

Capitolo 1

Insiemi

Gli insiemi sono collezioni di oggetti detti elementi, in cui si prescinde dall'ordine e dalla ripetizione degli elementi e questa è la definizione ingenua.

Si dice $x \in A$ se l'elemento appartiene all'insieme altrimenti si usa $x \notin A$. L'insieme vuoto si indica con \emptyset mentre se due insiemi hanno gli stessi elementi si usa $A = B$.

Gli insiemi possono essere definiti in due maniere:

- **Estensionale:** si elencano gli elementi di un insieme

Esempio:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

- **Intensionale:** si descrivono gli elementi che soddisfano una determinata proprietà

Esempio:

$$D = \{x \in N | x < 100\}$$

Dati due insiemi S e T si ha:

$$S \subset T = \{x | x \in S \Rightarrow x \in T \wedge S \neq T\} \quad S = T = \{x | x \in S \iff x \in T\} \quad S \subseteq T = \{x | S \subset Q \vee S = T\}$$

Esempio:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$$

$$A = B \text{ Falso}$$

$$B \subseteq A \text{ Vero}$$

$$A \subset C \text{ Falso}$$

$$A \subseteq C \text{ Vero}$$

Si definisce *cardinalità* il numero degli elementi e si indica con $|A|$.

Due insiemi S e T si dicono *equipotenti*, indicato con $S \sim T$, se essi sono in corrispondenza univoca.

Gli insiemi numerici definiti nella Teoria degli insiemi sono i seguenti:

- \mathbb{N} : Insieme dei numeri Naturali
- \mathbb{Z} : insieme dei numeri interi
- \mathbb{Q} : insieme dei numeri razionali
- \mathbb{R} : insieme dei numeri reali
- \mathbb{C} : insieme dei numeri complessi

Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità indicata con \aleph_0 , dimostrato da Georg Cantor.

Gli insiemi \mathbb{R} e \mathbb{C} hanno la stessa cardinalità indicata con 2^{\aleph_0} , dimostrato da Georg Cantor mediante il principio di diagonalizzazione.

1.0.1 Tecnica di diagonalizzazione

La tecnica di diagonalizzazione è tecnica, inventata da Cantor, per dimostrare la non numerabilità dei Numeri Reali.

Essa consiste nel tentativo di costruire una bisezione tra un insieme X ed \mathbb{N} e verificare che qualche elemento di X sfugge alla bisezione.

1.1 Unione ed Intersezione

L'unione di due insiemi $S \cup T$ è l'insieme formato degli elementi di S e degli elementi di T .

L'intersezione di due insiemi $S \cap T$ è l'insieme degli elementi presenti in tutti e due gli insiemi.

$$S \cup T = \{x | x \in S \vee x \in T\}$$

$$S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$$

Esempio:

$$A = \{ \text{"Rosso"}, \text{"Arancio"}, \text{"Giallo"} \}$$

$$B = \{ \text{"Verde"}, \text{"Giallo"}, \text{"Marrone"} \}$$

$$A \cup B = \{ \text{"Rosso"}, \text{"Arancio"}, \text{"Giallo"}, \text{"Verde"}, \text{"Marrone"} \}$$

$$A \cap B = \{ \text{"Giallo"} \}$$

$$S = \{1, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 9\} \quad T = \{5, 4, 2, 9, 11, 34, 6\} \quad S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 34\}$$

$$S \cap T = \{2, 4, 5, 6, 9\}$$

Proposizione 1. *Proprietà dell'unione*

1. $S \cup S = S$ *Idempotenza*

2. $S \cup \emptyset = S$ *Elemento Neutro*
3. $S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$ *Associatività*
4. $S_1 \cup S_2 = S_2 \iff S_1 \subseteq S_2$
5. $(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3)$ *Commutatività*
6. $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$
7. $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$

Dimostrazione. 1. $S \cup S = \{x|x \in S \vee x \in S\} = S$

$$2. S \cup \emptyset = \{x|x \in \vee x \in \emptyset\} = S$$

3. $S_1 \cup S_2 = \{x|x \in S_1 \vee x \in S_2\}$ per definizione di Insieme si può scrivere anche $\{x|x \in S_2 \vee x \in S_1\} = S_2 \cup S_1$

4. Prima dimostriamo che $S_1 \cup S_2 = S_2 \rightarrow S_1 \subseteq S_2$ $S_1 \cup S_2 = \{x|x \in S_1 \vee x \in S_2\}$ Per ipotesi sappiamo che $S_1 \cup S_2 = S_2$ per cui tutti gli elementi di S_1 sono anche elementi di S_2 per cui si dimostra che $S_1 \subseteq S_2$. In maniera analoga si dimostra che $S_1 \subseteq S_2 \rightarrow S_1 \cup S_2 = S_2$.

5. Da Fare
6. Da Fare
7. Da fare

□

Proposizione 2. *Proprietà dell'Intersezione*

1. $S \cap S = S$
2. $S \cap \emptyset = \emptyset$
3. $S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$
4. $(S_1 \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3)$
5. $S_1 \cap S_2 = S_1 \iff S_1 \subseteq S_2$
6. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$
7. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$

Dimostrazione.

$$S \cap S = \{x|x \in S \wedge x \in S\} = S$$

$$S \cap \emptyset = \{x|x \in S \wedge x \in \emptyset\} = \emptyset$$

$S_1 \cap S_2 = \{x | x \in S_1 \wedge x \in S_2\}$ per definizione di insieme si può scrivere anche
 $\{x | x \in S_2 \wedge x \in S_1\} = S_2 \cap S_1$

Da Fare

Da Fare

Da Fare

Da Fare

□

L'unione e l'intersezione sono legate dalle proprietà distributive:

1. $S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$
2. $S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3)$

