18.03.2022

$\boxed{\text{CURS 5}}$ - GAL

Aplicații liniare

Prop $(V_i, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect, $i=\overline{1,2}$

$f: V_1 \to V_2$ apl. liniară

1) f injectivă $\Leftrightarrow$ f transformă $\forall$ SLI din V_1 într-un SLI din V_2

2) f surjectivă $\Leftrightarrow$ f transformă $\forall$ SG al lui V_1 într-un SG al lui V_2

3) f bijectivă $\Leftrightarrow$ f transformă $\forall$ reper al lui V_1 într-un reper al lui V_2.

Dem

1) „$\Rightarrow$" Ip: f inj

Fie $S=\{v_1,\dots,v_k\}$ SLI în V_1. Dem că $f(S)=\{f(v_1),\dots,f(v_k)\}$ este SLI în V_2.

$\forall a_1,\dots,a_k \in \mathbb{K}$ aî $\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i) = 0_{V_2} \xRightarrow{f \text{ lin}}$

$f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) = 0_{V_2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\}$ (f inj)

$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \xRightarrow[S \text{ este SLI}]{} a_i = 0,\ i=\overline{1,k} \Rightarrow f(S)$ este SLI

„$\Leftarrow$" Ip: f transf $\forall S$ SLI în V_1 într-un $f(S)$ SLI în V_2.

Pp. prin abs $\exists x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0_{V_2}$, $x \neq 0_{V_1}$

$S=\{x\}$ este SLI $\xRightarrow[ip]{} f(S)=\{f(x)\}$ este SLI

$\Rightarrow f(x) \neq 0_{V_2}$ Contrad. $\Rightarrow$ Pp este falsă $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\} \Rightarrow f$ inj.

2) "$\Rightarrow$" Ip: f surj

Fie S un SG în V_1 i.e $V_1 = \langle S \rangle$. Dem că $f(S)$ e SG în V_2

i.e $V_2 = \langle f(S) \rangle$.

$S = \{v_1, \dots, v_k\}$.

Fie $y \in \operatorname{Im} f \overset{=V_2}{} \Rightarrow \exists x \in V_1 \overset{\langle S \rangle}{=}$ aî $y = f(x)$

$$y = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) \overset{f \text{ lin}}{=} \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i) \in \langle \{f(v_1), \dots, f(v_k)\} \rangle = \langle f(S) \rangle.$$

$\Rightarrow f(S)$ e SG pt V_2.

"$\Leftarrow$" f transf $\forall S$ SG în V_1 într-un $f(S)$ în V_2.

$V_1 = \langle S \rangle$; $V_2 = \langle f(S) \rangle$.

Dem că f surj: $\forall y \in V_2$, $\exists x \in V_1$ aî $f(x) = y$.

$$y \in V_2 \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i) = f\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i}_{x}\Big)$$

$x = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in V_1$.

3) cf 1) + 2).

Matricea asociată unei aplicații liniare

$f: V_1 \rightarrow V_2$ liniară

$R_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V_1 $\xrightarrow{A}$ $R_2 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ reper în V_2

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \bar{e}_j, \ \forall i = \overline{1,n}$$

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
$= [f]_{R_1, R_2}$

$$⊛\ f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \underset{f\,lin}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{f(e_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, \overline{e}_j\right) = \underline{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right)\overline{e}_j}$$

$$f(x) = y \quad , \quad \underline{y = \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{e}_j}$$

$$R_2 \text{ SLI} \Rightarrow y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \ , \ \forall j = \overline{1,m}$$

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \left(a_{ji}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

<u>Teorema de caracterizare a aplicațiilor liniare</u>

$f: V_1 \to V_2$ aplicație

f liniară $\Leftrightarrow \exists\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ a.î. coordonatele lui x în raport cu reperul $R_1 = \{e_1, .., e_n\}$ din V_1 și coordonatele lui $y = f(x)$ în raport cu reperul $R_2 = \{\overline{e}_1, .., \overline{e}_m\}$ din V_2 verifică.

$$Y = AX, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \left(a_{ji}\right)_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \ y = \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{e}_j$$

Dem

"$\Rightarrow$" f liniară

cf ⊛ $\Rightarrow Y = AX$

"$\Leftarrow$" $Y = AX$, $f(x) = y$. Dem că f e liniară.

$aY_1 = A(aX_1)$

$bY_2 = A(bX_2)$

$aY_1 + bY_2 = A(aX_1 + bX_2) \Rightarrow f$ lin.

