

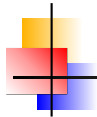


Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul I 2020/2021

Laurențiu Leuștean

Pagina web: <http://cs.unibuc.ro/~lleustean/>



PRELIMINARII



Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$A \cup B = \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

$$C_T A = T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}$$

Notății: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale;
 $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; \mathbb{Z} este mulțimea numerelor întregi; \mathbb{R} este mulțimea numerelor reale; \mathbb{Q} este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T se notează 2^T sau $\mathcal{P}(T)$. Așadar,
 $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.



Operații cu mulțimi

Notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b (care sunt **componentele** lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$;
 $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale dacă $a = c$ și $b = d$.

Definiție

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$



Fie A și B mulțimi și $f : A \rightarrow B$ o funcție.

Spunem că $f : A \rightarrow B$ este **definită pe A cu valori în B** , A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și B se numește **domeniul valorilor** sau **codomeniul** lui f .

Fie $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- ▶ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este **imaginea directă** a lui X prin f ; $f(A)$ este **imaginea** lui f .
- ▶ $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ este **imaginea inversă** a lui Y prin f .
- ▶ Fie $f|_X : X \rightarrow B$, $f|_X(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X$. Funcția $f|_X$ este **restricția** lui f la X .

Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $\text{Fun}(A, B)$ sau B^A .



Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție.

- ▶ f este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- ▶ f este **surjectivă** dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- ▶ f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcția identică a lui A : $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. **Compunerea** lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{pentru orice } x \in A.$$



$f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

f este bijectivă ddacă f este inversabilă.

Observație

- (i) Pentru orice mulțime A , $\text{Fun}(\emptyset, A)$ are un singur element, **funcția vidă**.
- (ii) Pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Fun}(A, \emptyset) = \emptyset$.

Definiția 1.1

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. **Funcția caracteristică** a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$



Definiția 1.2

Spunem că A este **echipotentă** cu B dacă există o bijecție $f : A \rightarrow B$. **Notatie:** $A \sim B$.

Propoziția 1.3

Pentru orice mulțimi A, B, C , avem

- (i) $A \sim A$;
- (ii) Dacă $A \sim B$, atunci $B \sim A$.
- (iii) Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci $A \sim C$.

Dem.: Exercițiu.

Observație

Prin urmare, A este echipotentă cu B dacă B este echipotentă cu A . De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.



Următorul rezultat este fundamental.

Teorema 1.4 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Definiția 1.5

*O mulțime A se numește **finită** dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{1, \dots, n\}$.*

*Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $|A|$ și se mai numește și **cardinalul** lui A .*

Definiția 1.6

*O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.*



Mulțimi (cel mult) numărabile

Definiția 1.7

O mulțime A este **numărabilă** dacă este echipotentă cu \mathbb{N} .

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Exemple de mulțimi numărabile: \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{Q} .

Teorema Cantor

\mathbb{R} , $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt mulțimi numărabile.

Dem.: Exercițiu.

Se poate demonstra că

Propoziția 1.8

\mathbb{R} este echipotentă cu $2^{\mathbb{N}}$.



Mulțimi (cel mult) numărabile

Propoziția 1.9

- (i) Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.*
- (ii) Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.*
- (iii) O mulțime A este cel mult numărabilă dacă există o funcție injectivă de la A la o mulțime numărabilă.*
- (iv) Produsul cartezian a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.*
- (v) Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

Dem.: Exercițiu.

Corolar 1.10

Fie A o mulțime numărabilă și B o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.



Numerele cardinale sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Pentru orice mulțime A , **cardinalul** lui A (sau **numărul cardinal** al lui A) este un obiect $|A|$ asociat lui A a.î. sunt satisfăcute următoarele:

- ▶ $|A|$ este unic determinat de A .
- ▶ pentru orice mulțimi A, B , avem că $|A| = |B|$ ddacă $A \sim B$.

Această definiție nu specifică natura obiectului $|A|$ asociat unei mulțimi A .

Prin urmare, este naturală întrebarea dacă există cardinale.



Un posibil răspuns este:

definim $|A|$ ca fiind clasa tuturor mulțimilor echipotente cu A .

Un alt răspuns este definiția lui von Neumann din teoria axiomatică a mulțimilor. Conform acestei definiții, pentru orice mulțime A , $|A|$ este tot o mulțime.

- ▶ Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele **transfinite** sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează \aleph_0 (se citește **alef zero**).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează \mathfrak{c} și se mai numește și **puterea continuumului**.
- ▶ O mulțime A este numărabilă dacă $|A| = \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Fie I o mulțime nevidă.

Definiția 1.11

Fie A o mulțime. O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \rightarrow A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i , obținem o **familie (indexată) de mulțimi** $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T . Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$



Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Definiția 1.12

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} A_i &= \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \}.\end{aligned}$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ și $A_1, \dots, A_n \subseteq T$.

► $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$, un **n -tuplu (ordonat)**

► $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ și $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$

► $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$



Propoziția 1.13

- (i) *Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.*
- (ii) *Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabilă.*
- (iii) *Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.*

Dem.: Exercițiu.



Definiția 1.14

O **relație n -ară** între A_1, \dots, A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.

O relație n -ară pe A este o submulțime a lui A^n . Dacă R este relație n -ară, spunem că n este **aritatea** lui R .

Definiția 1.15

O **relație binară** între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.

O relație binară pe A este o submulțime a lui $A^2 = A \times A$.

Exemple

- ▶ relația de divizibilitate pe \mathbb{N} :
 $| = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$
- ▶ relația de ordine strictă pe \mathbb{N} :
 $< = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$



Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A .

Notăție: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiția 1.16

- ▶ R este **reflexivă** dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **ireflexivă** dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- ▶ R este **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx .
- ▶ R este **antisimetrică** dacă pentru orice $x, y \in A$,
 xRy și yRx implică $x = y$.
- ▶ R este **tranzitivă** dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
 xRy și yRz implică xRz .
- ▶ R este **totală** dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx .



Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A .

Definiția 1.17

R este **relație de echivalență** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiția 1.18

R este relație de

- ▶ **ordine parțială** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ▶ **ordine strictă** dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ▶ **ordine totală** dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu \leq , iar relațiile de ordine strictă cu $<$.



LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm

p, q, r, \dots sau p_1, p_2, p_3, \dots

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici \neg (negația), \rightarrow (implicația), \vee (disjuncția), \wedge (conjuncția), \leftrightarrow (echivalența).

Exemple:

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = Azi este joi, deci avem curs de logică.

Considerăm propozițiile atomice

p = Azi este joi. q = Avem curs de logică.

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = Azi este joi și nu avem curs de logică.



Exemplu:

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

p = *Trenul întârzie.*

q = *Sunt taxiuri la gară.*

r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**



Definiția 2.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de *variabile*;
 - ▶ conectori logici: \neg (se citește *non*), \rightarrow (se citește *implică*)
- Mulțimea *Sim* a *simbolurilor* lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$



Definiția 2.2

Mulțimea *Expr* a *expresiilor* lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

Exemple:

$v_7, v_1 \neg \rightarrow v_2, \neg v_1 v_2, v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \neg v_1, \neg \neg v_1$.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ .
- ▶ Sim^n este mulțimea expresiilor lui LP de lungime n .
 $Sim^0 = \{\lambda\}$.
- ▶ $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.



Operația de bază pentru expresii este **concatenarea**: dacă $\varphi = \varphi_0 \dots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \dots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \dots \varphi_{k-1}\psi_0 \dots \psi_{l-1}$.

Definiția 2.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in \text{Sim}$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește (i, j) -**subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j) -subexpresia lui θ .



Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 2.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.*
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $\neg\varphi$ este formulă.*
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\rightarrow\varphi\psi$ este formulă.*
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.*

Folosim notația **prefix** sau **poloneză** în definiția formulelor. Această notație este convenabilă pentru demonstrarea unor proprietăți tehnice.



Formule

- ▶ Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$
- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow v_2, \neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- ▶ $\rightarrow v_1 \neg v_2, \neg \rightarrow v_1 v_2$ sunt formule.

Propoziția 2.5

Mulțimea Form a formulelor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.6 (Citire unică (Unique readability))

*Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:*

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = \neg\psi$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = \rightarrow\psi\chi$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.



Principiul inducției pe formule

Propoziția 2.7 (Principiul inducției pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea P .
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea P , atunci și $\neg\varphi$ are proprietatea P .
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea P , atunci $\rightarrow\varphi\psi$ are proprietatea P .

Atunci orice formulă φ are proprietatea P .

Dem.: Pentru orice formulă φ , notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea P .

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- ▶ $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- ▶ $\varphi = \neg\psi$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**.
Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.
- ▶ $\varphi = \rightarrow\psi\chi$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea **P**. Rezultă din (2) că φ are proprietatea **P**.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea **P**. □



Principiul inducției pe formule

Propoziția 2.8 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- ▶ $V \subseteq \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \neg , adică $\varphi \in \Gamma$ implică $\neg\varphi \in \Gamma$;
- ▶ Γ este închisă la \rightarrow , adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $\rightarrow\varphi\psi \in \Gamma$.

Atunci $\text{Form} \subseteq \Gamma$.

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,
 φ are proprietatea **P** ddacă $\varphi \in \Gamma$.

