Capitolo 1

Insiemi

Gli insiemi sono collezioni di oggetti detti elementi, in cui si prescinde dall' ordine e dalla ripetizione degli elementi e questa è la definizione ingenua.
Si dice $x \in A$ se l'elemento appartiene all'insieme altrimenti si usa $x \notin A$.
L'insieme vuoto si indica con $\emptyset$ mentre se due insiemi hanno gli stessi elementi si usa $A = B$.
Gli insiemi possono essere definiti in due maniere:

- **Estensionale**:si elencano gli elementi di un insieme
  Esempio:
  $A = \{1, 2, 3\}$
  $B = \{2, 4, 6\}$

- **Intensionale**:si descrivono gli elementi che soddisfano una determinata proprietà
  Esempio:
  $D = \{x \in N | x < 100\}$

Dati due insiemi S e T si ha:

$$S \subset T = \{x | x \in S \Rightarrow x \in T \wedge S \neq T\} S = T = \{x | x \in S \iff x \in T\} S \subseteq T = \{x | S \subset Q \vee S = T\}$$

Esempio:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$$
$$A = B \text{Falso}$$
$$B \subseteq A \text{Vero}$$
$$A \subset C \text{Falso}$$
$$A \subseteq C \text{Vero}$$

Si definisce *cardinalità* il numero degli elementi e si indica con $|A|$.
Due insiemi S e T si dicono *equipotenti*, indicato con $S \sim T$, se essi sono in corrispondenza univoca.
Gli insiemi numerici definiti nella Teoria degli insiemi sono i seguenti:

- $\mathbb{N}$: Insieme dei numeri Naturali
- $\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali
- $\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi

Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità indicata con $\aleph$,dimostrato da Georg Cantor.
Gli insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno la stessa cardinalità indicata con $2^{\aleph}$, dimostrato da Georg Cantor mediante il principio di diagonalizzazione.

1.0.1 Tecnica di diagonalizzazione

La tecnica di diagonalizzazione è tecnica, inventata da Cantor, per dimostrare la non numerabilità dei Numeri Reali.
Essa consiste nel tentativo di costruire una bisezione tra un insieme X ed $\mathbb{N}$ e verificare che qualche elemento di X sfugge alla bisezione.

1.1 Unione ed Intersezione

L'unione di due insiemi $S \cup T$ è l'insieme formato degli elementi di S e degli elementi di T.
L'intersezione di due insiemi $S \cap T$ è l'insieme degli elementi presenti in tutti e due gli insiemi.
$S \cup T = \{x | x \in S \vee x \in T\}$
$S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$
Esempio:
$A = \{"Rosso", "Arancio", "Giallo"\}$
B = {"Verde","Giallo","Marrone" }
A ∪ B = {"Rosso","Arancio","Giallo","Verde","Marrone" }
A ∩ B = {"Giallo" }
$S = \{1, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 9\}$ $T = \{5, 4, 2, 9, 11, 34, 6\}$ $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 34\}$
$S \cap T = \{2, 4, 5, 6, 9\}$

Proposizione 1. *Proprietà dell'unione*

1. $S \cup S = S$ *Idempotenza*

2. $S \cup \emptyset = S$ *Elemento Neutro*

3. $S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$ *Associatività*

4. $S_1 \cup S_2 = S_2 \iff S_1 \subseteq S_2$

5. $(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3)$ *Commutatività*

6. $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$

7. $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$

Dimostrazione.

1. $S \cup S = \{x|x \in S \vee x \in S\} = S$

2. $S \cup \emptyset = \{x|x \in \vee x \in \emptyset\} = S$

3. $S_1 \cup S_2 = \{x|x \in S_1 \vee x \in S_2\}$ per definizione di Insieme si può scrivere anche $\{x|x \in S_2 \vee x \in S_1\} = S_2 \cup S_1$

4. Prima dimostriamo che $S_1 \cup S_2 = S_2 \rightarrow S_1 \subseteq S_2$ $S_1 \cup S_2 = \{x|x \in S_1 \vee x \in S_2\}$ Per ipotesi sappiamo che $S_1 \cup S_2 = S_2$ per cui tutti gli elementi di S_1 sono anche elementi di S_2 per cui si dimostra che $S_1 \subseteq S_2$. In maniera analoga si dimostra che $S_1 \subseteq S_2 \rightarrow S_1 \cup S_2 = S_2$.

5. Da Fare

6. Da Fare

7. Da fare

□

Proposizione 2. *Proprietà dell'Intersezione*

1. $S \cap S = S$

2. $S \cap \emptyset = \emptyset$

3. $S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$

4. $(S_1 \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3)$

5. $S_1 \cap S_2 = S_1 \iff S_1 \subseteq S_2$

6. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$

7. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$

Dimostrazione.

$S \cap S = \{x|x \in S \wedge x \in S\} = S$

$S \cap \emptyset = \{x|x \in S \wedge x \in \emptyset\} = \emptyset$

$S_1 \cap S_2 = \{x | x \in S_1 \wedge x \in S_2\}$ per definizione di insieme si può scrivere anche $\{x | x \in S_2 \wedge x \in S_1\} = S_2 \cap S_1$

Da Fare

Da Fare

Da Fare

Da Fare $\square$

L'unione e l'intersezione sono legate dalle proprietà distributive:

1. $S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$
2. $S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3)$

1.2 Complementare

Dato un insieme U, detto Universo, si dice *complemento* di S, indicato con $\bar{S}$, la differenza di un sottoinsieme S di U rispetto ad U.
$\bar{S} = \{x | x \in U \wedge x \notin S\}$
Esempio:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$S = \{2, 4, 6\}$
$\bar{S} = \{1, 3, 5, 7\}$

Proposizione 3. *Proprietà:*

1. $\bar{U} = \emptyset$
2. $\bar{\emptyset} = U$
3. $\bar{\bar{S}} = S$
4. $(S_1 \bar{\cup} S_2) = \bar{S_1} \cap \bar{S_2}$
5. $(S_1 \bar{\cap} S_2) = \bar{S_1} \cup \bar{S_2}$
6. $S \cap \bar{S} = \emptyset$
7. $S \cup \bar{S} = U$
8. $S_1 = S_2 \iff \bar{S_1} = \bar{S_2}$
9. $S_1 \subseteq S_2 \iff \bar{S_2} \subseteq \bar{S_1}$

