Sistemas de Comunicación Digital

INF2010

Clase 13:
Errores de Bit y Relación Señal a Ruido (II)

Caso Gaussiano

- El caso de ruido Gaussiano
- Recordando estadística, supongamos ruido de canal como un proceso estacionario Gaussiano,
- Y que los circuitos de procesamiento son lineales.
- Entonces, $r_0=n_0$ cuando solamente ruido es aplicado al sistema.
- Esto no es válido para detector de envolvente con diodo, uso de limitadores, o control automático de ganancia.

Caso Gaussiano

- Si el sistema tiene señal digital binaria y ruido, entonces la ecuación se expresa como:

$$r_0 = s_0 + n_0$$

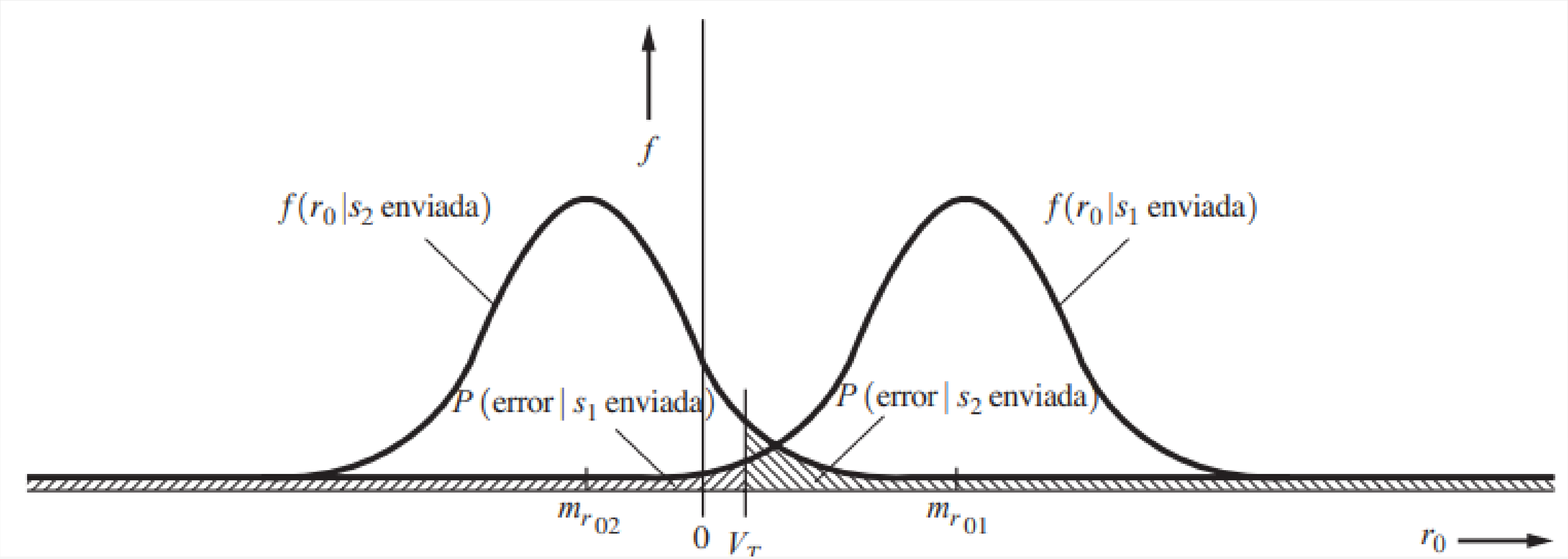
- En este caso,

$$S_0 = \begin{cases} S_{01}, & \text{para el envío de 1 binario} \\ S_{02}, & \text{para el envío de 0 binario} \end{cases}$$

- Donde s_{01} y s_{02} son constantes conocidas para un receptor, dadas señales de entrada $s_1(t)$ y $s_2(t)$.

Caso Gaussiano

- Dado que habíamos inyectado ruido gaussiano de media 0,
- Entonces r_0 va a tener como salida otra variable aleatoria con media s_{01} o s_{02}, para 1 o 0, respectivamente.



Caso Gaussiano

- Entonces vamos a obtener 2 PDFs (Probability Density Functions):

$$f\left(r_0 \mid s_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\left(r_0 - s_{01}\right)^2 / \left(2\sigma_0^2\right)}$$

$$f\left(r_0 \mid s_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\left(r_0 - s_{02}\right)^2 / \left(2\sigma_0^2\right)}$$

- Siendo

$$\sigma_0^2 = \overline{n_0^2} = \overline{n_0^2(t_0)} = \overline{n_0^2(t)}$$

- La potencia promedio de ruido de salida del receptor.

