Curs 11

Integrala Riemann pentru funcții de o variabilă reală

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definiție. 1) Se numește diviziune a intervalului $[a,b]$, un sistem de puncte $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Notăm $\mathcal{D}([a,b]) \overset{not.}{=} \{\Delta \mid \Delta \text{ diviziune a intervalului } [a,b]\}$.

2) Numărul $\|\Delta\| \overset{not.}{=} \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = \overline{1,n}\}$

se numește norma diviziunii Δ.

3) Se numește sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, un sistem de puncte $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ cu proprietatea că $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall\, i = \overline{1,n}$.

4) Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ se numește suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare

$\overline{\xi} = (\overline{\xi}_i)_{i=\overline{1,n}}$ și se notează $\sigma_\Delta(f, \overline{\xi})$.

<u>Definiție</u> Spunem că f este integrabilă Riemann dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall \overline{\xi} = (\overline{\xi}_i)_{i=\overline{1,n}}$
$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$
sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, avem $|\sigma_\Delta(f, \overline{\xi}) - I| < \varepsilon$.

<u>Observație.</u> $I \in \mathbb{R}$ din definiția precedentă, dacă există, este unic și se notează $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Teoremă.</u> Dacă f este integrabilă Riemann, atunci f este mărginită.

<u>Teoremă.</u> Dacă f este continuă, atunci f este integrabilă Riemann.

<u>Teoremă.</u> Dacă f este monotonă, atunci f este integrabilă Riemann.

<u>Teoremă (Teorema de permutare a limitei cu integrala).</u>
Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

i) f_n integrabilă Riemann $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, unde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Atunci f este integrabilă Riemann și

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercițiu. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\,dx$.

Soluție. Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (vezi Seminar 7).

f_n continuă $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ integrabilă Riemann $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$. $\square$

Definiție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (I_n)_n$ șir de intervale deschise și mărginite cu proprietățile:

i) $A \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$, unde $\ell(I_n)$ reprezintă lungimea intervalului I_n ($\ell((c,d)) = d-c$).

Observații. 1) Orice submulțime a unei mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

2) Orice mulțime cel mult numărabilă este neglijabilă Lebesgue (finită sau numărabilă)

3) Orice reuniune cel mult numărabilă de mulțimi neglijabile Lebesgue este neglijabilă Lebesgue.

Notație. $D_f \overset{def}{=} \{x \in [a,b] \mid f$ nu e continuă în $x\}$ (mulțimea discontinuităților lui f).

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann). Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f e integrabilă Riemann.

2) f e mărginită și D_f e neglijabilă Lebesgue.

Exercițiu. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}; & x\in(0,1]\\ 0; & x=0.\end{cases}$

Arătați că f este integrabilă Riemann.

Soluție. $|f(x)|\leq 1 \ \forall x\in[0,1] \Rightarrow f$ mărginită.

$D_f \subset \underbrace{\{0\}}_{\text{finită} \Rightarrow \text{neglijabilă Lebesgue}} \Longrightarrow D_f$ neglijabilă Lebesgue.

Deci f este integrabilă Riemann. $\square$

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită (i.e. există $M>0$ a.î. $|f(x)|\leq M \ \forall x\in[a,b]$) și $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

Considerăm $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\} \ \forall i=\overline{1,n}$ și $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\} \ \forall i=\overline{1,n}$.

Definiție. 1) $S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ se numește suma Darboux superioară asociată funcției f și diviziunii Δ.

2) $s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ se numește suma Darboux inferioară asociată funcției f și

diviziunii Δ.

3) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ se numește integrala Darboux superioară asociată funcției f.

4) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ se numește integrala Darboux inferioară asociată funcției f.

Observații. 1) $s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f)$.

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Teoremă (Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann). Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f e integrabilă Riemann.

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (caz în care avem $\int_a^b f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$).

3) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f) - s_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$.

4) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Exercițiu. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1; & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1; & x\in\underbrace{[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{=[0,1]\setminus\mathbb{Q}.}\end{cases}$

Determinați $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$, $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx$ și precizați dacă f este integrabilă Riemann.

Soluție. $|f(x)|\le 1\ \forall x\in[0,1] \Rightarrow f$ mărginită.

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[0,1]$.

Avem $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=1\ \forall i=\overline{1,n}$ (deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale) și $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=-1$ $\forall i=\overline{1,n}$ (deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale).