1.3 Differenza di Insiemi

Dati 2 insiemi S e T chiamiamo $S\ T$ l'insieme *differenza* costituito da tutti gli elementi di S che non sono elementi di T.
$S\ T = x|x \in S \wedge x \notin T$
Esempio:
$S = \{a, b, c, d, e\} \quad T = \{a, c, f, g, e, h\}$
$S\ T = \{b, d\}$

Proposizione 4. *Proprietà Differenza*

1. $S\ S = \emptyset$
2. $S\ \emptyset = S$
3. $\emptyset\ S = \emptyset$
4. $(S_1\ S_2)\ S_3 = (S_1\ S_3)\ S_2 = S_1\ (S_2 \cup S_3)$
5. $S_1\ S_2 = S_1 \cap \bar{S_2}$

La *differenza simmetrica* di due insiemi S_1 e S_2, indicata con $S_1 \triangle S_2$, è definita come $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \backslash S_2) \cup (S_2 \backslash S_1)$

Proposizione 5. *Proprietà Differenza simmetrica*

1. $S \triangle S = \emptyset$
2. $S \triangle \emptyset = S$
3. $S_1 \triangle S_2 = S_2 \triangle S_1$
4. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cap \bar{S_2}) \cup (S_2 \cap \bar{S_1})$
5. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cup S_2)\ (S_2 \cap S_1)$

1.4 Partizione di un Insieme

Dato un insieme non vuoto S, una partizione di S è una famiglia F di sottoinsiemi di S tale che

1. ogni elemento di S appartiene a qualche elemento di F, ossia $\cup F = S$
2. due elementi qualunque di F sono disgiunti ossia $\cap F = \emptyset$

La partizione non può avere come elemento l'insieme vuoto in quanto esso non appartiene agli elementi dell'insieme A.
Esempio: $A = \{1, 2, 3\}$
$Par(A) = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

1.5 Funzione Caratteristica

Sia U un insieme assunto come Universo,si definisce come *funzione caratteristica* di un sottoinsieme $S \subseteq U$ come: $car(S,x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$

1.6 Insieme delle Parti

L'insieme delle Parti di un insieme S, indicato con $\wp S$, è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi dell'insieme S.
$\wp S = \{X | X \subseteq S\}$

Definizione 1. *Se S è composto da $n \geq 0$ elementi, il numero di elementi di $\wp S$ è 2^n.*

Dimostrazione. Supponendo di avere una sequenza binaria di 3 bit,le cui possibili combinazioni vengono rappresentate da 2^k con $k = numerodibit$. Prendendo un insieme $A = \{"a", "b", "c"\}$ e utilizzando la funzione caratteristica, con la convenzione di indicare il primo elemento dell'insieme A a destra, si nota che le sequenze di bit sono uguali alla sequenza ottenuta utilizzando la funzione caratteristica. □

1.7 Prodotto Cartesiano,Coppie Ordinate e Sequenze

Le coppie Ordinate sono una collezione di 2 oggetti in cui non si prescinde dall'ordine e dalla ripetizione infatti $(a,b) \neq (b,a)$ e $< 1,2,1,4 > \neq < 1,2,4 >$.
Una *n-upla* ordinata $x_1, \dots, x_n$ è definita come $< x1, \dots, x_n > = << x_1, \dots, x_{n-1} >, x_n >$ dove $x_1, \dots, x_{n-1} >$ è una $(n-1)$-upla ordinata.
Si definisce come *sequenza*, una sequenza di oggetti in cui non si prescinde dalla multiplicità degli elementi.
Dati 2 insiemi A e B, non necessariamente distinti, si definisce come *Prodotto Cartesiano*, indicato con AxB, l'insieme di tutte le coppie in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo elemento della coppia appartiene ad B.
A x $B = (a,b) | a \in A \wedge b \in B$
Esempio:
$A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,4,5\}$
A x $B = \{(1,1),(1,4),(1,5),(2,1),(2,4),(2,5),(3,1),(3,4),(3,5)\}$
Esempio: $S = \{4,14,56\}$ $T = \{3,46,12\}$ $SxT = \{(4,3),(4,46),(4,12),(14,3),(14,46),(14,12),(56,3),$

1.8 Multiinsiemi

Si definisce come *multiinsiemi* una collezione di elementi in cui si prescinde dall'ordine ma non dalla multiplicità degli elementi.
Si puo anche definire come una funzione $M : E \mapsto \mathbb{N}$ che associa ad ogni elemento di un insieme E finito o numerabile, un numero, appartenente ad $\mathbb{N}$ indicante il numero di occorrenze dell'elemento di E nel multiinsieme M.
La cardinalità di un multiinsieme M è definita come $|M| = \sum_{e_i \in E}^{|E|} M(e_i)$
Esempio: S = (1,2,1,3,4,4,2,3,3) T = (2,1,3,1,4,4,3,2,3) Sono due multiinsiemi uguali con cardinalità 9

1.8.1 Operazioni su Multiinsiemi

Intersezione : $M_1 \cap M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = min(M_1(e), M_2(e)) \forall e \in E$

Unione : $M_1 \cup M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = max(M_1(e), M_2(e)) \forall e \in E$

Unione Disgiunta : $M_1 \uplus M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = M_1(e) + M_2(e) \forall e \in E$

Capitolo 2

Relazioni

Si definisce *relazione n-aria* un sottoinsieme del prodotto cartesiano rappresentato da tutte le coppie che rispettano la relazione voluta tra gli n insiemi. Si definisce *arietà* di una relazione il numero e il tipo degli argomente di una relazione.
Dominio:insieme degli elementi x tali che $< x, y >\in R$ per qualsiasi y.
Codominio:insieme degli elementi y tali che $< x, y >\in R$ per qualsiasi x.
Esempio:
A x $B = \{< 1, 1 >, < 1, 4 >, < 1, 5 >, < 2, 1 >, < 2, 4 >, < 2, 5 >, < 3, 1 >, < 3, 4 >, < 3, 5 >\}$
$R \subseteq A$ x B
R = {<1,1>,<1,4>,<1,5>,<2,4>,<2,5>,<3,4>,<3,5>}
$R \subseteq B$ x A
R = {<1,1>,<1,2>,<1,3>}
Data una relazione R definita su un dominio S si definiscono le seguenti proprietà:

- Riflessiva $\iff \forall x \in S \quad xRx$
- Irriflessiva $\iff \forall x \in S \quad x \not{R}x$
- Simmetrica $\iff xRy \to yRx$
- Asimmetrica: $\iff xRy \to y \not{R}x$
- Antisimmetrica: $\iff xRy \wedge yRx \to x = y$
- Transitiva: $\iff xRy \wedge yRz \to xRz$

Sulle relazioni si possono applicare le usuali operazioni insiemistiche quindi, ad esempio, date $R_1 \subseteq SxT$ e $R_2 \subseteq SxT$ anche $R_1 \cup R_2$ è una relazione su SxT.