Modificarea matricei la schimbarea reperului.

$f: V_1 \to V_2$ liniară

$$\begin{array}{ccc} R_1 = \{e_1, \dots, e_n\} & \xrightarrow{A} & R_2 = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_m\} \\ C \downarrow & & \downarrow D \\ R_1' = \{e_1', \dots, e_n'\} & \xrightarrow{A'} & R_2' = \{\overline{e}_1', \dots, \overline{e}_m'\} \end{array}$$

repere în V_1 — repere în V_2

$A = [f]_{R_1, R_2}$, $A' = [f]_{R_1', R_2'}$

$\boxed{A' = D^{-1} A C}$, $C \in GL(n, \mathbb{K})$
$D \in GL(m, \mathbb{K})$

Prop rangul matricei asociate lui f este un invariant la schimbarea reperelor.

Dem

$rg\, A' = rg(D^{-1} A C) = rg\, A$

Prop $f: V_1 \to V_2$ apl. liniară

a) f injectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = rg\, A$.

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \dim V_2 = rg\, A$

c) f bijectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = rg\, A \Leftrightarrow A \in GL(n, \mathbb{K})$

Dem

a) f injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\}$

$\operatorname{Ker} f = \{x \in V_1 \mid AX = 0\} = S(A)$

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V_1 - rg\, A = 0 \Leftrightarrow \dim V_1 = rg\, A$.

b) f surj $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V_2$

<u>T. dimensiunii</u>: $\dim V_1 = \underset{\dim V_1 - rg A}{\underset{\parallel}{\dim \operatorname{Ker} f}} + \dim \operatorname{Im} f$ $\Bigg\} \Leftrightarrow$

$\dim V_2 = rg A$.

c) cf a) + b)

f bij $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = rg A \Leftrightarrow A \in GL(n, \mathbb{K})$.

$\boxed{\text{OBS}}$

a)
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & V_2 \arrow[r, "g"] & V_3 \end{tikzcd}$$

$h = g \circ f$

f, g, h liniare.

$Z = A_h X \qquad h(x) = z, \quad f(x) = y, \quad g(y) = z.$

$Z = A_g Y = A_g A_f X$

$\Rightarrow \underset{A_{g\circ f}}{\underset{\parallel}{A_h}} = A_g \cdot A_f$

b)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_V"'] & V \arrow[r, "f^{-1}"] & V \end{tikzcd}$$

$f \in Aut(V)$

$\left.\begin{array}{l} I_n = A_f \cdot A_{f^{-1}} \\ \text{Analog } \; I_n = A_{f^{-1}} \cdot A_f \end{array}\right\} \Rightarrow A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$

c) $\varphi : (GL(V), \circ) \to (GL(n, \mathbb{K}), \cdot)$ izomorfism de grupuri

$\varphi(f) = A$

$GL(V) = \{ f : V \to V \;/\; f \text{ automorfism} \}$.

Exemple 1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2)$

a) f liniară

b) $[f]_{R_0, R_0} = ?$, $R_0 = \{e_1, e_2\}$ reperul canonic din $\mathbb{R}^2$

c) $[f]_{R', R'} = ?$ $R' = \{e_1' = e_1 - 2e_2, e_2' = e_1 + e_2\}$

SOL

a) $Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ f liniară

$f(x) = y$

$y_1 = x_1 + x_2$

$y_2 = 2x_2$

b) $[f]_{R_0, R_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f(e_1) = f(1,0) = (1,0) = e_1 = \underline{1} \cdot e_1 + \underline{0} \cdot e_2 \longrightarrow c_1$ pt A

$f(e_2) = f(0,1) = (1,2) = \underline{1} e_1 + \underline{2} e_2 \longrightarrow c_2$ pt A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $f(e_1') = f(e_1 - 2e_2) = f(1,-2) = \underline{(-1, -4)} =$

$= a e_1' + b e_2' = a(e_1 - 2e_2) + b(e_1 + e_2) =$

$= (a+b) e_1 + (-2a+b) e_2 = \underline{(a+b, -2a+b)}$

$$\begin{cases} a+b = -1 \\ -2a+b = -4 \quad |\cdot(-1) \end{cases} \oplus$$

$3a / = 3$

$a = 1$

$b = -2$

$f(e_1') = 1 \cdot e_1' - 2 e_2'$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} \\ -2 & \boxed{2} \end{pmatrix}$

