Curs 1

Șiruri de numere reale

Definiție. Fie $A \subset \mathbb{N}$ o multime numărabilă (i.e. $\exists\, g : A \to \mathbb{N}$, g bijectivă).

O funcție $f : A \to \mathbb{R}$ se numește șir de numere reale.

Notații. 1) $f(n) \overset{not.}{=} x_n \quad \forall\, n \in A$.

2) Ținând cont de definiția de mai sus și de notația 1) obținem șirul de numere reale $(x_n)_{n \in A}$.

Observații. 1) Atunci când A se subînțelege vom scrie doar $(x_n)_n$.

2) În general $A = \mathbb{N}$ (sau $A = \mathbb{N}^*$) și vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \geq 0}$, $(x_n)_n$ (sau $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(x_n)_{n \geq 1}$, $(x_n)_n$).

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$.

Definiție. 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita l și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$,

$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

$$\Updownarrow$$

$$x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n > \varepsilon$.

3) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$.

<u>Definiție</u>. 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este convergent dacă $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este divergent dacă nu este convergent.

Șiruri de numere reale
- → cu limită
  - → cu limită finită (convergente)
  - → cu limită infinită (divergente)
- → fără limită (divergente)

Definiție. 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este crescător (respectiv descrescător) dacă $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (respectiv $x_n \ge x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este strict crescător (respectiv strict descrescător) dacă $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

3) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este monoton (respectiv strict monoton) dacă este crescător sau descrescător (respectiv strict crescător sau strict descrescător).

4) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este mărginit dacă $\exists M > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$, avem $|x_n| \le M$.

Teoremă (Criteriul Cleștelui). Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ și $(z_n)_n$ trei șiruri de numere reale a.î. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\forall n \ge n_0$, avem $x_n \le y_n \le z_n$.

Presupunem că $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

<u>Teoremă (Teorema lui Weierstrass)</u>. Orice șir de numere reale monoton și mărginit este convergent.

<u>Observație</u>. Reciproca teoremei precedente nu este, în general, adevărată (există șiruri de numere reale convergente, care nu sunt monotone).

<u>Exercițiu</u>. Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $(x_n)_n$ nu este monoton.

b) Arătați că $(x_n)_n$ este convergent.

<u>Soluție</u>.

a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}.$$

$$x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}.$$

$$x_{2k+2} = \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2} = \frac{1}{2k+2}.$$

Avem $x_{2k} > x_{2k+1}$ și $x_{2k+1} < x_{2k+2}$.

Deci $(x_n)_n$ nu este monoton.

b) $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Conform Criteriului Cleștelui $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$,

i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, i.e. $(x_n)_n$ este convergent. □

Propoziție. Orice șir de numere reale convergent este mărginit.

Propoziție (Operații cu șiruri convergente).

Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale, $a \in \mathbb{R}$ și $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ și

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot x_n) = a \cdot x$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ (cu presupunerea suplimentară $y \neq 0$).

Propoziție. Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale și $x \in \mathbb{R}$. Atunci:

1) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0\right)$.

2) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|\right)$.

3) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ e mărginit atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$ („0 · mărginit = 0").

Definiție. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$

este șir Cauchy dacă $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

<u>Propoziție</u>. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) $(x_n)_n$ este șir convergent.

2) $(x_n)_n$ este șir Cauchy.

<u>Terminologie</u>. Șirurile Cauchy se numesc și șiruri fundamentale.

<u>Exercițiu</u>. Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $(x_n)_n$ nu este convergent.

<u>Soluție</u>. Arătăm că $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy.

$(x_n)_n$ este șir Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

$(x_n)_n$ nu este șir Cauchy $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ a.î. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists m_k, n_k \in \mathbb{N}$, $m_k \geq k$, $n_k \geq k$ cu proprietatea că $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$.

Avem $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Luăm $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Avem:

$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k = k+1 \geq k$ și $\exists m_k = 2(k+1) \geq k$ a.î.

$|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2(k+1)} - x_{k+1}| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$.

Din urmare, $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy, deci nici convergent $\square$

Lemă (Lema lui Cesaro). Orice șir de numere reale mărginit are (măcar) un subșir convergent (i.e. $\forall (x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(x_n)_n$ mărginit, $\exists (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $(x_{n_k})_k$ convergent).

Limitele extreme ale unui șir de numere reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

Definiție. Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} \overset{not.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Spunem că x este punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă $\exists (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Notație. $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ punct limită al lui $(x_n)_n\}$.

