Appunti di Fondamenti dell'Informatica

Marco Natali

8 febbraio 2018

Capitolo 1

Insiemi

Gli insiemi sono collezioni di oggetti detti elementi, in cui si prescinde dall' ordine e dalla ripetizione degli elementi e questa è la sua definizione ingenua.
Si dice $x \in A$ se l'elemento appartiene all'insieme altrimenti si usa $x \notin A$.
L'insieme vuoto si indica con $\emptyset$ mentre due insiemi con gli stessi elementi si usa $A = B$.
Si definisce *cardinalità* il numero degli elementi e si indica con $|A|$.
Gli insiemi possono essere definiti in due maniere:

- **Estensionale**:si elencano gli elementi di un insieme
  Esempio:
  $$A = \{1, 2, 3\}|A| = 3$$
  $$B = \{2, 2, 4, 6\}|B| = 3$$

- **Intensionale**:si descrivono gli elementi che soddisfano una determinata proprietà
  Esempio:
  $D = \{x \in \mathbb{N}|x < 100\}$

Dati due insiemi S e T si ha:

$S \subset T$ $\{x|(x \in S \rightarrow x \in T) \wedge S \neq T\}$
$S = T$ $\{x|x \in S$ se e solo se $x \in T\}$
$S \subseteq T$ $\{x|S \subset Q$ oppure $S = T\}$

Esempio:

$$\begin{aligned} A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\} &\quad A = B \text{ Falso} \\ B = \{1, 3, 5, 6, 9\} &\quad B \subseteq A \text{ Vero} \\ C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\} &\quad A \subset C \text{ Falso} \end{aligned}$$

1.0.1 Alcune raccomandazioni sull'Insieme Vuoto

L'insieme vuoto $\emptyset$ viene rappresentato come $\{\ \}$ mentre l'insieme contentente l'insieme vuoto $\{\emptyset\}$ viene rappresentato come $\{\{\ \}\}$ per cui, anche se può risultare controintuitivo, l'insieme vuoto è diverso dall'insieme contenente soltanto l'insieme vuoto.
Due insiemi S e T si dicono *equipotenti*, indicato con $S \sim T$, se essi sono in corrispondenza univoca, ossia hanno la stessa cardinalità.

$$A = \{1, 4, 7, 10, 43, 52, 4\}\ |A| = 6$$
$$B = \{1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\ |B| = 9$$

A e B non sono equipotenti in quanto la loro cardinalità non coincide mentre nel seguente esempio avviene:

$$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}|C| = 10$$
$$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}|D| = 10$$

Gli insiemi numerici definiti nella Teoria degli insiemi sono i seguenti:

- $\mathbb{N}$: Insieme dei numeri naturali, comprendente anche lo O
- $\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali
- $\mathbb{C}$: insieme dei numeri complessi

Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità indicata con $\aleph_0$,dimostrato da Georg Cantor.
Gli insiemi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno la stessa cardinalità indicata con $2^{\aleph_0}$, dimostrato da Georg Cantor mediante il principio di diagonalizzazione.

1.0.2 Tecnica di diagonalizzazione

La tecnica di diagonalizzazione è tecnica, inventata da Cantor, per dimostrare la non numerabilità dei Numeri Reali.
Essa consiste nel tentativo di costruire una bisezione tra un insieme X ed $\mathbb{N}$ e verificare che qualche elemento di X sfugge alla bisezione.

Teorema 1.1. $2^{\aleph_0}$ *è strettamente maggiore di* $\aleph_0$

1.1 Unione ed Intersezione

L'unione di due insiemi $S \cup T$ è l'insieme formato degli elementi di S e degli elementi di T.
L'intersezione di due insiemi $S \cap T$ è l'insieme degli elementi presenti in tutti e due gli insiemi.
$S \cup T = \{x | x \in S \text{ o } x \in T\}$
$S \cap T = \{x | x \in S \text{ e } x \in T\}$
Esempio:

$$\begin{aligned}
A =& \{Rosso, Arancio, Giallo\} \\
B =& \{Verde, Giallo, Marrone\} \\
A \cup B =& \{Rosso, Arancio, Giallo, Verde, Marrone\} \\
A \cap B =& \{Giallo\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S = \{1, 2, 5, 4, 3, 7, 6, 9\} & \; S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 34\} \\
T = \{5, 4, 2, 9, 11, 34, 6\} & \; S \cap T = \{2, 4, 5, 6, 9\} \\
C = \{3, 9, 15, 21, 27\} & \; C \cup D = \{3, 6, 9, 15, 21, 24, 27, 33, 42, 51, 60\} \\
D = \{6, 15, 24, 33, 42, 51, 60\} & \; C \cap D = \{15\}
\end{aligned}$$

Proposizione 1.1. *L'unione gode delle seguenti proprietà:*

1. $S \cup S = S$ Idempotenza
2. $S \cup \emptyset = S$ Elemento Neutro
3. $S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$ Associatività
4. $S_1 \cup S_2 = S_2 \iff S_1 \subseteq S_2$
5. $(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3)$ Commutatività
6. $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$
7. $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$

Proposizione 1.2. *L'intersezione gode delle seguenti proprietà:*

1. $S \cap S = S$
2. $S \cap \emptyset = \emptyset$
3. $S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$
4. $(S_1 \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3)$
5. $S_1 \cap S_2 = S_1 \iff S_1 \subseteq S_2$

6. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$

7. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$

Proposizione 1.3. *L'unione e l'intersezione hanno le prop. distributive:*

1. $S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$

2. $S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3)$

1.2 Complementare

Dato un insieme U, detto Universo, si dice *complemento* di S, indicato con $\bar{S}$, la differenza di un sottoinsieme S di U rispetto ad U.
$\bar{S} = \{x | x \in U \text{ e } x \notin S\}$
Esempio:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} S = \{2, 4, 6\} \bar{S} = \{1, 3, 5, 7\}$$

Proposizione 1.4. *Le proprietà della complementazione di un insieme sono :*

1. $\bar{U} = \emptyset$

2. $\bar{\emptyset} = U$

3. $\bar{\bar{S}} = S$

4. $(S_1 \bar{\cup} S_2) = \bar{S_1} \cap \bar{S_2}$

5. $(S_1 \bar{\cap} S_2) = \bar{S_1} \cup \bar{S_2}$

6. $S \cap \bar{S} = \emptyset$

7. $S \cup \bar{S} = U$

8. $S_1 = S_2 \iff \bar{S_1} = \bar{S_2}$

9. $S_1 \subseteq S_2 \iff \bar{S_2} \subseteq \bar{S_1}$

1.3 Differenza di Insiemi

Dati 2 insiemi S e T chiamiamo $S \setminus T$ l'insieme *differenza* costituito da tutti gli elementi di S che non sono elementi di T.
$S \setminus T = \{x | x \in S \text{ e } x \notin T\}$
Esempio:

$$S = \{a, b, c, d, e\} \ T = \{a, c, f, g, e, h\}$$
$$S \setminus T = \{b, d\}$$

Proposizione 1.5. *La differenza di insiemi gode delle seguenti proprietà:*

1. $S \setminus S = \emptyset$
2. $S \setminus \emptyset = S$
3. $\emptyset \setminus S = \emptyset$
4. $(S_1 \setminus S_2) \setminus S_3 = (S_1 \setminus S_3) \setminus S_2 = S_1 \setminus (S_2 \cup S_3)$
5. $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap \bar{S}_2$

La *differenza simmetrica* di due insiemi S_1 e S_2, indicata con $S_1 \triangle S_2$, è definita come $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$

Proposizione 1.6. *Proprietà Differenza simmetrica*

1. $S \triangle S = \emptyset$
2. $S \triangle \emptyset = S$
3. $S_1 \triangle S_2 = S_2 \triangle S_1$
4. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cap \bar{S}_2) \cup (S_2 \cap \bar{S}_1)$
5. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cup S_2)\ (S_2 \cap S_1)$

1.4 Partizione di un Insieme

Dato un insieme non vuoto S, una partizione di S è una famiglia F di sottoinsiemi di S tale che

1. ogni elemento di S appartiene a qualche elemento di F, ossia $\cup F = S$
2. due elementi qualunque di F sono disgiunti ossia $\cap F = \emptyset$

La partizione non può avere come elemento l'insieme vuoto in quanto esso non appartiene agli elementi dell'insieme A.

