Curs 3

Terminologie. Fie (X, τ) un spațiu topologic și $A \subset X$.

1) $\overset{\circ}{A}$ = interiorul lui A.
2) $\overline{A}$ = aderența (sau închiderea) lui A.
3) A' = mulțimea punctelor de acumulare ale lui A (sau mulțimea derivată a lui A).
4) $Fr(A) = \partial A$ = frontiera lui A.
5) ~~Izo~~ $(A) = {}'A$ = mulțimea punctelor izolate ale lui A.

Definiție. Fie $X \neq \emptyset$. O funcție $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se numește metrică (sau distanță) pe X dacă:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X$.
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in X$.
3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in X$.
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in X$.
(inegalitatea triunghiului)

Definiție. Fie $X \neq \phi$ și $d : X \times X \to \mathbb{R}$ o metrică pe X. Perechea (X, d) se numește spațiu metric.

Definiție. Fie (X, d) un spațiu metric, $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x în raport cu metrica d (sau că șirul $(x_n)_n$ converge la x în raport cu metrica d) dacă
$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x) < \varepsilon$).

Notație. În contextul definiției precedente vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$.

Observație. Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X, d)".

Exemple de spații metrice.

1. Fie $X \neq \phi$ și $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \begin{cases} 0; & x = y \\ 1; & x \neq y. \end{cases}$

2. Fie $X=\mathbb{R}$ și $d: X\times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$.

3. Fie $X=\mathbb{R}^n$ și $d_1: X\times X\to\mathbb{R}$, $d_1(\underset{(x_1,\dots,x_n)}{\underset{\parallel}{x}}, \underset{(y_1,\dots,y_n)}{\underset{\parallel}{y}}) =$

$= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\dots+|x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$.

4. Fie $X=\mathbb{R}^n$ și $d_2: X\times X\to\mathbb{R}$, $d_2(\underset{(x_1,\dots,x_n)}{\underset{\parallel}{x}}, \underset{(y_1,\dots,y_n)}{\underset{\parallel}{y}}) =$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. Fie $X=\mathbb{R}^n$ și $d_\infty: X\times X\to\mathbb{R}$, $d_\infty(\underset{(x_1,\dots,x_n)}{\underset{\parallel}{x}}, \underset{(y_1,\dots,y_n)}{\underset{\parallel}{y}}) =$

$= \max\{|x_i-y_i| \mid i=\overline{1,n}\}$.

<u>Definiție</u>. Fie (X,d) un spațiu metric, $x\in X$ și $r>0$.

1) $B(x,r) \overset{def.}{=} \{y\in X \mid d(y,x)<r\}$

(bila deschisă de centru x și rază r)

2) $B[x,r] = \overline{B}(x,r) \overset{def}{=} \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}$.
(bila închisă de centru x și rază r)

Teoremă. Fie (X,d) un spațiu metric și $\tau_d = \{\phi\} \cup \{A \subset X \mid \forall x \in A, \exists r > 0$ a.î. $B(x,r) \subset A\}$. Atunci (X, τ_d) este spațiu topologic.

Demonstrație. 1) $\phi \in \tau_d$ (evident)

Fie $x \in X$. Pentru orice $r > 0$ avem $B(x,r) \subset X$, deci $X \in \tau_d$.

2) Fie $D_1 \in \tau_d$ și $D_2 \in \tau_d$. Arătăm că $D_1 \cap D_2 \in \tau_d$.

Dacă $D_1 \cap D_2 = \phi$, atunci $D_1 \cap D_2 \in \tau_d$.

Presupunem că $D_1 \cap D_2 \neq \phi$.

Fie $x \in D_1 \cap D_2$. Atunci $x \in D_1$ și $x \in D_2$.

$D_1 \in \tau_d \Rightarrow \exists r_1 > 0$ a.î. $B(x, r_1) \subset D_1$.

$D_2 \in \tau_d \Rightarrow \exists r_2 > 0$ a.î. $B(x, r_2) \subset D_2$.

Fie $r = \min\{r_1, r_2\}$.

Avem $B(x,r) \subset D_1 \cap D_2$ (deoarece $B(x,r) \subset B(x,r_1)$ și $B(x,r) \subset B(x,r_2)$).

