

FUNCTII DERIVABILE

A) SPATII LINIARE NORMATE

X spatiu liniare real

0_X elementul neutru al lui X

Definitia 1. Se numeste norma pe X o functie $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ care are urmatoarele proprietati:

- a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$
- b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$
- c) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$.

Notatie. $p(x) \stackrel{not}{=} \|x\|$

$p \stackrel{not}{=} \| \|$

Definitia 2. Se numeste spatiu liniar normat un spatiu liniar X pe care se defineste o norma $\| \| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Notatie. $(X, \| \|)$

Teorema 1. Orice spatiu normat $(X, \| \|)$ este spatiu metric.

Normei $\| \| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ii asociem distanta $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definita prin $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$.

Distantei $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ i se asociaza topologia $\tau_d \stackrel{not}{=} \tau_{\| \|} \subseteq \wp(X)$.

Definitia 3. Topologia $\tau_{\| \|}$ se numeste topologia asociata normei $\| \|$.

Notatie. $\lambda \in \mathbb{R}^*, x \in X$

$$\frac{1}{\lambda} x \stackrel{not}{=} \frac{x}{\lambda}$$

EXEMPLE DE SPATII NORMATE

1) $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

2) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ unde $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

3) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$ unde $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ unde $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

B) FUNCTII DERIVABILE

Definitia 4. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (X, \| \|)$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca exista $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$.

Notatie. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{not}{=} f'(x_0)$ derivata functiei f in punctul x_0

Definitia 5. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (X, \| \|)$ este derivabila pe multimea $A \in D \cap D'$ daca f este derivabila in orice punct al multimii A .

Teorema 2. Daca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (X, \| \|)$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci f este continua in x_0 .

Observatie. Reciproca Teoremei 2 este falsa.

In continuare vom considera cazul particular $(X, |||) = (\mathbb{R}^n, ||_2)$ cu $n \geq 2$ si $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad \forall x \in D.$$

Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numesc componentele funcției f .

Notam $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Teorema 3. Funcția $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă și numai dacă funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$. În plus $f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0), \dots, f'_n(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

C) FUNCTII REALE DERIVABILE

Conform Teoremei 3, studiarea derivabilității funcțiilor vectoriale se reduce la studiarea derivabilității componentelor acestora. Componentele unei funcții vectoriale fiind funcții reale, se impune studiarea derivabilității în cazul funcțiilor $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 4. a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcțiile $f + g, f - g, \alpha f, fg : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile în $x_0 \in D \cap D'$ și sunt adevărate relațiile $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$, $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ și $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

b) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$ cu $g(x) \neq 0 \forall x \in D$. Atunci funcția $\frac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ și este adevărată relația $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

c) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$ o funcție derivabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ și $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în punctul $f(x_0) \in A \cap A'$. Atunci funcția $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ și $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

d) Fie I, J două intervale din \mathbb{R} , $f : I \rightarrow J$ o funcție bijectivă și $x_0 \in I$ cu următoarele proprietăți:

- f este funcție monotona
- f este derivabilă în punctul x_0
- $f'(x_0) \neq 0$.

Atunci $f^{-1} : J \rightarrow I$ este derivabilă în punctul $f(x_0) = y_0$ și $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Definiția 6. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$.

a) x_0 se numește punct de minim local al funcției f dacă $\exists V \in V_{\mathbb{R}}(x_0)$ astfel încât $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in V \cap D$.

b) x_0 se numește punct de maxim local al funcției f dacă $\exists V \in V_{\mathbb{R}}(x_0)$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in V \cap D$.

c) x_0 se numește punct de extrem local al funcției f dacă x_0 este punct de maxim local al funcției f sau x_0 este punct de minim local al funcției f .

Teorema lui Fermat. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \overset{0}{D}$ un punct de extrem local al funcției f . Dacă f este derivabilă în punctul x_0 , atunci

$$f'(x_0) = 0.$$

Demonstratie. $x_0 \in D \Rightarrow \exists r_1 > 0$ astfel incat $(x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subset D$

Presupunem ca x_0 este punct de minim local al functiei $f \Rightarrow \exists r_2 > 0$ astfel incat $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \cap D$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\}$ si obtinem ca

$$f(x) \geq f(x_0) \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Sunt adevarate inegalitatile

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + r)$$

(1)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0) \quad (2)$$

Trecem la limita in relatiile (1) si (2) si obtinem ca $f'_s(x_0) \leq 0$ si $f'_d(x_0) \geq 0$.

Tinand cont ca functia este derivabila in punctul x_0 , rezulta ca $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = 0$.

Teorema lui Rolle. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b) cu $f(a) = f(b)$. Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = 0$.

Demonstratie. Multimea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ este compacta si functia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua pe $[a, b]$. Atunci f este marginita si isi atinge marginile pe $[a, b]$.

$$\exists u, v \in [a, b] \text{ astfel incat } f(u) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ si } f(v) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

Se disting mai multe cazuri, si anume:

Cazul 1. $u, v \in \{a, b\}$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(u) = f(v) \Rightarrow f \text{ functie constanta} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Cazul 2. $u \in \{a, b\}, v \in (a, b)$

$v \in (a, b) = [a, b]$ punct de extrem local al functiei f si f este derivabila in punctu

l

$$v \xrightarrow{th.Fermat} f'(v) = 0$$

Cazul 3. $v \in \{a, b\}, u \in (a, b)$

$u \in (a, b) = [a, b]$ punct de extrem local al functiei f si f este derivabila in punctul

$$u \xrightarrow{th.Fermat} f'(u) = 0$$

Cazul 4. $u, v \in (a, b)$

$u, v \in (a, b) = [a, b]$ puncte de extrem local ale functiei f si f este derivabila in punctele

$u, v \xrightarrow{th. Fermat} f'(u) = f'(v) = 0$.

