Seminar 9 - GAL

14.04.2021

Spații vectoriale euclidiene. Repere ortonormate

① $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + b x_2 y_1 + c x_2 y_2$

a) $g \in L^s(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

b) g produs scalar $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$

② $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară

$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu R_0

Este $(\mathbb{R}^3, g)$ spațiu vectorial euclidian real?

③ $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $g_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_0(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

a) $U^\perp$

b) Să se det. un reper ortonormat $R = R_1 \cup R_2$ în $\mathbb{R}^3$, unde R_1 = reper ortonormat în U

R_2 — " — $U^\perp$

④ $(\mathbb{C}, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$, $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ formă biliniară și $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ matricea asociată lui g în rap. cu $R_0 = \{1, i\}$

a) $(\mathbb{C}, g)$ sp. vect. euclidian real?

b) $u = 2 - i$ este versor în raport cu g

c) $\langle \{u\} \rangle^\perp$

d) Să se ortonormeze R_0 în rap. cu g

e) Să se afle intersecția dintre cercul unitate în $(\mathbb{C}, g_0)$ și în $(\mathbb{C}, g)$

⑤ $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $\mathcal{R} = \{f_1 = (1,2,3), f_2 = (0,1,1), f_3 = (1,2,5)\}$

a) $\mathcal{R}$ reper în $\mathbb{R}^3$. Să se ortonormeze

b) $f_1 \times f_2$;

c) $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$

⑥ $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $U = <\{(1,0,1), (1,1,2)\}>$

a) $U^\perp$

b) Să se det $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ reper ortonormat în $\mathbb{R}^3$

a.î. $\mathcal{R}_1$ = reper ortonormat în U

$\mathcal{R}_2$ = — // — $U^\perp$

⑦ $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$,

$g(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

$Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$

Să se ortonormeze $\{2, 3-2X, 1-2X+X^2\}$ în raport cu produsul scalar g.

⑧ $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $U = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\right\}$

a) $U^\perp$

b) Să se afle $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ reper ortonormat în $\mathbb{R}^3$ a.î.

$\mathcal{R}_1$ reper ortonormat în U

$\mathcal{R}_2$ — // — $U^\perp$

⑨ $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $[f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Verif că $f \in O(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow R_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$

schimbare de repere ortonormate

$e_1' = (1,0,0)$, $e_2' = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_3' = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

• $(V,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $g: V\times V \to \mathbb{R}$ <u>produs scalar</u> $\Leftrightarrow$ 1) $g \in L^{s}(V,V;\mathbb{R})$
2) g poz. def

(V,g) spațiu vectorial euclidian real.

$\mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\}$ reper ortogonal $\Leftrightarrow g(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$

ortonormat $\Leftrightarrow g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \forall i,j = \overline{1,n}$

• $\mathcal{R} \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$ $\Rightarrow A \in O(n)$

repere ortonormate $(AA^T = I_n)$

• $U \subseteq V$ ssp vect $\Rightarrow U^{\perp} = \{y \in V \mid g(x,y) = 0, \forall x \in U\}$

Fie $(\mathbb{R}^3, g_0)$

• $S = \{x, y\}$ SLI, $\mathcal{R}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper canonic

a) $z = x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

produs vectorial

b) $u \wedge x \wedge y = g_0(u, x \times y) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

<u>Teorema Gram-Schmidt</u>

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\mathcal{R} = \{f_1, .., f_n\}$ reper arbitrar

$\Rightarrow \exists \mathcal{R}' = \{e_1, .., e_n\}$ reper ortogonal ai $Sp\{e_1, .., e_i\} = Sp\{f_1, .., f_i\}$, $i = \overline{1,n}$

$$\begin{cases} e_1 = f_1 \\ e_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 \\ \vdots \\ e_n = f_n - \dfrac{\langle f_n, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \dots - \dfrac{\langle f_n, e_{n-1} \rangle}{\langle e_{n-1}, e_{n-1} \rangle} e_{n-1}. \end{cases}$$

(10) $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp v.e.r.

UAE 1) $x \perp y$

2) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

3) $\|x-y\| = \|x+y\|$, $\forall x, y \in E$

(11) $C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ cont} \}$.

$$g(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad , \forall f,g \in C([a,b])$$

Este $(C([a,b]), g)$ sp. vect. euclidian?

(12) $(\mathbb{R}^4, g_0)$. Fie reperul:

$R = \{ f_1 = (-1,2,2,1), f_2 = (-1,1,-5,-3), f_3 = (-3,2,8,7), f_4 = (0,-1,1,0) \}$

Să se ortonormeze.

(13) $(C([0,2\pi]), g)$, $g(f,g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$.

$S = \{f_0, f_1, f_2, \dots\}$, $f_0(t) = 1$, $f_{2n-1}(t) = \cos(nt)$

$f_{2n}(t) = \sin(nt)$, $n = 1, 2, \dots$

Să se arate că S este mult. ortogonală.

(14) $(M_2(\mathbb{R}), g)$, $g(A,B) = Tr(A^T \cdot B)$, $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$

a) g e produs scalar

b) $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Să se ortonormeze reperul R.