Conform definiției lui Γ , rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 2.7), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea **P**, deci orice formulă φ este în Γ . Așadar, $\text{Form} \subseteq \Gamma$. □



Principiul recursiei pe formule

Propoziția 2.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \rightarrow A, \quad G_{\neg} : A \rightarrow A, \quad G_{\rightarrow} : A \times A \rightarrow A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : \text{Form} \rightarrow A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_{\neg}(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ .

(R2) $F(\rightarrow\varphi\psi) = G_{\rightarrow}(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ .



Principiul recursiei pe formule

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da **definiții recursive** ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \rightarrow \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ ,
 $c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ .

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned}c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\c(\rightarrow\varphi\psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi.\end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \rightarrow A$, $G_0(v) = 0$,

$$\begin{aligned}G_{\neg} : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, & G_{\neg}(n) &= n + 1, \\G_{\rightarrow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, & G_{\rightarrow}(m, n) &= m + n + 1.\end{aligned}$$



Notăție:

Pentru orice formulă φ , notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.10

Fie φ o formulă a lui LP. O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.



Notăția prefix nu este foarte ușor de citit de către oameni. Vom folosi în continuare notația **infix**. Prin urmare, vom scrie

$$(\varphi \rightarrow \psi) \text{ în loc de } \rightarrow \varphi \psi.$$

Formal, $(\varphi \rightarrow \psi)$ este o **abreviere** a expresiei $\rightarrow \varphi \psi$, chiar dacă este mai lungă. Parantezele nu sunt simboluri în limbaj, le folosim atunci când sunt necesare pentru a clarifica structura formulei. Atunci când nu sunt necesare, le omitem și scriem $\varphi \rightarrow \psi$.



Conectorii derivați \vee (se citește **sau**), \wedge (se citește **și**), \leftrightarrow (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

Convenții

- ▶ Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - \neg are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - \wedge, \vee au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.



SEMANTICA LP

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr:

1 pentru **adevărat** și 0 pentru **fals**. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q$.



Operațiile $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.11

O *evaluare* (sau *interpretare*) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Teorema 2.12

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : \text{Form} \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- ▶ $e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$.
- ▶ $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in \text{Form}$,
- ▶ $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in \text{Form}$.

Dem.: Aplicăm Principiul recursiei pe formule (Propoziția 2.9) cu $A = \{0, 1\}$, $G_0 = e$, $G_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\neg}(p) = \neg p$ și $G_{\rightarrow} : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $G_{\rightarrow}(p, q) = p \rightarrow q$. □



Propoziția 2.13

Dacă $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** ddacă pentru orice evaluări
 $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

► $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.



Propoziția 2.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \neg\psi$ și ψ satisface **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î.
 $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece
 $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice
 $v \in \text{Var}(\psi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ , obținem că
 $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.



Propoziția 2.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î.
 $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece
 $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ și $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$, rezultă că
 $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$ și pentru orice
 $v \in \text{Var}(\chi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ și χ , obținem că
 $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.



Fie φ o formulă.

Definiția 2.15

- ▶ O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. **Notăție:** $e \models \varphi$.
- ▶ φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- ▶ Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- ▶ φ este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui φ .
Notăție: $\models \varphi$.

Notăție: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 2.16

- (i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

Există o mulțime numărabilă de formule φ a.î. atât φ cât și $\neg\varphi$ sunt satisfiabile.

Dem.: Demonstrăm că mulțimea $V = \{\varphi_n := v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Form}$ satisface condiția din enunț. Fie $n \in \mathbb{N}$. Considerăm interpretările $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ definite astfel

$$e_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}, \quad e_2(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}.$$

Atunci

$$e_1^+(\varphi_n) = e_1^+(v_n) = e_1(v_n) = 1,$$

deci $e_1 \models \varphi_n$. Pe de altă parte,

$$e_2^+(\neg\varphi_n) = e_2^+(\neg v_n) = \neg e_2^+(v_n) = \neg e_2(v_n) = \neg 0 = 1,$$

deci $e_2 \models \neg\varphi_n$.



Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 2.14.

Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	\dots	x_k	\dots subformule ale lui $\varphi \dots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	\dots	$e'_1(x_k)$	\dots	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	\dots	$e'_2(x_k)$	\dots	$e'^+_2(\varphi)$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	\dots	$e'_{2^k}(x_k)$	\dots	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice i , $e'^+_i(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 2.12.

φ este tautologie ddacă $e'^+_i(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \dots, 2^k\}$.



Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$\text{Var}(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiția 2.17

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- ▶ φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $\text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. **Notăție:** $\psi \models \varphi$.
- ▶ φ și ψ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$.
Notăție: $\varphi \sim \psi$.

Observație

Relația \sim este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor lui *LP*.

Propoziția 2.18

Fie φ, ψ formule. Atunci

- (i) $\psi \models \varphi$ ddacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.19

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus $\models \varphi \vee \neg \varphi$ (1)

modus ponens $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$ (2)

afirmarea concluziei $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$ (3)

contradicția $\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$ (4)

dubla negație $\varphi \sim \neg \neg \varphi$ (5)

contrapозиția $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$ (6)

negarea premisei $\neg \varphi \models \varphi \rightarrow \psi$ (7)

modus tollens $\neg \psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg \varphi$ (8)

tranzitivitatea implicației $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$ (9)



Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

legile lui de Morgan $\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (10)

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \quad (11)$$

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

asociativitatea $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (16)

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi \quad (17)$$

absorbția $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$ (18)

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi \quad (19)$$

distributivitatea $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (20)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad (21)$$



Tautologii, consecințe semantice și echivalențe

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (32)$$

$$\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad (33)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \quad (34)$$

Dem.: Exercițiu.

Demonstrăm (1): $\models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- ▶ $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- ▶ $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.



\top și \perp

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notății

Notăm $v_0 \rightarrow v_0$ cu \top și o numim **adevărul**. Notăm $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ cu \perp și o numim **falsul**.

- ▶ φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- ▶ φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.

Definiția 2.20

Pentru orice formule φ, χ, χ' , definim

$\varphi_{\chi}(\chi') :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui χ cu χ' .

$\varphi_{\chi}(\chi')$ se numește **substituția lui χ cu χ' în φ** . Spunem și că $\varphi_{\chi}(\chi')$ este o **instanță de substituție** a lui φ .

- ▶ $\varphi_{\chi}(\chi')$ este de asemenea formulă.
- ▶ $\varphi_{\varphi}(\chi') = \chi'$.
- ▶ Dacă χ nu este subformulă a lui φ , atunci $\varphi_{\chi}(\chi') = \varphi$.

Exemple:

Fie $\varphi = (v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)$.

- ▶ $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = v_4 \rightarrow \neg v_4$
- ▶ $\chi = v_1, \chi' = \neg\neg v_2. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = (\neg\neg v_2 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(\neg\neg v_2 \rightarrow v_2)$
- ▶ $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4 \vee v_1. \quad \varphi_{\chi}(\chi') = (v_4 \vee v_1) \rightarrow \neg(v_4 \vee v_1)$



Propoziția 2.21

Pentru orice formule φ, χ, χ' ,

$$\chi \sim \chi' \text{ implică } \varphi \sim \varphi_{\chi}(\chi').$$

Propoziția 2.22

Pentru orice formule φ, ψ, χ și orice variabilă $v \in V$,

- ▶ $\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\chi) \sim \psi_v(\chi)$.
- ▶ Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\chi)$ este tautologie.
- ▶ Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\chi)$ este nesatisfiabilă.



Notății

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- ▶ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- ▶ $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.



Conjunții și disjunții finite

Propoziția 2.23

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

- ▶ $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ *ddacă* $e^+(\varphi_i) = 1$ *pentru orice* $i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ *ddacă* $e^+(\varphi_i) = 1$ *pentru un* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.24

$$\begin{aligned}\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n \\ \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.



Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 2.25

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- Γ este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Notății: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 2.26

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$. **Notăție:** $\Gamma \models \varphi$.

Dacă φ **nu** este consecință semantică a lui Γ , scriem $\Gamma \not\models \varphi$.

Notăm cu $\text{Cn}(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ .
Așadar,

$$\text{Cn}(\Gamma) = \{\varphi \in \text{Form} \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Definiția 2.27

- ▶ Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \models \Delta$.

- ▶ Γ și Δ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \sim \Delta$.



Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- ▶ $\psi \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \varphi$ ddacă $\{\psi\} \models \{\varphi\}$.
- ▶ $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 2.28

- ▶ $Mod(\emptyset) = \{0, 1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.
- ▶ $Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.



Propoziția 2.29

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$.

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.30

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă φ .
- (iii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ .
- (iv) $\Gamma \models \perp$.

Dem.: Exercițiu ușor.



Propoziția 2.31

Fie Γ o mulțime de formule.

- (i) $\Gamma \models \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Dem.:

- (i) Avem că $\Gamma \not\models \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î.
 $e \models \Gamma$ și $e \not\models \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î.
 $e \models \Gamma$ și $e \models \neg\varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î.
 $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.
- (ii) Similar.
- (iii) Fie e un model al lui Γ . Dacă $e \models \varphi$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e \not\models \varphi$, deci $e \models \neg\varphi$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.



Propoziția 2.32

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

- (i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$.
- (ii) $\Gamma \models \psi$ ddacă $\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$.
- (iii) Γ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.
- (iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
 - (a) $\Gamma \sim \Delta$.
 - (b) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$.

Dem.: Exercițiu.



Teorema de compacitate

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă dacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ , $\Gamma \models \varphi$ dacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

Propoziția 2.33

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Dem.: Exercițiu.