1.2 Complementare

Dato un insieme U , detto Universo, si dice *complemento* di S , indicato con \bar{S} , la differenza di un sottoinsieme S di U rispetto ad U .

$$\bar{S} = \{x | x \in U \wedge x \notin S\}$$

Esempio:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$S = \{2, 4, 6\}$$

$$\bar{S} = \{1, 3, 5, 7\}$$

Proposizione 3. *Proprietà:*

1. $\bar{\bar{U}} = \emptyset$
2. $\bar{\emptyset} = U$
3. $\bar{\bar{S}} = S$
4. $(S_1 \cup S_2) = \bar{\bar{S}_1 \cap S_2}$
5. $(S_1 \cap S_2) = \bar{\bar{S}_1 \cup S_2}$
6. $S \cap \bar{S} = \emptyset$
7. $S \cup \bar{S} = U$
8. $S_1 = S_2 \iff \bar{S}_1 = \bar{S}_2$
9. $S_1 \subseteq S_2 \iff \bar{S}_2 \subseteq \bar{S}_1$

1.3 Differenza di Insiemi

Dati 2 insiemi S e T chiamiamo $S \setminus T$ l'insieme *differenza* costituito da tutti gli elementi di S che non sono elementi di T .

$$S \setminus T = \{x \mid x \in S \wedge x \notin T\}$$

Esempio:

$$S = \{a, b, c, d, e\} \quad T = \{a, c, f, g, e, h\}$$

$$S \setminus T = \{b, d\}$$

Proposizione 4. *Proprietà Differenza*

1. $S \setminus S = \emptyset$
2. $S \setminus \emptyset = S$
3. $\emptyset \setminus S = \emptyset$
4. $(S_1 \setminus S_2) \setminus S_3 = (S_1 \setminus S_3) \setminus S_2 = S_1 \setminus (S_2 \cup S_3)$
5. $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap \bar{S}_2$

La *differenza simmetrica* di due insiemi S_1 e S_2 , indicata con $S_1 \triangle S_2$, è definita come $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$

Proposizione 5. *Proprietà Differenza simmetrica*

1. $S \triangle S = \emptyset$
2. $S \triangle \emptyset = S$
3. $S_1 \triangle S_2 = S_2 \triangle S_1$
4. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (S_2 \cap \bar{S}_1)$
5. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2)$

1.4 Partizione di un Insieme

Dato un insieme non vuoto S , una partizione di S è una famiglia F di sottoinsiemi di S tale che

1. ogni elemento di S appartiene a qualche elemento di F , ossia $\cup F = S$
2. due elementi qualunque di F sono disgiunti ossia $\cap F = \emptyset$

La partizione non può avere come elemento l'insieme vuoto in quanto esso non appartiene agli elementi dell'insieme A .

Esempio: $A = \{1, 2, 3\}$

$$Par(A) = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$$

1.5 Funzione Caratteristica

Sia U un insieme assunto come Universo, si definisce come *funzione caratteristica* di un sottoinsieme $S \subseteq U$ come: $car(S, x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$

1.6 Insieme delle Parti

L'insieme delle Parti di un insieme S , indicato con $\wp S$, è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi dell'insieme S .

$$\wp S = \{X | X \subseteq S\}$$

Definizione 1. Se S è composto da $n \geq 0$ elementi, il numero di elementi di $\wp S$ è 2^n .

Dimostrazione. Supponendo di avere una sequenza binaria di 3 bit, le cui possibili combinazioni vengono rappresentate da 2^k con $k = \text{numero di bit}$. Prendendo un insieme $A = \{ "a", "b", "c" \}$ e utilizzando la funzione caratteristica, con la convenzione di indicare il primo elemento dell'insieme A a destra, si nota che le sequenze di bit sono uguali alla sequenza ottenuta utilizzando la funzione caratteristica. \square

1.7 Prodotto Cartesiano, Coppie Ordinate e Sequenze

Le coppie Ordinate sono una collezione di 2 oggetti in cui non si prescinde dall'ordine e dalla ripetizione infatti $(a, b) \neq (b, a)$ e $\langle 1, 2, 1, 4 \rangle \neq \langle 1, 2, 4 \rangle$.

Una n -upla ordinata x_1, \dots, x_n è definita come $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$ dove $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ è una $(n-1)$ -upla ordinata.

Si definisce come *sequenza*, una sequenza di oggetti in cui non si prescinde dalla molteplicità degli elementi.

Dati 2 insiemi A e B , non necessariamente distinti, si definisce come *Prodotto Cartesiano*, indicato con $A \times B$, l'insieme di tutte le coppie in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo elemento della coppia appartiene ad B .

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Esempio:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 4, 5\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$\text{Esempio: } S = \{4, 14, 56\} \quad T = \{3, 46, 12\} \quad S \times T = \{(4, 3), (4, 46), (4, 12), (14, 3), (14, 46), (14, 12), (56, 3), (56, 46), (56, 12)\}$$

1.8 Multiinsiemi

Si definisce come *multiinsiemi* una collezione di elementi in cui si prescinde dall'ordine ma non dalla molteplicità degli elementi.

Si può anche definire come una funzione $M : E \mapsto \mathbb{N}$ che associa ad ogni elemento di un insieme E finito o numerabile, un numero, appartenente ad \mathbb{N} indicante il numero di occorrenze dell'elemento di E nel multiinsieme M . La cardinalità di un multiinsieme M è definita come $|M| = \sum_{e_i \in E} M(e_i)$

Esempio: $S = (1,2,1,3,4,4,2,3,3)$ $T = (2,1,3,1,4,4,3,2,3)$ Sono due multiinsiemi uguali con cardinalità 9

1.8.1 Operazioni su Multiinsiemi

Intersezione : $M_1 \cap M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = \min(M_1(e), M_2(e)) \forall e \in E$

Unione : $M_1 \cup M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = \max(M_1(e), M_2(e)) \forall e \in E$

Unione Disgiunta : $M_1 \uplus M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = M_1(e) + M_2(e) \forall e \in E$

Capitolo 2

Relazioni

Si definisce *relazione n-aria* un sottoinsieme del prodotto cartesiano rappresentato da tutte le coppie che rispettano la relazione voluta tra gli n insiemi. Si definisce *arietà* di una relazione il numero e il tipo degli argomenti di una relazione.