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} \\
Par(A) &= \{\{1\}, \{2, 3\}\} \\
B &= \{5, 10, \emptyset, 23, 45\} \\
Par(B) &= \{\{\emptyset, 23\}, \{5, 10\}, \{45\}\}
\end{aligned}
$$

1.5 Funzione Caratteristica

Sia U un insieme assunto come Universo,si definisce come *funzione caratteristica* di un sottoinsieme $S \subseteq U$ come:

$$car(S,x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

1.6 Insieme delle Parti

L'insieme delle Parti di un insieme S, indicato con $\wp S$, è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi dell'insieme S.
$\wp S = \{X | X \subseteq S\}$

$$A = \{\emptyset, 3, 20\}$$
$$\wp A = \{A, \{\emptyset\}, \{3\}, \{20\}, \{\emptyset, 3\}, \{\emptyset, 20\}, \{3, 20\}, \emptyset\}$$

$$S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b\}$$
$$\begin{aligned}\wp S = &\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{a\}, \{b\}, \\ &\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\} \\ &\{\emptyset, \{\emptyset\}, a\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, b\}, \\ &\{\{\emptyset\}, a, b\}, \{\emptyset, a, b\}, \{\{\emptyset\}, a\}, \{\{\emptyset\}, b\}\}\end{aligned}$$

Definizione 1. *Se S è composto da $n \geq 0$ elementi, il numero di elementi di $\wp S$ è 2^n.*

Dimostrazione. Supponendo di avere una sequenza binaria di 3 bit,le cui possibili combinazioni vengono rappresentate da 2^k con $k = numBit$.
Prendendo un insieme $A = \{'a', 'b', 'c'\}$ e utilizzando la funzione caratteristica, con la convenzione di indicare il primo elemento dell'insieme A a destra, si nota che le sequenze di bit sono uguali alla sequenza ottenuta utilizzando la funzione caratteristica. □

1.7 Prodotto Cartesiano,Coppie Ordinate e Sequenze

Le coppie Ordinate sono una collezione di 2 oggetti in cui non si prescinde dall'ordine e dalla ripetizione infatti $(a, b) \neq (b, a)$ e $(1, 2, 1, 4) \neq (1, 2, 4)$.
Dal punto di visto insiemistico la coppia ordinata è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Una *n-upla* ordinata $x_1, \ldots, x_n$ è definita come $(x1, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$ dove $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ è una $(n-1)$-upla ordinata.
Si definisce come *sequenza*, una sequenza di oggetti in cui non si prescinde dalla multiplicità degli elementi.
Dati 2 insiemi A e B, non necessariamente distinti, si definisce come *Prodotto Cartesiano*, indicato con $A \times B$, l'insieme di tutte le coppie in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo elemento della coppia appartiene ad B.
$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}$

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} \\
B &= \{1, 4, 5\} \\
A \times B &= \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\} \\
S &= \{4, 14, 56\} \\
T &= \{3, 46, 12\} \\
S \times T &= \{(4, 3), (4, 46), (4, 12), (14, 3), (14, 46), (14, 12), (56, 3), (56, 46), (56, 12)\}
\end{aligned}$$

1.8 Multiinsiemi

Si definisce come *multiinsiemi* una collezione di elementi in cui si prescinde dall'ordine ma non dalla multiplicità degli elementi.
Si puo anche definire come una funzione $M : E \mapsto \mathbb{N}$ che associa ad ogni elemento di un insieme E finito o numerabile, un numero, appartenente ad $\mathbb{N}$ indicante il numero di occorrenze dell'elemento di E nel multiinsieme M.
La cardinalità di un multiinsieme M è definita come

$$|M| = \sum_{e_i \in E}^{|E|} M(e_i)$$

$$\begin{aligned}
S &= (1, 2, 1, 3, 4, 4, 2, 3, 3) \\
T &= (2, 1, 3, 1, 4, 4, 3, 2, 3)
\end{aligned}$$

Sono due multiinsiemi uguali con cardinalità 9

1.8.1 Operazioni su Multiinsiemi

Intersezione : $M_1 \cap M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = min(M_1(e), M_2(e))$ per ogni $e \in E$.

Unione : $M_1 \cup M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = max(M_1(e), M_2(e))$ per ogni $e \in E$.

Unione Disgiunta : $M_1 \uplus M_2 = M_3$ dove $M_3(e) = M_1(e) + M_2(e)$.

Esempio:

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 3, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 6\} \\
B &= \{2, 3, 5, 6, 3, 6, 3, 7, 3\} \\
A \cup B &= \{1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 7\} \\
A \cap B &= \{2, 3, 3, 5, 6, 6\} \\
A \uplus B &= \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7\}
\end{aligned}$$

Capitolo 2

Relazioni

Si definisce *relazione n-aria* un sottoinsieme del prodotto cartesiano rappresentato da tutte le coppie che rispettano la relazione voluta tra gli n insiemi, che può essere definita in maniera estensionale e/o intensionale.
Si definisce *arietà* di una relazione il numero e il tipo degli argomente di una relazione.
Dominio:insieme degli elementi x tali che $(x, y) \in R$ per qualsiasi y.
Codominio:insieme degli elementi y tali che $(x, y) \in R$ per qualsiasi x.

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,1),(1,4),(1,5),(2,1),(2,4),(2,5),(3,1),(3,4),(3,5)\} \\
R \subseteq A \times B &= \{(1,1),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\} \\
R \subseteq B \times A &= \{(1,1),(1,2),(1,3)\}
\end{aligned}$$

Data una relazione R definita su un dominio S si definiscono le seguenti proprietà:

- Riflessiva se e solo se $\forall x \in S$ risulta xRx
- Irriflessiva se e solo se $\forall x \in S$ risulta $x \not R x$
- Simmetrica se e solo se $\forall x \; xRy \to yRx$
- Asimmetrica: se e solo se $\forall x, y$ risulta $xRy \to y \not R x$
- Antisimmetrica: se e solo se $xRy \wedge yRx$ implica $x = y$
- Transitiva: se e solo se $xRy \wedge yRz$ implica che xRz

Esempio:

- Essere padre di: è una relazione non transitiva,irriflessiva e asimmetrica.

- Essere parenti: è una relazione simmetrica,transitiva e irriflessiva.
- Essere sposati: è una relazione non transitiva,irriflessiva e simmetrica.
- $<\subseteq N \times N$:è una relazione asimmetrica,transitiva e irriflessiva.
- $\leq\subseteq N \times N$:è una relazione riflessiva,transitiva e antisimmetrica.

Sulle relazioni si possono applicare le usuali operazioni insiemistiche quindi, ad esempio, date $R_1 \subseteq S \times T$ e $R_2 \subseteq S \times T$ anche $R_1 \cup R_2$ è una relazione su $S \times T$.
Data una relazione binaria $R \subseteq S \times T$ definiamo *relazione complementare* $\bar{R} \subseteq S \times T$ come $x\bar{R}y$ se e solo se $(x, y) \notin R$. Per definizione si ha $\bar{\bar{R}} = R$ e $R \cup \bar{R} = S \times T$.
Data una relazione binaria $R \subseteq S \times T$ esiste sempre la *relazione inversa* $R^-1 = \{(y, x)|(x, y) \in R\} \subseteq T \times S$. Per definizione $(R^{-1})^{-1} = R$

2.1 Rappresentazione di Relazioni

Vi sono diverse modalità di rappresentazione delle relazioni,il cui metodo migliore dipendono dall'arietà della relazione, che sono:

Tabella a n colonne è una matrice a due dimensioni con righe,rappresentanti gli elementi, e colonne, indicanti gli insiemi; è conveniente utilizzare quando l'arietà della relazione è $n \geq 2$.

Grafo Bipartito è un grafo in cui si elencano gli elementi di tutti gli insiemi e si usano delle frecce, chiamate archi, per indicare l'associazione tra gli elementi. E' meglio utilizzare il grafo bipartito soltanto per le relazioni binarie.

Matrice Booleana è una matrice M_R a valori {0,1} composta da n righe e m colonne.

Grafi modalità di rappresentazione di relazioni binarie(spiegate in un paragrafo successivo)

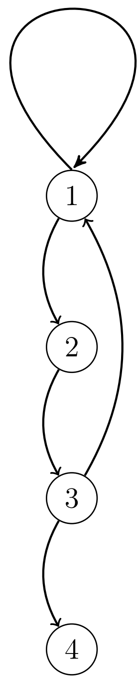
2.1.1 Tabelle

Si vuole definire la relazione $anagrafica \subseteq CognomixNomixDatexLuoghi$

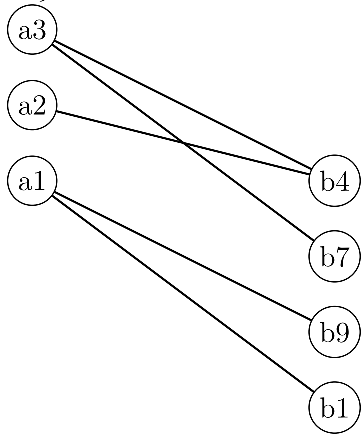
C	N	D	L
Moscato	Ugo	10/1/57	Milano
Iaquinta	Vincenzo	13/5/68	Udine
Inzaghi	Filippo	23/5/78	Piacenza

2.1.2 Grafo Bipartito

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ si definisce la relazione $R \subseteq A \times A =$



$\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$.
Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 7, 9, 1\}$ si definisce la relazione



$R \subseteq A \times B = \{(1, 9), (1, 1), (2, 4), (3, 7), (3, 4)\}$

2.1.3 Matrice Booleana

La *Matrice booleana* è una matrice M_R,composta da n righe e m colonne, i cui elementi sono definiti come

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \iff (s_i, t_j) \in R \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

Da una matrice booleana si possono determinare facilmente le proprietà di una relazione R,definita su S, soprattutto la proprietà simmetrica e la riflessiva.
La *Matrice Complementare* $M_{\bar{R}}$ è costituita dai seguenti elementi

$$\bar{m}_{ij} = \begin{cases} 1 \iff m_{ij} = 0 \\ 0 \iff m_{ij} = 1 \end{cases}$$

La *Matrice inversa* $M_{R^{-1}}$ è la trasporta della matrice M_R.
Date due matrici A e B,embrambe di nxm elementi, si definiscono 3 operazioni:

MEET $A \sqcap B = C$: è una matrice booleana i cui elementi sono:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 0 \vee b_{ij} = 0 \end{cases}$$

JOIN $A \sqcup B = C$: è una matrice booleana i cui elementi sono:

$$cij = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PRODOTTO BOOLEANO $A \odot B$: è una matrice booleana nxp, i cui elementi sono:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se per qualche} k (1 \leq k \leq m) \text{si ha} a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inserire Esempi

2.2 Grafi

Si definisce come *Grafo G* una coppia (V, E) in cui V è l'insieme dei **vertici** o **Nodi**,indicanti gli elementi, invece E è l'insieme degli **archi**, indicanti la relazione esistentre tra i vertici del grafo.
In un grafo orientato è ammesso il cappio ossia archi che escono ed entrano dallo stesso vertice.
Se in grafo tutti gli archi presentano un ordinamento, ossia si definisce una direzione tra i 2 vertici di un grafo,si definisce *Grafo orientato* altrimenti si definisce il grafo come *non orientato*.
Un arco che congiunge V_i a V_j si dice *uscente* da V_i ed *entrante* in V_j.