Lema 2.34

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir (ε_n) în $\{0, 1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

P_n Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Dem.: Definim șirul (ε_n) prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

- (1₀) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.
- (2₀) Există o submulțime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0 , avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că **P_0** este satisfăcută. În cazul (1₀) este evident. Să considerăm cazul (2₀). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulțime finită a lui Γ . Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e . Rezultă că $e \models \Delta$ și, din faptul că $e \models \Delta_0$, obținem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

Pasul de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ a.î. \mathbf{P}_n este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1 _{$n+1$}) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î.

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ și } e(v_{n+1}) = 0.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2 _{$n+1$}) Există o submulțime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1} , avem

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ implică } e(v_{n+1}) = 1.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că \mathbf{P}_{n+1} este satisfăcută. În cazul (1 _{$n+1$}) este evident. Să considerăm cazul (2 _{$n+1$}). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulțime finită a lui Γ . Prin urmare, conform \mathbf{P}_n , există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Din (2 _{$n+1$}), obținem și $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. □

Teorema 2.35 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.: " \Rightarrow " Evident.

" \Leftarrow " Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$e^* : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad e^*(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în lema precedentă (Lema 2.34).

Demonstrăm că e^* este model al lui Γ . Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $\text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ , putem aplica Proprietatea **P_k** pentru a obține un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Atunci $e^*(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(\varphi)$. Aplicând Propoziția 2.14, rezultă că $(e^*)^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e^* \models \varphi$.

Prin urmare, e^* este model al lui Γ , deci Γ este satisfiabilă. □



SINTAXA LP

Folosim un **sistem deductiv** de tip Hilbert pentru LP .

Axiomele logice

Mulțimea Axm a **axiomelor** lui LP constă din toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi),$$

unde φ , ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ ,

din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}.$$



Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ -teoremelor este un nou exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 2.36

Γ -teoremele sunt formulele lui *LP* definite astfel:

- (T0) Orice axiomă este Γ -teoremă.*
- (T1) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.*
- (T2) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.*
- (T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ -teoreme.*

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele Γ** .

Notății

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ -teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ -teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 2.37

O formulă φ se numește **teoremă** a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația \vdash , obținem

Propoziția 2.38

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**.

Versiunea 1

Fie **P** o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ -teoremă satisface **P** astfel:

- (i) Demonstrăm că orice axiomă are proprietatea **P** .
- (ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea **P** .
- (iii) Demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea **P** , atunci ψ are proprietatea **P** .

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

- (i) Demonstrăm că orice axiomă este în Σ .
- (ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ .
- (iii) Demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.



Propoziția 2.39

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $Thm(\Gamma) \vdash \varphi$ ddacă $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 2.40

O Γ -demonstrație (*demonstrație din ipotezele Γ*) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$.

O \emptyset -demonstrație se va numi simplu *demonstrație*.

Lema 2.41

Dacă $\theta_1, \dots, \theta_n$ este o Γ -demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.42

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau *demonstrație a lui φ din ipotezele Γ* este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește *lungimea* Γ -demonstrației.

Propoziția 2.43

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .



Propoziția 2.44

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.


Dem.: " \Leftarrow " Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 2.39.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.

" \Rightarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 2.43, φ are o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \dots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ este o Σ -demonstrație a lui φ , deci $\Sigma \vdash \varphi$.




$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 2.45

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Dem.:

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 2.38.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 2.38.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 2.38.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi$) și Propoziția 2.38.(i)
- (5) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
(MP): (3), (4)



Teorema 2.46 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Dem.: " \Leftarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ipoteză
- (2) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ Propoziția 2.39.(i)
- (3) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ Propoziția 2.38.(ii)
- (4) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (MP): (2), (3).



" \Rightarrow " Fie

$$\Sigma := \{\psi \in \text{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $\text{Thm}(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$ -teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ . Atunci

- (1) $\Gamma \vdash \psi$ Propoziția 2.38.(i), (ii)
- (2) $\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (A1) și Propoziția 2.38.(i)
- (3) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \rightarrow \psi = \varphi \rightarrow \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 2.45, deci $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.



- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.
Presupunem că $\psi, \psi \rightarrow \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$.

Atunci

- | | | |
|-----|---|--------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză inducție |
| (2) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ | ipoteză inducție |
| (3) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | (A2) și P.2.38.(i) |
| (4) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (2), (3). |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | (MP): (1), (4). |

Așadar $\chi \in \Sigma$.



Teorema deducției este un instrument foarte util pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Propoziția 2.47

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$



În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- | | | |
|-----|--|---------------------------|
| (1) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ | Propoziția 2.38.(ii) |
| (2) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | Propoziția 2.38.(ii) |
| (3) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ | Propoziția 2.38.(ii) |
| (5) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ | (MP): (3), (4). \square |



Propoziția 2.48

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi.$$

Dem.:

- | | | |
|-----|---|--|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P.2.47 și P.2.39.(ii) |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ | ipoteză |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | (MP): (3), (4). □ |



Propoziția 2.49

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \quad (36)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.50

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.51

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi \quad (37)$$

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \quad (38)$$

$$\vdash \psi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi) \quad (39)$$

$$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi \quad (40)$$

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \quad (41)$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \quad (42)$$

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi) \quad (43)$$

$$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi \quad (44)$$

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi \quad (45)$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.52

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.:

- | | | |
|-----|---|---------------------|
| (1) | $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$ | Teorema deducției |
| (3) | $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$ | ipoteză |
| (4) | $\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$ | Teorema deducției |
| (5) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | (42) și P.2.39.(ii) |
| (6) | $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$ | (MP): (2), (5) |
| (7) | $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$ | (6), (4) și P. 2.48 |
| (8) | $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ | (45) și P.2.39.(ii) |
| (9) | $\Gamma \vdash \varphi$ | (MP): (7), (8). |



Propoziția 2.53

Pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \quad (46)$$

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \quad (47)$$

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi \quad (48)$$

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \quad \text{dacă} \quad \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi \quad (49)$$

$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi \quad (50)$$

Dem.: Exercițiu.



SINTAXA și SEMANTICA

Teorema 2.54 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice Γ -teoremă este consecință semantică a lui Γ , adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ și $\Gamma \subseteq Form$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ -teoreme.

- ▶ Axiomele sunt în Σ (**exercițiu**).
- ▶ Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- ▶ Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.
Presupunem că $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
Conform Propoziției 2.29.(i), obținem că $\Gamma \models \psi$, adică,
 $\psi \in \Sigma$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Definim

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.

Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \dots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_k^e\}.$$

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \leftarrow a} : V \rightarrow \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 2.55

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ ,

- (i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$.
- (ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- ▶ $\varphi = v$. Atunci $\text{Var}(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.
Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.
Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- ▶ $\varphi = \neg\psi$. Atunci $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, deci $\text{Var}(\varphi)^e = \text{Var}(\psi)^e$.
Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ , $\text{Var}(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \varphi$.
Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ , $\text{Var}(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \psi$.
Deoarece $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$ ((41) din Propoziția 2.51), putem aplica (MP) pentru a obține $\text{Var}(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.



- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$ ipoteza de inducție pentru ψ

$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$ ipoteza de inducție pentru χ

$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$ $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.39.(i)

$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$ (43) din Propoziția 2.51

$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \rightarrow \chi)$ Propoziția 2.39.(iv).

Dacă $e^+(\psi \rightarrow \chi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$ sau $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(38) din P. 2.51 și P. 2.39.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.39.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	(A1) și Propoziția 2.38.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \rightarrow \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.39.(i). \square

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție **efectivă** a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premisele $Var(\varphi)^e$.



Teorema de completitudine

Teorema 2.56 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

Dem.: " \Rightarrow " Se aplică Teorema de corectitudine 2.54 pentru $\Gamma = \emptyset$.

" \Leftarrow " Fie φ o tautologie și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \\ \{x_1^e, \dots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru $k = n$, $(*)$ ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 2.55, obținem că

$$\text{Var}(\varphi)^e = \{x_1^e, \dots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

Teorema de completitudine

$k \Rightarrow k + 1$. Presupunem că $(*)$ este adevărată pentru k și fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din $(*)$ pentru e și e' , obținem

$$\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 2.52 cu $\Gamma := \{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclud că $\{x_1^e, \dots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. □



Propoziția 2.57

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$$\varphi \sim \psi \iff \models \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \models \psi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 2.18

$$\iff \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Teorema de completitudine.

" \Rightarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, rezultă din Propoziția 2.39.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.

" \Leftarrow " Similar.





Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notății

$\Gamma \not\vdash \varphi$: \Leftrightarrow φ nu este Γ -teoremă

$\not\vdash \varphi$: \Leftrightarrow φ nu este teoremă

$\Gamma \not\models \varphi$: \Leftrightarrow φ nu este consecință semantică a lui Γ

$\not\models \varphi$: \Leftrightarrow φ nu este tautologie.



Definiția 2.58

Fie Γ o mulțime de formule.

- ▶ Γ este **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.
- ▶ Γ este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ .

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- ▶ Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- ▶ Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.



Propoziția 2.59

- (i) \emptyset este consistentă.
- (ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.

Dem.:

- (i) Dacă $\vdash \perp$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 2.54, ar rezulta că $\models \perp$, o contradicție. Așadar $\nvdash \perp$, deci \emptyset este consistentă.
- (ii) Aplicând Propoziția 2.39.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ ,
$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă.





Propoziția 2.60

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iv) $\Gamma \vdash \perp$.