Teorema lui Cauchy. Fie $f, g : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ doua functii continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) cu $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Exista $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Teorema lui Lagrange. Fie $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe (a, b) . Exista $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstratie. Alegem functia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita prin $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x \forall x \in [a, b]$.

Functia g are urmatoarele proprietati:

- g este continua pe $[a, b]$
- g este derivabila pe (a, b)
- $g(a) = g(b)$
- $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \forall x \in (a, b)$.

Aplicam Teorema lui Rolle si obtinem ca $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $g'(c) = 0$.

Rezulta ca $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corolar la Teorema lui Lagrange. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval si $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ o functie.

a) Daca f este derivabila pe I si $f'(x) = 0 \forall x \in I$, atunci f este functie constanta pe I .

b) Fie $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ o functie continua pe I si $\exists x_0 \in I$ astfel ca f este derivabila pe $I \setminus \{x_0\}$. Daca $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, atunci f este derivabila in punctul x_0 si $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

c) Fie $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabila pe I .

Daca $f'(x) \geq 0 \forall x \in I$, atunci f este functie crescatoare pe I .

Daca $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$, atunci f este functie descrescatoare pe I .

Daca $f'(x) > 0 \forall x \in I$, atunci f este functie strict crescatoare pe I .

Daca $f'(x) < 0 \forall x \in I$, atunci f este functie strict descrescatoare pe I .

Definitia 7. Un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ se numeste nedegenerat daca I are cel putin doua elemente distincte.

Teorema lui Darboux. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabila. Atunci $f' : I \Rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

Corolar. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \Rightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabila. Daca $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$, atunci $f'(x) > 0 \forall x \in I$ sau $f'(x) < 0 \forall x \in I$.

Regula lui L'Hospital (variantea $\frac{0}{0}$)

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I' \setminus I$ si $f, g : I \Rightarrow \mathbb{R}$ doua functii derivabile pe I care verifica urmatoarele ipoteze:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

$$b) g'(x) \neq 0 \forall x \in I$$

$$c) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\text{Atunci } g(x) \neq 0 \forall x \in I \text{ si } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Regula lui L'Hospital (varianta $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I' \setminus I$ si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ doua functii derivabile pe I care verifica urmatoarele ipoteze:

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$

$$b) g'(x) \neq 0 \forall x \in I$$

$$c) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\text{Atunci } \exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0) \text{ astfel incat } g(x) \neq 0 \forall x \in I \cap V \text{ si } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Observatie. Ipoteza (c) din Regula lui L'Hospital este esentiala pentru ca limitele sa fie egale.

Alegem functiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $g(x) = \sin x \forall x \in (0, +\infty)$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nu exista.}$$

Limitele nu pot fi egale pentru ca $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu exista.

D) DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Definitia 8. a) Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabila de doua ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel ca functia f sa fie derivabila pe multimea $V \cap D$ si $f' : D \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabila de n ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel ca functia f sa fie derivabila de $n-1$ ori pe multimea $V \cap D$ si $f^{(n-1)} : D \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$.

c) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabila de n ori pe multimea $A \subseteq D \cap D'$ daca f este derivabila de n ori in orice punct al multimii A .

$$\text{Notatii. a) } f''(x_0) \stackrel{not}{=} (f')'(x_0).$$

$$b) f^{(n)}(x_0) \stackrel{not}{=} (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Definitia 9. Se considera functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D \cap D'$ si $n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat f este derivabila de n ori in punctul x_0 .

$$a) \text{ Functia } T_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita prin } T_{f,n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

se numeste polinomul Taylor de rang n asociat functiei f si punctului x_0 .

b) Functia $R_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita prin $R_{f,n,x_0}(x) = f(x) - T_{f,n,x_0}(x)$ se numeste restul lui Taylor de rang n asociat functiei f si punctului x_0 .

Observatie. $f = T_{f,n,x_0} + R_{f,n,x_0}$

Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $n \in \mathbb{N}^*$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabila de $n + 1$ ori pe multimea I si $x_0 \in I$. Oricare ar fi $x \in I$ cu $x \neq x_0$ exista $c \in I$ situat intre x si x_0 astfel incat

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Exemplu. Functia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \forall x \in \mathbb{R}$ este indefinit derivabila pe \mathbb{R} si $f^{(k)}(x) = e^x \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Alegem $n \in \mathbb{N}^*, x_0 = 0$.

Aplicam Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange si obtinem ca oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $x \neq 0$ exista $c \in \mathbb{R}$ situat intre x si 0 astfel incat

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Definitia 10. Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o functie.

a) f se numeste functie convexa daca $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1]$.

b) f se numeste functie concava daca $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y) \forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1]$.

Inegalitatea lui Jensen. a) Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o functie convexa. Oricare ar fi $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ si $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, +\infty]$ cu $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ este adevarata inegalitatea

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n).$$

b) Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o functie concava. Oricare ar fi $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ si $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, +\infty]$ cu $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ este adevarata inegalitatea

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n) \geq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n).$$

Teorema 10. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabila de doua ori pe multimea I .

a) f este functie convexa daca si numai daca $f''(x) \geq 0 \forall x \in I$.

b) f este functie concava daca si numai daca $f''(x) \leq 0 \forall x \in I$.

Definitia 11. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o functie si $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Spunem ca functia f este de clasa C^n pe I daca f este derivabila de n ori pe I si $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ este functie continua pe I .

b) Spunem ca functia f este de clasa C^∞ pe I daca f este derivabila de m ori pe $I \ \forall m \in \mathbb{N}^*$.

Notatii. $C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid .f \text{ functie de clasa } C^n \text{ pe } I\}$

$C^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid .f \text{ functie de clasa } C^\infty \text{ pe } I\}.$