Data una relazione binaria $R \subseteq SxT$ definiamo *relazione complementare* $\bar{R} \subseteq SxT$ come $x\bar{R}y \iff <x,y> \notin R$. Per definizione si ha $\bar{\bar{R}} = R$ e $R \cup \bar{R} = SxT$.
Data una relazione binaria $R \subseteq SxT$ esiste sempre la *relazione inversa* $R^-1 = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\} \subseteq TxS$. Per definizione $(R^-1)^-1 = R$

Definizione 2. *Date due relazioni R e R' definite su S si ha:*

1. *se R è riflessiva anche R^-1 è Riflessiva*
2. *R è riflessiva se e solo se $\bar{R}$ è riflessiva*
3. *se R e R' sono riflessive anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono riflessive*

Definizione 3. *Date due relazioni R e R' definite su S, si ha:*

1. *R è simmetrica se e solo se $R = R^-1$*
2. *se R è simmetrica anche R^-1 e $\bar{R}$ sono simmetriche*
3. *R è antisimmetrico se e solo se $R \cap R^-1 \subseteq \wp S$*
4. *R è asimmetrica se e solo se $R \cap R^-1 = \emptyset$*
5. *se R e R' sono simmetriche anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono simmetriche*

Definizione 4. *Siano R e R' due relazioni su S, se R e R' sono transitive anche $R \cap R'$ è transitiva.*

2.1 Rappresentazione di Relazioni

Vi sono diverse modalità di rappresentazione delle relazioni,il cui metodo migliore dipendono dall'arietà della relazione, che sono:

Tabella a n colonne è una matrice a due dimensioni con righe,rappresentanti gli elementi, e colonne, indicanti gli insiemi; è conveniente utilizzare quando l'arietà della relazione è ≥ 2.

Grafo Bipartito è un grafo in cui si elencano gli elementi di tutti gli insiemi e si usano delle frecce, chiamate archi, per indicare l'associazione tra gli elementi. E' meglio utilizzare il grafo bipartito soltanto per le relazioni binarie.

Matrice Booleana è una matrice M_R a valori {0,1} composta da n righe e m colonn

Grafi modalità di rappresentazione di relazioni binarie(spiegate in un paragrafo successivo)

2.1.1 Tabelle

Si vuole definire la relazione $anagrafica \subseteq CognomixNomixDatexLuoghi$

C	N	D	L
Moscato	Ugo	10/1/57	Milano
Iaquinta	Vincenzo	13/5/68	Udine
Inzaghi	Filippo	23/5/78	Piacenza

2.1.2 Grafo Bipartito

Dati due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 7, 1\}$ si definisce la relazione $R \subset AxB = \{(1, 7), (1, 1), (2, 4), (3, 7), (3, 4)\}$.

2.1.3 Matrice Booleana

La *Matrice booleana* è una matrice M_R,composta da n righe e m colonne, i cui elementi sono definiti come $m_{ij} = \{^{1 \iff <s_i,t_j \in R}_{0\text{altrimenti}}$
Inserire esempi!!!!
Da una matrice booleana si possono determinare facilmente le proprietà di una relazione R,definita su S, soprattutto la proprietà simmetrica e la riflessiva.
La *Matrice Complementare* $M_{\bar{R}}$ è costituita dai seguenti elementi $\bar{m}_{ij} = \{^1 \iff m_{ij} = 0_0 \iff m_{ij} = 1$
La *Matrice inversa* $M_{R^{-1}}$ è la trasporta della matrice M_R.
Date due matrici A e B,embrambe di nxm elementi, si definiscono 3 operazioni:

MEET $A \sqcap B = C$: è una matrice booleana i cui elementi sono: $c_{ij} = \{\begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 0 \vee b_{ij} = 0 \end{cases}$

JOIN $A \sqcup B = C$: è una matrice booleana i cui elementi sono: $cij = \{^1 \quad a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1_0 \quad a_{ij} = 0 \wedge b_{ij} = 0$

PRODOTTO BOOLEANO $A \odot B$: è una matrice booleana nxp, i cui elementi sono: $c_{ij} = \{1 \quad \text{se per qualche} k (1 \leq k \leq m) \text{si ha} a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1_0 \quad \text{altrimenti}$

Inserire Esempi

2.2 Composizione di Relazioni

Data una relazione $R_1 \subseteq SxT$ e una relazione $R_2 \subseteq TxQ$, si definisce come relazione composta $R_1 \circ R_2 \subseteq SxQ$ come segue $(a, c) \in R_1 \circ R_2 \iff \exists b \in T|(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2$

Esempio: Siano $S = \{a, b\}, R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ e $R_2 = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$
$R_1 \circ R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
$R_2 \circ R_1 = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$

Proposizione 6. *La composizione di Relazioni non è commutativa ma invece è associativa*

Teorema 1. *Se $R_1 \subseteq SxT$ e $R_2 \subseteq TxQ$, allora $(R_1 \circ R_2)^-1 = R_1^-1 \circ R_2^-1$*

2.3 Relazioni di Equivalenza

Si definisce R una *relazione di equivalenza* se e solo se la relazione binaria R è riflessiva,simmetrica e transitiva.
Data una relazione di equivalenza R definita su un insieme S, si definisce *classe di equivalenza* di un elemento $x \in S$ come $[x] = \{y| < x, y >\in R\}$

Teorema 2. *Se R è una relazione di equivalenza su S, allora le classi di Equivalenza generate da R partizionano S*

Data una relazione di equivalenza in S, la partizione che essa determina si dice *insieme quoziente* di S rispetto alla relazione di equivalenza e si indica con $S/$

2.4 Struttura relazionale

Una struttura relazionale SR è una n-upla in cui il primo componente è un Insieme non vuoto S e le rimanenti componenti sono relazioni su S^n.

2.4.1 Tipologie di Ordinamenti

PREORDINE : è una struttura relazionale (S, R) in cui S è un insieme non vuoto e R è una relazione binaria *riflessiva* e *transitiva* su SxS

ORDINE STRETTO : è una struttura relazionale (S, R) in cui R è una relazione binaria *irriflessiva* e *transitiva* su SxS

ORDINE LARGO(POSET) : è una struttura relazionale (S, R) in cui R è una relazione binaria *riflessiva,antisimmetrica* e *transitiva* su SxS.