2.2.1 Nomenclatura

In un grafo si definisce:

NODO SORGENTE : nodi in cui non si hanno archi entranti

NODO POZZO :nodi in cui non si hanno archi uscenti

NODO ISOLATO : nodi in cui non si hanno archi entranti ed uscenti

GRADO DI ENTRATA :è il numero di archi entranti in un nodo

GRADO DI USCITA : è il numero degli archi uscenti da un nodo

CAMMINO da V_{in} a V_{fin} :è una sequenza finita di nodi $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ con $V_1 = V_{in}$ e $V_n = V_{fin}$, dove ciascun nodo è collegato al successivo da un arco orientato

SEMICAMMINO da V_{in} a V_{fin} : è una sequenza finita di nodi $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ con $V_1 = V_{in}$ e $V_n = V_{fin}$, dove ciascun nodo è collegato al successivo da un arco non orientato.

CONNESSO :un grafo in cui dati due nodi V_a e V_b, con $V_a \neq V_b$, esiste un semicammino tra di essi.

CICLO intorno un nodo V è un cammino in cui $V = V_{in} = V_{fin}$

SEMICICLO intorno un nodo V è un semicammino in cui $V = V_{in} = V_{fin}$

CAPPIO intorno ad un nodo è un cammino di lunghezza 1 in cui $V_in = V_{fin}$

2.2.2 Proprietà dei Grafi

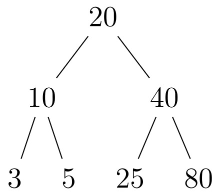
Le proprietà delle relazioni si riflettono in proprietà dei grafi.

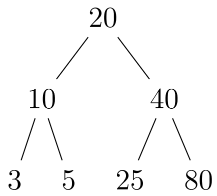
Definizione 2. *Sia G una relazione binaria su un insieme V*

1. Se G è riflessiva allora il corrispettivo grafo avrà un cappio intorno ogni nodo
2. Se G è una relazione irriflessiva allora nel grafo non ci sono cappi
3. Se G è una relazione simmetrica allora il grafo non è orientato
4. Se G è una relazione asimmetrica allora tra due nodi non ci sarà mai un arco e il suo inverso
5. Se G è una relazione transitiva allora nel grafo qualora vi siano gli archi tra $x_1 \mapsto x_2$ e tra $x_2 \mapsto x_3$ vi è l'arco tra $x_1 \mapsto x_3$

2.3 DAG ed Alberi

Si definisce come *DAG*(Directed Acyclic Graph), un grafo orientato senza cicli.
Si definisce come *Albero*, un DAG connesso con un solo nodo sorgente,detto *radice*, in cui ogni nodo diverso dalla radice ha un solo nodo entrante.
I nodi privi di archi entranti sono detti *foglie* dell'albero.





Le tipologie di Alberi sono:

Albero Binario : albero con al più due rami

Albero Strettamento Binario : albero da cui da ogni nodo partono due rami

Albero Bilanciato : albero in cui tutti i cammini hanno la stessa lunghezza

2.3.1 Alberi binari di ricerca e metodo di visita

Dato un insieme di nodi in cui è definita una relazione d'ordine, si definisce come *albero di ricerca* un albero in cui tutti i nodi della radice sinistra sono minori della radice e tutti i nodi a destra della radice sono maggiori e ogni sottoalbero è anch'esso un albero di ricerca.
Il metodo di visità di Albero di Ricerca è il seguente Partendo dalla radice per visitare tutti i nodi dell'albero bisogna:

- visita del sottoalbero sinistro
- visita della radice
- visita del sottoalbero destro

Si continua ad applicare la visita al sottoalbero fino a quanto si arriva a visitare la radice attraverso la ricorsione

2.4 Composizione di Relazioni

Data una relazione $R_1 \subseteq SxT$ e una relazione $R_2 \subseteq T \times Q$, si definisce come relazione composta $R_1 \circ R_2 \subseteq S \times Q$ come segue $(a, c) \in R_1 \circ R_2$ se e solo se $\exists b \in T | (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2$
Siano $S = \{a, b\}, R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ e $R_2 = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$ $R_1 \circ R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
$R_2 \circ R_1 = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$

Proposizione 2.1. *La composizione di Relazioni è associativa*

Teorema 2.1. *Se* $R_1 \subseteq S \times T$ *e* $R_2 \subseteq T \times Q$, *allora* $(R_1 \circ R_2)^- 1 = R_1^- 1 \circ R_2^- 1$

Inserire Esempi!!!

2.5 Relazioni di Equivalenza

Si definisce R una *relazione di equivalenza* se e solo se la relazione binaria R è riflessiva,simmetrica e transitiva.
Data una relazione di equivalenza R definita su un insieme S, si definisce *classe di equivalenza* di un elemento $x \in S$ come $[x] = \{y | < x, y > \in R\}$

Teorema 2.2. *Se R è una relazione di equivalenza su S, allora le classi di Equivalenza generate da R partizionano S*

Data una relazione di equivalenza in S, la partizione che essa determina si dice *insieme quoziente* di S rispetto alla relazione di equivalenza e si indica con $S/$
Fare Esempiii!!!!!!

2.6 Struttura relazionale

Una struttura relazionale SR è una n-upla in cui il primo componente è un Insieme non vuoto S e le rimanenti componenti sono relazioni su S^n.

2.6.1 Tipologie di Ordinamenti

PREORDINE : è una struttura relazionale (S, R) in cui S è un insieme non vuoto e R è una relazione binaria *riflessiva* e *transitiva* su SxS

ORDINE STRETTO : è una struttura relazionale (S, R) in cui R è una relazione binaria *irriflessiva* e *transitiva* su SxS

ORDINE LARGO(POSET) : è una struttura relazionale (S, R) in cui R è una relazione binaria *riflessiva,antisimmetrica* e *transitiva* su SxS.

Una relazione R è un ordinamento sull'insieme S se e solo se $\forall x, y \in S$ vale solo una delle proprietà di *tricotomia*:

- $(x = y) \wedge (\neg(xRy)) \wedge (\neg(yRx))$
- $(xRy) \wedge (x \neq y) \wedge (\neg(yRx))$
- $(yRx) \wedge (x \neq y) \wedge (\neg(xRy))$

Inserire Esempii!!!!!!

Proposizione 2.2. *Se (S, R) è una struttura relazionale anche (S, R^{-1}) rappresenta la stessa struttura relazionale chimata e (S, R^{-1}) è il* duale *di (S, R).*

Proposizione 2.3. *Il grafo di un Poset non ha cicli di lunghezza maggiore di 1*

2.6.2 Diagramma di Hasse

Il grafo di un poset può essere rappresentato dal *diagramma di Hasse*, un grafo con le seguenti proprietà:

- si prescinde dal disegnare i cappi in quanto il poset è una relazione riflessiva
- si prescinde dal disegnare gli archi definiti per transitività
- il grafo si legge dal basso verso l'alto

esempio
Sia (S, R) una struttura relazionale con R è una relazione binaria su S. La *chiusura transitiva* di R è la più piccola relazione transitiva R' in cui $R \subset R'$. La *chiusura riflessiva* di R è la più piccola relazione riflessiva R' in cui $R \subset R'$

Proposizione 2.4. *Dato un poset (S, R) e un insieme $X \subseteq S$ si hanno le seguenti proprietà:*

massimale : *un elemento $s \in S$ è massimale se $\nexists s' \in S : s \leq s'$*

minimale : *un elemento $s \in S$ è minimale se $\nexists s' \in S : s \geq s'$*

maggiorante : *un elemento $s \in S$ è un maggiorante se $\forall x \in X$ si ha $s \geq s$*

minorante : *un elemento $s \in S$ è un minorante se $\forall x \in X$ si ha $s \leq x$*

minimo maggiorante :*un elemento $s \in S$ è un minimo maggiorante, indicato con $\sqcup X$, se è un maggiorante e per ogni altro maggiorante s' di X si ha $s \leq s'$.*

massimo minorante : *un elemento $s \in S$ è un massimo minorante, indicato con $\sqcap X$, se è un minorante e per ogni altro minorante s' di X si ha $s' \leq s$*

massimo : se $\sqcup X \in X$ *si dice che* $\sqcup X$ *è un massimo.*

minimo : se $\sqcap X \in X$ *si dice che* $\sqcap X$ *è un minimo.*

Definizione 3. *Un poset è detto buon ordinamento se e solo se per ogni sottoinsieme non vuoto esiste* $\cap X$ *e tale poset è detto* ben formato

Inserire Esempi !!!!

2.6.3 Reticoli

Un *Reticolo* è un poset (S, R) in cui per ogni coppia $x, y \in S$ esistono il massimo minorante(indicato con $x \sqcap y$) e il minimo maggiorante(indicato con $x \sqcup y$). Se un poset (S, R) è un reticolo anche il suo poset duale è un reticolo e se due reticoli sono isomorfi come poset allora i reticoli sono detti *isomorfi*.