Dominio: insieme degli elementi x tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualsiasi y .

Codominio: insieme degli elementi y tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualsiasi x .

Esempio:

$A \times B = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \}$

$R \subseteq A \times B$

$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \}$

$R \subseteq B \times A$

$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$

Data una relazione R definita su un dominio S si definiscono le seguenti proprietà:

- Riflessiva $\iff \forall x \in S \quad xRx$
- Irriflessiva $\iff \forall x \in S \quad x \not R x$
- Simmetrica $\iff xRy \rightarrow yRx$
- Asimmetrica: $\iff xRy \rightarrow y \not R x$
- Antisimmetrica: $\iff xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$
- Transitiva: $\iff xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

Sulle relazioni si possono applicare le usuali operazioni insiemistiche quindi, ad esempio, date $R_1 \subseteq S \times T$ e $R_2 \subseteq S \times T$ anche $R_1 \cup R_2$ è una relazione su $S \times T$.

Data una relazione binaria $R \subseteq S \times T$ definiamo *relazione complementare* $\bar{R} \subseteq S \times T$ come $x\bar{R}y \iff \langle x, y \rangle \notin R$. Per definizione si ha $\bar{\bar{R}} = R$ e $R \cup \bar{R} = S \times T$.

Data una relazione binaria $R \subseteq S \times T$ esiste sempre la *relazione inversa* $R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \} \subseteq T \times S$. Per definizione $(R^{-1})^{-1} = R$

Definizione 2. Date due relazioni R e R' definite su S si ha:

1. se R è riflessiva anche R^{-1} è Riflessiva
2. R è riflessiva se e solo se \bar{R} è riflessiva
3. se R e R' sono riflessive anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono riflessive

Definizione 3. Date due relazioni R e R' definite su S , si ha:

1. R è simmetrica se e solo se $R = R^{-1}$
2. se R è simmetrica anche R^{-1} e \bar{R} sono simmetriche
3. R è antisimmetrico se e solo se $R \cap R^{-1} \subseteq \varnothing S$
4. R è asimmetrica se e solo se $R \cap R^{-1} = \emptyset$
5. se R e R' sono simmetriche anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono simmetriche

Definizione 4. Siano R e R' due relazioni su S , se R e R' sono transitive anche $R \cap R'$ è transitiva.

2.1 Rappresentazione di Relazioni

Vi sono diverse modalità di rappresentazione delle relazioni, il cui metodo migliore dipendono dall'arietà della relazione, che sono:

Tabella a n colonne è una matrice a due dimensioni con righe, rappresentanti gli elementi, e colonne, indicanti gli insiemi; è conveniente utilizzare quando l'arietà della relazione è ≥ 2 .

Grafo Bipartito è un grafo in cui si elencano gli elementi di tutti gli insiemi e si usano delle frecce, chiamate archi, per indicare l'associazione tra gli elementi. E' meglio utilizzare il grafo bipartito soltanto per le relazioni binarie.

Matrice Booleana è una matrice M_R a valori $\{0,1\}$ composta da n righe e m colonne

Grafi modalità di rappresentazione di relazioni binarie (spiegate in un paragrafo successivo)

2.1.1 Tabelle

Si vuole definire la relazione *anagrafica* $\subseteq \text{CognomixNomixDatexLuoghi}$

C	N	D	L
Moscato	Ugo	10/1/57	Milano
Iaquinta	Vincenzo	13/5/68	Udine
Inzaghi	Filippo	23/5/78	Piacenza

2.1.2 Grafo Bipartito

Dati due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 7, 1\}$ si definisce la relazione $R \subset A \times B = \{(1, 7), (1, 1), (2, 4), (3, 7), (3, 4)\}$.

2.1.3 Matrice Booleana

La *Matrice booleana* è una matrice M_R , composta da n righe e m colonne, i cui elementi sono definiti come $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \langle s_i, t_j \rangle \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Inserire esempi!!!!

Da una matrice booleana si possono determinare facilmente le proprietà di una relazione R , definita su S , soprattutto la proprietà simmetrica e la riflessiva.

La *Matrice Complementare* $M_{\bar{R}}$ è costituita dai seguenti elementi $\bar{m}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } m_{ij} = 0 \\ 0 & \text{se } m_{ij} = 1 \end{cases}$

La *Matrice inversa* $M_{R^{-1}}$ è la trasposta della matrice M_R .

Date due matrici A e B , entrambe di $n \times m$ elementi, si definiscono 3 operazioni:

MEET $A \sqcap B = C$: è una matrice booleana i cui elementi sono: $c_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 0 \vee b_{ij} = 0 \end{cases}$

JOIN $A \sqcup B = C$: è una matrice booleana i cui elementi sono: $c_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 0 \wedge b_{ij} = 0 \end{cases}$

PRODOTTO BOOLEANO $A \odot B$: è una matrice booleana $n \times p$, i cui elementi sono: $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se per qualche } k (1 \leq k \leq m) \text{ si ha } a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Inserire Esempi

2.2 Composizione di Relazioni

Data una relazione $R_1 \subseteq S \times T$ e una relazione $R_2 \subseteq T \times Q$, si definisce come relazione composta $R_1 \circ R_2 \subseteq S \times Q$ come segue $(a, c) \in R_1 \circ R_2 \iff \exists b \in T \mid (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2$