Una relazione R è un ordinamento sull'insieme S se e solo se $\forall x, y \in S$ vale solo una delle proprietà di *tricotomia*:

- $x = y \wedge \neg(xRy) \wedge \neg(yRx)$
- $xRy \wedge x \neq y \wedge \neg(yRx)$
- $yRx \wedge x \neq y \wedge \neg(xRy)$

Proposizione 7. *Se (S, R) è una struttura relazionale anche (S, R^{-1}) rappresenta la stessa struttura relazionale chimata e (S, R^{-1}) è il* duale *di (S, R).*

Proposizione 8. *Il grafo di un Poset non ha cicli di lunghezza maggiore di 1*

2.4.2 Diagramma di Hasse

Il grafo di un poset può essere rappresentato dal *diagramma di Hasse*, un grafo con le seguenti proprietà:

- si prescinde dal disegnare i cappi in quanto il poset è una relazione riflessiva
- si prescinde dal disegnare gli archi definiti per transitività
- il grafo si legge dal basso verso l'alto

esempio

Proposizione 9. *Dato un poset* (S, R) *e un insieme* $X \subseteq S$ *si hanno le seguenti proprietà:*

massimale *: un elemento* $s \in S$ *è massimale se* $\nexists s' \in S : s \leq s'$

minimale *: un elemento* $s \in S$ *è minimale se* $\nexists s' \in S : s \geq s'$

maggiorante *: un elemento* $s \in S$ *è un maggiorante se* $\forall x \in X$ *si ha* $s \geq s$

minorante *: un elemento* $s \in S$ *è un minorante se* $\forall x \in X$ *si ha* $s \leq x$

minimo maggiorante *:un elemento* $s \in S$ *è un minimo maggiorante, indicato con* $\sqcup X$*, se è un maggiorante e per ogni altro maggiorante* s' *di* X *si ha* $s \leq s'$*.*

massimo minorante *: un elemento* $s \in S$ *è un massimo minorante, indicato con* $\sqcap X$*, se è un minorante e per ogni altro minorante* s' *di* X *si ha* $s' \leq s$

massimo *: se* $\sqcup X \in X$ *si dice che* $\sqcup X$ *è un massimo.*

minimo *: se* $\sqcap X \in X$ *si dice che* $\sqcap X$ *è un minimo.*

2.4.3 Reticoli

Un *Reticolo* è un poset (S, R) in cui per ogni coppia $x, y \in S$ esistono il massimo minorante(indicato con $x \sqcap y$) e il minimo maggiorante(indicato con $x \sqcup y$). Se un poset (S, R) è un reticolo anche il suo poset duale è un reticolo.

Capitolo 3

Funzioni

Si definisce *funzione* $f : S \mapsto T$ una relazione $f \subseteq SxT$ tale che $\forall x \in S$ esiste al più un $y \in T$ per cui $< x, y > \in f$.
Se il $dom(f) = S$ la funzione si dice *totale* altrimenti la funzione è *parziale*.

3.1 Tipologie di Funzioni

Una funzione $f : S \mapsto T$ si dice:

iniettiva : $\forall x, y \in Sx \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$

suriettiva : $\forall y \in T \exists x \in S : f(x) = y$

biettiva : se la funzione è iniettiva e suriettiva

Esempi: $+ : \mathbb{N}x\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale,suriettiva ma non iniettiva $* : \mathbb{N}x\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale,suriettiva ma non è iniettiva $successore : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale ed è iniettiva ma non suriettiva $successore : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ è una funzione totale ed è biettiva
Una funzione $f : S \mapsto T$ è detta *invertibile* se la sua relazione inversa f^-1 è essa stessa una funzione.
Una funzione $f : S \mapsto T$ ammette una *funzione inversa* $f^-1 : T \mapsto S$ se e solo se f è una funzione iniettiva.

3.2 Proprietà funzioni inverse

Sia $f : A \mapsto B$ invertibile, con funzione inversa f^-1:

1. f^-1 è totale $\iff$ f è suriettiva
2. f è totale $\iff$ f^-1 è suriettiva

Date due funzioni $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ si definisce *funzione composta* $g \circ f : S \mapsto Q$ la funzione tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in S$. La funzione composta $(g \circ f)(x)$ è definita se e solo se sono definite entrambe $g(f(x))$ e $f(x)$
Siano $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ invertibili. Allora $g \circ f$ è invertibile e la sua inversa è $(g \circ f)^-1 = f^-1 \circ g^-1$.

3.3 Operazioni

Si definisce come *operazione n-aria* su un insieme S, una funzione $f : S^n \mapsto S$ con $n \geq 1$. Se f è un'operazione binaria su S, essa si può rappresentare anche mediante la notazione infissa $x_1 f x_2$ invece di $f(x_1, x_2)$

Capitolo 4

Induzione

L'induzione è un importante strumento per la definizione di nuovi insiemi,come ad esempio l'insieme delle FBF(Formule ben Formate), e la dimostrazione di determinate proprietà di un insieme.

4.1 Principio di Induzione

Il principio di Induzione si utilizza per dimostrare la correttezza di determinate proprietà dell'insieme dei numeri Naturali.
Il principio di induzione viene definito nel seguente modo:
Data una proposizione $P(x)$ valida per $\forall x \in N$ bisogna:

1. **Caso Base**: Verificare $P(i)$ con i indicante i primi elementi della proposizione

2. **Passo Induttivo**: Supposto $P(x)$ vero bisogna verificare la verità di $P(x+1)$

Esempio:

Teorema 3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. **Base** $n = 0$ $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2} \quad 0 = 0$ vero

Ipotesi Induttiva: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi Induttiva: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n} +1 i = \sum_{i=0}^{n} +(n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

□

Esempio:

Teorema 4. $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$

Dimostrazione. Dimostrazione
Base $n = 1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} 2i - 1 = 1^2 \quad 1 = 1$ è vero
Ipotesi Induttiva: $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$
Tesi Induttiva: $\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = (n+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 + 2(n+1) - 1$$
$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

□

4.2 Definizione Induttiva

L'induzione permette anche di definire nuovi insiemi nel seguente modo:

1. si definisce un insieme di "oggetti base" appartenenti all'insieme.
2. si definisce un insieme di operazioni di costruzione che, applicate ad elementi dell'insieme, producono nuovi elementi dell'insieme.
3. nient'altro appartiene all'insieme definito.