Proposizione 2.5. *Se* $(L_1, \leq)$ *e* $(L_2, \leq)$ *sono reticoli, anche* $(L_1 X L_2, \leq)$ *lo è, con ordine parziale prodotto*

Definizione 4. *Sia* $(L, \leq)$ *un reticolo. Presi comunque* $a, b, c \in L$ *valgono le seguenti proprietà:*

1. $a \leq a \cup b$ e $b \leq a \cup b$
2. Se $a \leq c$ e $b \leq c$, allora $a \cup b \leq c$
3. $a \cap b \leq a$ e $a \cap b \leq b$
4. Se $c \leq a$ e $c \leq b$ allora $c \leq a \cap b$
5. $a \cup a = a$ (Idempotenza)
6. $a \cap a = a$ (Idempotenza)
7. $a \cup b = b \cup a$ (Commutativa)
8. $a \cap b = b \cap a$ (Commutativa)
9. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ (Associativa)
10. $a \cap (b \cap b) = (a \cap b) \cap c$ (Associativa)
11. $a \cup (a \cap b) = a$ (Assorbimento)
12. $a \cap (a \cup b) = a$ (Assorbimento)

Definizione 5. *Se ogni sottoinsieme di un reticolo possiede un minimo maggiorante e un massimo minorante allora il reticolo si definisce* completo.

Definizione 6. *Un reticolo è definito* limitato *se esiste un minimo e un massimo assoluti.*

Definizione 7. *Un reticolo è detto* distribuitivo *se valgono le seguenti proprietà:*

1. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
2. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

Definizione 8. *Sia* $(L, \leq)$ *un reticolo distribuitivo limitato, con massimo* 1 *e minimo* 0*, e sia* $a \in L$*, allora* a' *è il* complemento*,il quale se esiste è unico, di* a *se è rispettata la seguente proprietà:* $a \cup a' = 1$ *e* $a \cap a' = 0$.

Definizione 9. *Un reticolo* $(L, \leq)$ *è detto* complementato *se è limitato e ogni suo elemento ha il complemento.*

Capitolo 3

Funzioni

Si definisce *funzione* $f : S \mapsto T$ una relazione $f \subseteq S \times T$ tale che $\forall x \in S$ esiste al più un $y \in T$ per cui $(x, y) \in f$.
Se il $dom(f) = S$ la funzione si dice *totale* altrimenti la funzione è *parziale*.

3.1 Tipologie di Funzioni

Una funzione $f : S \mapsto T$ si dice:

iniettiva : $\forall x, y \in S x \neq y \iff f(x) \neq f(y)$

suriettiva : $\forall y \in T \exists x \in S : f(x) = y$

biettiva : se la funzione è iniettiva e suriettiva

Per determinare se una funzione è iniettiva bisogna verificare che $f(x) \neq f(y)$ comporta $x \neq y$. Per determinare se una funzione è suriettiva bisogna risolvere l'equazione $f(x) = y$ e verificare se y appartiene al codominio della funzione.
Una funzione $f : S \mapsto T$ è detta *invertibile* se la sua relazione inversa f^-1 è essa stessa una funzione.
Una funzione $f : S \mapsto T$ ammette una *funzione inversa* $f^-1 : T \mapsto S$ se e solo se f è una funzione iniettiva.

Teorema 3.1. *Sia $f : A \mapsto B$ invertibile, con funzione inversa f^-1:*

1. *f^-1 è totale $\iff$ f è suriettiva*
2. *f è totale $\iff$ f^-1 è suriettiva*

Esempi:
$+ : \mathbb{N}x\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale,suriettiva ma non iniettiva
$* : \mathbb{N}x\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale,suriettiva ma non è iniettiva
successore : $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale ed è iniettiva ma non suriettiva

successore : $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ è una funzione totale ed è biettiva
$x^2 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ è una funzione totale,iniettiva,non suriettiva,invertibile
$x^2 : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ è una funzione totale,non iniettiva,non suriettiva,non invertibile.

Date due funzioni $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ si definisce *funzione composta* $g \circ f : S \mapsto Q$ la funzione tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in S$. La funzione composta $(g \circ f)(x)$ è definita se e solo se sono definite entrambe $g(f(x))$ e $f(x)$.
Può capitare a volte di avere una funzione composta non definita in quanto non coincide il dominio con il codominio ma la funzione risulta calcolabile;in quel caso si dice che la funzione non è composta ma è calcolabile come ad esempio:

Teorema 3.2. *Siano $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ invertibili. Allora $g \circ f$ è invertibile e la sua inversa è $(g \circ f)^-1 = f^-1 \circ g^-1$.*

3.2 Operazioni

Si definisce come *operazione n-aria* su un insieme S, una funzione $f : S^n \mapsto S$ con $n \geq 1$. Se f è un'operazione binaria su S, essa si può rappresentare anche mediante la notazione infissa $x_1 f x_2$ invece di $f(x_1, x_2)$

3.2.1 Funzioni monotone

Definizione 10. *Siano $(S, \leq_S)$ e $(T, \leq_T)$ due poset e sia $f : S \mapsto T$ una funzione allora:*

1. f è detta *monotona non decrescente* quando $f(x) \leq_T f(y) \iff x \leq_S y$
2. f è detta *monotona crescente* quando $f(x) <_T f(y) \iff x <_S y$
3. f è detta *monotona non crescente* quando $f(x) \leq_T f(y) \iff x \geq_S y$
4. f è detta *monotona decrescente* quando $f(x) <_T f(y) \iff x >_S y$

3.3 Ordinali

I numeri ordinali sono usati per indicare la posizione di un elemento di una sequenza ordinata, al contrario dei numeri cardinali che indicano la dimensione di un insieme.
Un insieme α è un ordinale se sono verificate le seguenti condizioni:

1. $\beta \in \alpha$ implica $\beta \subset \alpha$
2. $\beta \in \alpha$ e $\gamma \in \alpha$ implica che sia verificata una delle seguenti:

- $\beta = \gamma \wedge \beta \notin \gamma \wedge \gamma \notin \beta$
- $\beta \neq \gamma \wedge \beta \in \gamma \wedge \gamma \notin \beta$
- $\beta \neq \gamma \wedge \beta \notin \gamma \wedge \gamma \in \beta$

3. $\beta \subset \alpha$ e $\beta \neq \emptyset$ implica che esiste un $\gamma \in \alpha$ tale che $\beta \cap \gamma = \emptyset$

Se α è un ordinale allora il suo successore, indicato con $succ(\alpha)$, è il numero ordinale $succ(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ e non ci sono altri numeri ordinali tra α e $succ(\alpha)$. Esistono degli ordinali che non hanno successori, chiamati *ordinali limite* ed il più piccolo ordinale limite è ω. Una definizione formale di ordinale limite è la seguente: Un ordinale λ è un ordinale limite se per ogni $\alpha < \lambda$ si ha $succ(\alpha) < \lambda$.

3.4 Algebra Booleana

Un *algebra di boole* è un reticolo (B, R) in cui valgono le seguenti proprietà:

1.

L'algebra booleana si può definire anche in maniera assiomatica come segue:

Definizione 11. *Sia B un insieme, un algebra di Boole è una sestupla $(B, \cup, \cap, ', 0, 1)$ dove $\cup$ e $\cap$ sono due operazioni binarie su B, $'$ è un operazione unaria su B, 0 e 1 sono due elementi distinti di B.*

Definizione 12. *In un algebra di Boole si dice* duale *di un enunciato scambiando $\cup$ con $\cap$ e 0 con 1*

Teorema 3.3. *Nella algebra di Boole valgono le seguenti proprietà, presi qualsiasi $x, y, z \in B$:*

1. $x \cap 0 = 0$
2. $x \cup 1 = 1$
3. $x \cup 0 = x$
4. $x \cap 1 = x$
5. $x \cap (x \cup y) = x$ (Assorbimento)
6. $x \cup (x \cap y) = x$ (Assorbimento)
7. $x \cup y = y \cup x$ (Commutativa)
8. $x \cap y = y \cap x$ (Commutativa)
9. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ (Distributiva)

10. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ (Distribuitiva)

11. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ (Associatività)

12. $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ (Associatività)

13. $(x \cap y)' = (x' \cup y')$ (Legge di De Morgan)

14. $(x \cup y)' = x' \cap y'$ (Legge di de Morgan)

15. $x \cap y = (x' \cup y')'$

16. $x \cup y = (x' \cap y')'$

17. $1' = 0$

18. $0' = 1$

19. $x \cup x' = 1$

20. $x \cap x' = 0$

3.4.1 Algebra dei gruppi

Un *semigruppo* è una coppia $(S, \circ)$ dove S è un insieme e $\circ$ è un operazione binaria associativa su S;un semigruppo è detto *commutativo* se $\circ$ è un operazione commutativa.
Un *monoide* è un semigruppo in cui esiste,ed è unico, un'unita destra e sinistra per $\circ$, ossia un elemento $u \in S$ per cui vale $u \circ x = x \circ u = x \forall x \in S$.
Un *gruppo* è un monoide in cui $\forall x \in S$ esiste,ed è unico, un'elemento inverso, tale che: $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = u$
Dati due semigruppi $(X, \circ_x)$ e $(Y, \circ_y)$, una funzione h è detta *omomorfismo di semigruppi* se e solo $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha che: $h(x_1) \circ_y h(x_2) = h(x_1 \circ_x x_2)$.
Se h è una relazione biettiva, allora h è detta *isomorfismo di semigruppi.*

Capitolo 4

Induzione

L'induzione è un importante strumento per la definizione di nuovi insiemi,come ad esempio l'insieme delle FBF(Formule ben Formate), e la dimostrazione di determinate proprietà di un insieme.

