

Curs 12b: Proprietățile de închidere pentru limbajele independente de context

10 mai 2022

Teoremă: Clasa limbajelor independente de context este închisă la reuniune, concatenare, iterația Kleene.

Demonstrație: Fie L_1 și L_2 limbaje independente de context, $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$, $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$, $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici independente de context. Presupunem că $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (dacă nu, putem redenumi neterminalele)

1 Închidere la reuniune

Construim $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 | S_2\})$ unde $S \notin N_1, S \notin N_2$.

$L(G) = L_1 \cup L_2$ și G este independent de context. $w \in L(G) \iff S \Rightarrow_G^* w \iff$

$$\left\{ \begin{array}{l} S \Rightarrow_G S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w \text{ sau} \\ S \Rightarrow_G S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w \end{array} \right\} \iff w \in L_1 \cup L_2$$

Deci $L_1 \cup L_2$ este independentă de context. \square

2 Închiderea la concatenare

Construim $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\})$ unde $S \notin N_1, S \notin N_2$.

$w \in L(G) \iff S \Rightarrow_G^* w \iff S \Rightarrow_G S_1 S_2 \Rightarrow^* w \iff \exists w_1, w_2, S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w_1 \text{ și } S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w_2$ unde

$$w_1 w_2 = w. \text{ Din construcție } \left\{ \begin{array}{l} S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w_1 \iff S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w_1 \\ S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w_2 \iff S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w_2 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in L_1 L_2$$

Cum G este independentă de context $\Rightarrow L_1 L_2$ este independentă de context. \square

3 Iterația Kleene

Construim $G = (N_1 \cup \{S\}, T_1, S, P_1 \cup \{S \rightarrow \lambda | SS_1\})$, cu $S \notin N_1$. $w \in L(G) \iff S \Rightarrow_G^* w \iff S \Rightarrow_G^* \underbrace{S_1, S_1, \dots, S_1}_{n \text{ ori}} \Rightarrow_G^* w \iff w = w_1 w_2 \dots w_n$ cu $S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w_i, i = \{1, 2, \dots, n\} \iff w \in L_1^*$ și

G este independent de context $\Rightarrow L_1^*$ este independent de context. \square

Fie V, W alfabet.

Teoremă: $\varphi : v \longrightarrow P(W^*)$ a. î. $\varphi(a)$ este independentă de context pentru $\forall a \in V$. (substituție independentă de context).

Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj independent de context.

Atunci $\varphi(L)$ este limbaj independent de context.

Demonstrație: Fie $G = (N, T, S, P)$ o gramatică independentă de context pentru L .

Deci $L(G) = L$.

Definim $G_a = (N_a, W, S_a, P_a)$ gramatică independentă de context a. î. $L(G_a) = \varphi(a), \forall a \in V$.

Construim gramatica $G' = (N', W, S, P')$ unde $N' = N \cup \{S_a | a \in V\} \cup \bigcup_{a \in V} (N_a \setminus \{S_a\})$
 $P' = \bigcup_{a \in V} P_a \cup \{x \rightarrow \alpha' | x \rightarrow \alpha \in P \text{ și } \alpha' \text{ este obținut din } \alpha \text{ înlocuind operațiile lui } a \text{ cu } S_a, \forall a \in V\}$.

ex: $\alpha = aaAb$ și $\alpha' = S_a S_a A S_b$.

Avem: $w \in L(G') \iff S \Rightarrow_{G'}^* w \iff S \Rightarrow_{G'}^* S_{a_1} S_{a_2} \dots S_{a_k} \Rightarrow^* w \iff w \in \varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_k) \iff w \in \varphi(a_1 \dots a_k)$ unde $S \Rightarrow_{G'}^* a_1 \dots a_k$.

Deci $w \in L(G') \iff w \in \varphi(L)$ și G' este independente de context \Rightarrow clasa limbajelor independente de context este închisă la substituții independente de context.



Teoremă: Familia limbajelor independente de context este închisă la morfisme inverse.

$$R : V^* \rightarrow U^*, R^{-1} : U^* \rightarrow 2^{V^*}, R^{-1}(x) = \{y | R(y) = x\} \quad R(xy) = R(x)R(y)$$

Observații: R^{-1} nu este substituție $R^{-1}(xy) \neq R^{-1}(x)R^{-1}(y)$

Demonstrație: $R : V^* \rightarrow U^*, L \subseteq U^*$ independent de context.

Fie A independente de context $L = L(A), A = (Q, U, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F), R^{-1}(L) = \bigcup_{x \in L} R^{-1}(x)$. Să se demonstreze că $R^{-1}(L)$ independent de context.

Construim $A' = (Q', V, \Gamma, \delta', (q_0, \lambda), x_0, F \times \{\lambda\})$

$$Q' = Q \times \{x \in U^* | \exists a \in V a..R(a) = zx, z \in U^*\}$$

$$a \rightarrow xyz t$$

$$b \rightarrow xxyy$$

$$i) \delta'((q, x), \lambda, A) = \{((p, x), \alpha) | (p, \alpha) \in \delta(q, \lambda, A)\}, q \in Q, A \in \Gamma$$

$$ii) \delta'((q, a, x), \lambda, A) = \{((p, x), \alpha) | (p, \alpha) \in \delta(q, a, A)\}, a \in U$$

$$iii) \delta'((q, \lambda), a, y) = \{((q, R(a), y))\}, a \in V.$$

Afirmație: $L(A') = R^{-1}(L(A))$

" \supseteq " Fie $w = a_1...a_n, a_i \in V a..R(w) \in L(A). R(w) = R(a_1)...R(a_n) = w_1...w_n \in L(A)$

$$(q_0, w_1, ..., w_n, z_0) \vdash_A^* (q_1, w_2, ..., w_n, \alpha_1) \vdash_A^* (q_2, w_3, ...w_n, \alpha_2) \vdash_A^* ... \vdash_A^* (q_n, \lambda, \alpha_n), q_n \in F$$

Avem:

$$((q_0, \lambda), a_1, ..., a_n, z_0) \vdash_{A'}^* ((q_0, w_1), a_2, ..., a_n, z_0) \vdash_{A'}^*$$

$$((q_1, \lambda), a_2, ..., a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^* ((q_1, w_2), a_3, ..., a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^*$$

$$((q_2, \lambda), a_3, ..., a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^* \vdash_{A'}^* ((q_n, \lambda), \lambda, \alpha_n), q_n \in F \times \{\lambda\}$$

deci $w \in L(A')$.