Dem.: (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) și (i) \Rightarrow (iv) sunt evidente.

(iii) \Rightarrow (i) Fie φ o formulă. Conform (38) din Propoziția 2.51,

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.

(iv) \Rightarrow (iii). Presupunem că $\Gamma \vdash \perp$. Avem că $\perp = \neg\top$. Deoarece \top este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a concludă că $\vdash \top$, deci și $\Gamma \vdash \top$. □



Propoziția 2.61

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Dem.:

(i) Avem

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$$

Propoziția 2.60

$$\iff \Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$$

Teorema deducției

$$\iff \Gamma \vdash \varphi$$

$\neg\varphi \rightarrow \perp \sim \varphi$ și P. 2.57.



(ii) Similar.



Propoziția 2.62

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

- (i) Pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$
ddacă $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.
- (ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 2.63

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este inconsistentă dacă Γ are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: " \Leftarrow " este evidentă.

" \Rightarrow " Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 2.60.(iv), $\Gamma \vdash \perp$. Aplicând Propoziția 2.44, obținem o submulțime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \perp$. Prin urmare, Σ este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

Propoziția 2.64

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este consistentă dacă orice submulțime finită a lui Γ este consistentă.



Consecință a Teoremei de completitudine

Teorema 2.65

Pentru orice formulă φ ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă} \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Avem

$$\begin{aligned} \{\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \vdash \neg\varphi \\ &\text{Propoziția 2.61.(ii)} \\ &\iff \vDash \neg\varphi \\ &\text{Teorema de completitudine} \\ &\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\text{Propoziția 2.31.(ii).} \end{aligned}$$

Așadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff \{\varphi\}$ este satisfiabilă.





Teorema de completitudine tare

Teorema 2.66 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ ,

Γ este consistentă $\iff \Gamma$ este satisfiabilă.

Dem.: " \Leftarrow " Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \perp$ și, aplicând Teorema de corectitudine 2.54, rezultă că $\Gamma \models \perp$. Ca urmare, $e \models \perp$, ceea ce este o contradicție.

" \Rightarrow " Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 2.35 pentru a concludă că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o submulțime finită a lui Γ . Atunci Σ este consistentă, conform Propoziției 2.64. Din Propoziția 2.62.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 2.65 obținem că $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă.

Deoarece, conform Propoziției 2.32.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. □



Teorema de completitudine tare

Teorema 2.67 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

Dem.:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ &\text{Propoziția 2.61.(i)} \\ &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\text{Teorema de completitudine tare - versiunea 1} \\ &\iff \Gamma \models \varphi \\ &\text{Propoziția 2.31.(i).} \end{aligned}$$

□

Observație

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (**exercițiu**).



FORMA NORMALĂ CONJUNCTIVĂ / DISJUNCTIVĂ

Definiția 2.68

Un **literal** este o

- ▶ variabilă (în care caz spunem că este **literal pozitiv**) sau
- ▶ negația unei variabile (în care caz spunem că este **literal negativ**).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Convenție: $\bigvee_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$ și $\bigwedge_{i=1}^1 \varphi_i = \varphi_1$.

Definiția 2.69

O formulă φ este în **formă normală disjunctivă (FND)** dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Definiția 2.70

O formulă φ este în **formă normală conjunctivă (FNC)** dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literal.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple

- ▶ $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- ▶ $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- ▶ $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC



Notăție: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 2.71

- (i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.
- (ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Dem.: Exercițiu.



Funcția asociată unei formule

Exemplu: Arătați că $\models v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$.

v_1	v_2	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_1 \wedge v_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Funcția asociată unei formule

Fie φ o formulă și $Var(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Fie $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} : Var(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \in \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$, adică, $e(x_i) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.

Conform Propoziției 2.14, definiția nu este ambiguă.

Definiția 2.72

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \quad \text{pentru orice } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ .



Propoziția 2.73

- (i) Fie φ o formulă. Atunci
 - (a) $\models \varphi$ ddacă F_φ este funcția constantă 1.
 - (b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcția constantă 0.
- (ii) Fie φ, ψ două formule. Atunci
 - (a) $\varphi \models \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.
 - (b) $\varphi \sim \psi$ ddacă $F_\varphi = F_\psi$.
- (iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.74

O **funcție booleană** este o funcție $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, unde $n \geq 1$.
Spunem că n este **numărul variabilelor** lui F .

Exemplu: Pentru orice formulă φ , F_φ este funcție Booleană cu n variabile, unde $n = |\text{Var}(\varphi)|$.

Teorema 2.75

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară.
Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$,

luăm $\varphi := \bigvee_{i=1}^n (v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, așadar,

$F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i , rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este funcția constantă 0.



Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.

Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in T} \left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i \right).$$

Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Se demonstrează că $H = F_\varphi$ (**exercițiu suplimentar**). □



Teorema 2.76

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^n (v_i \vee \neg v_i).$$

Altcumva, mulțimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula $\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in F} \left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right)$.

Se demonstrează că $H = F_\psi$ (**exercițiu suplimentar**).





Caracterizarea funcțiilor Booleene

Exemplu: Fie $H : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	
0	0	0	0	$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$
0	0	1	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	1	0	1	$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	0	$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	0	0	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	1	0	1	$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	1	1	1	$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.



Teorema 2.77

Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND și cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Dem.:

Fie $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ și $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ funcția booleană asociată. Aplicând Teorema 2.75 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FND} în FND a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$. Așadar, conform Propoziției 2.73.(ii), $\varphi \sim \varphi^{FND}$.

Similar, aplicând Teorema 2.76 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FNC} în FNC a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$. Prin urmare, $\varphi \sim \varphi^{FNC}$. □



Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublele negații, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3. Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui \vee față de \wedge , pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui \wedge față de \vee , pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

Exemplu

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \rightarrow (v_0 \rightarrow v_2)$.

Avem

$$\begin{aligned}\varphi &\sim \neg(\neg v_0 \rightarrow \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \rightarrow v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 1} \\ &\sim \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) && \text{Pasul 2} \\ &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 && \text{Pasul 2}\end{aligned}$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obține FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2).\end{aligned}$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotența și comutativitatea lui \vee , că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.



CLAUZE ȘI REZOLUȚIE

Definiția 2.78

O **clauză** este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \dots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \dots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, obținem clauza vidă $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

Definiția 2.79

Fie C o clauză și $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Spunem că **e este model al lui C** sau că **e satisface C** și scriem $e \models C$ dacă există $L \in C$ a.î. $e \models L$.

Definiția 2.80

O clauză C se numește

- (i) **satisfiabilă** dacă are un model.
- (ii) **validă** dacă orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui C .



Definiția 2.81

O clauză C este **trivială** dacă există un literal L a.î. $L \in C$ și $L^c \in C$.

Propoziția 2.82

- (i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.
- (ii) Clauza vidă \square este nesatisfiabilă.
- (iii) O clauză este validă ddacă este trivială.

Dem.: Exercițiu.



$\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_m\}$ este o mulțime de clauze.

Dacă $m = 0$, obținem mulțimea vidă de clauze \emptyset .

\mathcal{S} este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncție de disjuncții ale literalilor din fiecare clauză.

Definiția 2.83

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Spunem că ***e este model al lui \mathcal{S} sau că e satisface \mathcal{S}*** și scriem ***$e \models \mathcal{S}$*** dacă $e \models C_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$.

Definiția 2.84

\mathcal{S} se numește

- (i) ***satisfiabilă*** dacă are un model.
- (ii) ***validă*** dacă orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui \mathcal{S} .

Propoziția 2.85

- ▶ Dacă S conține clauza vidă \square , atunci S nu este satisfiabilă.
- ▶ \emptyset este validă.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ este satisfiabilă.

Dem.: Considerăm $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e(v_1) = e(v_2) = 1$. Atunci $e \models \mathcal{S}$. \square

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$ nu este satisfiabilă.

Dem.: Presupunem că \mathcal{S} are un model e . Atunci

$e(v_1) = e(v_3) = 1$ și, deoarece $e \models \{\neg v_3, \neg v_2\}$, trebuie să avem $e(v_2) = 0$. Rezultă că $e(v_2) = e^+(\neg v_1) = 0$, deci e nu satisface $\{\neg v_1, v_2\}$. Am obținut o contradicție. \square



Unei formule φ în FNC îi asociem o mulțime de clauze \mathcal{S}_φ astfel:

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right),$$

unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Pentru orice i , fie C_i clauza obținută considerând toți literalii $L_{i,j}, j \in \{1, \dots, k_i\}$ distincți. Fie \mathcal{S}_φ mulțimea tuturor clauzelor $C_i, i \in \{1, \dots, n\}$ distincte.

\mathcal{S}_φ se mai numește și **forma clauzală** a lui φ .

Propoziția 2.86

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e \models \varphi$ dacă și numai dacă $e \models \mathcal{S}_\varphi$.

Dem.: Exercițiu.



Unei mulțimi de clauze \mathcal{S} îi asociem o formulă $\varphi_{\mathcal{S}}$ în FNC astfel:

- ▶ $C = \{L_1, \dots, L_n\}, n \geq 1 \mapsto \varphi_C := L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n.$
- ▶ $\square \mapsto \varphi_{\square} := v_0 \wedge \neg v_0.$

Fie $\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_m\}$ o mulțime nevidă de clauze. Formula asociată lui \mathcal{S} este

$$\varphi_{\mathcal{S}} := \bigwedge_{i=1}^m \varphi_{C_i}.$$

Formula asociată mulțimii vide de clauze este $\varphi_{\emptyset} := v_0 \vee \neg v_0.$

Formula $\varphi_{\mathcal{S}}$ nu este unic determinată, depinde de ordinea în care se scriu elementele în clauze și în \mathcal{S} , dar se observă imediat că: $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ implică $\varphi_{\mathcal{S}} \sim \varphi_{\mathcal{S}'}.$

Propoziția 2.87

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e \models \mathcal{S}$ dacă și numai dacă $e \models \varphi_{\mathcal{S}}.$

Dem.: Exercițiu.