$f(e_2') = f(e_1 + e_2) = f(1,1) = \underline{(2,2)} = c e_1' + d e_2'$

$= \underline{(c+d, -2c+d)}$

$$\begin{cases} c+d = 2 \\ -2c+d = 2 \quad |(-1) \end{cases} \oplus$$

$3c = 0 \Rightarrow c = 0$

$d = 2$

$f(e_2') = 0 \cdot e_1' + 2 e_2'$

OBS

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_0 = \{e_1, e_2\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "C"'] & \mathcal{R}_0 = \{e_1, e_2\} \arrow[d, "C"] \\
\mathcal{R}' = \{e_1' = e_1 - 2e_2,\ e_2' = e_1 + e_2\} \arrow[r, "A'"] & \mathcal{R}' = \{e_1', e_2'\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - 2e_2 \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A' = C^{-1} A C}$$

Def $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vectorial

$\left(V^* = \{ f : V \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ f \text{ liniară} \}, +, \cdot \right)$ spațiul vectorial dual.

$+ : V^* \times V^* \longrightarrow V^*$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \ \forall x \in V, \forall f, g \in V^*$

$\cdot : \mathbb{K} \times V^* \longrightarrow V^*$

$(af)(x) := a f(x), \ \forall x \in V, \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall f \in V^*.$

Teoremă $\quad V \simeq V^*$ (spații vect. izomorfe)

Dem

Considerăm $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V.

Construim $\mathcal{R}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, $e_i^* : V \longrightarrow \mathbb{K}$ liniare $\forall i = \overline{1,n}$

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \forall i, j = \overline{1,n}$$

Extindem e_i^* prin liniaritate.

$$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overbrace{e_i^*(e_j)}^{\delta_{ij}} =$$

$$= x_1 \underbrace{e_i^*(e_1)} + \dots + x_{i-1} \underbrace{e_i^*(e_{i-1})} + x_i \underbrace{e_i^*(e_i)}_{\substack{\| \\ 1}} + x_{i+1} \underbrace{e_i^*(e_{i+1})} + \dots + x_n \underbrace{e_i^*(e_n)} =$$

$\underline{e_i^*(x) = x_i}$, $\forall i = \overline{1,n}$

Dem că $\mathcal{R}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ este reper în V^*

1) $\mathcal{R}^*$ este SLI

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* = 0_{V^*} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_j)}_{\substack{\| \\ a_j}} = 0_{\mathbb{K}}, \ \forall j = \overline{1,n}$$

$\Rightarrow \mathcal{R}^*$ este SLI

2) $\mathcal{R}^*$ este SG.

$\forall f \in V^*$, $\exists \underline{a_i} \in \mathbb{K}$ a.î. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) f(e_i)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*(x), \ \forall x \in V \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n} \underline{f(e_i)} e_i^*$$

$a_i = f(e_i)$, $\forall i = \overline{1,n}$

$\mathcal{R}^*$ este reper $\Rightarrow \dim V = \dim V^* \Rightarrow V \simeq V^*$

i.e. $\exists \varphi : V \to V^*$ izomorfism de spații vect.

<u>Exemple de endomorfisme (proiecții, simetrii)</u>

<u>Def</u> Fie $p : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$ liniară, $V = V_1 \oplus V_2$

p s.n. <u>proiecție</u> pe V_1, de-a lungul lui V_2

dacă $p(v_1 + v_2) = v_1$, unde $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Prop Fie $p \in End(V)$

p proiecție $\Leftrightarrow p \circ p = p$.

Dem

"$\Rightarrow$" p = proiecție pe V_1, de-a lungul lui V_2

$p : V = V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V = V_1 \oplus V_2$

$p(v) = p(v_1 + v_2) = v_1$.

$\underline{p \circ p(v)} = p(p(v)) = p(v_1) = p(v_1 + 0_{V_2}) = v_1 = \underline{p(v)}$ $\forall v \in V$

$p \circ p = p$

"$\Leftarrow$" $p \in End(V)$ a.î. $p^2 = p$.

Considerăm $V_1 = Im\, p$, $V_2 = Ker\, p$.

Arătăm că $V = V_1 \oplus V_2$.