Propoziție. Există un cel mai mare punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$ și un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$.

Definiție. 1. Cel mai mare punct limită al șirului

$(x_n)_n$ se numește limita superioară a sa și se notează $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$.

2. Cel mai mic punct limită al șirului $(x_n)_n$ se numește limita inferioară a sa și se notează $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$.

Propoziție. 1) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.

2) Șirul $(x_n)_n$ are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, caz în care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$.

Exercițiu. Determinați $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, precizând dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Soluție. $x_{2n} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2} + (-1)^{2n} \cdot \frac{2n}{2(2n)+1} = \frac{1+1}{2} + \frac{2n}{4n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$x_{2n+1} = \frac{1+(-1)^{2n+1}}{2} + (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2(2n+1)+1} =$

$$= 0 - \frac{2n+1}{4n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2}.$$

Cum $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$ rezultă că $L((x_n)_n) =$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right\}.$$

Prin urmare $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$ şi $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$.

Deoarece $\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n$ rezultă că nu există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Serii de numere reale

Definiție. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n \ \forall n \geq p$. Perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ se numește serie de numere reale.

Notație. În contextul definiției precedente, perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ se notează $\sum\limits_{n=p}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq p} x_n$ sau $\sum\limits_{n} x_n$.

Observație. În general $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera de acum înainte în definiții, teoreme etc.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale ($s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n \ \forall n \geq 0$).

Definiție. 1) Elementele șirului $(x_n)_n$ se numesc termenii seriei.

2. Elementele șirului $(s_n)_n$ se numesc sumele parțiale ale seriei.

3. Dacă există $\lim_{n\to\infty} s_n \overset{\text{not.}}{=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, acest α se numește suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și vom scrie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$.

4. Spunem că seria $\sum_n x_n$ este convergentă dacă $(s_n)_n$ este convergent.

5. Spunem că seria $\sum_n x_n$ este divergentă dacă nu este convergentă (i.e. $(s_n)_n$ este divergent).

__Propoziție.__ Dacă seria $\sum_n x_n$ este convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

__Corolar (Criteriul suficient de divergență).__ Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

__Observație.__ Folosind doar afirmația „$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$" nu putem decide dacă $\sum_n x_n$ este convergentă sau divergentă.

__Exercițiu.__ Determinați sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt convergente sau divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$.

($0^0 = 1$ prin convenție)

__Soluție.__

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$

$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\ldots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) $x_n = q^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$s_n = \begin{cases} n+1 & ; q = 1 \\ 1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & ; q \neq 1. \end{cases}$$

Dacă $q = 1$ atunci $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, deci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \infty$ și

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Presupunem că $q \neq 1$.

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} \infty ; & q > 1 \\ 0 ; & q \in (-1, 1) \\ \nexists ; & q \leq -1. \end{cases}$$

Deci $\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty ; & q > 1 \\ \frac{1}{1-q} ; & q \in (-1, 1) \\ \nexists ; & q \leq -1. \end{cases}$

Dacă $q \leq -1$, seria din enunț nu are sumă, fiind divergentă.

Dacă $q > 1$, suma seriei din enunț este ∞, fiind divergentă.

Dacă $q \in (-1, 1)$, suma seriei din enunț este $\frac{1}{1-q}$, fiind convergentă. $\square$

<u>Observație</u>. În aplicații putem folosi (fără demonstrație) convergențele următoarelor serii de numere reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $\begin{cases} \to \text{convergentă} \ ; \ q \in (-1,1) \\ \to \text{divergentă} \ ; \ q \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$

(seria geometrică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\begin{cases} \to \text{convergentă} \ ; \ \alpha > 1 \\ \to \text{divergentă} \ ; \ \alpha \leq 1. \end{cases}$

(seria armonică generalizată)

<u>Observație.</u> q și α din seriile de mai sus sunt numere reale care nu depind de n.

<u>Propoziție.</u> Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii de numere reale convergente și $c \in \mathbb{R}$. Atunci seriile de numere reale $\sum_n (x_n + y_n)$, $\sum_n (x_n - y_n)$ și $\sum_n c \cdot x_n$ sunt convergente.

În plus,

$$\sum_n (x_n + y_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n,$$

$$\sum_n (x_n - y_n) = \sum_n x_n - \sum_n y_n,$$

$$\sum_n c \cdot x_n = c \cdot \sum_n x_n.$$