Esempio:Definizione induttiva di numeri naturali

1. $0 \in N$
2. Se $x \in N$ allora $s(x) \in N$
3. Nient'altro appartiene ai numeri naturali

Capitolo 5

Logica Proposizionale

La logica è lo studio del ragionamento e dell'argomentazione e, in particolare, dei procedimenti inferenziali, rivolti a chiarire quali procedimenti di pensiero siano validi e quali no.
Vi sono molteplici tipologie di logiche, come ad esempio la logica classica e le logiche costruttive, tutte accomunate di essere composte da 3 elementi:

- **Linguaggio**:insieme di simboli utilizzati nella Logica per definire le cose
- **Sintassi**:insieme di regole che determina quali elementi appartengono o meno al linguaggio
- **Semantica**:permette di dare un significato alle formule del linguaggio e determinare se rappresentano o meno la verità.

Noi ci occupiamo della logica Classica che si compone in LOGICA PROPOSIZIONALE e *logica predicativa*.
La Logica proposizionale è un tipo di logica Classica che presenta come caratteristica quella di essere un linguaggio limitato in quanto si possono esprimere soltanto proposizioni senza avere la possibilità di estenderla a una classe di persone.

5.1 Linguaggio e Sintassi

Il linguaggio di una logica proposizionale è composto dai seguenti elementi:

- Variabili Proposizionali: $P, Q, R \ldots$
- Connettivi Proposizionali: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \iff$
- Simboli Ausiliari: (,)
- Costanti: T, F

La sintassi di un linguaggio è composta da una serie di formule ben formate(FBF) definite induttivamente nel seguente modo:

1. Le costanti e le variabili proposizionali $\in FBF$.
2. Se A e $B \in FBF$ allora $(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(\neg A)$,$(A \to B)$, $(A \iff B)$,TA e FA sono delle formule ben formate.
3. nient'altro è una formula

Esempio:
$(P \wedge Q) \in Fbf$ è una formula ben formata
$(PQ \wedge R) \notin Fbf$ in quanto non si rispetta la sintassi del linguaggio definita.

Sia $A \in FBF$, l'insieme delle sottoformule di A è definito come segue:

1. Se A è una costante o variabile proposizionale allora A stessa è la sua sottoformula
2. Se A è una formula del tipo $(\neg A')$ allora le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di A'; $\neg$ è detto connettivo principale e A' sottoformula immediata di A.
3. Se A è una formula del tipo BoC dove o è un connettivo binario della logica proposizionale e B ed C due formule; le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di B e C;o è il connettivo principale e B e C sono le due sottoformule immediate di A.

É possibile ridurre ed eliminare delle parentesi attraverso l'introduzione della precedenza tra gli operatori, che è definita come segue:
$\neg, \wedge, \vee, \to, \iff$.
In assenza di parentesi una formula va parentizzata privileggiando le sottoformule i cui connettivi principali hanno la precedenza più alta.
In caso di parità di precedenza vi è la convenzione di associare da destra a sinistra.
Esempio:
$\neg A \wedge (\neg B \to C) \vee D$ diventa $((\neg A) \wedge ((\neg B) \to C) \vee D)$.

5.2 Semantica

La semantica di una logica consente di dare un significato e un interpretazione alle formule del Linguaggio attraverso le tabelle di verità.
Si definisce $v(T) = 1$ e $v(F) = 0$ per cui 1 rappresenta la verità mentre lo 0 la falsità di una variabile,sottoformula e formula.

I connettivi della Logica Proposizionale hanno la seguente tabella di verità:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Una formula nella logica proposizionale può essere di tre diversi tipi:

Tautologica : la formula è soddisfatta da qualsiasi valutazione della Formula

Soddisfacibile non Tautologica :la formula è soddisfatta da qualche valutazione della formula ma non da tutte.

Contraddizione :la formula non viene mai soddisfatta

Esempio:
Formula $A \wedge \neg A$ contraddizione

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
0	1	0
1	0	0

Formula $Z = (A \wedge B) \vee C$ soddisfacibile non Tautologica

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Formula $X = (A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \wedge C)$ Soddisfacibile non tautologica

A	B	C	$\neg A$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge C$	X
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Formula $Y = \neg(A \wedge B) \iff (A \vee B \Rightarrow C)$ soddisfacibile non Tautologica

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	Y
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

5.2.1 Modelli e decidibilità

Si definisce *modello*, indicato con $M \models A$, tutte le valutazioni booleane che rendono vera la formula A. Si definisce *contromodello*, indicato con , tutte le valutazioni booleane che rendono falsa la formula A.
La logica proposizionale è decidibile (posso sempre verificare il significato di una formula). Esiste infatti una procedura effettiva che stabilisce la validità o no di una formula, o se questa ad esempio è una tautologia. In particolare

il verificare se una proposizione è tautologica o meno è l'operazione di decibilità principale che si svolge nel calcolo proposizonale.

Definizione 5. *Se* $M \models A$ *per tutti gli* M*, allora* A *è una tautologia e si indica* $\models A$

Definizione 6. *Se* $M \models A$ *per qualche* M*, allora* A *è soddisfacibile*

Definizione 7. *Se* $M \models A$ *non è soddisfatta da nessun* M*, allora* A *è insoddisfacibile*

5.3 Sistema Deduttivo

Il sistema deduttivo è un metodo di calcolo che manipola proposizioni, senza la necessità di ricorrere ad altri aspetti della logica.
Nella logica proposizionale, tramite i teoremi di completezza e correttezza, esiste una corrispondenza tra le formule derivanti dal sistema deduttivo e le formule verificabili tramite la semantica della logica.
I sistemi deduttivi della logica proposizionale sono i seguenti:

Sistema deduttivo Hilbertiano : non viene analizzato

Metodo dei Tableau

Risoluzione Proposizionale :non viene analizzato !!!!

Definizione 8. *Una sequenza di formule* $A_1, \ldots, A_n$ *di* Λ *è una* dimostrazione *se per ogni i compreso tra* 1 *e n,* A_i *è un assioma di* Λ *oppure una conseguenza diretta di una formula precedente.*

Definizione 9. *Una formula* A *di una logica* Λ *è detta* teorema *di* Λ*,indicata con* $\vdash A$ *se esiste una dimostrazione di* Λ *che ha* A *come ultima formula*

Una dimostrazione di una formula di una logica può venire tramite:

- **Metodo diretto**: Data un'ipotesi, attraverso una serie di passi si riesce a dimostrare la correttezza della Tesi
- **Metodo per assurdo**(non sempre accettato in tutte le logiche): Si nega la tesi ed attraverso una serie di passi si riesce a dimostrare la negazione delle ipotesi.