Caso Gaussiano

- Entonces, la probabilidad de error da:

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} e^{-(r_0 - s_{01})^2/(2\sigma_0^2)} dr_0 + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} e^{-(r_0 - s_{02})^2/(2\sigma_0^2)} dr_0$$

$$\lambda = -(r_0 - s_{02})/\sigma_0 \qquad\qquad \lambda = -(r_0 - s_{01})/\sigma_0$$

- Y usando la función Q:

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

Caso Gaussiano

- Resulta:

$$P_e = \frac{1}{2} Q\left(\frac{-V_T + s_{01}}{\sigma_0} \right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{V_T - s_{02}}{\sigma_0} \right)$$

- Buscamos ahora el V_T que minimiza esta función:

$$\frac{dP_e}{dV_T} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-(V_T - s_{01})^2 / \left(2\sigma_0^2\right)} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-(V_T - s_{02})^2 / \left(2\sigma_0^2\right)}$$

- Que se simplifica a:

$$e^{-(V_T - s_{01})^2 / 2\sigma_0^2} = e^{-(V_T - s_{02})^2 / 2\sigma_0^2}$$

Caso Gaussiano

- Que implica la función:

$$(V_T - s_{01})^2 = (V_T - s_{02})^2$$

- Lo que finalmente da:

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2}$$

- Si reemplazamos esto en la Probabilidad de error, nos da:

$$P_e = Q\left(\frac{s_{01} - s_{02}}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(s_{01} - s_{02})^2}{4\sigma_0^2}}\right)$$

Donde se asume que:

$$s_{01} > V_T > s_{02}$$

Hasta ahora se ha optimizado sólo el nivel de umbral y no los filtros en los circuitos de procesamiento

Filtro Adaptado

- Queremos ahora crear un filtro digital a la entrada que nos permita minimizar el BER.
- Dada la definición de la función Q, nos hace falta minimizar el argumento para maximizar el valor de Q.
- Entonces debemos encontrar un filtro que maximice:

$$\frac{[s_{01}(t_0)-s_{02}(t_0)]^2}{\sigma_0^2}=\frac{[s_d(t_0)]^2}{\sigma_0^2}$$

- Siendo s_d la diferencia entre las muestras s_{02} y s_{01}.
- La diferencia de potencia en t_0 da $s_d^2(t_0)$. El filtro que maximiza esta potencia comparada con la potencia de ruido $\sigma_0^2=n_0^2(t)$ es el filtro adaptado.

Filtro Adaptado

- Para el caso de ruido blanco en el receptor, el filtro adaptado requiere ser adaptado a la señal de diferencia $s_d(t)=s_1(t)-s_2(t)$, entonces la respuesta al impulso es:

$$h(t)=C\left[s_1(t_0-t)-s_2(t_0-t)\right]$$

- Lo que nos da una SNR peak de:

$$\frac{[s_d(t_0)]^2}{\sigma^2}=\frac{2E_d}{N_0}$$

- Donde $N_0/2$ es la potencia media de ruido a la entrada, y E_d es la diferencia de señal a la entrada del receptor.

Filtro Adaptado

- E_d se expresa como:

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$$

- Entonces, para una señal con ruido Gaussiano ahora, y recepción con filtro adaptado, usando el V_T óptimo, el BER es:

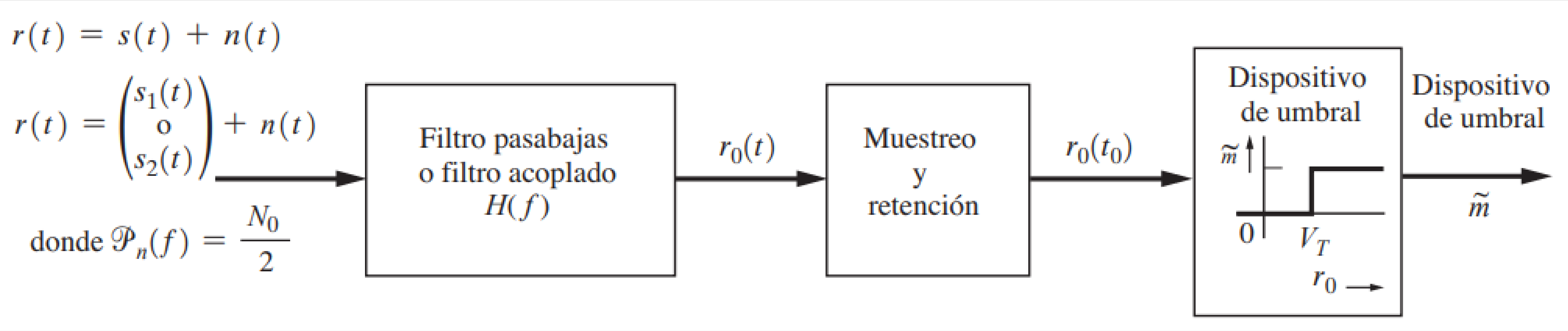
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