4.1 Principio di Induzione

Il principio di Induzione si utilizza per dimostrare la correttezza di determinate proprietà dell'insieme dei numeri Naturali.
Il principio di induzione viene definito nel seguente modo:
Data una proposizione $P(x)$ valida per $\forall x \in N$ bisogna:

1. **Caso Base**: Sia $P(0)$ vero
2. **Passo Induttivo**: Supposto $P(x)$ vero bisogna verificare la verità di $P(x+1)$

Il principio di Induzione completo è definito nel seguente modo:

Definizione 13. *Sia A(n) una asserzione per ogni elemento $n \geq i \in \mathbb{N}$. Supponendo che:*

- *$A(i)$ è vera (Caso Base)*
- *$\forall m \in \mathbb{N}$, se $A(k)$ è vera $\forall k$,con $0 < k < m$, ne segue che è vera $A(m)$*

Allora $\forall n \in N$,$A(n)$ è vera

Esempio:

Teorema 4.1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. Per $n = 0$ $\quad \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2} \quad 0 = 0$ vero

Se $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ allora $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^{n} +(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

□

Esempio:

Teorema 4.2. $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$

Dimostrazione. Per $n = 1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} 2i - 1 = 1^2 \quad 1 = 1$ è vero

Se $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ allora $\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = (n+1)^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 &= \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. $n! \geq 2^{(n-1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Per $n = 0$ si ha $0! \geq 2^{0-1}$ ossia $1 \geq 1/2$ che è sempre verificato
Se $n! \geq 2^{(n-1)}$ allora $(n+1)! \geq 2^n$

$$\begin{aligned}
(n+1)! \geq 2^{n+1-1} &= n!(n+1) \geq 2^{n-1} * 2 \\
&= n!\frac{(n+1)}{2} \geq 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Essendo $\frac{(n+1)}{2} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e $n! \geq 2^{n-1}$ verificato per ipotesi si ricava che la proposizione è verificata. □

4.2 Definizione Induttiva

L'induzione permette anche di definire nuovi insiemi nel seguente modo:

1. si definisce un insieme di "oggetti base" appartenenti all'insieme.
2. si definisce un insieme di operazioni di costruzione che, applicate ad elementi dell'insieme, producono nuovi elementi dell'insieme.
3. nient'altro appartiene all'insieme definito.

Esempio:Definizione induttiva di numeri naturali

1. $0 \in N$
2. Se $x \in N$ allora $s(x) \in N$
3. Nient'altro appartiene ai numeri naturali

Esempio:espressione in Java

1. le variabili e le costanti sono delle espressioni
2. se E_1 e E_2 sono delle espressioni ed op è un operatore binario, allora $E_1 op E_2$ è un espressione
3. se E_1 e E_2 sono delle espressioni e op è un operatore unario, allora opE_1 è un espressione
4. nient'altro è un espressione

4.3 Ricorsione

La ricorsione è funzione definitoria che consiste nel definire un insieme di elementi base e di definire gli altri elementi mediante il richiamo di se stessa, fino ad arrivare ai casi base.
Esempio: la definizione ricorsiva del fattoriale è definita come segue:

$$n! = \begin{cases} 1 \quad n = 0 \vee n = 1 \\ n * (n-1)! \quad n > 1 \end{cases}$$

la definizione del coefficiente binomiale è definita come segue:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 \quad n = k \vee k = 0 \\ n \quad k = n - 1 \vee k = 1 \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

la definizione di $somma : ZxZ \mapsto Z$ è la seguente:

$$somma(a,b) = \begin{cases} a \quad b = 0 \\ somma(b,a) \quad a < b \\ 1 + somma(b-1) \quad b > 0 \\ -1 + somma(b+1) \quad b < 0 \end{cases}$$

4.4 Stringhe

La definizione induttiva dell'insieme delle stringhe su un alfabeto è la seguente:

- ϵ è una stringa con $\epsilon =$ stringa vuota
- se X è una stringa e c è un carattere allora $X + c$ è una stringa

Capitolo 5

Logica Proposizionale

La logica è lo studio del ragionamento e dell'argomentazione e, in particolare, dei procedimenti inferenziali, rivolti a chiarire quali procedimenti di pensiero siano validi e quali no. Vi sono molteplici tipologie di logiche, come ad esempio la logica classica e le logiche costruttive, tutte accomunate di essere composte da 3 elementi:

- **Linguaggio**:insieme di simboli utilizzati nella Logica per definire le cose
- **Sintassi**:insieme di regole che determina quali elementi appartengono o meno al linguaggio
- **Semantica**:permette di dare un significato alle formule del linguaggio e determinare se rappresentano o meno la verità.

Noi ci occupiamo della logica Classica che si compone in LOGICA PROPOSIZIONALE e *logica predicativa*.
La Logica proposizionale è un tipo di logica Classica che presenta come caratteristica quella di essere un linguaggio limitato in quanto si possono esprimere soltanto proposizioni senza avere la possibilità di estenderla a una classe di persone.

5.1 Linguaggio e Sintassi

Il linguaggio di una logica proposizionale è composto dai seguenti elementi:

- Variabili Proposizionali: $P, Q, R \dots$
- Connettivi Proposizionali: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \iff$
- Simboli Ausiliari: (,)
- Costanti: T, F

La sintassi di un linguaggio è composta da una serie di formule ben formate(FBF) definite induttivamente nel seguente modo:

1. Le costanti e le variabili proposizionali $\in FBF$.
2. Se A e $B \in FBF$ allora $(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(\neg A)$,$(A \rightarrow B)$, $(A \iff B)$,TA e FA sono delle formule ben formate.
3. nient'altro è una formula

Esempio:
$(P \wedge Q) \in Fbf$ è una formula ben formata
$(PQ \wedge R) \notin Fbf$ in quanto non si rispetta la sintassi del linguaggio definita.

Sia $A \in FBF$, l'insieme delle sottoformule di A è definito come segue:

1. Se A è una costante o variabile proposizionale allora A stessa è la sua sottoformula
2. Se A è una formula del tipo $(\neg A')$ allora le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di A'; $\neg$ è detto connettivo principale e A' sottoformula immediata di A.
3. Se A è una formula del tipo $B \circ C$, allora le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di B e C;$\circ$ è il connettivo principale e B e C sono le due sottoformule immediate di A.

É possibile ridurre ed eliminare delle parentesi attraverso l'introduzione della precedenza tra gli operatori, che è definita come segue:
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$.
In assenza di parentesi una formula va parentizzata privileggiando le sottoformule i cui connettivi principali hanno la precedenza più alta.
In caso di parità di precedenza vi è la convenzione di associare da destra a sinistra.
Esempio:
$\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C) \vee D$ diventa $((\neg A) \wedge ((\neg B) \rightarrow C) \vee D)$.

Definizione 14. *Un albero sintattico T è un albero binario coi nodi etichettati da simboli di L, che rappresenta la scomposizione di una formula ben formata X definita come segue:*

1. Se X è una formula atomica,l'albero binario che la rappresenta è composto soltanto dal nodo etichettato con X
2. Se $X = A \circ B$, X è rappresentata da un albero binario che ha la radice etichettata con $\circ$, i cui figli sinistri e destri sono la rappresentazione di A e B
3. Se $X = \neg A$,X è rappresentato dall'albero binario con radice etichettata con $\neg$, il cui figlio è la rappresentazione di A

5.2 Semantica

La semantica di una logica consente di dare un significato e un interpretazione alle formule del Linguaggio attraverso le tabelle di verità.
Si definisce $v(T) = 1$ e $v(F) = 0$ per cui 1 rappresenta la verità mentre lo 0 la falsità di una variabile,sottoformula e formula.
I connettivi della Logica Proposizionale hanno la seguente tabella di verità:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Una formula nella logica proposizionale può essere di tre diversi tipi:

Tautologica : la formula è soddisfatta da qualsiasi valutazione della Formula

Soddisfacibile non Tautologica :la formula è soddisfatta da qualche valutazione della formula ma non da tutte.

Contraddizione :la formula non viene mai soddisfatta

Esempio:
Formula $A \wedge \neg A$ contraddizione

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
0	1	0
1	0	0

Formula $Z = (A \wedge B) \vee C$ soddisfacibile non Tautologica

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Formula $X = (A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \wedge C)$ Soddisfacibile non tautologica

A	B	C	$\neg A$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge C$	X
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Formula $Y = \neg(A \wedge B) \iff (A \vee B \Rightarrow C)$ soddisfacibile non Tautologica

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	Y
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

5.2.1 Modelli e decidibilità

Si definisce *modello*, indicato con $M \models A$, tutte le valutazioni booleane che rendono vera la formula A. Si definisce *contromodello*, indicato con , tutte le valutazioni booleane che rendono falsa la formula A.
La logica proposizionale è decidibile (posso sempre verificare il significato di una formula). Esiste infatti una procedura effettiva che stabilisce la validità o no di una formula, o se questa ad esempio è una tautologia. In particolare

il verificare se una proposizione è tautologica o meno è l'operazione di decibilità principale che si svolge nel calcolo proposizonale.

Definizione 15. *Se $M \models A$ per tutti gli M, allora A è una tautologia e si indica $\models A$*

Definizione 16. *Se $M \models A$ per qualche M, allora A è soddisfacibile*

Definizione 17. *Se $M \models A$ non è soddisfatta da nessun M, allora A è insoddisfacibile*

5.3 Sistema Deduttivo

Il sistema deduttivo è un metodo di calcolo che manipola proposizioni, senza la necessità di ricorrere ad altri aspetti della logica.
Nella logica proposizionale, tramite i teoremi di completezza e correttezza, esiste una corrispondenza tra le formule derivanti dal sistema deduttivo e le formule verificabili tramite la semantica della logica.
I sistemi deduttivi della logica proposizionale sono i seguenti:

Sistema deduttivo Hilbertiano : non viene analizzato

Metodo dei Tableau

Risoluzione Proposizionale :non viene analizzato !!!!