Teorema 5. *Un apparato deduttivo* R *è completo se, per ogni formula* $A \in Fbf$*,* $\vdash A$ *implica* $\models A$

Teorema 6. *Un apparato deduttivo* R *è corretto se, per ogni formula* $A \in Fbf$*,* $\models A$ *implica* $\vdash A$

5.3.1 Tableau Proposizionali

Il metodo dei Tableau è stato introdotto da Hintikka e Beth alla fine degli anni '50 e poi ripresi successivamente da Smullyan.
I tableau sono degli alberi,la cui radice è l'enunciato in esame, e gli altri nodi sono costruiti attraverso l'applicazione di una serie di regole,fino ad arrivare alle formule atomiche come radici.
Le regole dei Tableau sono le seguenti:

T $\wedge$

$$\frac{S, TA \wedge B}{S, TA, TB}$$

T $\vee$

$$\frac{S, TA \vee B}{S, TA / S, TB}$$

T $\neg$

$$\frac{S, T\neg A}{S, FA}$$

T $\Rightarrow$

$$\frac{S, TA \Rightarrow B}{S, FA / S, TB}$$

T $\iff$ (da fare)

F $\wedge$

$$\frac{S, FA \wedge B}{S, FA / S, TB}$$

F $\vee$

$$\frac{S, FA \vee B}{S, FA, FB}$$

F $\neg$

$$\frac{S, F\neg A}{S, TA}$$

F $\Rightarrow$

$$\frac{S, FA \Rightarrow B}{S, TA, FB}$$

F $\iff$ (da fare)

Il metodo dei Tableau è un metodo dei sistemi deduttivi, che permette attraverso l'applicazione di una serie di regole, di capire la tipologia della formula.

Tipologia	Fare Tableau per	Chiuso?	Aperto?
Teorema	$\neg A$	Si	No
Soddisfacibile	A	No	Si
Contradditoria	A	Si	No

5.4 Equivalenze Logiche

Due proposizioni A e B sono logicamente equivalenti se e solo se A e B hanno la stessa valutazione booleana.
Nella logica proposizionale sono definite le seguenti equivalenze logiche, indicate con $\equiv$,:

1. Idempotenza

$$A \vee B \equiv \quad A$$
$$A \wedge B \equiv \quad A$$

2. Associavità

$$A \vee (B \vee C) \equiv \quad (A \vee B) \vee C$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv \quad (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \iff (B \iff C) \equiv \quad (A \iff B) \iff C$$

3. Commutatività

$$A \vee B \equiv \quad B \vee A$$
$$A \wedge B \equiv \quad B \wedge A$$
$$A \iff B \equiv B \iff A$$

4. Distribuitività

$$A \vee (B \wedge C) \equiv \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$A \wedge (B \vee C) \equiv \quad (A \wedge B \vee (A \wedge C)$$

5. Assorbimento

$$A \vee (A \wedge B) \equiv \quad A$$
$$A \wedge (A \vee B) \equiv \quad A$$

6. Doppia negazione

$$\neg\neg A \equiv A \tag{5.1}$$

7. Leggi di De Morgan

$$
\begin{aligned}
\neg(A \vee B) \equiv & \quad \neg A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) \equiv & \quad \neg A \vee \neg B
\end{aligned}
$$

8. Terzo escluso

$$A \vee \neg A \equiv T \tag{5.2}$$

9. Contrapposizione

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A \tag{5.3}$$

10. Contraddizione

$$A \wedge \neg A \equiv F \tag{5.4}$$

5.5 Completezza di insiemi di Connettivi

Un insieme di connettivi logici è completo se mediante i suoi connettivi si può esprimere un qualunque altro connettivo. Nella logica proposizionale valgono anche le seguenti equivalenze, utili per ridurre il linguaggio,:

$$
\begin{aligned}
(A \rightarrow B) \equiv & \quad (\neg A \vee B) \\
(A \vee B) \equiv & \quad \neg(\neg A \wedge \neg B) \\
(A \wedge B) \equiv & \quad \neg(\neg A \vee \neg B) \\
(A \iff B) \equiv & \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)
\end{aligned}
$$

L'insieme dei connettivi $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee\}$ sono completi e ciò è facilmente dimostrabile utilizzando le seguenti equivalenze logiche

Capitolo 6

Logica Predicativa

La logica Predicativa, detta anche logica del primo ordine, si ha la possibilità di predicare le proprietà di una classe di individui.
É una logica semidecidibile, in quanto è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo, per cui non sempre tramite una sequenza di passi si riesce a capire la tipologia di formula.

6.1 Linguaggio e Sintassi

Un linguaggio predicativo L è composto dai seguenti insiemi di simboli:

1. Insieme di variabili individuali(infiniti) $x, y, z, \ldots$
2. Connettivi logici $\wedge \vee \neg \rightarrow \Longleftrightarrow$
3. Quantificatori esistenziali $\forall \exists$
4. Simboli (,)
5. Costanti proposizionali T, F
6. Simbolo di uguaglianza $=$,eventualmente assente

Questa è la parte del linguaggio tipica di ogni linguaggio del primo ordine poi ogni linguaggio definisce la propria segnatura ossia definisce in maniera autonomo:

1. Insiemi di simboli di costante $a, b, c, \ldots$
2. Simboli di funzione con arieta $f, g, h, \ldots$
3. Simboli di predicato $P, Q, Z, \ldots$ con arietà

Per definire le formule ben formate della logica Predicativa bisogna prima definire l'insieme di termini e le formule atomiche.