Señalización Unipolar

- La señalización unipolar se define como:

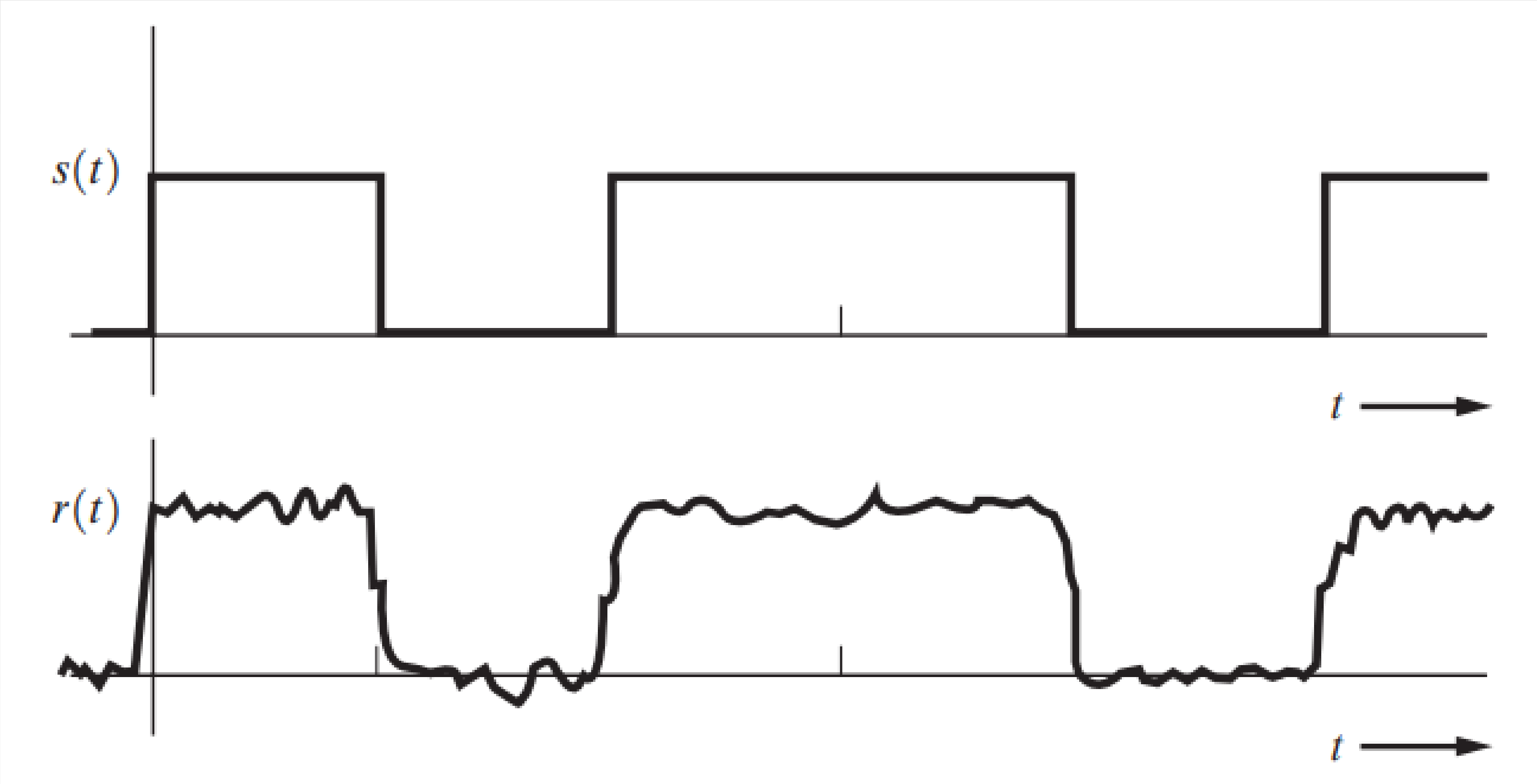
$$s_1(t) = +A, \quad 0 < t \le T \quad (1 \text{ binario})$$
$$s_2(t) = 0, \quad 0 < t \le T \quad (0 \text{ binario})$$

- Es una señal unipolar con ruido Gaussiano en la entrada del receptor.



Señalización Unipolar

- Y las señales son:



Señalización Unipolar

- Primero evaluemos para un filtro pasabajo:
- Supongamos el ancho de banda equivalente es B>2/T, entonces la forma de onda unipolar es suficientemente preservada, mientras que el ruido va a ser atenuado a la salida.
- Entonces $s_{01}(t_0) \approx A$ y $s_{02}(t_0) \approx 0$.
- La potencia de ruido a la salida del filtro es:

$$\sigma_0^2 = \left(\frac{N_0}{2}\right)(2B)$$

- Siendo 2B el ancho de banda del filtro.
- El V_T óptimo es entonces A/2

Señalización Unipolar

- De lo que vimos anteriormente, para un filtro pasabajos,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right)$$

- Para un fitro adaptado entonces, usando como tiempo de muestreo t_0=T, la energía en la señal de diferencia es E_d=A²T, dando un BER:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Porque la energía promedio de bit es E_b=A²T/2, un 1 tiene energía A²T, mientras que un 0 tiene energía 0.