Esempio: Siano $S = \{a, b\}$, $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ e $R_2 = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$
 $R_1 \circ R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
 $R_2 \circ R_1 = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$

Proposizione 6. *La composizione di Relazioni non è commutativa ma invece è associativa*

Teorema 1. *Se $R_1 \subseteq SxT$ e $R_2 \subseteq TxQ$, allora $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$*

2.3 Relazioni di Equivalenza

Si definisce R una *relazione di equivalenza* se e solo se la relazione binaria R è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Data una relazione di equivalenza R definita su un insieme S , si definisce *classe di equivalenza* di un elemento $x \in S$ come $[x] = \{y \mid x, y \in R\}$

Teorema 2. *Se R è una relazione di equivalenza su S , allora le classi di Equivalenza generate da R partizionano S*

Data una relazione di equivalenza in S , la partizione che essa determina si dice *insieme quoziente* di S rispetto alla relazione di equivalenza e si indica con $S/$

2.4 Struttura relazionale

Una struttura relazionale SR è una n -upla in cui il primo componente è un Insieme non vuoto S e le rimanenti componenti sono relazioni su S^n .

2.4.1 Tipologie di Ordinamenti

PREORDINE : è una struttura relazionale (S, R) in cui S è un insieme non vuoto e R è una relazione binaria *riflessiva* e *transitiva* su $S \times S$

ORDINE STRETTO : è una struttura relazionale (S, R) in cui R è una relazione binaria *irriflessiva* e *transitiva* su $S \times S$

ORDINE LARGO (POSET) : è una struttura relazionale (S, R) in cui R è una relazione binaria *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva* su $S \times S$.

Una relazione R è un ordinamento sull'insieme S se e solo se $\forall x, y \in S$ vale solo una delle proprietà di *tricotomia*:

- $x = y \wedge \neg(xRy) \wedge \neg(yRx)$
- $xRy \wedge x \neq y \wedge \neg(yRx)$
- $yRx \wedge x \neq y \wedge \neg(xRy)$

Proposizione 7. *Se (S, R) è una struttura relazionale anche (S, R^{-1}) rappresenta la stessa struttura relazionale chiamata e (S, R^{-1}) è il duale di (S, R) .*

Proposizione 8. *Il grafo di un Poset non ha cicli di lunghezza maggiore di 1*

2.4.2 Diagramma di Hasse

Il grafo di un poset può essere rappresentato dal *diagramma di Hasse*, un grafo con le seguenti proprietà:

- si prescinde dal disegnare i cappi in quanto il poset è una relazione riflessiva
- si prescinde dal disegnare gli archi definiti per transitività
- il grafo si legge dal basso verso l'alto

esempio

Proposizione 9. *Dato un poset (S, R) e un insieme $X \subseteq S$ si hanno le seguenti proprietà:*

massimale : un elemento $s \in S$ è massimale se $\nexists s' \in S : s \leq s'$

minimale : un elemento $s \in S$ è minimale se $\nexists s' \in S : s \geq s'$

maggiorante : un elemento $s \in S$ è un maggiorante se $\forall x \in X$ si ha $s \geq x$

minorante : un elemento $s \in S$ è un minorante se $\forall x \in X$ si ha $s \leq x$

minimo maggiorante : un elemento $s \in S$ è un minimo maggiorante, indicato con $\sqcup X$, se è un maggiorante e per ogni altro maggiorante s' di X si ha $s \leq s'$.

massimo minorante : un elemento $s \in S$ è un massimo minorante, indicato con $\sqcap X$, se è un minorante e per ogni altro minorante s' di X si ha $s' \leq s$

massimo : se $\sqcup X \in X$ si dice che $\sqcup X$ è un massimo.

minimo : se $\sqcap X \in X$ si dice che $\sqcap X$ è un minimo.

2.4.3 Reticoli

Un *Reticolo* è un poset (S, R) in cui per ogni coppia $x, y \in S$ esistono il massimo minorante(indicato con $x \sqcap y$) e il minimo maggiorante(indicato con $x \sqcup y$). Se un poset (S, R) è un reticolo anche il suo poset duale è un reticolo.

Capitolo 3

Funzioni

Si definisce *funzione* $f : S \mapsto T$ una relazione $f \subseteq S \times T$ tale che $\forall x \in S$ esiste al più un $y \in T$ per cui $\langle x, y \rangle \in f$.

Se il $\text{dom}(f) = S$ la funzione si dice *totale* altrimenti la funzione è *parziale*.

3.1 Tipologie di Funzioni

Una funzione $f : S \mapsto T$ si dice:

iniettiva : $\forall x, y \in S, x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$

suriettiva : $\forall y \in T \exists x \in S : f(x) = y$

biettiva : se la funzione è iniettiva e suriettiva

Esempi: $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale, suriettiva ma non iniettiva

$*$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale, suriettiva ma non è iniettiva *successore* :

$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale ed è iniettiva ma non suriettiva *successore* :

$\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ è una funzione totale ed è biettiva

Una funzione $f : S \mapsto T$ è detta *invertibile* se la sua relazione inversa f^{-1} è essa stessa una funzione.

Una funzione $f : S \mapsto T$ ammette una *funzione inversa* $f^{-1} : T \mapsto S$ se e solo se f è una funzione iniettiva.