Atunci $S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=(\cancel{x_1}-x_0)+(\cancel{x_2}-\cancel{x_1})+\ldots+$
$+(x_n-\cancel{x_{n-1}})=x_n-x_0=1-0=1$ și $s_\Delta(f)=$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = -\left[(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \cancel{\ldots} + (x_n - \cancel{x_{n-1}})\right] =$$

$$= -(x_n - x_0) = -(1-0) = -1.$$

Deoarece Δ a fost aleasă în mod arbitrar rezultă că $\overline{\int_0^1} f(x) = \inf\{1 \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} = 1$ și

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup\{-1 \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} = -1.$$

$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \underline{\int_0^1} f(x)\,dx \Rightarrow f$ nu este integrabilă Riemann. $\square$

Integrale improprii

I. Integrale improprii pe intervale nemărginite

Definiție. 1) Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$, $b>a$. Dacă există $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{not.}}{=} \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$), valoarea ei se notează $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $[a,\infty)$.

a) Dacă $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

b) Dacă $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

2) Fie $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$ cu

$a < b$. Dacă există $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $(-\infty, b]$.

c) Dacă $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ este convergentă.

d) Dacă $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ este divergentă.

3) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a, b]$, $a < b$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe $\mathbb{R}$.

e) Dacă $\lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă.

f) Dacă $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$ este infinită sau

nu există $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

este divergentă.

Propoziție. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$, $a<b$. Dacă există $c\in\mathbb{R}$ a.î. $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ și $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ sunt convergente, atunci $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă și $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

II. Integrale improprii pe intervale mărginite

Definiție. 1) Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,d]$, $a<d<b$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{d\to b \\ d<b}} \int_a^d f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei

se notează $\int_a^b f(x)dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $[a,b)$.

i) Dacă $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx$ este finită, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{\substack{d\to b\\ d<b}} \int_a^d f(x)dx$, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

2) Fie $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ a. î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c,b]$, $a<c<b$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_a^b f(x)dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $(a,b]$.

i) Dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)dx$ este finită, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

3) Fie $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a \\ d \to b \\ d < b}} \int_c^d f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_a^b f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul (a,b).

i) Dacă $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a \\ d \to b \\ d < b}} \int_c^d f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a \\ d \to b \\ d < b}} \int_c^d f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a \\ d \to b \\ d < b}} \int_c^d f(x)\,dx$, spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$

este divergentă.

<u>Propoziție.</u> Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$. Dacă există $\alpha\in(a,b)$ a.î. $\int_a^\alpha f(x)\,dx$ și $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ sunt convergente, atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă și

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

<u>Definiție.</u> Fie $p\in(a,b)$ și $f:[a,b]\setminus\{p\}\to\mathbb{R}$ o funcție a.î. integralele improprii $\int_a^p f(x)\,dx$ și $\int_p^b f(x)\,dx$ sunt convergente. Definim $\int_a^b f(x)\,dx$ (integrală improprie) $\overset{\text{def.}}{=\!=}$

$$\overset{\text{def.}}{=\!=}\int_a^p f(x)\,dx+\int_p^b f(x)\,dx.$$

<u>Criterii de convergență pentru integrale improprii</u>

Vom enunța criteriile de mai jos doar pentru funcții definite pe $[a,\infty)$.

1. <u>Criteriul de comparație cu inegalități</u>

Fie $f,g:[a,\infty)\to[0,\infty)$ două funcții integrabile Riemann pe orice interval $[a,b]$, $b>a$ și cu proprietatea că $0 \le f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [a,\infty)$.

i) Dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă, atunci $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este divergentă.

2. <u>Criteriul de comparație cu limită</u>

Fie $f, g : [a,\infty) \to [0,\infty)$ două funcții integrabile Riemann pe orice interval $[a,b]$, $b>a$ și a.î.:

α) $g(x) > 0\ \forall\, x \in [a,\infty)$.

β) $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{not.}}{=} l \in [0,\infty]$.

i) Dacă $l \in (0,\infty)$, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ au aceeași natură (i.e. sau sunt ambele convergente sau sunt ambele divergente).

ii) Dacă $l = 0$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

iii) Dacă $l = \infty$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este divergentă, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

3. <u>Criteriul integral al lui Cauchy</u>

Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ descrescătoare (rezultă că f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$, $b>a$, fiind monotonă). Atunci integrala improprie

$\int_a^\infty f(x)dx$ are aceeași natură cu seria

$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \quad \forall p \in [a,\infty) \cap \mathbb{N}$.

Funcțiile Gama (Γ) și Beta (B) (integralele euleriene)

Definiție. 1) Fie $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \text{ (funcția Gama).}$$

2) Fie $B : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)$,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \text{ (funcția Beta).}$$

Proprietăți. 1) $\Gamma(1) = 1$.

2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3) $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x) \quad \forall x \in (0,\infty)$ (În particular, $\Gamma(1+n) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$).

4) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x} \quad \forall x \in (0,1)$.

5) $B(x,y) = B(y,x) \quad \forall x,y \in (0,\infty)$.

6) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \forall x,y \in (0,\infty)$.

7) $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1}\, dt$

$\forall x, y \in (0, \infty)$.

Integrarea funcțiilor de mai multe variabile reale

Observație. Vom lucra cu spațiul metric $(\mathbb{R}^n, \underset{d_2}{\overset{}{d}})$.

Definiție. 1) O mulțime de forma $D = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ se numește dreptunghi. Notăm $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \overset{not}{=} \{D \subset \mathbb{R}^n \mid D \text{ dreptunghi}\}$.

