i}: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sunt continue în a ($i = \overline{1,m}$),

atunci f este diferențiabilă în a.

Exercițiu. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$. Studiați diferențiabilitatea funcției f în punctul $(1,2,3)$ și, în caz afirmativ, determinați $df(1,2,3)$.

Soluție. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y + 1$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 2 \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ continue pe $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ deschisă (deci vecinătate pentru toate punctele sale)

$\xrightarrow[\text{de diferențiabilitate}]{\text{Criteriul}}$

$\Rightarrow$ f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ f diferențiabilă în $(1,2,3)$.

$$df(1,2,3): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \ df(1,2,3)(u,v,w) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)}_{\substack{\parallel \\ 2\cdot 1 - 2 + 1 = 1}} \cdot u + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)}_{\substack{\parallel \\ 2\cdot 2 - 1 = 3}} \cdot v + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)}_{\substack{\parallel \\ 2\cdot 3 - 2 = 4}} \cdot w =$$

$= u + 3v + 4w$, i. e. $df(1,2,3) = dx + 3dy + 4dz$. $\square$

<u>Exercițiu</u>. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Studiați continuitatea funcției f.

b) Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$.

c) Studiați diferențiabilitatea funcției f.

Soluție. a) Vezi Seminar 6.

b) Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(xy)'_x \sqrt{x^2+y^2} - (xy)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(xy)'_y \sqrt{x^2+y^2} - xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

! Nu e nevoie să faceți toate calculele dacă nu le folosiți mai departe.

„Are legătură"

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t e_1)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

„Are legătură"

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t e_2)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(0,t))-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0^2+t^2}}-0}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

Am obținut:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ deschisă
$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$.

Dacă f ar fi diferențiabilă în $(0,0)$, atunci

$$\underbrace{df(0,0)}_{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ df(0,0)(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v=$$

$$=0\cdot u+0\cdot v=0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}\begin{cases}=0\Rightarrow f \text{ diferențiabilă în } (0,0)\\ \neq 0\Rightarrow f \text{ nu e diferențiabilă în } (0,0).\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}=$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Fie $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Deci $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0$, i.e.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} \neq 0, \text{ i.e.}$$

f nu e diferenţiabilă în $(0,0)$. $\square$

<u>Diferenţiabilitatea funcţiilor compuse</u>

<u>Teoremă</u>. Fie $D \subset \mathbb{R}^m$, $D_1 \subset \mathbb{R}^n$, $g: D \to D_1$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $\varphi: D_1 \to \mathbb{R}^p$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ şi $a \in \mathring{D}$ a.î. $g(a) \in \mathring{D}_1$.

Dacă g este diferenţiabilă în a şi φ este diferențiabilă în $g(a)$ atunci:

1) $\varphi\circ g : D \to \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă în a și

$$\underbrace{d(\varphi\circ g)(a)}_{\substack{\text{diferențiala lui} \\ \varphi\circ g \text{ în } a}} = \underbrace{d\varphi(g(a))}_{\substack{\text{diferențiala} \\ \text{lui } \varphi \text{ în } g(a)}} \circ \underbrace{dg(a)}_{\substack{\text{diferențiala lui} \\ g \text{ în } a}}.$$

2) $$\frac{\partial(\varphi\circ g)_i}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_l}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(a) \quad \forall k=\overline{1,m} \quad \forall i=\overline{1,p}$$

Explicații teoremă. 1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "dg(a)"] \arrow[rr, bend right, "d\varphi(g(a))\circ dg(a)"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "d\varphi(g(a))"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

2)
$$\begin{tikzcd} D\subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ g"'] & D_1\subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

$(x_1,\dots,x_m)$ variabile $\qquad$ $(y_1,\dots,y_n)$ variabile

Au sens: $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\ \forall k=\overline{1,m}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(g(a))\ \forall i=\overline{1,n}$, $\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x_k}(a)\ \forall k=\overline{1,m}$.

Nu au sens: $\frac{\partial g}{\partial y_i}(a)\ \forall i=\overline{1,n}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(g(a))\ \forall k=\overline{1,m}$, $\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial y_i}(a)\ \forall i=\overline{1,m}$.

Exercițiu. Fie $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \varphi(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$. Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Soluție. Fie $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$.

Avem $g = (g_1, g_2, g_3)$, unde $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$g_1(x,y,z) = xyz$, $g_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $g_3(x,y,z) = x+yz$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z)\right) =$$

$$= (yz, 2x, 1) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z)\right) =$$

$$= (xz, 2y, z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z)\right) =$$

$$= (xy, 2z, y) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \text{ deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow g \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3.$$

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3 \\ \varphi \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3 \end{array}\right| \Rightarrow f = \varphi \circ g \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=(g_1, g_2, g_3)"] \arrow[rr, bend right, "f=\varphi\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x, y, z) variabile $\qquad$ (u, v, w) variabile

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z)) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot yz +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z))\cdot \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z)=$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot xz\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot 2y\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z)+$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z))\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z))\cdot \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z)=$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot xy\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot 2z\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot y.\ \square$$

<u>Observatie.</u> În exercitiul precedent putem nota $g=(u,v,w)$, $u,v,w:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, i.e. $u=g_1$, $v=g_2$,

$w = g_3$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g=(u,v,w)} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & & (u,v,w) & & \\ \text{variabile} & & \text{variabile} & & \end{array}$$

Aplicăm formulele precedente și obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial \underbrace{u}_{\text{variabilă}}}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \overbrace{u}^{\text{funcție}}}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \underbrace{v}_{\text{variabilă}}}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \overbrace{v}^{\text{funcție}}}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underbrace{w}_{\text{variabilă}}}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \overbrace{w}^{\text{funcție}}}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot yz +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 1.$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \ldots$ (Scrieți voi formulele!)

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \ldots$