3.2 Proprietà funzioni inverse

Sia $f : A \mapsto B$ invertibile, con funzione inversa f^{-1} :

1. f^{-1} è totale $\iff f$ è suriettiva

2. f è totale $\iff f^{-1}$ è suriettiva

Date due funzioni $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ si definisce *funzione composta* $g \circ f : S \mapsto Q$ la funzione tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in S$. La funzione composta $(g \circ f)(x)$ è definita se e solo se sono definite entrambe $g(f(x))$ e $f(x)$

Siano $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ invertibili. Allora $g \circ f$ è invertibile e la sua inversa è $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3.3 Operazioni

Si definisce come *operazione n-aria* su un insieme S , una funzione $f : S^n \mapsto S$ con $n \geq 1$. Se f è un'operazione binaria su S , essa si può rappresentare anche mediante la notazione infissa $x_1 f x_2$ invece di $f(x_1, x_2)$

Capitolo 4

Induzione

L'induzione è un importante strumento per la definizione di nuovi insiemi, come ad esempio l'insieme delle FBF (Formule ben Formate), e la dimostrazione di determinate proprietà di un insieme.

4.1 Principio di Induzione

Il principio di Induzione si utilizza per dimostrare la correttezza di determinate proprietà dell'insieme dei numeri Naturali.

Il principio di induzione viene definito nel seguente modo:

Data una proposizione $P(x)$ valida per $\forall x \in N$ bisogna:

1. **Caso Base:** Verificare $P(i)$ con i indicante i primi elementi della proposizione
2. **Passo Induttivo:** Supposto $P(x)$ vero bisogna verificare la verità di $P(x + 1)$

Esempio:

Teorema 3. $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. **Base** $n = 0$ $\sum_{i=0}^0 i = \frac{0(0+1)}{2} \quad 0 = 0$ vero

Ipotesi Induttiva: $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi Induttiva: $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n +1i &= \sum_{i=0}^n +(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

□

Esempio:

Teorema 4. $\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$

Dimostrazione. Dimostrazione

Base $n = 1$ $\sum_{i=1}^1 2i - 1 = 1^2$ $1 = 1$ è vero

Ipotesi Induttiva: $\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2$

Tesi Induttiva: $\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = (n+1)^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 &= \sum_{i=1}^n 2i - 1 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2
\end{aligned}$$

□

4.2 Definizione Induttiva

L'induzione permette anche di definire nuovi insiemi nel seguente modo:

1. si definisce un insieme di "oggetti base" appartenenti all'insieme.
2. si definisce un insieme di operazioni di costruzione che, applicate ad elementi dell'insieme, producono nuovi elementi dell'insieme.
3. nient'altro appartiene all'insieme definito.

Esempio: Definizione induttiva di numeri naturali

1. $0 \in N$
2. Se $x \in N$ allora $s(x) \in N$
3. Nient'altro appartiene ai numeri naturali

Capitolo 5

Logica Proposizionale

La logica è lo studio del ragionamento e dell'argomentazione e, in particolare, dei procedimenti inferenziali, rivolti a chiarire quali procedimenti di pensiero siano validi e quali no.

Vi sono molteplici tipologie di logiche, come ad esempio la logica classica e le logiche costruttive, tutte accomunate di essere composte da 3 elementi:

- **Linguaggio**:insieme di simboli utilizzati nella Logica per definire le cose
- **Sintassi**:insieme di regole che determina quali elementi appartengono o meno al linguaggio
- **Semantica**:permette di dare un significato alle formule del linguaggio e determinare se rappresentano o meno la verità.

Noi ci occupiamo della logica Classica che si compone in LOGICA PROPOSIZIONALE e *logica predicativa*.

La Logica proposizionale è un tipo di logica Classica che presenta come caratteristica quella di essere un linguaggio limitato in quanto si possono esprimere soltanto proposizioni senza avere la possibilità di estenderla a una classe di persone.

5.1 Linguaggio e Sintassi

Il linguaggio di una logica proposizionale è composto dai seguenti elementi:

- Variabili Proposizionali: $P, Q, R \dots$
- Connettivi Proposizionali: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \iff$
- Simboli Ausiliari: $(,)$
- Costanti: T, F

La sintassi di un linguaggio è composta da una serie di formule ben formate (FBF) definite induttivamente nel seguente modo:

1. Le costanti e le variabili proposizionali $\in FBF$.
2. Se A e $B \in FBF$ allora $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \rightarrow B), (A \iff B), TA$ e FA sono delle formule ben formate.
3. nient'altro è una formula

Esempio:

$(P \wedge Q) \in Fbf$ è una formula ben formata

$(PQ \wedge R) \notin Fbf$ in quanto non si rispetta la sintassi del linguaggio definita.

Sia $A \in FBF$, l'insieme delle sottoformule di A è definito come segue:

1. Se A è una costante o variabile proposizionale allora A stessa è la sua sottoformula
2. Se A è una formula del tipo $(\neg A')$ allora le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di A' ; \neg è detto connettivo principale e A' sottoformula immediata di A .
3. Se A è una formula del tipo BoC dove o è un connettivo binario della logica proposizionale e B ed C due formule; le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di B e C ; o è il connettivo principale e B e C sono le due sottoformule immediate di A .

È possibile ridurre ed eliminare delle parentesi attraverso l'introduzione della precedenza tra gli operatori, che è definita come segue:

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$.

In assenza di parentesi una formula va parentizzata privilegiando le sottoformule i cui connettivi principali hanno la precedenza più alta.

In caso di parità di precedenza vi è la convenzione di associare da destra a sinistra.

Esempio:

$\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C) \vee D$ diventa $((\neg A) \wedge ((\neg B) \rightarrow C) \vee D)$.

5.2 Semantica

La semantica di una logica consente di dare un significato e un'interpretazione alle formule del Linguaggio attraverso le tabelle di verità.

Si definisce $v(T) = 1$ e $v(F) = 0$ per cui 1 rappresenta la verità mentre lo 0 la falsità di una variabile, sottoformula e formula.