Prin urmare $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}_d$.

3) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d$. Arătăm că $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$.

Dacă $\bigcup_{i \in I} D_i = \emptyset$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$.

Presupunem că $\bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$.

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$. Atunci $\exists\, i_0 \in I$ a.î. $x \in D_{i_0}$.

$D_{i_0} \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \subset D_{i_0}$.

Cum $D_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ rezultă că $B(x,r) \subset \bigcup_{i \in I} D_i$.

Deci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}_d$.

Prin urmare $\mathcal{T}_d$ este topologie pe X, i.e. $(X, \mathcal{T}_d)$ este spațiu topologic. $\square$

Definiție. Topologia $\mathcal{T}_d$ din teorema precedentă se numește topologia indusă de metrica d.

Observație. Dându-se un spațiu metric (X,d) putem construi spațiul topologic $(X,\mathcal{T}_d)$. Ca atare, are sens să vorbim despre mulțimi deschise, mulțimi închise, vecinătăți, mulțimi compacte etc. într-un spațiu metric (referindu-ne la topologia indusă de acea metrică).

Definiție (Adaptarea definiției interiorului, aderenței etc. în spații metrice). Fie (X,d) un spațiu metric, $A\subset X$ și $x_0\in X$. Spunem că x_0 este:

1) punct interior al lui A dacă $\exists\, r>0$ a.î. $B(x_0,r)\subset A$.

2) punct aderent (sau de aderență) al lui A dacă $\forall\, r>0$, $B(x_0,r)\cap A\neq\emptyset$.

3) punct de acumulare al lui A dacă $\forall\, r>0$,

$B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \phi$.

4. punct frontieră al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct interior al lui A.

5. punct izolat al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A.

Proprietăți ale interiorului unei mulțimi

Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$ și $B \subset X$.

1. $\mathring{A} \subset A$.

Justificare. Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$, deci $\exists D \in \tau$ a.î. $x \in D \subset A$, i.e. $x \in A$, i.e. $\mathring{A} \subset A$. $\square$

2. $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$.

Justificare. „$\subset$" Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$, deci $\exists D \in \tau$ a.î. $x \in D \subset A$, i.e. $x \in \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$, i.e. $\mathring{A} \subset \bigcup\limits_{\substack{D \in \tau \\ D \subset A}} D$.

„$\supset$"

Fie $x \in \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$. Atunci $\exists\, D \in \mathcal{T}$, $D \subset A$ a.î. $x \in D$.

Avem $x \in D \subset A$ și $D \in \mathcal{T}$, deci $A \in \mathcal{V}_x$, i.e. $x \in \mathring{A}$, i.e. $\bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D \subset \mathring{A}$.

Prin urmare $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D$. $\square$

3. $\mathring{A}$ este mulțime deschisă.

<u>Justificare.</u> Conform 2, $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{D \in \mathcal{T} \\ D \subset A}} D \in \mathcal{T}$ (reuniune arbitrară de mulțimi deschise). $\square$

<u>Observație.</u> Din proprietățile 2 și 3 rezultă că $\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă (în sensul incluziunii) inclusă în A.

4. A este deschisă dacă și numai dacă $A = \mathring{A}$.

Justificare. „$\Leftarrow$"

$\left.\begin{array}{l}\mathring{A} \text{ deschisă} \\ A=\mathring{A}\end{array}\right| \Rightarrow A$ deschisă.

„$\Rightarrow$"

$\left.\begin{array}{l}\mathring{A} \text{ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în } A \\ A\subset A \\ A \text{ deschisă}\end{array}\right| \Rightarrow A\subset\mathring{A}$.

Cum $\mathring{A}\subset A$ (vezi 1) rezultă că $A=\mathring{A}$. □

5. Dacă $A\subset B$, atunci $\mathring{A}\subset\mathring{B}$.

Justificare. Exercițiu!

6. a) $\mathring{A}\cap\mathring{B}=\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$

b) $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$.

Justificare. Exercițiu!

Observație. Incluziunea de la 6 b) poate fi strictă.

Proprietăți ale aderenței unei mulțimi

Fie (X,τ) un spațiu topologic, $A\subset X$ și $B\subset X$.