Definizione 10. *L'insieme $TERM$ dei termini è definito induttivamente come segue*

1. *Ogni variabile e costante sono dei Termini*
2. *Se $t_1 \dots t_n$ sono dei termini e f è un simbolo di funzione di arietà n allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine*

Definizione 11. *L'insieme $ATOM$ delle formule atomiche è definito come:*

1. *T e F sono degli atomi*
2. *Se t_1 e t_2 sono dei termini, allora $t_1 = t_2$ è un atomo*
3. *Se $t_1, \dots, t_n$ sono dei termini e P è un predicato a n argomenti, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è un atomo.*

Definizione 12. *L'insieme delle formule ben formate(FBF) di L è definito induttivamente come*

1. *Ogni atomo è una formula*
2. *Se $A, B \in FBF$, allora $\neg A$, $A \wedge B$,$A \vee B$,$A \rightarrow B$ e $A \iff B$ appartengono alle formule ben formate*
3. *Se $A \in FBF$ e x è una variabile, allora $\forall x A$ e $\exists x A$ appartengono alle formule ben formate*
4. *Nient'altro è una formula*

La precedenza tra gli operatori logici è definita nella logica predicativa come segue $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$ e si assume che gli operatori associno a destra.

Definizione 13. *L'insieme $var(t)$ delle variabili di un termine t è definito come segue:*

- *$var(t) = \{t\}$, se t è una variabile*
- *$var(t) = \emptyset$ se t è una costante*
- *$var(f(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$*
- *$var(R(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$*

Si definisce *Termine chiuso*, un termine che non contiene variabili altrimenti si definisce il termine come *chiuso.*
Le variabili nei termini e nelle formule atomiche possono essere libere in quanto gli unici operatori che "legano" le variabili sono i quantificatori.
Il campo di azione dei quantificatori si riferisce soltanto alla parte in cui si applica il quantificatore per cui una variabile si dice *libera* se non ricade nel campo di azione di un quantificatore altrimenti la variabile si dice *vincolata.*

6.2 Sistemi Deduttivi predicativi

Comprendere la tipologia della formula tramite la sua semantica nella logica predicativa è più complesso rispetto alla semantica della logica proposizionale per cui l'apparato deduttivo e la sua correttezza e completezza rispetto alla semantica assumono particolare rilevanza.

Definizione 14. *Una sostituzione è una funzione* $\sigma : VAR \mapsto TERM$ *definita induttivamente:*

1. $T\sigma = T$ e $F\sigma = F$
2. se c è una costante allora $c\sigma = c$
3. se x è una variabile allora $x\sigma = x$
4. se f è un simbolo di funzione di arietà n allora $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$

La sostituzione σ di un termine t al posto di un simbolo di variabile x è indicata da $\sigma = \{t/x\}$.

Lemma 1. *Se t è un termine e σ è una sostituzione, allora $t\sigma$ è un termine*

Definizione 15. *Data una formula S, la formula $S\sigma$ è definita nel seguente modo:*

1. se $S = P(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula atomica allora allora $S\sigma = P(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. se $S = (\neg A)$ allora $S\sigma = \neg(A\sigma)$
3. se $S = (A \circ B)$ allora $S\sigma = A\sigma \circ B\sigma$
4. se $S = (\forall x A)$ allora $S\sigma = \forall x(A\sigma_x)$
5. se $S = (\exists x A)$ allora $S\sigma = \exists x(A\sigma_x)$

6.2.1 Tableau Predicativi

I tableau predicativi è un apparato deduttivo che permette di stabilire la tipologia di una formula del linguaggio mediante l'applicazione di una serie di regole. Mantiene le stesse modalità di dimostrazione dei tableaux proposizionale e le stesse definizioni di espansioni del Tableaux.

$S, T\exists x A(x)$	$S, F\exists x A(x)$
$S, TA(a)$con a un nuovo simbolo di variabile	$S, FA(a), F\exists x A(x)$

$S, T\forall x A(x)$
$S, TA(a), T\forall x A(x)$

$$\frac{S, F\forall x A(x)}{S, FA(a) \text{con a un nuovo simbolo di variabile}}$$

Nelle tableuax regole $T\exists$ e $F\forall$ bisogna introdurre un nuovo simbolo di variabile, in quanto non si poteva conoscere prima dell'applicazione della regole il valore della variabile, mentre nelle altre due si può utilizzare qualsiasi variabile. Il fatto di portarsi dietro la formula nell'applicazione delle regole dei tableaux porta alla semidecidibilità.
Nei tableau predicativi l'ordine di applicazione delle regole, quando è possibile sceglierlo, cambia la chiusura o meno del Tableaux.
Le euristiche nell'applicazione delle regole dei Tableaux sono le seguenti:

- Applicare prima le regole che non ramificano il tableaux
- Applicare prima le regole che vincolano all'introduzione di nuovi parametri
- Quando si ha la possibilità di scegliere il parametro, conviene sceglierlo uno già scelto.

6.2.2 Equivalenze logiche

Nella logica predicativa si definisce due formule semanticamente equivalenti, indicato con $P \equiv Q$, se hanno gli stessi modelli. Le equivalenze della logica predicativa sono le seguenti:

1. $\forall xP \equiv \neg\exists x\neg P$
2. $\neg\forall xP \equiv \exists x\neg P$
3. $\exists xP \equiv \neg\forall x\neg P$
4. $\neg\exists xP \equiv \forall x\neg P$
5. $\forall x\forall yP \equiv \forall y\forall xP$
6. $\exists x\exists yP \equiv \exists y\exists xP$
7. $\forall x(P_1 \wedge P_2) \equiv \forall xP_1 \wedge \forall xP_2$
8. $\exists x(P_1 \vee P_2) \equiv \exists xP_1 \vee \exists xP_2$

6.3 Semantica

La semantica della logica predicativa è più complessa della semantica proposizionale in quanto nella logica predicativa si ha la possibilità di predicare su oggetti e le loro proprietà. L'interpretazione semantica di formule predicative si serve delle *strutture*, oggetto matematico che traduce formule predicative in espressioni che hanno un significato specifico relativamente alla realtà che si sta rappresentando.

Definizione 16. *Una struttura per il linguaggio L è una coppia $U = (D, I)$ in cui: D(dominio) è un insieme non vuoto di elementi del dominio I(interpretazione) è una funzione che associa a simboli e formule del linguaggio un significato a partire dalla segnatura del linguaggio. I associa:*

- *a ogni simbolo di costante c un elemento $c^I \in D$*
- *a ogni simbolo di funzione n-aria f una funzione $f^I : D^n \mapsto D$*
- *a ogni simbolo di predicato n-ario P una relazione n-aria $P^I \subseteq D^n$*

Definizione 17. *Sia Var l'insieme delle variabili di un linguaggio predicativo L, un assegnazione η delle variabili in una struttura $U = (D, I)$ è una funzione $\eta : Var \mapsto D$*

Un assegnazione η è una maniera di associare un valore alle variabili del linguaggio.