I connettivi della Logica Proposizionale hanno la seguente tabella di verità:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Una formula nella logica proposizionale può essere di tre diversi tipi:

Tautologica : la formula è soddisfatta da qualsiasi valutazione della Formula

Soddisfacibile non Tautologica : la formula è soddisfatta da qualche valutazione della formula ma non da tutte.

Contraddizione : la formula non viene mai soddisfatta

Esempio:

Formula $A \wedge \neg A$ contraddizione

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
0	1	0
1	0	0

Formula $Z = (A \wedge B) \vee C$ soddisfacibile non Tautologica

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Formula $X = (A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \wedge C)$ Soddisfacibile non tautologica

A	B	C	$\neg A$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge C$	X
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Formula $Y = \neg(A \wedge B) \iff (A \vee B \Rightarrow C)$ soddisfacibile non Tautologica

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	Y
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

5.2.1 Modelli e decidibilità

Si definisce *modello*, indicato con $M \models A$, tutte le valutazioni booleane che rendono vera la formula A . Si definisce *contromodello*, indicato con $M \not\models A$, tutte le valutazioni booleane che rendono falsa la formula A .

La logica proposizionale è decidibile (posso sempre verificare il significato di una formula). Esiste infatti una procedura effettiva che stabilisce la validità o no di una formula, o se questa ad esempio è una tautologia. In particolare

il verificare se una proposizione è tautologica o meno è l'operazione di decidibilità principale che si svolge nel calcolo proposizionale.

Definizione 5. Se $M \models A$ per tutti gli M , allora A è una tautologia e si indica $\models A$

Definizione 6. Se $M \models A$ per qualche M , allora A è soddisfacibile

Definizione 7. Se $M \models A$ non è soddisfatta da nessun M , allora A è insoddisfacibile

5.3 Sistema Deduttivo

Il sistema deduttivo è un metodo di calcolo che manipola proposizioni, senza la necessità di ricorrere ad altri aspetti della logica.

Nella logica proposizionale, tramite i teoremi di completezza e correttezza, esiste una corrispondenza tra le formule derivanti dal sistema deduttivo e le formule verificabili tramite la semantica della logica.

I sistemi deduttivi della logica proposizionale sono i seguenti:

Sistema deduttivo Hilbertiano : non viene analizzato

Metodo dei Tableau

Risoluzione Proposizionale : non viene analizzato !!!!

Definizione 8. Una sequenza di formule A_1, \dots, A_n di Λ è una dimostrazione se per ogni i compreso tra 1 e n , A_i è un assioma di Λ oppure una conseguenza diretta di una formula precedente.

Definizione 9. Una formula A di una logica Λ è detta teorema di Λ , indicata con $\vdash A$ se esiste una dimostrazione di Λ che ha A come ultima formula

Una dimostrazione di una formula di una logica può venire tramite:

- **Metodo diretto:** Data un'ipotesi, attraverso una serie di passi si riesce a dimostrare la correttezza della Tesi
- **Metodo per assurdo**(non sempre accettato in tutte le logiche): Si nega la tesi ed attraverso una serie di passi si riesce a dimostrare la negazione delle ipotesi.

Teorema 5. Un apparato deduttivo R è completo se, per ogni formula $A \in Fbf$, $\vdash A$ implica $\models A$

Teorema 6. Un apparato deduttivo R è corretto se, per ogni formula $A \in Fbf$, $\models A$ implica $\vdash A$

5.3.1 Tableau Proporzionali

Il metodo dei Tableau è stato introdotto da Hintikka e Beth alla fine degli anni '50 e poi ripresi successivamente da Smullyan.

I tableau sono degli alberi, la cui radice è l'enunciato in esame, e gli altri nodi sono costruiti attraverso l'applicazione di una serie di regole, fino ad arrivare alle formule atomiche come radici.

Le regole dei Tableau sono le seguenti:

$$\begin{array}{l}
 \frac{T \wedge}{S, TA \wedge B} \\
 \frac{S, TA, TB}{T \vee} \\
 \frac{S, TA \vee B}{T \neg} \\
 \frac{S, TA/S, TB}{T \neg} \\
 \frac{S, T \neg A}{T \Rightarrow} \\
 \frac{S, FA}{T \Rightarrow} \\
 \frac{S, TA \Rightarrow B}{S, FA/S, TB} \\
 T \iff (\text{da fare}) \\
 \frac{F \wedge}{S, FA \wedge B} \\
 \frac{S, FA/S, TB}{F \vee} \\
 \frac{S, FA \vee B}{S, FA, FB} \\
 \frac{S, F \neg A}{F \neg} \\
 \frac{S, TA}{F \Rightarrow} \\
 \frac{S, FA \Rightarrow B}{S, TA, FB} \\
 F \iff (\text{da fare})
 \end{array}$$

Il metodo dei Tableau è un metodo dei sistemi deduttivi, che permette attraverso l'applicazione di una serie di regole, di capire la tipologia della formula.

Tipologia	Fare Tableau per	Chiuso?	Aperto?
Teorema	$\neg A$	Si	No
Soddisfacibile	A	No	Si
Contraddittoria	A	Si	No

5.4 Equivalenze Logiche

Due proposizioni A e B sono logicamente equivalenti se e solo se A e B hanno la stessa valutazione booleana.