1. $A\subset\bar{A}$.

Justificare. Fie $x\in A$. Fie $V\in\mathcal{V}_x$. Avem $x\in V\cap A$, deci

$V \cap A \neq \emptyset$, i.e. $x \in \overline{A}$, i.e. $A \subset \overline{A}$. $\square$

2. $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$.

Justificare. „$\subset$"

Fie $x \in \overline{A}$. Presupunem, prin absurd, că există F_0 închisă, $F_0 \supset A$ a.î. $x \notin F_0$. Atunci $x \in \complement F_0$. Deoarece $\complement F_0$ este mulțime deschisă rezultă că ea este vecinătate a lui x ($\complement F_0 \in \mathcal{V}_x$). Cum $x \in \overline{A}$ rezultă că $A \cap \complement F_0 \neq \emptyset$, contradicție cu $A \subset F_0$. Deci $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$, i.e. $\overline{A} \subset \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$.

„$\supset$"

Fie $x \in \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$. Presupunem, prin absurd că $x \notin \overline{A}$.

Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_0 \cap A = \emptyset$.

$V_0 \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists\, D_0 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in D_0 \subset V_0$.

$$\left.\begin{array}{l} V_0 \cap A = \emptyset \\ D_0 \subset V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow D_0 \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset \complement D_0.$$

$D_0 \in \mathcal{T} \Rightarrow CD_0$ închisă.

$x \in \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F \Rightarrow x \in CD_0$, contradicție cu $x \in D_0$.

Deci $x \in \overline{A}$, i.e. $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F \subset \overline{A}$.

Așadar $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F$. $\square$

3. $\overline{A}$ închisă.

<u>Justificare.</u> $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F \Rightarrow C\overline{A} = C\left(\bigcap\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} F\right) =$

$= \bigcup\limits_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subset F}} CF \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A}$ închisă. $\square$

<u>Observație.</u> Din proprietățile 2 și 3 rezultă că $\overline{A}$ este cea mai mică mulțime închisă (în sensul incluziunii) ce include A.

4. A este închisă dacă și numai dacă $A = \overline{A}$.

Justificare. „$\Leftarrow$"

$\left.\begin{array}{l}\bar{A} \text{ închisă} \\ A=\bar{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A$ închisă.

„$\Rightarrow$"

$\bar{A}$ este cea mai mică mulțime închisă ce conține A.

$\left.\begin{array}{l} A\supset A \\ A \text{ închisă}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A}\subset A.$

Cum $A\subset\bar{A}$ (vezi 1) rezultă că $A=\bar{A}$.

5. Dacă $A\subset B$ atunci $\bar{A}\subset\bar{B}$.

Justificare. Exercițiu!

6. a) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

b) $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$.

Justificare. Exercițiu!

Observație. Incluziunea de la 6 b) poate fi strictă.

Propoziție. Fie $(X,\mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A\subset X$.

Atunci: 1) $\overline{CA}=C\mathring{A}$

2) $\overset{\circ}{\widehat{CA}}=C\bar{A}$.

Proprietăți ale mulțimii punctelor de acumulare

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subset X$.

1. $A' \subset \overline{A}$.

Justificare. Fie $x \in A'$. Fie $V \in \mathcal{V}_x$. Deoarece $x \in A'$ rezultă că $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, deci $V \cap A \neq \emptyset$, i.e. $x \in \overline{A}$, i.e. $A' \subset \overline{A}$. $\square$

2. $\overline{A} = A \cup A'$.

Justificare. „$\supset$"

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \overline{A} \\ A' \subset \overline{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup A' \subset \overline{A}.$$

„$\subset$"

Fie $x \in \overline{A}$.

I. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup A'$, i.e. $\overline{A} \subset A \cup A'$.

II. Presupunem că $x \notin A$. Deoarece $x \in \overline{A}$ rezultă că $\forall V \in \mathcal{V}_x$, avem $V \cap A \neq \emptyset$. Cum $x \notin A$ rezultă că, $\forall V \in \mathcal{V}_x$, avem $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, i.e. $x \in A'$, i.e. $x \in A \cup A'$, i.e. $\overline{A} \subset A \cup A'$.

Așadar $\overline{A} = A \cup A'$. $\square$