Definizione 18. *Sia $U = (D, I)$ una struttura per L e sia η una assegnazione.Estendiamo tale estensione a un'assegnazione $\bar{\eta}(I, \eta)$ sui termini definita come:*

- *Per ogni variabile x, $x^{I,\eta} = x^\eta$*
- *Per ogni costante c, $c^{I,\eta} = c^I$*
- *Se $t_1, \dots, t_n$ sono dei termini e f è un simbolo di funzione n-aria allora $f(t_1, \dots, t_n)^{I,\eta} = f^I(t_1^{I,\eta}, \dots, t_n^{I,\eta})$*

Se un termine è chiuso non si necessità della funzione η in quanto l'Interpretazione è unica e non dipende dall'interpretazione data tramite la funzione η.
Una formula P, in una struttura U rispetto a un assegnazione η, si dice *soddisfacibile* , denotata con $U, \eta \models P$, se e solo se è vera l'interpretazione di P in una struttura U in cui ad ogni variabile x è valutata come x^η.
La soddisfacibilità di una formula è definita induttivamente come segue:

Definizione 19. *Sia $U = (D, I)$ una struttura per un linguaggio L e η un'assegnazione in U*

- *$(U, \eta) \models T$ e $(U, \eta) \not\models F$*
- *se A è una formula atomica del tipo $P(t_1, \dots, t_n)$, allora $(U, \eta) \models P(t_1, \dots, t_n) \iff (t_1^{I,\eta}, \dots, t_n^{I,\eta}) \in P^I$*
- *$(U, \eta) \models \neg A \iff (U, \eta) \not\models A$*

- $(U,\eta) \models (A \circ B) \iff (U,\eta) \models A \circ (U,\eta) \models B$
- $(U,\eta) \models \forall x A \iff \forall d \in D$ *è verificato che* $U \models A(\eta[d/x])$
- $(U,\eta) \models \exists x A \iff \exists d \in D$ *per cui* $U \models A(\eta[d/x])$

Definizione 20. *Se per una formula $A \in L$, $(U,\eta) \models A$ è verificato se per ogni assegnazione alle variabili, allora scriviamo $U \models A$ e diciamo che U è un modello di A.*

Definizione 21. *Una formula $A \in L$ è una* tautologia *se e solo se è vera in tutte le strutture di U e lo scriviamo $U \models A$*

Si può estendere la definizione di soddisfacibile anche un insieme di formule con la definizione seguente:

Definizione 22. *Un insieme di formule Γ è soddisfacibile se esiste*

Es: $x \mapsto s(0)$ $y \mapsto 0$ $z \mapsto s(0)$ Allora x + y = z con questi valori è vera
Formula aperta ha senso chiedersi Si dice che una formula aperta se esiste un assegnamento alle variabile che la rende vera Si dice che una formula aperta se non esiste un assegnamento alle variabile che la rende vera
Data una struttura S e $\eta| - -P(t1...t_n)$ si dice che è vera se esiste un interpretazione di P(t1...tn) che la rende vera
Se una formula è chiusa allora non necessita della funzione η in quanto l'interpretazione è unica
$S,\eta| - -A \wedge B$ è vera se $S,\eta| - -A \wedge S,\eta| - -B$
$S,\eta| - -\exists x A(x) \iff S,\eta| - -A(a) con a \in D$ S contiene il Dominio
$S,\eta| - -\forall x A(x) \iff S,\eta| - -A(a)\forall a \in D$
Dirò che una formula è valida se è sempre valide qualsiasi struttura
Tutte le formule dimostrate con il metodo dei Tableau devono essere valide
Modello è un interpretazione che rende vere le formule di una teoria Tutte le formule del primo Ordine dimostrabili sono sempre valide per il teorema di Completezza Teoria è fatta da un insieme di assiomi e da una logica $T = Ax + L$ Ad esempio prendendo la teoria dell'Aritmetica di Peano gli diamo una serie di assiomi e una logica i cui modelli sono tutte le formule che soddisfano gli assiomi e la logica
Poi si può modificare la logica e in quel caso mescolando assiomi con logiche diverse otteniamo Teorie diverse
Sono degli assiomi dell'Aritmetica di Peano (da sistemare) $\forall x \neg S(x) = 0 \forall x x + 0 = x \forall x, y x + s(y) = s(x+y) \forall x x * 0 = 0 \forall x, y x * s(y) = (x*y) + x \forall x, y (s(x) = s(y)) \rightarrow x = y P(0) \neg D(0) \forall x (P(x) \rightarrow \neg P(s(x))) P indica i numeri Pari \forall x (D(x) \rightarrow \neg D(S(x))) D indica i numeri Dispari$
LogicA Aritmetica di Peano Linguaggio: $0, s(x), +, *, =$ è la segnatura
Dominio: tutti e numeri Naturali L'unica costante del linguaggio 0 viene associato la costante del Dominio 0. Può sembrare strano ma sono dei numeri

diversi in quanto $0 \in Linguaggio \mapsto 0 \in N$ ossia si associa ad un elemento del linguaggio una sua interpretazione appartenente al dominio.
In Logica Proposizionale abbiamo sviluppato indipendente la parte sintattica e la parte semantica e con il Teorema di correttezza li abbiamo messi assiemi Anche a livello predicativo è possibile definibile in maniera chiara la semantica ed è definito il teorema di Completezza
In logica chiamiamo Numerale la costante del linguaggio e Numero la sua interpretazione
Ho un simbolo di funzione con n argomenti $f_L^n(t1...t_n) \mapsto I(t_k)$ quando $t_k = f(t_1....t_n)$ ossia associa ad ogni elemento della funzione una sua interpretazione
$I(P(t_1....t_n) =< t_1....t_n >$ dove $I(P) \mapsto R^n$ P è l'insieme delle n-uple che stanno nella relazione definita
Il successore viene interpretato come la funzione successore
Esempio: $ss(0) \mapsto 2 \in N$ in quanto 0 lo interpreto come 0, il successore di 0 come 1 e il successore di 1 è 2 e questo due è l'interpretazione di s(s(0))
Esempio Interpretazione relazione Il Predicato = viene interpretato come l'insieme delle coppie che hanno i numeri uguali $=\mapsto < 0, 0 >, < 1, 1 >, < 2, 2 >, ... < n, n >$
Esempio: x + y = z + è una funzione del linguaggio Fissato il $s(0) e s(s(0))$ $s(0) + s(s(0)) \mapsto 3 \in N$ è l'interpretazione di s(0) e l'interpretazione del s(s(0))