Curs 2

Teoremă (Criteriul lui Cauchy pentru serii de numere reale). Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}^*$, avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}| < \varepsilon$.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1. **Criteriul raportului.** Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} l$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

2. <u>Criteriul radicalului.</u> Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{\text{not.}}{=\!=} l$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

3. <u>Criteriul Raabe-Duhamel.</u> Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{\text{not.}}{=\!=} l.$$

a) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

4. <u>Criteriul condensării.</u> Dacă $(x_n)_{n\geq 0} \subset [0,\infty)$ este un șir descrescător, atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură (i.e. sunt ambele convergente sau sunt ambele divergente).

5. <u>Criteriul de comparație cu inegalități.</u> Fie seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, $\forall n \geq n_0$, avem $x_n \leq y_n$

a) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

6. <u>Criteriul de comparație cu limită.</u> Fie seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not.}{=} l$.

a) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură.

b) Dacă $l = 0$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = \infty$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Definiție. Fie $\sum_n x_n$ o serie de numere reale. Spunem că această serie este absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ este convergentă.

Propoziție. Orice serie de numere reale absolut convergentă este convergentă.

Observație. Reciproca propoziției anterioare nu este, în general, adevărată.

1. Criteriile Abel-Dirichlet

I. Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$.

Presupunem că:

i) Există $M>0$ astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}$, avem

$$|y_0+y_1+\ldots+y_n| \leq M.$$

ii) Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

II. Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$.

Presupunem că:

i) Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton și mărginit.

ii) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă.

Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

2. <u>Criteriul lui Leibniz</u>. Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ un șir descrescător astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

<u>Exercițiu</u>. Fie $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă.

<u>Soluție</u>. a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Observăm că $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Conform Criteriului lui Leibniz, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$). $\square$

Topologie

Definiție. Fie $X \neq \emptyset$. O mulțime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește topologie pe X dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, avem $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$.
3) $\forall (D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, avem $\bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$.

Definiție. Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X. Perechea $(X, \mathcal{T})$ se numește spațiu topologic.

Exemple. 1) Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Perechea

$(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

2) Fie $X \neq \phi$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

3) Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

<u>Justificare pentru 3).</u> a) $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (evident).

b) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$. Dacă $D_1 = \phi$ sau $D_2 = \phi$, atunci $D_1 \cap D_2 = \phi \in \mathcal{T}$. Dacă $D_1 = \mathbb{R}$ sau $D_2 = \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = D_2 \in \mathcal{T}$ sau $D_1 \cap D_2 = D_1 \in \mathcal{T}$. Dacă $D_1 = (-\infty, a_1)$ și $D_2 = (-\infty, a_2)$ cu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = (-\infty, \min\{a_1, a_2\}) \in \mathcal{T}$.

Deci $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$.

c) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$. Dacă $\exists\, i_0 \in I$ a.î. $D_{i_0} = \mathbb{R}$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Dacă $D_i = \phi \;\forall\, i \in I$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i = \phi \in \mathcal{T}$.

Fără a restrânge generalitatea presupunem că $D_i = (-\infty, a_i) \;\forall\, i \in I$.

Avem $\bigcup_{i\in I} D_i = (-\infty, \sup_{i\in I} a_i) \in \mathcal{T}$.

Așadar $\bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$.

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic.

<u>Definiție.</u> 1) O mulțime $G \subset X$ se numește mulțime deschisă dacă $G \in \mathcal{T}$.

2) O mulțime $F \subset X$ se numește mulțime închisă dacă $X \setminus F \overset{def.}{=} CF \in \mathcal{T}$ (complementara lui F este mulțime deschisă).

3) Fie $x \in X$. O mulțime $V \subset X$ se numește vecinătate a lui x dacă $\exists D \in \mathcal{T}$ astfel încât $x \in D \subset V$.

<u>Notație.</u> Pentru orice $x \in X$, $\mathcal{V}_x \overset{not.}{=} \{V \subset X \mid V$ vecinătate a lui $x\}$.

<u>Definiție.</u> Fie $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x în raport cu topologia $\mathcal{T}$ sau că șirul $(x_n)_n$ converge către x în raport cu topologia $\mathcal{T}$ și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\mathcal{T}}{=}$

$\overset{\tau}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} x$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_V$, avem $x_n \in V$.

<u>Observație</u>. Sintagma „în raport cu topologia τ" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul topologic (X, τ)".

<u>Definiție</u>. O mulțime $K \subset X$ se numește mulțime compactă dacă din orice acoperire cu mulțimi deschise a sa se poate extrage o subacoperire finită (i.e. $\forall (D_i)_{i\in I} \subset \tau$ a.î. $K \subset \bigcup_{i\in I} D_i$, $\exists J \subset I$, J finită cu proprietatea că avem incluziunea $K \subset \bigcup_{j\in J} D_j$).

<u>Analiza topologică a unei mulțimi</u>

Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$ și $x_0 \in X$.

<u>Definiție</u>. Spunem că x_0 este:

1) punct interior al lui A dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ (i.e. $\exists D \in \tau$ astfel încât $x_0 \in D \subset A$).

2) punct aderent (sau de aderență) al lui A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap A \neq \emptyset$.

3) punct de acumulare al lui A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

4) punct frontieră al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct interior al lui A.

5) punct izolat al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A.

<u>Notații.</u> 1) $\mathring{A} \overset{not.}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct interior al lui $A\}$.

2) $\overline{A} \overset{not.}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct aderent al lui $A\}$.

3) $A' \overset{not.}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct de acumulare al lui $A\}$.

4) $Fr(A) = \partial A \overset{not.}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct frontieră al lui $A\}$.

5) $Izo(A) = {}'A \overset{not.}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct izolat al lui $A\}$.