Definizione 18. *Una sequenza di formule $A_1, \ldots, A_n$ di Λ è una* dimostrazione *se per ogni i compreso tra 1 e n, A_i è un assioma di Λ oppure una conseguenza diretta di una formula precedente.*

Definizione 19. *Una formula A di una logica Λ è detta* teorema *di Λ,indicata con $\vdash A$ se esiste una dimostrazione di Λ che ha A come ultima formula*

Una dimostrazione di una formula di una logica può venire tramite:

- **Metodo diretto**: Data un'ipotesi, attraverso una serie di passi si riesce a dimostrare la correttezza della Tesi
- **Metodo per assurdo**(non sempre accettato in tutte le logiche): Si nega la tesi ed attraverso una serie di passi si riesce a dimostrare la negazione delle ipotesi.

Teorema 5.1. *Un apparato deduttivo R è completo se, per ogni formula $A \in Fbf$, $\vdash A$ implica $\models A$*

Teorema 5.2. *Un apparato deduttivo R è corretto se, per ogni formula $A \in Fbf$, $\models A$ implica $\vdash A$*

5.3.1 Tableau Proposizionali

Il metodo dei Tableau è stato introdotto da Hintikka e Beth alla fine degli anni '50 e poi ripresi successivamente da Smullyan.
I tableau sono degli alberi,la cui radice è l'enunciato in esame, e gli altri nodi sono costruiti attraverso l'applicazione di una serie di regole,fino ad arrivare alle formule atomiche come radici.
Le regole dei Tableau sono le seguenti:

$$\frac{S, T(A \wedge B)}{S, TA, TB}\ T\wedge \qquad \frac{S, F(A \wedge B)}{S, FA/S, FB}F\ \wedge$$

$$\frac{S, T(A \vee B)}{S, TA/S, TB}\ T\vee \qquad \frac{S, F(A \vee B)}{S, FA, FB}F\ \vee$$

$$\frac{S, T(\neg A)}{S, FA}\ T\neg \qquad \frac{S, F(\neg A)}{S, TA}F\ \neg$$

$$\frac{S, T(A \rightarrow B)}{S, FA/S, TB}\ T\rightarrow \qquad \frac{S, F(A \rightarrow B)}{S, TA, FB}F\ \rightarrow$$

$$\frac{S, T(A \iff B)}{S, TA, TB/S, FA, FB}\ T\iff \qquad \frac{S, F(A \iff B)}{S, TA, FB/S, FA, TB}F\ \iff$$

Il metodo dei Tableau è un metodo dei sistemi deduttivi, che permette attraverso l'applicazione di una serie di regole, di capire la tipologia della formula.

Tipologia	Fare Tableau per	Chiuso?	Aperto?
Teorema	$\neg A$	Si	No
Soddisfacibile	A	No	Si
Contradditoria	A	Si	No

Esempio:$C \rightarrow (P \rightarrow ((Q \rightarrow \neg P) \vee (C \rightarrow P)))$

$$\cfrac{FC \rightarrow (P \rightarrow ((Q \rightarrow \neg P) \vee (C \rightarrow P)))}{\cfrac{TC, F(P \rightarrow ((Q \rightarrow \neg P) \vee (C \rightarrow P)))}{\cfrac{TC, TP, F(Q \rightarrow \neg P) \vee (C \rightarrow P)}{\cfrac{TC, TP, F(Q \rightarrow \neg P), F(C \rightarrow P)}{TC, TP, F(Q \rightarrow \neg P), TC, FP}}}}$$

Il tableaux chiude in quanto non può essere contemporaneamente TP e FP per cui la formula è una tautologia.

5.4 Equivalenze Logiche

Due proposizioni A e B sono logicamente equivalenti se e solo se A e B hanno la stessa valutazione booleana.
Nella logica proposizionale sono definite le seguenti equivalenze logiche, indicate con $\equiv$,:

1. Idempotenza

$$A \vee A \equiv A$$
$$A \wedge A \equiv A$$

2. Associavità

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

3. Commutatività

$$A \vee B \equiv B \vee A$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

4. Distribuitività

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B \vee (A \wedge C)$$

5. Assorbimento

$$A \vee (A \wedge B) \equiv AA \wedge (A \vee B) \equiv A$$

6. Doppia negazione

$$\neg\neg A \equiv A$$

7. Leggi di De Morgan

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

8. Terzo escluso

$$A \vee \neg A \equiv T$$

9. Contrapposizione

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$$

10. Contraddizione

$$A \wedge \neg A \equiv F$$

5.4.1 Dimostrazione Equivalenze Logiche

In questo sottoparagrafo vengono svolte le dimostrazioni delle equivalenze logiche attraverso l'utilizzo del metodo dei Tableaux, anche se si poteva utilizzare la tavola di verità.

- $A \vee A \equiv A$

  Dimostrazione.

  $$\begin{array}{c} FA \vee A \iff A \\ \hline TA \vee A, FA/FA \vee A, TA \\ \hline TA, FA/TA, FA/FA, FA, TA \end{array}$$

  Il tableaux chiude in tutti i rami quindi è una tautologia $\square$

- $A \wedge A \equiv A$

  Dimostrazione.

  $$\begin{array}{c} FA \wedge A \iff A \\ \hline TA \wedge A, FA/FA \wedge A, TA \\ \hline TA, TA, FA/TA, FA/FA, TA \end{array}$$

  Il tableaux chiude in tutti i rami quindi è una tautologia $\square$

- $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

  Dimostrazione.

  $$\begin{array}{c} A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C \\ \hline T(A \vee (B \vee C)), F((A \vee B) \vee C)/F(A \vee (B \vee C)), T((A \vee B) \vee C) \\ \hline TA \vee (B \vee C), F(A \vee B), FC/FA, F(B \vee C), T(A \vee B) \vee C \\ \hline TA \vee (B \vee C), FA, FB, FC/FA, FB, FC, T(A \vee B) \vee C \\ \hline TA, FA, FB, FC/T(B \vee C), FA, FB, FC/FA, FB, FC, TC/FA, FB, FC, T(A \vee B) \\ \hline TA, FA, FB, FC/TB, FA, FB, FC/TC, FA, FB, FC/FA, FB, FC, TC/FA, FB, FC, TA/FA, FB, \end{array}$$

  Tutti i rami chiudono quindi è una tautologia. $\square$

- $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ La dimostrazione è simile a quella per l'Associavità dell'Or

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$

Dimostrazione.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \land B \iff B \land A}{T(A \land B), F(B \land A) / F(A \land B), T(B \land A)}}{TA, TB, F(B \land A) / F(A \land B), TB, TA}}{TA, TB, FB / TA, TB, FA / FA, TB, TA / FB, TB, TA}$$

Tutti i rami del tableaux chiudono per cui è una tautologia. $\square$

- $A \lor B \equiv B \lor A$ La dimostrazione è simile a quella per la Commutatività dell'And.
- $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$

  Dimostrazione.

$$\cfrac{FA \land (B \lor C) \iff (A \land B) \lor (A \land C)}{TA \land (B \lor C), F(A \land B) \lor (A \land C) / FA \land (B \lor C), T(A \land B) \lor (A \land C)}$$

Decido di dividere l'analisi dei vari sottorami del Tableau per chiarezza per cui analizzo ora il sottoramo $TA \land (B \lor C), F(A \land B) \lor (A \land C)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{TA \land (B \lor C), F(A \land B) \lor (A \land C)}{TA, TB \lor C, F(A \land B) \lor (A \land C)}}{TA, TB \lor C, FA \land B, FA \land C}}{TA, TB \lor C, FA, FA \land C / TA, TB \lor C, FB, FA \land C}}{\times / TA, TB, FB, FA \land C / TA, TC, FB, FA \land C}}{\times / \times / TA, TC, FB, FA / TA, TC, FB, FC}$$

Il primo ramo del tableaux chiude per cui bisogna analizzare il secondo sottoramo $FA \land (B \lor C), T(A \land B) \lor (A \land C)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{FA \land (B \lor C), T(A \land B) \lor (A \land C)}{FA, T(A \land B) \lor (A \land C) / FB \lor C, T(A \land B) \lor (A \land C)}}{FA, TA \land B / FA, TA \land C / FB, FC, T(A \land B) \lor (A \land C)}}{FA, TA, TB / FA, TA, TC / FB, FC, TA \land B / FB, FC, TA \land C}}{\times / \times / FB, FC, TA, TB / FB, FC, TA, TC}$$

Anche il secondo ramo chiude per cui la formula è una tautologia. $\square$

- $A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$ La dimostrazione è simile alla distribuitività dell'And
- $A \lor (A \land B) \equiv A$

Dimostrazione.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{FA \vee (A \wedge B) \iff A}{TA \vee (A \wedge B), FA / FA \vee (A \wedge B), TA}}{TA, FA / TA \wedge B, FA / FA, TA, FA \wedge B}}{\times / TA, TB, FA / \times}$$

Tutti i rami del Tableau chiudono per cui la formula è una tautologia. □

- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

  Dimostrazione.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{FA \wedge (A \vee B) \iff A}{FA \wedge (A \vee B), TA / TA \wedge (A \vee B), FA}}{FA, TA / FA \vee B, TA / TATA \vee B, FA}}{\times / FA, FB, TA / \times}$$

  Tutti i rami del Tableaux chiudono per cui la formula è una tautologia. □

- $\neg\neg A \equiv A$

  Dimostrazione.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\neg\neg A \iff A}{T\neg\neg A, FA / F\neg\neg A, TA}}{F\neg A, FA / T\neg A, TA}}{TA, FA / FA, TA}$$

  I due rami del Tableaux chiudono per cui è una tautologia. □

- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

  Dimostrazione.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{F\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B}{F\neg(A \wedge B), T\neg A \vee \neg B / T\neg(A \wedge B), F\neg A \vee \neg B}}{TA \wedge B, T\neg A \vee \neg B / T\neg(A \wedge B), F\neg A, F\neg B}}{TA, TB, T\neg A \vee \neg B / TA, TB, T\neg(A \wedge B)}}{TA, TB, T\neg A / TA, TB, T\neg B / TA, TB, F(A \wedge B)}}{TA, TB, FA / TA, TB, FB / TA, TB, FA / TA, TB, FB}$$

  Tutti i rami chiudono per cui è una formula tautologica. □

- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ La dimostrazione è simile a quella della deMorgan dell'And.