Definiția 2.88

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numește **rezolvent** al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1, L^c \in C_2$ și

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

Regula Rezoluției

$$\text{Rez} \quad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu **Res**(C_1, C_2) mulțimea rezolvenților clauzelor C_1, C_2 .

- ▶ Rezoluția a fost introdusă de **Blake** (1937) și dezvoltată de **Davis, Putnam** (1960) și **Robinson** (1965).
- ▶ Multe demonstratoare automate de teoreme folosesc rezoluția. Limbajul PROLOG este bazat pe rezoluție.



Exemplu

$C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_5\}$, $C_2 = \{v_1, \neg v_2, v_{100}, v_5\}$.

- ▶ Luăm $L := \neg v_5$. Atunci $L \in C_1$ și $L^c = v_5 \in C_2$. Prin urmare, $R = \{v_1, v_2, \neg v_2, v_{100}\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2 .
- ▶ Dacă luăm $L' := v_2$, atunci $L' \in C_1$ și $L'^c = \neg v_2 \in C_2$. Prin urmare, $R' = \{v_1, \neg v_5, v_{100}, v_5\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2 .

Exemplu

$C_1 = \{v_7\}$, $C_2 = \{\neg v_7\}$. Atunci clauza vidă \square este rezolvent al clauzelor C_1, C_2 .



Fie S o mulțime de clauze.

Definiția 2.89

O *derivare prin rezoluție din S* sau o *S -derivare prin rezoluție* este o secvență C_1, C_2, \dots, C_n de clauze a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) C_i este o clauză din S ;
- (ii) există $j, k < i$ a.î. C_i este rezolvent al clauzelor C_j, C_k .

Definiția 2.90

Fie C o clauză. O *derivare prin rezoluție a lui C din S* este o S -derivare prin rezoluție C_1, C_2, \dots, C_n a.î. $C_n = C$.



Exemplu

Fie

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{\neg v_4\}\}.$$

O derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din \mathcal{S} este următoarea:

C_1	$=$	$\{\neg v_4\}$	$C_1 \in \mathcal{S}$
C_2	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}$	$C_2 \in \mathcal{S}$
C_3	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3\}$	C_3 rezolvent al clauzelor C_1, C_2
C_4	$=$	$\{v_3\}$	$C_4 \in \mathcal{S}$
C_5	$=$	$\{\neg v_2\}$	C_5 rezolvent al clauzelor C_3, C_4
C_6	$=$	$\{\neg v_1, v_2\}$	$C_6 \in \mathcal{S}$
C_7	$=$	$\{\neg v_1\}$	C_7 rezolvent al clauzelor C_5, C_6
C_8	$=$	$\{v_1\}$	$C_8 \in \mathcal{S}$
C_9	$=$	\square	C_9 rezolvent al clauzelor C_7, C_8 .



Pentru orice mulțime de clauze \mathcal{S} , notăm cu

$$\text{Res}(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} \text{Res}(C_1, C_2).$$

Propoziția 2.91

Pentru orice mulțime de clauze \mathcal{S} și orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$e \models \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad e \models \text{Res}(\mathcal{S}).$$

Teorema 2.92 (Teorema de corectitudine a rezoluției)

Fie \mathcal{S} o mulțime de clauze. Dacă \square se derivează prin rezoluție din \mathcal{S} , atunci \mathcal{S} este nesatisfiabilă.



Algoritmul Davis-Putnam (DP)

Intrare: \mathcal{S} mulțime nevidă de clauze netriviale.

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}.$

Pi.1 Fie x_i o variabilă care apare în \mathcal{S}_i . Definim

$$\mathcal{T}_i^1 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 **if** $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset \text{ și } \mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$ **then**

$$\mathcal{U}_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

else $\mathcal{U}_i := \emptyset.$

Pi.3 Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} &:= (\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} &:= \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pi.4 **if** $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ **then** \mathcal{S} este satisfiabilă.

else if $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **then** \mathcal{S} este nesatisfiabilă.

else $\{i := i + 1; \text{ go to Pi.1}\}.$



Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$. $i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_3$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$.

P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$.

P1.3 $\mathcal{S}'_2 := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$; $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$.

P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1 $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$.

P2.2 $\mathcal{U}_2 := \emptyset$.

P2.3 $\mathcal{S}_3 := \emptyset$.

P2.4 \mathcal{S} este satisfiabilă.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}.$

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}.$

P1.1 $x_1 := v_1; \mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}; \mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}.$

P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}.$

P1.3 $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}.$

P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1. $x_2 := v_2; \mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}; \mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}.$

P2.2 $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}.$

P2.3 $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}.$

P2.4 $i := 3$ and go to P3.1.

P3.1 $x_3 := v_3; \mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}; \mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}.$

P3.2. $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}.$ P3.3 $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}.$

P3.4 $i := 4$ and go to P4.1.

P4.1 $x_4 := v_4; \mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}; \mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}.$

P4.2 $\mathcal{U}_4 := \{\square\}.$ P4.3 $\mathcal{S}_5 := \{\square\}.$

P4.4 \mathcal{S} nu este satisfiabilă.



Algoritmul DP - terminare

Notăm:

$$\text{Var}(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}, \quad \text{Var}(S) := \bigcup_{C \in S} \text{Var}(C).$$

Așadar, $\text{Var}(C) = \emptyset$ ddacă $C = \square$ și $\text{Var}(S) = \emptyset$ ddacă $S = \emptyset$ sau $S = \{\square\}$.

Propoziția 2.93

Fie $n := |\text{Var}(S)|$. Atunci algoritmul DP se termină după cel mult n pași.

Dem.: Se observă imediat că pentru orice i ,

$$\text{Var}(S_{i+1}) \subseteq \text{Var}(S_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq \text{Var}(S_i).$$

Prin urmare, $n = |\text{Var}(S_1)| > |\text{Var}(S_2)| > |\text{Var}(S_3)| > \dots \geq 0$.



Fie $N \leq n$ numărul de pași după care se termină DP. Atunci $S_{N+1} = \emptyset$ sau $\square \in S_{N+1}$.



Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

Propoziția 2.94

Pentru orice $i \leq N$,

\mathcal{S}_{i+1} este satisfiabilă $\iff \mathcal{S}_i$ este satisfiabilă.

Dem.:

" \Leftarrow " Presupunem că \mathcal{S}_i este satisfiabilă și fie $e \models \mathcal{S}_i$. Se observă imediat că $\mathcal{S}_{i+1} \subseteq \mathcal{S}_i \cup \text{Res}(\mathcal{S}_i)$. Prin urmare, folosind corectitudinea rezoluției, obținem că $e \models \mathcal{S}_{i+1}$.

" \Rightarrow " Presupunem că \mathcal{S}_{i+1} este satisfiabilă și fie $e \models \mathcal{S}_{i+1}$. Deoarece orice clauză trivială este validă, rezultă că $e \models \mathcal{S}'_{i+1}$.

Avem următoarele cazuri:

- ▶ $\mathcal{T}_i^1 = \emptyset$. Atunci $\mathcal{U}_i = \emptyset$ și $\mathcal{S}'_{i+1} = \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{T}_i^0$, deci $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}'_{i+1} \cup \mathcal{T}_i^0$. Fie $e' := e_{x_i \leftarrow 0}$. Atunci $e'(x_i) = 0$, deci $e' \models \neg x_i$. Rezultă că e' este model pentru orice clauză din \mathcal{T}_i^0 , adică $e' \models \mathcal{T}_i^0$. De asemenea, $e(v) = e'(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\mathcal{S}'_{i+1})$, deci $e' \models \mathcal{S}'_{i+1}$. Am obținut că $e' \models \mathcal{S}_i$.



Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

- ▶ $\mathcal{T}_i^0 = \emptyset$. Se demonstrează similar, folosind evaluarea $e'' := e_{x_i \leftarrow 1}$.
- ▶ $\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ și $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset$. Se observă că $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}'_{i+1} \cup (\mathcal{T}_i^1 \cup \mathcal{T}_i^0)$.

Cazul 1: $e(x_i) = 1$. Definim $e^* := e_{x_i \leftarrow 0}$. Atunci

$e, e^* \models \mathcal{S}'_{i+1}$, $e \models \mathcal{T}_i^1$, $e^* \models \mathcal{T}_i^0$.

Presupunem că $e, e^* \not\models \mathcal{T}_i^1 \cup \mathcal{T}_i^0$. Atunci există $C_1 \in \mathcal{T}_i^1$ a.î. $e^* \not\models C_1$ și $C_0 \in \mathcal{T}_i^0$ a.î. $e \not\models C_0$. Obținem că $e \not\models C_0 \setminus \{\neg x_i\}$. Dacă am avea că $e \models C_1 \setminus \{x_i\}$, atunci ar exista un literal L care nu conține variabila x_i a.î. $e \models L$, de unde am obține că $e^* \models L$, contradicție cu faptul că $e^* \not\models C_1$.

