24.02.2022.

Seminar 2 - GAL

Listă de probleme

Rang. Sisteme liniare

Ex1 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $rg A = 2$

Ex2 Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Să se afle $rg A$. Discuție.

Ex3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m^2 \\ m & 1 & 2 & -1 \\ m & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Să se afle $rg A$. Discuție.

Ex4 Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A^{2022} - 2022A - I_3 = O_3$.

Să se afle a) $rg A$

b) $rg(2022A + I_3)$

Ex5 Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $A^3 - 6A^2 + 12A = O_n$

Să se afle $rg(2I_n - A)$

Ex6 Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt matrice inversabile, atunci $rg(A^{-1} + B^{-1}) = rg(A+B)$

Ex7 Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $AB = BA$ și $A^7 = I_n$, $B^5 = I_n$.

Să se arate că $rg(A+B) = n$.

Ex 8

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice de rang 1. Să se arate că $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $A^2 = \alpha A$.

Ex 9

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

a) Să se dea exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a.î. $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg}(A^2$ [illegible]

b) Să se arate că dacă $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2$, atunci $\operatorname{rg} A^n = \operatorname{rg} A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Ex 10

Fie sistemul

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Să se rezolve. Discuție. Interpretare geometrică

Ex 11

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ x + \lambda^2 z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Să se rezolve.

Ex 12

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ (b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0 \end{cases}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Dacă $a \neq b$, să se rezolve.

Ex13 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$

Care ete cond. verif. de a,b,c aî sist are o singură sol.

Ex14

Fie $\begin{cases} x+m(y+z+t)=a \\ y+m(x+z+t)=b \\ z+m(x+y+t)=c \\ t+m(x+y+z)=d \end{cases}$, $m,a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Să se rez. Discuție

Ex15 $\begin{cases} x+y+mz-t=0 \\ 2x+y-z+t=0 \\ 3x+y-z-t=0 \\ mx-2y-2t=0 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$

$m=?$ aî sist are și sol nenule.

Ex16 $\begin{cases} x+2y=m+1 \\ 2x+3y=m-1 \\ mx+y=3 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

$m=?$ aî SI

Int. geometrică

Ex17 $\sum_{i=1}^{k}(1+i)x_i+\sum_{i=1}^{4-k} i\,x_{i+k}=0$, $\forall k=\overline{1,3}$

Să se rez

Ex18 $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j=4^{i-1}$, $\forall i=\overline{1,4}$, $a_{ij}=j^{i-1}$, $\forall i,j=\overline{1,4}$

Să se rezolve.

T1 (seminar)

① $$\begin{cases} x + y + az - t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ 3x - y - z - t = 0 \\ ax - 2y - 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

② $$A = \begin{pmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{pmatrix}$$

Să se arate că $\det A = 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, utilizând Th. Laplace

③ Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^2 = O_2$

Fie $P_A = \det(A - xI_2)$ pol caract.

Calc $P_A(1) + \ldots + P_A(n)$.