- $A \vee \neg A \equiv T$ Per definizione di $\vee$ si nota che $A \vee \neg A$ è sempre vero

- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

  Dimostrazione.

$$\cfrac{F\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B}{\cfrac{T\neg(A \vee B), F\neg A \wedge \neg B / F\neg(A \vee B), T\neg A \wedge \neg B}{\cfrac{FA \vee B, F\neg A \wedge \neg B / TA \vee B, T\neg A \wedge \neg B}{\cfrac{FA, FB, F\neg A \wedge \neg B / TA \vee B, T\neg A, T\neg B}{\cfrac{FA, FB, F\neg A / FA, FB, F\neg B / FA, FB, TA \vee B}{FA, FB, TA / FA, FB, TB / FA, FB, TA / FA, FB, TB}}}}}$$

  Tutti i rami chiudi per cui è una tautologia. □

- $A \wedge \neg A \equiv F$

  Dimostrazione. Per definizione di $\wedge$ si nota che è impossibile che si possa avere A e $\neg A$ uguali. □

5.5 Completezza di insiemi di Connettivi

Un insieme di connettivi logici è completo se mediante i suoi connettivi si può esprimere un qualunque altro connettivo. Nella logica proposizionale valgono anche le seguenti equivalenze, utili per ridurre il linguaggio,:

$$\begin{aligned}
(A \to B) \equiv & \quad (\neg A \vee B) \\
(A \vee B) \equiv & \quad \neg(\neg A \wedge \neg B) \\
(A \wedge B) \equiv & \quad \neg(\neg A \vee \neg B) \\
(A \iff B) \equiv & \quad (A \to B) \wedge (B \to A)
\end{aligned}$$

L'insieme dei connettivi $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee\}$ sono completi e ciò è facilmente dimostrabile utilizzando le seguenti equivalenze logiche

Capitolo 6

Logica Predicativa

La logica Predicativa, detta anche logica del primo ordine, si ha la possibilità di predicare le proprietà di una classe di individui.
É una logica semidecidibile, in quanto è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo, per cui non sempre tramite una sequenza di passi si riesce a capire la tipologia di formula.

6.1 Linguaggio e Sintassi

Un linguaggio predicativo L è composto dai seguenti insiemi di simboli:

1. Insieme di variabili individuali(infiniti) $x, y, z, \ldots$
2. Connettivi logici $\wedge \vee \neg \rightarrow \Longleftrightarrow$
3. Quantificatori esistenziali $\forall \exists$
4. Simboli (,)
5. Costanti proposizionali T, F
6. Simbolo di uguaglianza $=$,eventualmente assente

Questa è la parte del linguaggio tipica di ogni linguaggio del primo ordine poi ogni linguaggio definisce la propria segnatura ossia definisce in maniera autonomo:

1. Insiemi di simboli di costante $a, b, c, \ldots$
2. Simboli di funzione con arieta $f, g, h, \ldots$
3. Simboli di predicato $P, Q, Z, \ldots$ con arietà

Esempio:Linguaggio della teoria degli insiemi
Costante:$\emptyset$
Predicati:$\in (x, y)$, $= (x, y)$
Esempio:Linguaggio della teoria dei Numeri
Costante:0
Predicati:$< (x, y)$,$= (x, y)$
Funzioni:$succ(x)$,$+(x, y)$,$*(x, y)$
Per definire le formule ben formate della logica Predicativa bisogna prima definire l'insieme di termini e le formule atomiche.

Definizione 20. *L'insieme $TERM$ dei termini è definito induttivamente come segue*

1. *Ogni variabile e costante sono dei Termini*
2. *Se $t_1 \dots t_n$ sono dei termini e f è un simbolo di funzione di arietà n allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine*

Definizione 21. *L'insieme $ATOM$ delle formule atomiche è definito come:*

1. *T e F sono degli atomi*
2. *Se t_1 e t_2 sono dei termini, allora $t_1 = t_2$ è un atomo*
3. *Se $t_1, \dots, t_n$ sono dei termini e P è un predicato a n argomenti, allora $P(t_1, \dots, t_n)$ è un atomo.*

Definizione 22. *L'insieme delle formule ben formate(FBF) di L è definito induttivamente come*

1. *Ogni atomo è una formula*
2. *Se $A, B \in FBF$, allora $\neg A$, $A \wedge B$,$A \vee B$,$A \rightarrow B$ e $A \iff B$ appartengono alle formule ben formate*
3. *Se $A \in FBF$ e x è una variabile, allora $\forall x A$ e $\exists x A$ appartengono alle formule ben formate*
4. *Nient'altro è una formula*

La precedenza tra gli operatori logici è definita nella logica predicativa come segue $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \iff$ e si assume che gli operatori associno a destra.

Definizione 23. *L'insieme $var(t)$ delle variabili di un termine t è definito come segue:*

- *$var(t) = \{t\}$, se t è una variabile*
- *$var(t) = \emptyset$ se t è una costante*

- $var(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$
- $var(R(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$

Si definisce *Termine chiuso*, un termine che non contiene variabili altrimenti si definisce il termine come *chiuso*.
Le variabili nei termini e nelle formule atomiche possono essere libere in quanto gli unici operatori che "legano" le variabili sono i quantificatori.
Il campo di azione dei quantificatori si riferisce soltanto alla parte in cui si applica il quantificatore per cui una variabile si dice *libera* se non ricade nel campo di azione di un quantificatore altrimenti la variabile si dice *vincolata*.

6.2 Sistemi Deduttivi predicativi

Comprendere la tipologia della formula tramite la sua semantica nella logica predicativa è più complesso rispetto alla semantica della logica proposizionale per cui l'apparato deduttivo e la sua correttezza e completezza rispetto alla semantica assumono particolare rilevanza.

Definizione 24. *Una sostituzione è una funzione* $\sigma : VAR \mapsto TERM$ *definita induttivamente:*

1. $T\sigma = T$ e $F\sigma = F$
2. se c è una costante allora $c\sigma = c$
3. se x è una variabile allora $x\sigma = x$
4. se f è un simbolo di funzione di arietà n allora $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$

La sostituzione σ di un termine t al posto di un simbolo di variabile x è indicata da $\sigma = \{t/x\}$.

Lemma 1. *Se t è un termine e σ è una sostituzione, allora $t\sigma$ è un termine*

Definizione 25. *Data una formula S, la formula $S\sigma$ è definita nel seguente modo:*

1. se $S = P(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula atomica allora allora $S\sigma = P(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. se $S = (\neg A)$ allora $S\sigma = \neg(A\sigma)$
3. se $S = (A \circ B)$ allora $S\sigma = A\sigma \circ B\sigma$
4. se $S = (\forall x A)$ allora $S\sigma = \forall x(A\sigma_x)$
5. se $S = (\exists x A)$ allora $S\sigma = \exists x(A\sigma_x)$

6.2.1 Tableau Predicativi

I tableau predicativi è un apparato deduttivo che permette di stabilire la tipologia di una formula del linguaggio mediante l'applicazione di una serie di regole. Mantiene le stesse modalità di dimostrazione dei tableaux proposizionale e le stesse definizioni di espansioni del Tableaux.

$$\frac{S, T\exists x A(x)}{S, A(a) \text{ con a un nuovo simbolo di variabile}} T\exists \qquad \frac{S, F\exists x A(x)}{S, FA(a), F\exists A(x)} F\exists$$

$$\frac{S, T\forall x A(x)}{S, TA(a), T\forall x A(x)} T\forall \qquad \frac{S, F\forall x A(x)}{S, FA(a) \text{ con a un nuovo simbolo di variabile}} F\forall$$

Nelle tableuax regole $T\exists$ e $F\forall$ bisogna introdurre un nuovo simbolo di variabile, in quanto non si poteva conoscere prima dell'applicazione della regole il valore della variabile, mentre nelle altre due si può utilizzare qualsiasi variabile. Il fatto di portarsi dietro la formula nell'applicazione delle regole dei tableaux porta alla semidecidibilità.
Nei tableau predicativi l'ordine di applicazione delle regole, quando è possibile sceglierlo, cambia la chiusura o meno del Tableaux.
Le euristiche nell'applicazione delle regole dei Tableaux sono le seguenti:

- Applicare prima le regole che non ramificano il tableaux
- Applicare prima le regole che vincolano all'introduzione di nuovi parametri
- Quando si ha la possibilità di scegliere il parametro, conviene sceglierlo uno già scelto.

Esempio:$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \forall y Q(y))$

$$\cfrac{F\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \forall y Q(y))}{\cfrac{T\exists x(P(x) \vee Q(x)), F\exists x P(x) \vee \forall y Q(y)}{\cfrac{TP(a) \vee Q(a), F\exists x P(x) \vee \forall y Q(y)}{\cfrac{TP(a) \vee Q(a), F\exists x P(x), F\forall y Q(y)}{\cfrac{TP(a) \vee Q(a), F\exists x P(x), FQ(b)}{TP(a), F\exists x P(x), FQ(b) / TQ(a), FQ(b), F\exists x P(x)}}}}}$$

Il secondo ramo del tableau non potrà mai chiudere percui bisogna fare il T-Tableaux

$$\cfrac{T\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \forall y Q(y))}{\cfrac{F\exists x P(x) \vee Q(x) / T\exists x P(x) \vee \forall y Q(y)}{F\exists x P(x) \vee Q(x) / T\exists x P(x) / T\forall y Q(y)}}$$

Il tableaux non potrà mai chiudere in quanto il secondo e il terzo non genereranno mai delle contraddizioni per cui la formula è sodddisfacibile non tautologica.