Señalización Unipolar

- Para este caso, el valor óptimo da:

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^T A\,dt + 0\right) = \frac{AT}{2}$$

- Conviene que se exprese el BER en función de la energía de bit sobre la potencia de ruido, E_b/N_0,
- que indica la potencia media necesaria para transmitir un bit de datos sobre un canal con ruido térmico.

Señalización Unipolar

- El BER graficado queda:

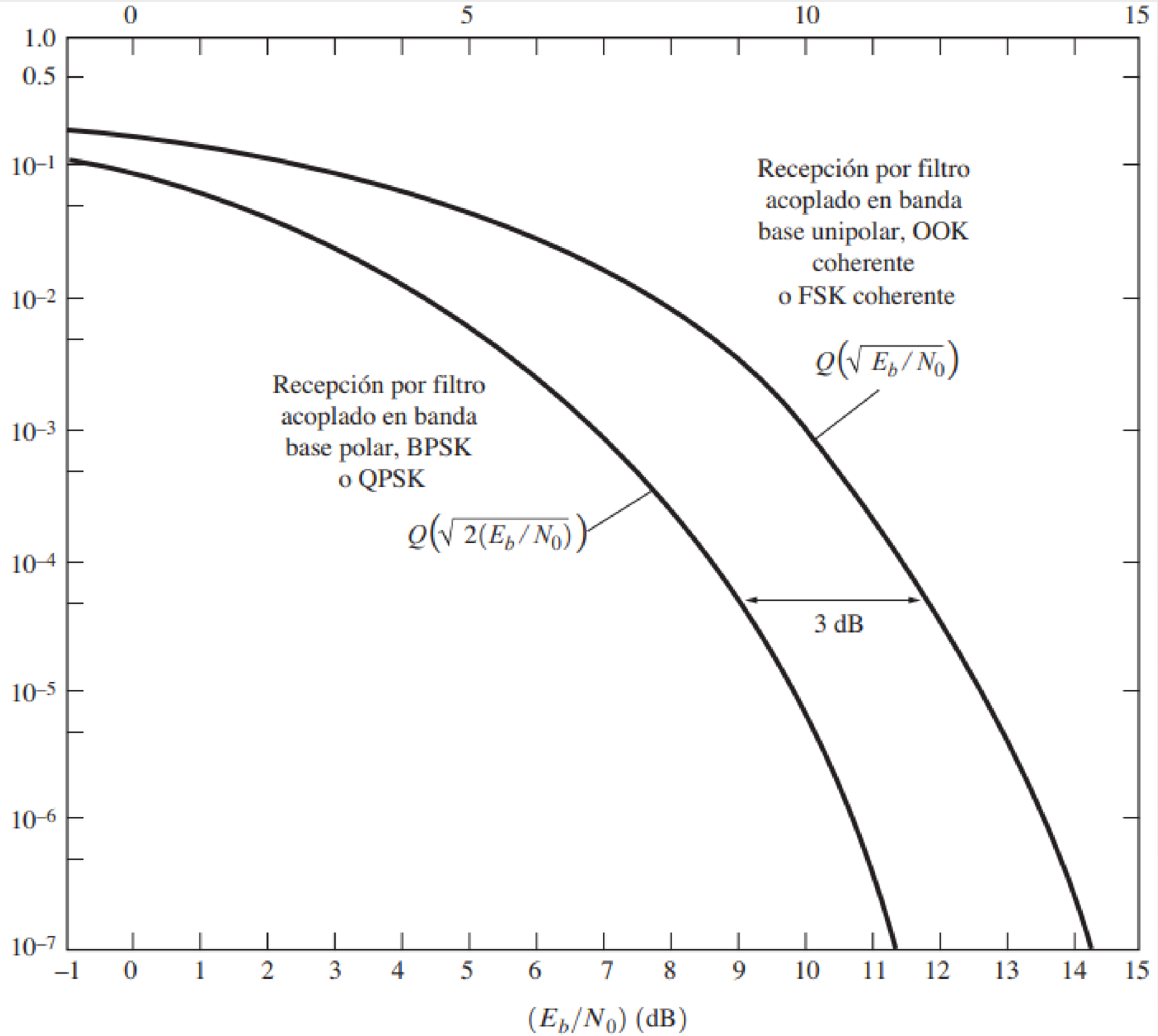


Figura 7–5 P_e para una recepción por filtro acoplado de varias técnicas de señalización binaria.