Rezultă că $e \not\models (C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \in \mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{S}'_{i+1}$, o contradicție cu ipoteza.

Așadar, una din evaluările e, e^* satisface $\mathcal{T}_i^1 \cup \mathcal{T}_i^0$, deci este model pentru \mathcal{S}_i .

Cazul 2: $e(x_i) = 0$. Demonstrația e similară. □



Teorema 2.95

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

\mathcal{S} este nesatisfiabilă dacă $\square \in S_{N+1}$.

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.94. Obținem că $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ este nesatisfiabilă dacă S_{N+1} este nesatisfiabilă dacă $\square \in S_{N+1}$.





LOGICA DE ORDINUL ÎNTÂI



Definiția 3.1

Un limbaj \mathcal{L} de ordinul întâi este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
 - ▶ conectorii \neg și \rightarrow ;
 - ▶ simbolul de egalitate $=$;
 - ▶ cuantificatorul universal \forall ;
 - ▶ o mulțime \mathcal{R} de simboluri de relații;
 - ▶ o mulțime \mathcal{F} de simboluri de funcții;
 - ▶ o mulțime \mathcal{C} de simboluri de constante;
 - ▶ o funcție aritate $\text{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.
-
- ▶ \mathcal{L} este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$.
 - ▶ τ se numește **signatura** lui \mathcal{L} sau **tipul de similaritate** al lui \mathcal{L}



Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi.

- Mulțimea $\text{Sim}_{\mathcal{L}}$ a **simbolurilor** lui \mathcal{L} este

$$\text{Sim}_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc **simboluri non-logice**.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, =, \forall\}$ se numesc **simboluri logice**.
- Notăm variabilele cu x, y, z, v, \dots , simbolurile de relații cu P, Q, R, \dots , simbolurile de funcții cu f, g, h, \dots și simbolurile de constante cu c, d, e, \dots
- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:
 \mathcal{F}_m := mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m ;
 \mathcal{R}_m := mulțimea simbolurilor de relații de aritate m .

Definiția 3.2

Mulțimea $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$ a *expresiilor* lui \mathcal{L} este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui \mathcal{L} .

Expresia vidă se notează λ . O expresie nevidă este de forma $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$, unde $k \geq 1$ și $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$ pentru orice $i = 0, \dots, k-1$.

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ și $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}$ două expresii ale lui \mathcal{L} .
 $\theta = \sigma$ ddacă $k = l$ și $\theta_i = \sigma_i$ pentru orice $i = 0, \dots, k-1$.

Definiția 3.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui \mathcal{L} . Spunem că o expresie σ *apare* în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. $\sigma = \theta_i \dots \theta_j$.
Notăm cu $\text{Var}(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ .

Definiția 3.4

Termenii lui \mathcal{L} sunt expresiile definite astfel:

- (T0) Orice variabilă este termen.
- (T1) Orice simbol de constantă este termen.
- (T2) Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și t_1, \dots, t_m sunt termeni, atunci $ft_1 \dots t_m$ este termen.
- (T3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.

Notații:

- ▶ Mulțimea termenilor se notează $Term_{\mathcal{L}}$.
- ▶ Termenii se notează $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \dots$

Definiția 3.5

Un termen t se numește *închis* dacă $Var(t) = \emptyset$.



Propoziția 3.6 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- ▶ *Γ conține variabilele și simbolurile de constante.*
- ▶ *Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \dots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \dots t_m \in \Gamma$.*

Atunci $\text{Term}_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate \mathcal{P} : definim Γ ca fiind mulțimea tuturor expresiilor care satisfac \mathcal{P} și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\text{Term}_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.



Propoziția 3.7 (Citire unică (Unique readability))

*Dacă t este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:*

- ▶ $t = x$, unde $x \in V$;
- ▶ $t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;
- ▶ $t = ft_1 \dots t_m$, unde $f \in \mathcal{F}_m$ ($m \geq 1$) și t_1, \dots, t_m sunt termeni.

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

Definiția 3.8

Formulele atomice ale lui \mathcal{L} sunt expresiile de forma:

- ▶ $=st$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $Rt_1 \dots t_m$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ ($m \geq 1$) și t_1, \dots, t_m sunt termeni.

Definiția 3.9

Formulele lui \mathcal{L} sunt expresiile definite astfel:

- (F0) Orice formulă atomică este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $\neg\varphi$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\rightarrow\varphi\psi$ este formulă.
- (F3) Dacă φ este formulă, atunci $\forall x\varphi$ este formulă pentru orice variabilă x .
- (F4) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.



Notății

- ▶ Mulțimea formulelor se notează $Form_{\mathcal{L}}$.
- ▶ Formulele se notează $\varphi, \psi, \chi, \dots$

Propoziția 3.10 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- ▶ Γ conține toate formulele atomice.
- ▶ Γ este închisă la \neg, \rightarrow și $\forall x$ (pentru orice variabilă x), adică: dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $\neg\varphi, \rightarrow\varphi\psi, \forall x\varphi \in \Gamma$.

Atunci $Form_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate \mathcal{P} : definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac \mathcal{P} și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $Form_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.



Propoziția 3.11 (Citire unică (Unique readability))

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = st$, unde s, t sunt termeni;
- ▶ $\varphi = Rt_1 \dots t_m$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ ($m \geq 1$) și t_1, \dots, t_m sunt termeni;
- ▶ $\varphi = \neg\psi$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = \rightarrow\psi\chi$, unde ψ, χ sunt formule;
- ▶ $\varphi = \forall x\psi$, unde x este variabilă și ψ este formulă.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.



Vom folosi în continuare notația **infix**. Prin urmare, vom scrie

$(\varphi \rightarrow \psi)$ în loc de $\rightarrow \varphi \psi$ și $(s = t)$ în loc de $= st$.

Parantezele nu sunt simboluri în limbaj, le folosim atunci când sunt necesare pentru a clarifica structura formulei. Atunci când nu sunt necesare, le omitem și scriem $\varphi \rightarrow \psi$ sau $s = t$.

Conectori derivați

Conectorii \vee , \wedge , \leftrightarrow și **cuantificatorul existențial** \exists sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\varphi \vee \psi \quad := \quad (\neg \varphi) \rightarrow \psi$$

$$\varphi \wedge \psi \quad := \quad \neg(\varphi \rightarrow (\neg \psi))$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad := \quad (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\exists x \varphi \quad := \quad \neg \forall x \neg \varphi.$$



Pentru a reduce din folosirea parantezelor, presupunem că

- ▶ Cuantificatorii \forall, \exists au precedență mai mare decât ceilalți conectori. Așadar, $\forall x \varphi \rightarrow \psi$ este $(\forall x \varphi) \rightarrow \psi$ și nu $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.
- ▶ \neg are precedență mai mare decât $\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$.
- ▶ \wedge, \vee au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Simbolurile de funcții sau relații de aritate 1 se numesc **unare**.

Simbolurile de funcții sau relații de aritate 2 se numesc **binare**.

Dacă f este un simbol de funcție binară scriem $t_1 f t_2$ în loc de $f t_1 t_2$. Analog, dacă R este un simbol de relație binară, scriem $t_1 R t_2$ în loc de $R t_1 t_2$.

Vom identifica un limbaj \mathcal{L} cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și vom scrie $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.



Definiția 3.12

O \mathcal{L} -**structură** este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- ▶ A este o mulțime nevidă;
- ▶ $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea m , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \rightarrow A$;
- ▶ $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea m , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- ▶ $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.
- ▶ A se numește **universul** structurii \mathcal{A} . **Notăție:** $A = |\mathcal{A}|$
- ▶ $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui f (respectiv R , c) în \mathcal{A} .



Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- ▶ $\mathcal{L}_=$ -structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$



Exemple - Limbajul aritmeticii \mathcal{L}_{ar}

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de funcții binare și \dot{S} este simbol de funcție unară;
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de \mathcal{L}_{ar} -structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <, \dot{+}^{\mathcal{N}} = +, \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot, \dot{S}^{\mathcal{N}} = S, \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de \mathcal{L}_{ar} -structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.



Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binară

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol de relație binară
- ▶ $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- ▶ \mathcal{L} -structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate (A, \leq) , folosim simbolul \leq în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{\leq} .
- ▶ Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $<$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- ▶ Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul E în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{Graf} .
- ▶ Dacă suntem interesați de structuri (A, \in) , folosim simbolul \in în loc de R și notăm limbajul cu \mathcal{L}_{\in} .



Exemple - Limbajul grupurilor \mathcal{L}_{Gr}

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde $\mathcal{R} = \emptyset$ și

- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{\cdot}^{-1}\}$; $\dot{*}$ simbol de funcție binară, $\dot{\cdot}^{-1}$ simbol de funcție unară
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{\cdot}^{-1}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{\cdot}^{-1}, \dot{e})$.

Exemple naturale de \mathcal{L}_{Gr} -structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, {}^{-1}, e)$.

Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{\cdot}^{\mathcal{G}} = {}^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- ▶ $\mathcal{R} = \emptyset$;
- ▶ $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- ▶ $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.



SEMANTICA



Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi și \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură.

Definiția 3.13

O *interpretare* sau *evaluare* a (variabilelor) lui \mathcal{L} în \mathcal{A} este o funcție $e : V \rightarrow A$.

În continuare, $e : V \rightarrow A$ este o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} .

Definiția 3.14 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește *interpretarea* $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e :

- ▶ dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- ▶ dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- ▶ dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.