6.3 Semantica

La semantica della logica predicativa è più complessa della semantica proposizionale in quanto nella logica predicativa si ha la possibilità di predicare su oggetti e le loro proprietà. L'interpretazione semantica di formule predicative si serve delle *strutture*, oggetto matematico che traduce formule predicative in espressioni che hanno un significato specifico relativamente alla realtà che si sta rappresentando.

Definizione 26. *Una struttura per il linguaggio L è una coppia $U = (D, I)$ in cui: D(dominio) è un insieme non vuoto di elementi del dominio I(interpretazione) è una funzione che associa a simboli e formule del linguaggio un significato a partire dalla segnatura del linguaggio. I associa:*

- *a ogni simbolo di costante c un elemento $c^I \in D$*
- *a ogni simbolo di funzione n-aria f una funzione $f^I : D^n \mapsto D$*
- *a ogni simbolo di predicato n-ario P una relazione n-aria $P^I \subseteq D^n$*

Definizione 27. *Sia Var l'insieme delle variabili di un linguaggio predicativo L, un assegnazione η delle variabili in una struttura $U = (D, I)$ è una funzione $\eta : Var \mapsto D$*

Un assegnazione η è una maniera di associare un valore alle variabili del linguaggio.

Definizione 28. *Sia $U = (D, I)$ una struttura per L e sia η una assegnazione.Estendiamo tale estensione a un'assegnazione $\bar{\eta}(I, \eta)$ sui termini definita come:*

- *Per ogni variabile x, $x^{I,\eta} = x^\eta$*
- *Per ogni costante c, $c^{I,\eta} = c^I$*
- *Se $t_1, \ldots, t_n$ sono dei termini e f è un simbolo di funzione n-aria allora $f(t_1, \ldots, t_n)^{I,\eta} = f^I(t_1^{I,\eta}, \ldots, t_n^{I,\eta})$*

Se un termine è chiuso non si necessità della funzione η in quanto l'Interpretazione è unica e non dipende dall'interpretazione data tramite la funzione η.
Una formula P, in una struttura U rispetto a un assegnazione η, si dice *soddisfacibile* , denotata con $U, \eta \models P$, se e solo se è vera l'interpretazione di P in una struttura U in cui ad ogni variabile x è valutata come x^η.
La soddisfacibilità di una formula è definita induttivamente come segue:

Definizione 29. *Sia $U = (D, I)$ una struttura per un linguaggio L e η un'assegnazione in U*

- $(U, \eta) \models T$ *e* $(U, \eta) \not\models F$
- *se A è una formula atomica del tipo $P(t_1, \ldots, t_n)$, allora* $(U, \eta) \models P(t_1, \ldots, t_n) \iff (t_1^{I,\eta}, \ldots, t_n^{I,\eta}) \in P^I$
- $(U, \eta) \models \neg A \iff (U, \eta) \not\models A$
- $(U, \eta) \models (A \circ B) \iff (U, \eta) \models A \circ (U, \eta) \models B$
- $(U, \eta) \models \forall x A \iff \forall d \in D$ *è verificato che* $U \models A(\eta[d/x])$
- $(U, \eta) \models \exists x A \iff \exists d \in D$ *per cui* $U \models A(\eta[d/x])$

Esempio: $x \mapsto s(0)$ $y \mapsto 0$ $z \mapsto s(0)$ Allora x + y = z con questi valori è vera

Definizione 30. *Se per una formula $A \in L$, $(U, \eta) \models A$ è verificato se per ogni assegnazione alle variabili, allora scriviamo $U \models A$ e diciamo che U è un modello di A.*

Definizione 31. *Una formula $A \in L$ è una* tautologia *se e solo se è vera in tutte le strutture di U e lo scriviamo $U \models A$*

Si può estendere la definizione di soddisfacibile anche un insieme di formule con la definizione seguente:

Definizione 32. *Un insieme di formule Γ è soddisfacibile se esiste una struttura U e un assegnazione η tale che $(U, \eta) \models A$ per ogni $A \in \Gamma$*

6.4 Equivalenze logiche

Nella logica predicativa si definisce due formule semanticamente equivalenti, indicato con $P \equiv Q$, se hanno gli stessi modelli. Le equivalenze della logica predicativa sono le seguenti:

1. $\forall x P \equiv \neg\exists x \neg P$
2. $\neg\forall x P \equiv \exists x \neg P$
3. $\exists x P \equiv \neg\forall x \neg P$
4. $\neg\exists x P \equiv \forall x \neg P$
5. $\forall x \forall y P \equiv \forall y \forall x P$
6. $\exists x \exists y P \equiv \exists y \exists x P$
7. $\forall x (P_1 \land P_2) \equiv \forall x P_1 \land \forall x P_2$
8. $\exists x (P_1 \lor P_2) \equiv \exists x P_1 \lor \exists x P_2$

6.4.1 Dimostrazione equivalenze logiche

In questo sottoparagrafo vengono svolte le dimostrazioni delle equivalenze logiche attraverso l'utilizzo del metodo dei Tableaux.

- $\forall xP \equiv \neg\exists x\neg P$ Da fare
- $\neg\forall xP \equiv \exists x\neg P$ Da fare
- $\exists xP \equiv \neg\forall x\neg P$ Da fare
- $\neg\exists xP \equiv \forall x\neg P$ Da fare
- $\forall x\forall yP \equiv \forall y\forall xP$ Da fare
- $\exists x\exists yP \equiv \exists y\exists xP$ Da fare
- $\forall x(P_1 \wedge P_2) \equiv \forall xP_1 \wedge \forall xP_2$ Da fare
- $\exists x(P_1 \vee P_2) \equiv \exists xP_1 \vee \exists xP_2$ Da fare

6.5 Teorie del Primo Ordine

Una teoria è un insieme di formule di un linguaggio del primo ordine L e la teoria la definiamo a partire dalla relazione $\models$

Definizione 33. *Sia $\sum$ un insieme di formule di L, che chiameremo assiomi, si definisce* teoria, *l'insieme $T_{\sum}$ delle formule ϕ di L tali che $\sum \models \phi$*

Definizione 34. *Una teoria T è un insieme di enunciati chiuso rispetto alla conseguenza logica ovvero $T \models \phi$ implica $\phi \in T$*

Definizione 35. *Una teoria del primo ordine T è* completa *se per ogni formula $\phi \in L$ è verificata una e una sola delle due:$T \models \phi$ o $T \models \neg\phi$.*

Per rappresentare un particolare dominio, ad esempio i numeri naturali, i grafi, dobbiamo definire degli assiomi che permettono di catturare la struttura e il comportamento degli oggetti del dominio che intendiamo trattare.
Una teoria, come l'aritmetica di Peano, la teoria dei gruppi ed eccetera, è un insieme di assiomi che descrivono certe proprietà degli oggetti che si definiscono.
Gli assiomi hanno il compito di restringere la classe dei modelli della logica del primo ordine ai modelli degli oggetti che si vogliono trattare.
Consideriamo il linguaggio della teoria dei numeri, definito negli appunti, per rappresentare l'*aritmetica di Peano* si usano i seguenti assiomi:

1. $\forall x\neg(s(x) = 0)$

2. $\forall x \neg(x < 0)$

3. $\forall x, y(x < s(y) \rightarrow (x < y \vee x = y))$

4. $\forall x, y(x < y \vee x = y \vee x > y)$

5. $\forall x\ x + 0 = x$

6. $\forall x, y\ x + s(y) = s(x + y)$

7. $\forall x x * 0 = 0$

8. $\forall x, y x * s(y) = (x * y) + x$

9. $\forall x, y(s(x) = s(y)) \rightarrow x = y$

10. $P(0)$ dove P indica i numeri Pari

11. $\neg D(0)$ dove D indica i numeri Dispari

12. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg P(s(x)))$

13. $\forall x(D(x) \rightarrow \neg D(S(x)))$

6.6 Traduzione in linguaggio formale

La traduzione in linguaggio formale della logica predicativa consiste nel formalizzare le frasi della lingua naturale, in particolare l'italiano per noi italiani, in formule della logica proposizionale attraverso la definizione della realtà da rappresentare.
Per rappresentare le frasi del linguaggio naturale in frasi formali bisogna definire:

1. quali sono le eventuali costanti della frase da tradurre

2. quali sono le eventuali funzioni della frase da tradurre

3. quali sono i predicati della frase da tradurre

Le costanti sono rappresentati nel linguaggio naturale da sostantivi mentre i predicati e le funzioni sono rappresentati da forme verbali. Alcuni esempi di rappresentazione da italiano a linguaggio formale sono i seguenti:
Esempio: Tutti gli uomini sono mortali,Socrate è un uomo allora Socrate è un mortale
Costanti:Socrate
Predicati:$Uomo(x), Mortale(x)$
Funzioni: non presenti

$$\forall x((Uomo(x) \rightarrow Mortale(x)) \wedge Uomo(Socrate) \rightarrow Mortale(Socrate))$$

Esempio: un cugino di Marco non ha cani
Costanti: $Marco$
Predicati:$Cugino(x, y), Avere(x, y), Cane(y)$
Funzioni: non sono presenti

$$\exists x(Cugino(x, Marco) \wedge \forall y(Cane(y) \rightarrow \neg Avere(x, y)))$$

Esempio: Ogni treno ha un numero identificativo
Costanti: non presenti
Predicati: $Treno(x)$,$Avere(x)$
Funzioni:$id(x)$

$$\forall x(Treno(x) \rightarrow Avere(id(x)))$$