Curs 7

Serii de puteri

Fie $p \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \geq p} \subset \mathbb{R}$ și $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$ $\forall n \geq p$ ($0^0 = 1$ prin convenție).

Definiție. Seria de funcții $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n$ se numește serie de puteri.

Observație. În general $p=0$ sau $p=1$.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri ($(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$).

Definiție. 1) Definim $R \overset{def.}{=} \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0\right)$.

Acest R se numește raza de convergență a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$.

2) Intervalul $(-R, R)$ se numește intervalul de convergență al seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$.

3) Mulțimea $A \overset{def.}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_n a_n x^n$ este convergentă$\}$ se numește mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$.

Teoremă. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și R raza sa de convergență.

1. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $(\in [0,\infty])$, atunci

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0\right).$$

2. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ $(\in [0,\infty])$, atunci

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0\right).$$

Teoremă (Teorema I a lui Abel). Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R.

1) Pentru orice $x \in (-R, R)$, seria $\sum_n a_n x^n$ este absolut convergentă (i.e. $\sum_n |a_n x^n|$ e convergentă).

2) Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, seria $\sum_n a_n x^n$ este divergentă.

Corolar. Cu notațiile de mai sus avem $(-R,R) \subset A \subset [-R,R]$.

Exercițiu. Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Soluție. $a_n = (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right).$$

$$0 \le \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \le \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$0$$

Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = 0$, i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1+0 = 1$

Așadar $R = \frac{1}{1} = 1$.

Fie A mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Avem $(-1,1) \subset A \subset [-1,1]$.

Studiem dacă $-1 \in A$ și $1 \in A$.

Dacă $x=-1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$.

Am arătat (vezi Cursul 1) că şirul $\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)_n$ nu

este convergent, deci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$, i.e.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă, i.e. $-1\notin A$.

Dacă $x=1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)1^n=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$.

Arătăm că $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$.

Dacă, prin absurd, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)=0$,

atunci $\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\right|=0$, deci

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)=0$, contradicţie.

Aşadar $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$, i.e.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$ divergentă, i.e. $1\notin A$.

Prin urmare $A=(-1,1)$. $\square$

Teoremă (Teorema a II-a a lui Abel). Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R>0$ și mulțimea de convergență A. Atunci funcția $s: A \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este continuă.

Explicații pentru Teorema a II-a a lui Abel

1) Pentru orice $a \in (-R, R)$, s este continuă în a.

2) Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă în R (respectiv în $-R$), atunci s este continuă în R (respectiv în $-R$), i.e. $\lim_{\substack{x \to R \\ x<R}} s(x) = s(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ (respectiv $\lim_{\substack{x \to -R \\ x>-R}} s(x) = s(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$).

Teoremă (Teorema de derivare „termen cu termen" a seriilor de puteri). Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \underset{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m =$$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ are aceeași rază de convergență R

Dacă $R>0$, atunci funcția $s:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ este derivabilă și $s'(x) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$

Teoremă (Teorema de integrare „termen cu termen" a seriilor de puteri). Fie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ are aceeași rază de convergență R. Dacă $R>0$, $s, S:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ și $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, atunci S este o primitivă a lui s, i.e. $S'(x)=s(x)$ $\forall\, x\in(-R,R)$.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a \in I$ și $f \in C^{\infty}(I)$.

<u>Definiție</u>. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se numește seria Taylor asociată funcției f în punctul a.

<u>Teoremă</u>. Seria Taylor asociată funcției f în punctul a (de mai sus) este convergentă în $x \in I$ și are suma $f(x)$ dacă și numai dacă $(R_n(x))_n$ converge la 0 (i.e. $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$), unde $R_n(x)$ este restul formulei lui Taylor.

<u>Observație</u>. În general $a=0$. Seria Taylor asociată funcției f în punctul 0 se mai numește și seria MacLaurin asociată funcției f.

<u>Exercițiu</u>. Folosind teorema precedentă arătați că

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

<u>Soluție</u>. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

$I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$0 \in I$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f^{(n)}(x) = e^{x} \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Conform Formulei lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$ (i.e. $x \neq 0$), $\exists\, c$ între 0 și x (i.e. $c \in (0, x)$ sau $c \in (x, 0)$) astfel încât

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{\substack{\| \\ R_n(x)}} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{e^{c}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$R_n(x) = \frac{e^{c}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Avem echivalența: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$

$$|R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1} \underset{\uparrow}{<} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \overset{not.}{=} x_n.$$

$c\in(0,x)$ sau $c\in(x,0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{|x|}}{(n+2)!}|x|^{n+2}}{\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{e^{|x|}}\,\cancel{|x|^{n+2}}^{\,|x|}}{\underbrace{\cancel{(n+2)!}}_{n+2}}\cdot\frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{e^{|x|}}\,\cancel{|x|^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+2} = 0 < 1.$$

Conform Criteriului raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Conform teoremei precedente avem $\underset{e^x}{\underset{\|}{f(x)}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}^*$.

Dacă $x=0$, atunci $e^x = e^0 = 1$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!} = 1$ $(0^0 = 1)$.

Deci $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. $\square$

Observatie. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; \forall\, x \in (-1, 1)$ (suma seriei geometrice).