Prin inducție pe formule se definește **interpretarea**

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a formulei φ sub evaluarea e .

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



Negația și implicația

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$$\rightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- ▶ $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- ▶ $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1)$.



Notăție

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretare $e_{x \leftarrow a} : V \rightarrow A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^A(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^A(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$



Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} .

Definiția 3.15

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ e **satisface** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.
- ▶ e **nu satisface** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. **Notăție:** $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.

Corolar 3.16

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models \psi[e]$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.



Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 3.17

- (i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e);$
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e);$
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e);$
- (iv) $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg \forall x \neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x \neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1. \end{aligned}$$



Corolar 3.18

- (i) $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iii) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e].$
- (iv) $\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}].$



Fie φ formulă a lui \mathcal{L} .

Definiția 3.19

Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și o evaluare $e : V \rightarrow A$ a.î.

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că (\mathcal{A}, e) este un **model** al lui φ .

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.

Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.



Fie φ formulă a lui \mathcal{L} .

Definiția 3.20

Spunem că φ este **adevărată** într-o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} dacă pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că \mathcal{A} **satisfacă** φ sau că \mathcal{A} este un **model** al lui φ .

Notăție: $\mathcal{A} \models \varphi$

Definiția 3.21

Spunem că φ este formulă **universal adevărată** sau (**logic**) **validă** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\models \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui \mathcal{L} .

Definiția 3.22

φ și ψ sunt **logic echivalente** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Definiția 3.23

ψ este **consecință semantică** a lui φ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Observație

- (i) $\varphi \models \psi$ ddacă $\models \varphi \rightarrow \psi$.
- (ii) $\varphi \models \psi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.



Pentru orice formule φ , ψ și orice variabile x, y ,

$$\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi \quad (51)$$

$$\neg \forall x \varphi \models \exists x \neg \varphi \quad (52)$$

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \quad (53)$$

$$\forall x \varphi \vee \forall x \psi \models \forall x (\varphi \vee \psi) \quad (54)$$

$$\exists x (\varphi \wedge \psi) \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi \quad (55)$$

$$\exists x (\varphi \vee \psi) \models \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad (56)$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi \quad (57)$$

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi \quad (58)$$

$$\forall x \varphi \models \exists x \varphi \quad (59)$$



$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (60)$$

$$\forall x\varphi \models \varphi \quad (61)$$

$$\forall x\forall y\varphi \models \forall y\forall x\varphi \quad (62)$$

$$\exists x\exists y\varphi \models \exists y\exists x\varphi \quad (63)$$

$$\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi. \quad (64)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.24

Pentru orice termeni s, t, u ,

$$(i) \models t = t;$$

$$(ii) \models s = t \rightarrow t = s;$$

$$(iii) \models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Definiția 3.25

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui \mathcal{L} și x o variabilă.

- ▶ Spunem că variabila x **apare legată pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. $\sigma_i \dots \sigma_j$ este de forma $\forall x \psi$.
- ▶ Spunem că x **apare liberă pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ .
- ▶ x este **variabilă legată** (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ .
- ▶ x este **variabilă liberă** (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ .

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z . Variabile legate: x .



Notăție: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ .

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$FV(\varphi) = Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;}$$

$$FV(\neg\varphi) = FV(\varphi);$$

$$FV(\varphi \rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi);$$

$$FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}.$$

Notăție: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.



Propoziția 3.26

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,
pentru orice termen t ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(t)$, atunci
$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu.



Propoziția 3.27

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice formulă φ ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$, $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 3.26 pentru a obține că

$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2) \quad \text{și} \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = Rt_1 \dots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \dots, m$ și aplicăm din nou Propoziția 3.26 pentru a obține că

$$t_i^A(e_1) = t_i^A(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^A(e_1), \dots, t_m^A(e_1)) \\ &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^A(e_2), \dots, t_m^A(e_2)) \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2].$$

Rezultă că

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$



- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \models \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \chi[e_2].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \models \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$



- $\varphi = \forall x \psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1_{x \leftarrow a}}(v) = e_{2_{x \leftarrow a}}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1_{x \leftarrow a}}, e_{2_{x \leftarrow a}}$ pentru a obține că

$$\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1_{x \leftarrow a}}] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_{2_{x \leftarrow a}}].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{1_{x \leftarrow a}}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{2_{x \leftarrow a}}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]. \end{aligned}$$





Propoziția 3.28

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (65)$$

$$\varphi \models \forall x\varphi \quad (66)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi \quad (67)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi \quad (68)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi \quad (69)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (70)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (71)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (72)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x\psi \rightarrow \varphi \quad (73)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (74)$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 3.29

O formulă φ se numește **enunț** (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notăție: $Sent_{\mathcal{L}} :=$ mulțimea enunțurilor lui \mathcal{L} .

Propoziția 3.30

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 3.27 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 3.31

O \mathcal{L} -structură \mathcal{A} este un **model** al lui φ dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \rightarrow A$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi$



Fie x o variabilă a lui \mathcal{L} și u termen al lui \mathcal{L} .

Definiția 3.32

Pentru orice termen t al lui \mathcal{L} , definim

$t_x(u) :=$ expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u .

Propoziția 3.33

Pentru orice termen t al lui \mathcal{L} , $t_x(u)$ este termen al lui \mathcal{L} .



Substituția

- ▶ Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor **libere** ale lui x cu u .
- ▶ De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.
Avem

- ▶ Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} cu $|A| \geq 2$, avem $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$.
- ▶ $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.



Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 3.34

Spunem că x este **liberă pentru u** în φ sau că u este **substituibil pentru x** în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u , nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x .

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- ▶ u nu conține variabile;
- ▶ φ nu conține variabile care apar în u ;
- ▶ nici o variabilă din u nu apare legată în φ ;
- ▶ x nu apare în φ ;
- ▶ φ nu conține apariții libere ale lui x .



Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ .

Definiția 3.35

$\varphi_x(u) :=$ expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor *libere* ale lui x cu u .

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o *substituție liberă*.

Propoziția 3.36

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui \mathcal{L} .

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am așteptat.

Propoziția 3.37

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x ,

(i) pentru orice termen t ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 3.38

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi$, $\models \varphi \rightarrow \exists x\varphi$.

(iii) Pentru orice simbol de constantă c ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \quad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$



În general, dacă x și y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie \mathcal{L}_{ar} , \mathcal{N} și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ a.î.
 $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \models (x < z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\models (x < z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.



Propoziția 3.39

Pentru orice formulă φ , variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ ,

$$\exists x\varphi \models \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \models \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 3.39 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.



Definiția 3.40

Pentru orice formulă φ și orice variabile y_1, \dots, y_k , **varianta** y_1, \dots, y_k -**liberă** φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- ▶ dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ ;
- ▶ dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, atunci φ' este $\psi' \rightarrow \chi'$;
- ▶ dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \dots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul v_0, v_1, \dots , care nu apare în ψ' și nu este printre y_1, \dots, y_k .



Definiția 3.41

φ' este **variantă** a lui φ dacă este varianta y_1, \dots, y_k -liberă a lui φ pentru anumite variabile y_1, \dots, y_k .

Propoziția 3.42

- (i) Pentru orice formulă φ , dacă φ' este o variantă a lui φ , atunci $\varphi \models \varphi'$;
- (ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t , dacă variabilele lui t se află printre y_1, \dots, y_k și φ' este varianta y_1, \dots, y_k -liberă a lui φ , atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.

Definiția 3.43

O formulă care nu conține cuantificatori se numește **liberă de cuantificatori** ("quantifier-free").

Definiția 3.44

O formulă φ este în **formă normală prenex** dacă

$$\varphi = Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește **matricea** lui φ și $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ este **prefixul** lui φ .

Exemple de formule în formă normală prenex:

- ▶ Formulele **universale**: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori
- ▶ Formulele **existențiale**: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori

Fie φ o formulă și t_1, \dots, t_n termeni care nu conțin variabile din φ .
Notăm cu $\varphi_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui x_1, \dots, x_n cu t_1, \dots, t_n respectiv.

Notații: $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$.

Teorema 3.45 (Teorema de formă normală prenex)

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^ în formă normală prenex a.î. $\varphi \models \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.*

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă $\psi^* = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi_0$ în formă normală prenex a.î. $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^cx_1 \dots Q_n^cx_n\neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $\varphi^* \models \neg\psi^* \models \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.



Forma normală prenex

- $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

$$\psi^* = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \dots S_m z_m \chi_0$$

a.î. $\psi \models \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \models \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.

Notăm cu V_0 mulțimea tuturor variabilelor care apar în ψ^* sau χ^* .

Fie $\tilde{\psi}^*$ (resp. $\tilde{\chi}^*$) varianta V_0 -liberă a lui ψ^* (resp. χ^*). Atunci

$$\tilde{\psi}^* = Q_1 y_1 \dots Q_n y_n \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\chi}^* = S_1 w_1 \dots S_m w_m \tilde{\chi}_0,$$

unde $y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_m$ sunt variabile care nu apar în V_0 ,

$\tilde{\psi}_0 = \psi_{0x_1, \dots, x_n}(y_1, \dots, y_n)$ și $\tilde{\chi}_0 = \chi_{0z_1, \dots, z_m}(w_1, \dots, w_m)$.