2) Fie $D = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Numărul $vol(D) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ se numește volumul lui D.

3) O mulțime de forma $E = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$, unde $D_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\forall i = \overline{1,m}$ se numește mulțime elementară. Notăm $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \overset{not.}{=} \{E \subset \mathbb{R}^n \mid E \text{ mulțime elementară}\}$.

4) Fie $E = \bigcup_{i=1}^{m} D_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $D_i \cap D_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Numărul $vol(E) = \sum_{i=1}^{m} vol(D_i)$ se numește volumul lui E.

Propoziție. Orice mulțime elementară poate fi scrisă ca reuniune finită de dreptunghiuri disjuncte (deci putem defini $vol(E)$ pentru orice $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$).

Definiție. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită. Definim: 1) $\mu^*(A) = \inf\{vol(E) \mid E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), A \subset E\}$ (măsura Jordan exterioară a lui A).

2) $\mu_*(A) = \sup\{vol(F) \mid F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), F \subset A\}$ (măsura Jordan interioară a lui A).

Definiție. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Spunem că A este măsurabilă Jordan dacă $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

Notație. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \overset{not.}{=} \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ măsurabilă Jordan}\}$.

Definiție. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Valoarea comună $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ se numește măsura Jordan a lui A și se notează $\mu(A)$.

Propoziție. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci:

i) $\mu^*(A) \leq \mu^*(\operatorname{Fr} A) + \mu_*(\mathring{A})$

ii) $\mu^*(\overline{A}) = \mu^*(A)$.

iii) $\mu_*(A) = \mu_*(\mathring{A})$.

Propoziție. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Sunt echivalente:

i) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\overline{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\overline{A}) = \mu(\mathring{A})$.

iii) $\operatorname{Fr} A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\operatorname{Fr} A) = 0$.

Propoziție. 1) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ două mulțimi mărginite. Atunci $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ este mărginită și

$$\mu^*(A \times B) \leq \mu^*(A) \cdot \mu^*(B) \text{ și } \mu_*(A \times B) \geq \mu_*(A) \cdot \mu_*(B).$$

2) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^q)$. Atunci

$A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{p+q})$ și $\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$.

Exemple de mulțimi măsurabile / nemăsurabile Jordan

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ nu este măsurabilă Jordan.

Justificare. A nu este mărginită $\Rightarrow A \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

2. $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ nu este măsurabilă Jordan.

Justificare. $\bar{A} = \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = [0,1] \Rightarrow \mu^*(A) =$
$= \mu^*(\bar{A}) = \mu^*([0,1]) = \mu([0,1]) = \mu([0,1)) = 1-0 = 1.$

$\mathring{A} = \phi \Rightarrow \mu_*(A) = \mu_*(\mathring{A}) = \mu_*(\phi) = \mu(\phi) = 0.$

$\mu_*(A) \neq \mu^*(A) \Rightarrow A \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$. $\square$

3. $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

Justificare. $A \subset [0,1] \times \{0\} = \{(x,0) \mid x \in [0,1]\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*([0,1] \times \{0\}) = \mu([0,1] \times \{0\}) = (1-0) \cdot 0 = 0.$

Avem $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) = 0$, i.e. $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$,

i.e. $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

Propoziție. 1) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann și $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, atunci mulțimea $\Gamma_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$.

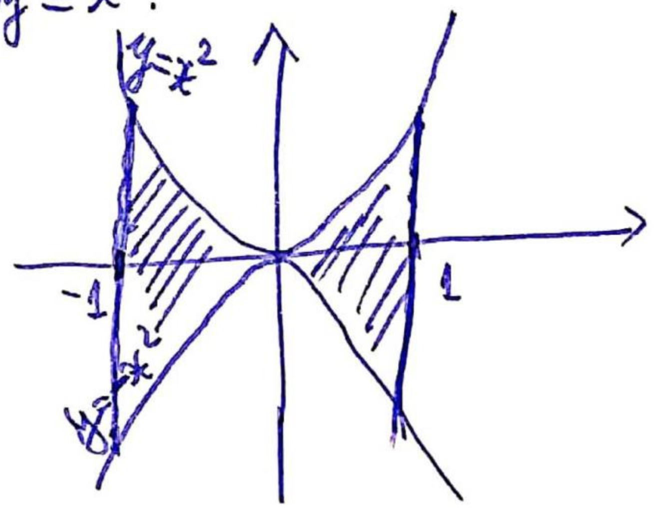
2) Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, atunci $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(G_f) = 0$.

Exercițiu. Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq x^2\}$.

Arătați că $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\mu(A)$.

Soluție. $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

$|y| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$.



Avem $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ -x^2 \leq y \leq x^2\}$.

Fie $f, g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$.

f, g integrabile Riemann și $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [-1,1]$.

Rezultă că $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(A) = \int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx =$

$= \int_{-1}^{1} (x^2 + x^2)\, dx = 2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$. $\square$