Înlocuim x cu $-x$ în formula precedentă și avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

În ultima relație înlocuim x cu x^2 și obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

Exercitiu. Arătați că $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \; \forall\, x \in [-1, 1]$.

Soluție. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Observăm că $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \; \forall\, x \in [-1, 1]$.

Conform observației precedente avem $f'(x) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

Integrăm „termen cu termen" și obținem că există

$C \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \ \forall x \in (-1,1)$.

$f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0.$

Deci $0 = 0 + C$, i.e. $C = 0$.

Prin urmare $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ \forall x \in (-1,1)$.

Dacă $x = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ (convergentă, conform Criteriului lui Leibniz).

Conform Teoremei a doua a lui Abel avem

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

$$\| $$

$$\operatorname{arctg} 1$$

Dacă $x = -1$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$ (convergentă, conform Criteriului lui Leibniz).

Conform Teoremei a doua a lui Abel avem

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\|$$

$$\operatorname{arctg}(-1)$$

Așadar $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ \forall\, x \in [-1, 1]$. □

<u>Seria binomială.</u> $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in (-1, 1)$ avem

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

<u>Derivate parțiale. Diferențiabilitate</u>

Considerăm $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall\, i = \overline{1,n}\}$.

<u>Definiție.</u> Pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ definim:

1) $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
2) $\alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Observație. Atunci când nu specificăm, se subînțelege că notăm $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ etc.

Definiție. Fie $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Definim norma lui x, $\|x\| \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Propoziție. Aplicația de mai sus $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definește o normă pe $\mathbb{R}^n$, i.e. are proprietățile:

1) $\|x\|\geq 0$ $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$.
2) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=(0,\dots,0) \overset{\text{not.}}{=} 0_{\mathbb{R}^n}$
3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n$.
4) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$.

Observație. $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n$, $\underset{\substack{\| \text{not.} \\ d(x,y)}}{d_2(x,y)} = \|x-y\|$.

Observație. Fie $f: D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. Atunci, $\forall\, a\in D$,

$f(a)=(f_1(a),\dots,f_n(a))$.

Prin urmare, am definit funcțiile $f_1,\dots,f_n: D\to\mathbb{R}$.

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f=(f_1,\dots,f_n)$ și $a \in \overset{\circ}{D}$.

Definiție. 1) Spunem că f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul a (sau că f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a) dacă există (în $\mathbb{R}^n$) limita $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$, unde

$e_i = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{poziția } i}}{1},0,\dots,0) \in \mathbb{R}^m$. În acest caz notăm

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\text{not.}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$ ($\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numește derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i în punctul a).

2) Spunem că f este diferențiabilă (sau derivabilă) în punctul a dacă există o aplicație liniară $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (i.e. $T(x+y)=T(x)+T(y)$ și $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^m$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$) a.î.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Observație. Aplicația liniară T, din definiția de mai sus, dacă există, este unică, se notează $df(a)$ sau $f'(a)$ și se numește diferențiala funcției f în a $(df(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$.

Observații. ① Fie $c \in D$. Sunt echivalente:

i) f continuă în c.

ii) $f_1, \dots, f_n$ continue în c.

② Sunt echivalente:

i) f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a.

ii) $f_1, \dots, f_n$ admit derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a.

Dacă una dintre afirmațiile i) sau ii) de la ② este satisfăcută, atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)\right) \in$ $\in \mathbb{R}^n$.

③ Sunt echivalente:

i) f este diferențiabilă în a.

ii) $f_1, \dots, f_n$ sunt diferențiabile în a.

Dacă una dintre afirmațiile i) sau ii) de la 3 este satisfăcută, atunci $df(a)=(df_1(a), \ldots, df_n(a))$.

<u>Teoremă.</u> Dacă f este diferențiabilă în punctul a, atunci f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul a pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$ și

$$df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \ df(a)(u=(u_1, \ldots, u_m)) =$$

$$= {}^t\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}\right]$$

(Înmulțire de matrice; **Vom** obține o matrice coloană; **Luăm** transpusa și obținem o matrice linie, adică un vector (din $\mathbb{R}^n$)).

<u>Observație.</u> Dacă $n=1$, avem $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ și formula precedentă devine: $df(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$df(a)\,(u=(u_1,\dots,u_m)) = {}^t\!\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\ \dots\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,u_m.$$

<u>Teoremă.</u> Dacă f este diferențiabilă în a, atunci f este continuă în a.

<u>Observație.</u> Reciproca afirmației precedente nu este, în general, adevărată.

<u>Propoziție.</u> Orice aplicație liniară $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă în orice punct $a\in\mathbb{R}^m$ și $df(a) = f$.

<u>Observație (Caz particular al propoziției precedente).</u> Proiecțiile $pr_i:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $pr_i(u=(u_1,\dots,u_m)) = u_i \ \forall i=\overline{1,m}$ sunt diferențiabile în orice punct $a\in\mathbb{R}^m$ și $dpr_i(a) = pr_i \ \forall i=\overline{1,m}$, deoarece sunt aplicații liniare.

Notăm $pr_i = dx_i \ \forall i=\overline{1,m}$.

Cu această notație, dacă $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $a \in \overset{\circ}{D}$ avem $df(a)(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) u_m = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) pr_1(u) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) pr_m(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1(u) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) dx_m(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^m$, i.e.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) dx_m.$$