"$\supseteq$" din construcție ($Im\,p$, $Ker\,p$ sunt subspații)

"$\subseteq$" Fie $v \in V$

$$v = \underbrace{p(v)}_{\substack{v_1 \\ \cap \\ Im\,p}} + \underbrace{v - p(v)}_{\substack{v_2 \\ \cap \\ Ker\,p}}$$

$p(v_2) = p(v - p(v)) = p(v) - p(\underbrace{p(v)}_{p(v)}) = 0_V \Rightarrow v_2 \in Ker\,p$

Deci $V = V_1 + V_2$

Dem că $\oplus$ i.e. $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Fie $v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow$ $v = p(w)$, $w \in V$ și $p(v) = 0_V$

$p(v) = p(p(w)) = p(w) = v = 0_V \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

$V = V_1 \oplus V_2$. $\quad p(v) = p(v_1 + v_2) = p(v_1) = v_1$.

Scanned with CamScanner

$\boxed{\text{OBS}}$ $V = V_1 \oplus V_2 = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.

Fie $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V aî

$\mathcal{R}_1 = \{e_1, \dots, e_k\}$ reper în V_1 și $\mathcal{R}_2 = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ reper în V_2.

$$\begin{cases} p(e_i) = e_i & , i = \overline{1,k} \\ p(e_j) = 0 & , j = \overline{k+1,n} \end{cases} \qquad p : V \longrightarrow V. \qquad \mathcal{R} \xrightarrow{A_p} \mathcal{R}$$

$$[p]_{\mathcal{R},\mathcal{R}} = A = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad (A \notin O(n))$$

<u>Def</u> $s \in \mathrm{End}(V)$

s s.n. <u>simetrie</u> sau involuție $\Leftrightarrow s \circ s = id_V$.

<u>Prop</u> $(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$, $\mathrm{ch}\,\mathbb{K} \neq 2$ $(1 + 1 \neq 0)$

$p \in \mathrm{End}(V)$

p proiecție $\Leftrightarrow s = 2p - id_V$ este simetrie.

(p proiecția pe V_1 de-a lungul lui V_2) (s = simetria față de V_1)

<u>Dem</u> "$\Rightarrow$" p proiecție i.e. $p \circ p = p$.

$$s \circ s = (2p - id_V) \circ (2p - id_V) =$$

$$= 4\underbrace{p \circ p}_{p} - 2p - 2p + id_V = 4p - 4p + id_V = id_V$$

$\Rightarrow s$ simetrie

"$\Leftarrow$" s simetrie $\Rightarrow s \circ s = id_V$.

$s \circ s = (2p - id_V) \circ (2p - id_V) = id_V \Rightarrow p \circ p = p$

$\Rightarrow p$ = proiecție.

OBS

$$V = V_1 \oplus V_2$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{e_1, \dots, e_n\}. \qquad V \xrightarrow{s} V$$

$$s = 2p - id_V \qquad \mathcal{R} \xrightarrow{A_s} \mathcal{R}$$

$$A_s = 2A_p - I_n = 2\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} s(e_i) = e_i, \ \forall i = \overline{1,k} \\ s(e_j) = -e_j, \ \forall j = \overline{k+1,n} \end{array}$$

Exemplu

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $V_1 = \langle\{(1,2,3)\}\rangle$

a) $p(1,5,0)$, $p: \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$

p = proiecția pe V_1, de-a lungul lui V_2

b) $s(1,5,0)$, s = simetria față de V_1.

SOL

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \begin{array}{l} \mathcal{R}_1 = \{(1,2,3)\} \text{ reper în } V_1 \\ \mathcal{R}_2 = \{e_1, e_3\} \text{ reper în } V_2 = \langle \mathcal{R}_2 \rangle \end{array}$$

$$(1,5,0) = \underbrace{a(1,2,3)}_{v_1} + \underbrace{b(1,0,0) + c(0,0,1)}_{v_2} = (a+b, 2a, 3a+c)$$

$$p(1,5,0) = v_1. \quad \begin{cases} a+b=1 & \Rightarrow b = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \\ 2a = 5 & \Rightarrow a = 5/2 \\ 3a+c=0 & \Rightarrow c = -3a = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

$$s(1,5,0) = (5,10,15) - (1,5,0) = (4,5,15)$$

$$(1,5,0) = \frac{5}{2}(1,2,3) + \left(-\frac{3}{2}\right)(1,0,0) - \frac{15}{2}(0,0,1)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{5}{2}, 5, \frac{15}{2}\right)}_{v_1} + \underbrace{\left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{15}{2}\right)}_{v_2}, \quad p(1,5,0) = \left(\frac{5}{2}, 5, \frac{15}{2}\right)$$

$$s = 2p - id_{\mathbb{R}^3}$$