Nella logica proposizionale sono definite le seguenti equivalenze logiche, indicate con \equiv :

1. Idempotenza

$$\begin{aligned} A \vee B &\equiv A \\ A \wedge B &\equiv A \end{aligned}$$

2. Associatività

$$\begin{aligned} A \vee (B \vee C) &\equiv (A \vee B) \vee C \\ A \wedge (B \wedge C) &\equiv (A \wedge B) \wedge C \\ A \iff (B \iff C) &\equiv (A \iff B) \iff C \end{aligned}$$

3. Commutatività

$$\begin{aligned} A \vee B &\equiv B \vee A \\ A \wedge B &\equiv B \wedge A \\ A \iff B &\equiv B \iff A \end{aligned}$$

4. Distribuitività

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ A \wedge (B \vee C) &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{aligned}$$

5. Assorbimento

$$\begin{aligned} A \vee (A \wedge B) &\equiv A \\ A \wedge (A \vee B) &\equiv A \end{aligned}$$

6. Doppia negazione

$$\neg\neg A \equiv A \tag{5.1}$$

7. Leggi di De Morgan

$$\begin{aligned}\neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B\end{aligned}$$

8. Terzo escluso

$$A \vee \neg A \equiv T \quad (5.2)$$

9. Contrapposizione

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A \quad (5.3)$$

10. Contraddizione

$$A \wedge \neg A \equiv F \quad (5.4)$$

5.5 Completezza di insiemi di Connettivi

Un insieme di connettivi logici è completo se mediante i suoi connettivi si può esprimere un qualunque altro connettivo. Nella logica proposizionale valgono anche le seguenti equivalenze, utili per ridurre il linguaggio,:

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) &\equiv (\neg A \vee B) \\ (A \vee B) &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \\ (A \wedge B) &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \\ (A \iff B) &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\end{aligned}$$

L'insieme dei connettivi $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee\}$ sono completi e ciò è facilmente dimostrabile utilizzando le seguenti equivalenze logiche

Capitolo 6

Logica Predicativa

La logica Predicativa, detta anche logica del primo ordine, si ha la possibilità di predicare le proprietà di una classe di individui.

É una logica semidecidibile, in quanto è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo, per cui non sempre tramite una sequenza di passi si riesce a capire la tipologia di formula.

6.1 Linguaggio e Sintassi

Un linguaggio predicativo L è composto dai seguenti insiemi di simboli:

1. Insieme di variabili individuali(infiniti) x, y, z, \dots
2. Connettivi logici $\wedge \vee \neg \rightarrow \iff$
3. Quantificatori esistenziali $\forall \exists$
4. Simboli "(" , ")" e " , "
5. Costanti proposizionali T, F
6. Simbolo di uguaglianza $=$, eventualmente assente

Questa è la parte del linguaggio tipica di ogni linguaggio del primo ordine poi ogni linguaggio definisce la propria segnatura ossia definisce in maniera autonomo:

1. Insiemi di simboli di costante a, b, c, \dots
2. Simboli di funzione con arieta f, g, h, \dots
3. Simboli di predicato P, Q, Z, \dots con arietà

Per definire le formule ben formate della logica Predicativa bisogna prima definire l'insieme di termini e le formule atomiche.

Definizione 10. L'insieme $TERM$ dei termini è definito induttivamente come segue

1. Ogni variabile e costante sono dei Termini
2. Se $t_1 \dots t_n$ sono dei termini e f è un simbolo di funzione di arietà n allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine

Definizione 11. L'insieme $ATOM$ delle formule atomiche è definito come:

1. T e F sono degli atomi
2. Se t_1 e t_2 sono dei termini, allora $t_1 = t_2$ è un atomo
3. Se t_1, \dots, t_n sono dei termini e P è un predicato a n argomenti, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è un atomo.

Definizione 12. L'insieme delle formule ben formate (FBF) di L è definito induttivamente come

1. Ogni atomo è una formula
2. Se $A, B \in FBF$, allora $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ e $A \iff B$ appartengono alle formule ben formate
3. Se $A \in FBF$ e x è una variabile, allora $\forall x A$ e $\exists x A$ appartengono alle formule ben formate
4. Nient'altro è una formula

La precedenza tra gli operatori logici è definita nella logica predicativa come segue $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$ e si assume che gli operatori associno a destra.

Definizione 13. L'insieme $var(t)$ delle variabili di un termine t è definito come segue:

- $var(t) = \{t\}$, se t è una variabile
- $var(t) = \emptyset$ se t è una costante
- $var(f(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n var(t_i)$
- $var(R(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n var(t_i)$

Si definisce *Termine chiuso*, un termine che non contiene variabili altrimenti si definisce il termine come *chiuso*.

Le variabili nei termini e nelle formule atomiche possono essere soltanto delle Variabili libere in quanto gli unici operatori che "legano" le variabili sono i quantificatori.

Il campo di azione dei quantificatori si riferisce soltanto alla parte in cui si applica il quantificatore per cui una variabile si dice *libera* se non ricade nel campo di azione di un quantificatore altrimenti la variabile si dice *vincolata*.

6.2 Sistemi Deduttivi predicativi

Comprendere la tipologia della formula tramite la sua semantica nella logica predicativa è più complesso rispetto alla semantica della logica proposizionale per cui l'apparato deduttivo e la sua correttezza e completezza rispetto alla semantica assumono particolare rilevanza.

6.2.1 Sostituzioni

6.2.2 Tautologie e sostituzioni uniformi

6.2.3 Tableau Predicativi

I tableau predicativi è un apparato deduttivo che permette di stabilire la tipologia di una formula del linguaggio mediante l'applicazione di una serie di regole. Mantiene le stesse modalità di dimostrazione dei tableaux proposizionale e le stesse definizioni di espansioni del Tableaux.

$S, T\exists xA(x)$	$S, F\exists xA(x)$
$S, TA(a)$ con a un nuovo simbolo di variabile	$S, FA(a), F\exists xA(x)$
$S, T\forall xA(x)$	
$S, TA(a), T\forall xA(x)$	
$S, F\forall xA(x)$	
$S, FA(a)$ con a un nuovo simbolo di variabile	

Nelle tableaux regole $T\exists$ e $F\forall$ bisogna introdurre un nuovo simbolo di variabile, in quanto non si poteva conoscere prima dell'applicazione della regola il valore della variabile, mentre nelle altre due si può utilizzare qualsiasi variabile. Il fatto di portarsi dietro la formula nell'applicazione delle regole dei tableaux porta alla semidecidibilità.