Conform Propoziției 3.42.(i), $\tilde{\psi}^* \models \psi^*$ și $\tilde{\chi}^* \models \chi^*$. De asemenea, $FV(\tilde{\psi}^*) = FV(\psi^*)$ și $FV(\tilde{\chi}^*) = FV(\chi^*)$.



Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1 \dots Q_n^c y_n S_1 w_1 \dots S_m w_m (\tilde{\psi}_0 \rightarrow \tilde{\chi}_0).$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\begin{aligned}\varphi^* &\models \tilde{\psi}^* \rightarrow \tilde{\chi}^* \\ &\models \psi^* \rightarrow \chi^* \\ &\models \psi \rightarrow \chi = \varphi.\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă normală prenex a.î. $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.

Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$.





Forma normală prenex

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- ▶ două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- ▶ un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- ▶ două simboluri de constante c, d .

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y, z) = c) \wedge \neg \exists x(f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \exists y(g(y, z) = c \wedge \neg \exists x(f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y(g(y, z) = c \wedge \forall x \neg (f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d))\end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y \forall x (g(y, z) = c \wedge \neg (f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \exists y \neg (S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \neg \exists z (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \forall z \neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d) \\ &\equiv \exists y \forall z (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists y (P(x, y) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge \exists v (P(x, v) \rightarrow f(x) = d)) \\ &\equiv \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))\end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v (\neg (S(y) \rightarrow R(z)) \wedge (P(x, v) \rightarrow f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ .



Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite **simboluri de funcții/constante Skolem**.

Observație

Orice formulă liberă de cuantificatori este universală.

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui \mathcal{L} care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
Dacă φ este universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.

Altfel, φ are una din formele:

- ▶ $\varphi = \exists x \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- ▶ $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$ ($k \geq 1$). Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi_x(fx_1 \dots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ .

Dacă φ^1 este enunț universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este enunț universal, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \dots$, până ajungem la un enunț universal și acesta este φ^{Sk} .

φ^{Sk} este o **formă normală Skolem** a lui φ .



Exemple

- ▶ Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- ▶ Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z R(x, y, z)$. Atunci
$$\varphi^1 = \forall y \forall z (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z R(c, y, z),$$
unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z R(c, y, z)$.
- ▶ Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y P(y, f(y))$.



Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f . Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v (R(y, z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\ &= \forall y \forall u \exists v (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v),\end{aligned}$$

unde g este un nou simbol de funcție unară

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y, u)) \\ &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)),\end{aligned}$$

unde h este un nou simbol de funcție binară.

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)).$$



Teorema 3.46 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex și φ^{Sk} o formă normală Skolem a sa.

- (i) $\models \varphi^{Sk} \rightarrow \varphi$, deci $\varphi^{Sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.
- (ii) φ este satisfiabilă ddacă φ^{Sk} este satisfiabilă.

Dem.:

- (i) Se aplică faptul că $\models \varphi_x(t) \rightarrow \exists x\varphi$, $\models \varphi$ implică $\models \forall x\varphi$ și $\models \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$ pentru a concludă că $\models \varphi^1 \rightarrow \varphi$, $\models \varphi^2 \rightarrow \varphi^1$, etc..
- (ii) " \Leftarrow " Se aplică (i). " \Rightarrow " **Exercițiu suplimentar.**





Observație

În general, φ și φ^{Sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

Dem.: Fie $\mathcal{L} = (R)$, unde R este simbol de relație binară și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$. Atunci $\varphi^{Sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = (f, R)$. Fie $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$ -structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \models \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n a.î. $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \not\models \varphi^{Sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. \square



Fie φ un enunț al lui \mathcal{L} și Γ o mulțime de enunțuri.

Definiția 3.47

Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} a.î.

$$\mathcal{A} \models \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că \mathcal{A} este un **model** al lui Γ . **Notăție:** $\mathcal{A} \models \Gamma$

Definiția 3.48

Spunem că φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models \Gamma \implies \mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\Gamma \models \varphi$



Notăție: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , notăm

$$\text{Mod}(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $\text{Mod}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $\text{Mod}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

Lema 3.49

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ ,

- (i) $\Gamma \models \psi \iff \text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\psi).$
- (ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies \text{Mod}(\Delta) \subseteq \text{Mod}(\Gamma).$
- (iii) $\Gamma \text{ este satisfiabilă} \iff \text{Mod}(\Gamma) \neq \emptyset.$

Dem.: Exercițiu ușor.



Definiția 3.50

O \mathcal{L} -*teorie* este o mulțime T de enunțuri ale lui \mathcal{L} care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 3.51

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ , *teoria generată de* Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$



Propoziția 3.52

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

- (i) $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\text{Th}(\Gamma))$.
- (ii) $\text{Th}(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.: Exercițiu.

- ▶ O teorie prezentată ca $\text{Th}(\Gamma)$ se numește **teorie axiomatică** sau teorie prezentată **axiomatic**. Γ se numește mulțime de **axiome** pentru $\text{Th}(\Gamma)$.
- ▶ Orice teorie poate fi prezentată axiomatice, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.



Definiția 3.53

O teorie T este **finit axiomatizabilă** dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ .

Definiția 3.54

O clasă \mathcal{K} de \mathcal{L} -structuri este **axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ . Spunem și că Γ **axiomatizează** \mathcal{K} .

Definiția 3.55

O clasă \mathcal{K} de \mathcal{L} -structuri este **finit axiomatizabilă** dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime **finită** de enunțuri Γ .



Exemple - Teoria egalității

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 3.56

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice $n \geq 2$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x(x = x)$.

Notății

Fie $n \geq 1$.

$$\blacktriangleright \exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$$

$$\blacktriangleright \exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$$

Propoziția 3.57

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel mult } n \text{ elemente}$$

$$\mathcal{A} \models \exists^{=n} \iff \mathcal{A} \text{ are exact } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 3.58

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models T \iff \mathcal{A} \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.



Exemple - Teoria grafurilor

Un **graf** este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V . Elementele lui V se numesc **vârfuri**, iar elementele lui E se numesc **muchii**.

- ▶ $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- ▶ \mathcal{L}_{Graf} -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$(IREFL) := \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

Definiție

Teoria grafurilor este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt grafurile.
- ▶ Γ axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii parțiale

- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde \leq este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$, unde

$$(REFL) \quad := \quad \forall x (x \dot{\leq} x)$$

$$(ANTISIM) \quad := \quad \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y)$$

$$(TRANZ) \quad := \quad \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor parțial ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor parțial ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii totale

Fie $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile total ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii stricte

- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- ▶ $\mathcal{L}_{\dot{<}}$ -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$, unde

$$(IREFL) := \forall x \neg (x \dot{<} x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z)$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria ordinii dense

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x = y \vee x < y \vee y < x)$$

$$(DENS) := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

Definiție

Teoria ordinii dense este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶ Γ axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- ▶ $\mathcal{L}_{\equiv} = (\equiv, \emptyset, \emptyset) = (\equiv)$
- ▶ \mathcal{L}_{\equiv} -structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde \equiv este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$, unde

$$(REFL) := \forall x(x \equiv x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$$

$$(TRANZ) := \forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este $T := Th(\Gamma)$.

- ▶ T este finit axiomatizabilă.
- ▶ Fie \mathcal{K} clasa structurilor (A, \equiv) , unde \equiv este relație de echivalență pe A . Avem că $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, așadar Γ axiomatizează \mathcal{K} . Prin urmare, \mathcal{K} este finit axiomatizabilă.



Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (\neg(x = y) \wedge x \dot{=} y \wedge \forall z (z \dot{=} x \rightarrow (z = x \vee z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.



Teorema 3.59 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 3.60

Clasa \mathcal{L} -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

() pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.*

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură finită a.î. $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$ și $\mathcal{A} \models \Gamma$ deoarece \mathcal{A} este finită.



Teorema de compacitate - aplicații

Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model \mathcal{B} .

Deoarece $\mathcal{B} \models \Gamma$, \mathcal{B} este finită.

Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că \mathcal{B} este infinită.

Am obținut o contradicție. □

Corolar 3.61

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.



Propoziția 3.62

Clasa \mathcal{L} -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu \mathcal{K}_{Inf} clasa \mathcal{L} -structurilor infinite.

Conform Propoziției 3.58, pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.



Teorema de compacitate - aplicații

Presupunem că \mathcal{K}_{Inf} este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\varphi)$.

Rezultă că pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa \mathcal{L} -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 3.60. □.

Corolar 3.63

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{=}$.

Propoziția 3.64

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui \mathcal{L} cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit \mathcal{A} a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$, deci $\mathcal{A} \models \Delta_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model \mathcal{B} . Prin urmare, \mathcal{B} este un model infinit al lui Γ . □



Propoziția 3.65

Dacă un enunț φ este adevărat în orice \mathcal{L} -structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice \mathcal{L} -structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 3.64, rezultă că Γ are un model infinit \mathcal{A} . Prin urmare, $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. \square



Propoziția 3.66

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci

- (i) Γ are un model infinit.
- (ii) Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.
- (iii) Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Exercițiu.

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}$, $\dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, \dot{S} este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție \mathcal{L} -termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie \mathcal{L} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 3.67

O \mathcal{L} -structură \mathcal{A} se numește **non-standard** dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește **element non-standard**.



Teoria lui \mathcal{N} se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \models \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 3.68

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \dots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$



Fie $n_0 > \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Considerăm extensia \mathcal{N}^+ a lui \mathcal{N} la \mathcal{L}^+ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \models \Gamma_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui \mathcal{A} . □