SEMINAR 4

Repere. Coordonate. Subspații vectoriale.

Preliminarii

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect. n-dim.

- $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper $\Leftrightarrow$ R bază ordonată.

  $\forall x\in V,\ \exists!\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$

  (coordonatele lui x în raport cu reperul R)

- $R=\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{A}R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$

  $e_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j,\ \forall i=\overline{1,n}$

  $X=AX'$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$

$(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1',\dots,x_n')$ coord. în rap cu R, resp R'

- Criterii de LI $\quad S=\{v_1,\dots,v_m\}$, $m\le n$.

  S ~~este~~ SLI $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\,C=m=$ maxim

  $C=$ matricea compon. vect din S în raport cu un reper arbitrar

- $V_1,V_2\subset V$ subsp. vect $\Rightarrow V_1\cap V_2$ subsp vect.

  În general, $V_1\cup V_2$ nu e ssp vect ; $\langle V_1\cup V_2\rangle=V_1+V_2$

  V_1+V_2 este sumă directă i.e $V_1\oplus V_2\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0_V\}$

  $\Leftrightarrow\forall v\in V_1+V_2,\ \exists!\ \begin{matrix}v_1\in V_1\\ v_2\in V_2\end{matrix}$ a.i. $v=v_1+v_2$.

  Dacă $V=V_1\oplus V_2$, $V_2=$ subspațiu complementar lui V_1 (nu e unic)

  R_1 reper în V_1

$R=R_1\cup R_2$ reper în $V\Rightarrow V_2=\langle R_2\rangle$

Th. Grassmann $\quad\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

Seminar 4 - GAL

Listă exerciții

① Fie $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$ și $\mathcal{R}_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ reperul canonic.
Considerăm $\mathcal{R}'=\{e_1'=e_1+2e_2+e_3,\ e_2'=e_1+7e_2+e_3,\ e_3'=-e_1+e_2+e_3\}$

a) Să se arate că $\mathcal{R}'$ este reper în $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$ $\quad A=?$ (matricea de trecere)

b) Să se afle coordonatele vectorului $x=(3,2,1)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}'$.

② Fie $(\mathbb{R}_2[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_0=\{e_1=1,\ e_2=X,\ e_3=X^2\}$ reperul canonic.

Fie $\mathcal{R}'=\{-1+2X+3X^2,\ X-X^2,\ X-2X^2\}$

a) Să se arate că $\mathcal{R}'$ este reper în $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $A=?$

b) Să se afle coordonatele lui $P=3-X+X^2$ în raport cu $\mathcal{R}'$.

③ Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{R}$ sp. vect. 3-dim.

Fie $\mathcal{R}=\{v_1,v_2,v_3\}$ reper în V și

$\mathcal{R}'=\{v_1'=v_1,\ v_2'=v_1+v_2,\ v_3'=v_1+v_2+v_3\}\subset V$.

a) Să se arate că $\mathcal{R}'$ e reper în V; $\mathcal{R}\xrightarrow{A}\mathcal{R}'$, $A=?$

b) Dacă $v\in V$ are coordonatele (x_1,x_2,x_3) în raport cu reperul $\mathcal{R}$, atunci care sunt coordonatele (x_1',x_2',x_3') în raport cu reperul $\mathcal{R}'$

4) Fie $(\mathbb{R}_3[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$ și

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=0\}$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0)=P(1)=0\}$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $\forall i=\overline{1,3}$ subspații vectoriale

b) Precizați câte un reper $\mathcal{R}_i$ în V_i, $i=\overline{1,3}$

c) Aflați coordonatele lui

$P_1 = X+2X^2+3X^3$ în raport cu $\mathcal{R}_1$

$P_2 = 1+2X^2-3X^3$ — // — $\mathcal{R}_2$

$P_3 = X+3X^2-4X^3$ — // — $\mathcal{R}_3$

d) Determinați câte un subspațiu complementar V_i' lui V_i, $i=\overline{1,3}$

i.e. $\mathbb{R}_3[X] = V_i \oplus V_i'$, $i=\overline{1,3}$

e) Să se scrie $\mathbb{R}_3[X]$ ca suma directă 3 subspații vectoriale, respectiv 4 subspații vectoriale.

5) **Def** $(V,+,\cdot)/\mathbb{R}$.

a) $[v,w] = \{x \in V \mid x=(1-t)v+tw,\ t\in[0,1]\}$

b) $C \subseteq V$ subm. convexă $\Leftrightarrow [\forall v,w \in C \Rightarrow [v,w]\subseteq C]$

a) $\forall V' \subset V$ subsp. vect $\Rightarrow V'$ mulțime convexă

b) $\{v_0,\dots,v_k\} \subset V$ sistem finit de vectori din V

$\Rightarrow C = \{v = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i,\ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\}$ convexă.

Prop $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$S(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AX=0\} \subset \mathbb{R}^n$ subspațiu vect

și $\dim_{\mathbb{R}} S(A) = n - rg(A)$

(6) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \right\} = S(A)$

a) Precizați o bază în V'.

b) Precizați un subspațiu complementar V'' lui V', i.e. $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

c) Să se descompună $x = (1,1,2)$ în raport cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$.

(7) $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - 2t = 0\}$

$V'' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + t = 0\}$.

PR Să se arate că $\mathbb{R}^4 = V' + V''$.

Justificați că suma nu este directă

PROP

Fie $(V, +, \cdot)/K$ spațiu vect n-dim. și $V' \subset V$ subsp vect.

Dacă $\dim_K V' = n$, atunci $V' = V$.

(8) Fie $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R}$ și $V' = \langle\{(1,2,-1,0), (1,0,0,3)\}\rangle$

a) Să se descrie V' printr-un sistem de ec. liniare

b) $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$, $V'' = ?$.

Să se descrie V'' printr-un sistem de ec. liniare.

(9) $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \langle\{u, v, w\}\rangle$, $V'' = \langle\{u', v', w'\}\rangle$,

unde $u = (2,3,11,5)$, $v = (1,1,5,2)$, $w = (0,1,1,1)$,

$u' = (2,1,3,2)$, $v' = (1,1,3,4)$, $w' = (5,2,6,2)$

a) Să se arate că $V' \oplus V'' = \mathbb{R}^4$.

b) Descrieți V', V'' printr-un sist de ec. liniare.

(10) Fie $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)\,|\mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

și $V' = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid AX = 0\}$

a) $\dim_{\mathbb{R}} V' = ?$. Precizați o bază în V'.

b) Să se scrie $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$

c) Descompuneți $x = (1, 2, 1, 2)$ ca sumă dintre un vect din V' și unul din V''.