Nei tableau predicativi l'ordine di applicazione delle regole, quando è possibile sceglierlo, cambia la chiusura o meno del Tableaux.

Le euristiche nell'applicazione delle regole dei Tableaux sono le seguenti:

- Applicare prima le regole che non ramificano il tableaux
- Applicare prima le regole che vincolano all'introduzione di nuovi parametri
- Quando si ha la possibilità di scegliere il parametro, conviene sceglierlo uno già scelto.

6.3 Equivalenze logiche

Nella logica predicativa sono definite le seguenti equivalenze Logiche

6.4 Semantica

Il connettivo $A \iff B$ equivale per definizione ad $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ per cui quando si usa il \iff si utilizza l'equivalenza definita. *Tableaux di* $FA \iff B$ utilizzare la definizione data

Struttura di Interpretazione (Semantica) $S = \langle D, I \rangle$ D (dominio) è un insieme finito/infinito di costanti I (interpretazione) è una funzione che associa a simboli e formule del linguaggio un significato a partire dai simboli primitivi del linguaggio (costanti, predicati e funzioni) cioè l'interpretazione varierà a seconda della signature del linguaggio

Si può interpretare questa struttura come una funzione che associa ad ogni costante una costante del Linguaggio $C_i \mapsto C_d : C_d \in D$

Logica Aritmetica di Peano Linguaggio: $0, s(x), +, *, =$ è la signature

Dominio: tutti e numeri Naturali L'unica costante del linguaggio 0 viene associato la costante del Dominio 0 . Può sembrare strano ma sono dei numeri diversi in quanto $0 \in \text{Linguaggio} \mapsto 0 \in N$ ossia si associa ad un elemento del linguaggio una sua interpretazione

In Logica Proposizionale abbiamo sviluppato indipendente la parte sintattica e la parte semantica e con il Teorema di correttezza li abbiamo messi assieme. Anche a livello predicativo è possibile definibile in maniera chiara la semantica ed è definito il teorema di Completezza

In logica chiamiamo Numerale la costante del linguaggio e Numero la sua interpretazione

Ho un simbolo di funzione con n argomenti $f_L^n(t_1 \dots t_n) \mapsto I(t_k)$ quando $t_k = f(t_1 \dots t_n)$ ossia associa ad ogni elemento della funzione una sua interpretazione

$I(P(t_1 \dots t_n)) = \langle t_1 \dots t_n \rangle$ dove $I(P) \mapsto R^n$ P è l'insieme delle n -uple che stanno nella relazione definita

Il successore viene interpretato come la funzione successore

Esempio: $ss(0) \mapsto 2 \in N$ in quanto 0 lo interpreto come 0 , il successore di 0 come 1 e il successore di 1 è 2 e questo due è l'interpretazione di $s(s(0))$

Esempio Interpretazione relazione Il Predicato $=$ viene interpretato come l'insieme delle coppie che hanno i numeri uguali $= \mapsto \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \dots, \langle n, n \rangle$

Esempio: $x + y = z +$ è una funzione del linguaggio Fissato il $s(0)$ $es(s(0))$ $s(0) + s(s(0)) \mapsto 3 \in N$ è l'interpretazione di $s(0)$ e l'interpretazione del $s(s(0))$

Come si interpretano le formule contenenti delle variabili libere? η che associa alle variabili libere un'interpretazione allora grazie a questa funzione η possiamo valutare la formula come vera o falsa

Es: $x \mapsto s(0)$ $y \mapsto 0$ $z \mapsto s(0)$ Allora $x + y = z$ con questi valori è vera

Formula aperta ha senso chiedersi Si dice che una formula aperta se esiste un assegnamento alle variabili che la rende vera Si dice che una formula aperta se non esiste un assegnamento alle variabili che la rende vera

Data una struttura S e $\eta \models \neg P(t_1 \dots t_n)$ si dice che è vera se esiste un'interpretazione di $P(t_1 \dots t_n)$ che la rende vera

Se una formula è chiusa allora non necessita della funzione η in quanto l'interpretazione è unica

$S, \eta \models \neg A \wedge B$ è vera se $S, \eta \models \neg A$ e $S, \eta \models B$

$S, \eta \models \neg \exists x A(x) \iff S, \eta \models \neg A(a) \text{ per ogni } a \in D$ S contiene il Dominio

$S, \eta \models \neg \forall x A(x) \iff S, \eta \models \neg A(a) \text{ per qualche } a \in D$

Dirò che una formula è valida se è sempre valida qualsiasi struttura

Tutte le formule dimostrate con il metodo dei Tableau devono essere valide
Modello è un'interpretazione che rende vere le formule di una teoria
Tutte le formule del primo Ordine dimostrabili sono sempre valide per il teorema di Completezza
Teoria è fatta da un insieme di assiomi e da una logica
 $T = Ax + L$ Ad esempio prendendo la teoria dell'Aritmetica di Peano gli diamo una serie di assiomi e una logica i cui modelli sono tutte le formule che soddisfano gli assiomi e la logica

Poi si può modificare la logica e in quel caso mescolando assiomi con logiche diverse otteniamo Teorie diverse

Sono degli assiomi dell'Aritmetica di Peano (da sistemare) $\forall x \neg S(x) = 0 \forall x x + 0 = x \forall x, y x + s(y) = s(x + y) \forall x x * 0 = 0 \forall x, y x * s(y) = (x * y) + x \forall x, y (s(x) = s(y)) \rightarrow x = y P(0) \wedge D(0) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow \neg P(s(x)))$
P indica i numeri Pari $\forall x (D(x) \rightarrow \neg D(S(x)))$
D indica i numeri Dispari