Entrega Mecànica Clàssica

PequodSnake

Novembre 2024

1 Prentrega

Tenim una partícula de massa unitària subjecta a una força definida com:

$$f(r) = -r^{-0.453}\mathbf{e}_r$$

La distància al centre de forces quan aquesta partícula està al pericentre és $d = 0.779$, i la seva velocitat en aquest punt és $v = 1.069$. Per tant, podem calcular el moment angular "reduït" al quadrat com:

$$l^2 = (v \cdot d)^2$$

A partir de l'expressió següent:

$$u_0 = \psi(u_0) \implies u_0 = -\frac{1}{ml^2}\frac{1}{u_0^2}f\left(\frac{1}{u_0}\right) \implies \frac{1}{ml^2} = -\frac{1}{r_0^3}f(r_0)$$

podem calcular el valor de $r_0 \approx 0.8661$. Com que $u_0 = \frac{1}{r_0}$, obtenim:

$$u_0 \approx 1.15455$$

Per calcular $h(0)$ utilitzarem la següent expressió:

$$u(\theta) = u_0 + h(\theta)$$

Per conveni, sabem que:

$$u(0) = u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}}$$

On $r_{\min} = d$. Per tant:

$$h(0) = u(0) - u_0 = \frac{1}{d} - u_0 \approx 0.1291$$

Com que podem expressar $f(r)$ de la següent forma:

$$f(r) = -\frac{k}{r^{3-\alpha^2}}$$

veiem que $\alpha^2 = 2.547$ i $k = 1$.

2 Mètode de Poincaré-Lindstedt

Per arribar a segon ordre del mètode de Poincaré-Lindstedt, necessitarem les derivades fins a $\psi^{(3)}(u)$:

$$\psi(u) = -\frac{1}{ml^2} \cdot \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{u^{1-\alpha^2}}{l^2}$$

$$\psi'(u) = (1-\alpha^2)\frac{u^{-\alpha^2}}{l^2}$$

$$\psi''(u) = (1-\alpha^2)(-\alpha^2)\frac{u^{-\alpha^2-1}}{l^2}$$

$$\psi^{(3)}(u) = (1-\alpha^2)(-\alpha^2)(-\alpha^2-1)\frac{u^{-\alpha^2-2}}{l^2}$$

$$\psi'(u_0) = \psi_0' \approx -1.5469, \quad \psi''(u_0) = \psi_0'' \approx 3.4126, \quad \psi'''(u_0) = \psi_0''' \approx -10.4838$$

Tenint en compte que $\phi = \beta\theta$ i $A = h(0) = v(0)$, podem definir v_0, v_1 i v_2 com:

$$v_0 = A\cos(\phi)$$

$$v_1 = \frac{\psi_0''}{12\alpha^2} A^2 \left(3 - \cos(2\phi) - 2\cos(\phi)\right)$$

$$v_2 = \frac{1}{576}\left[29\left(\frac{\psi_0''}{\alpha^2}\right)^2 + 3\frac{\psi_0^{(3)}}{\alpha^2}\right] A^3\cos\phi - \frac{1}{12}\left(\frac{\psi_0''}{\alpha^2}\right)^2 A^3 + \frac{1}{36}\left(\frac{\psi_0''}{\alpha^2}\right)^2 A^3\cos 2\phi + \frac{1}{192}\left[\left(\frac{\psi_0''}{\alpha^2}\right)^2 - \frac{\psi_0^{(3)}}{\alpha^2}\right] A^3\cos 3\phi$$

Per al mètode en segon ordre, β^2 ve donat per:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \beta_1^2\lambda + \beta_2^2\lambda^2$$

On:

$$\beta_1^1 = 0$$

$$\beta_2^2 = -\frac{5(\psi_0'')^2 + 3\alpha^2\psi_0^{(3)}}{24\alpha^2} A^2$$

$$\lambda = 1$$

Amb tot això, podem calcular la distància al centre de forces per a cada θ de la següent forma:

$$r = \frac{1}{u_0 + v}, \quad \text{on } v = v_0 + v_1 + v_2$$

i transformar-ho a coordenades cartesianes fent:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

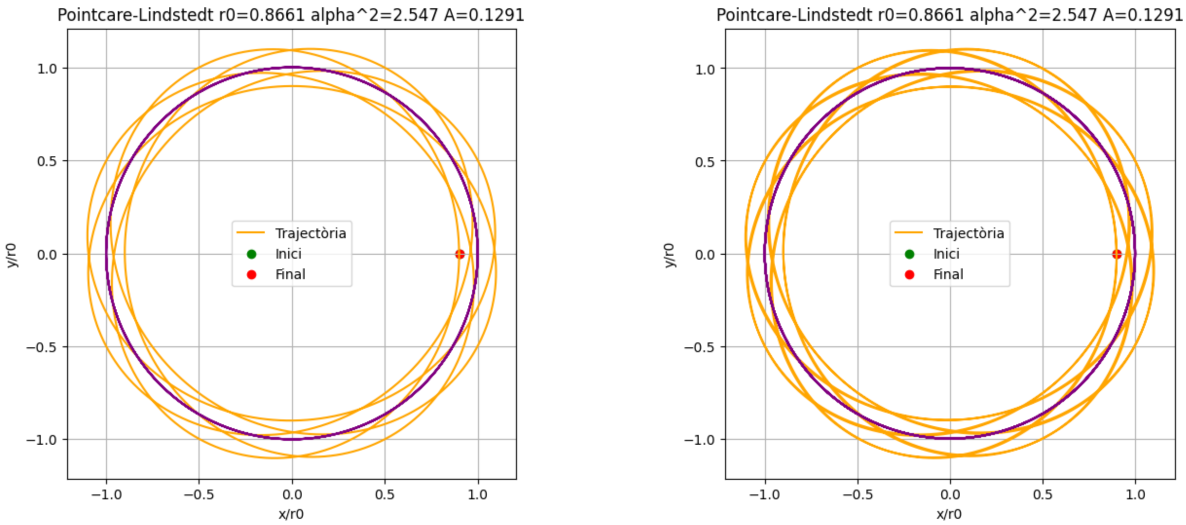
Sabem que, fins a segon ordre, perquè una òrbita sigui tancada, és necessari que:

$$\beta = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

En el nostre cas ens surt que:

$$\beta \approx 1.6 = \frac{8}{5}$$

On $p = 8$ serien les oscil·lacions i $q = 5$ les voltes que ha de fer la partícula per tancar l'òrbita. Això significa que, en 5 voltes, l'òrbita es tanca.
Mitjançant el mètode de Poincaré-Lindstedt, podem veure que aquesta condició es compleix, i l'òrbita resultant és periòdica i tancada.



(a) Partícula al cap de $q = 5$ voltes.

(b) Partícula al cap de $q = 10$ voltes.

Figure 1: Trajectòria de la partícula per a diferents valors de q.

3 Mètode d'Euler

Per implementar el mètode d'Euler descomposem la força radial en les seves components:

$$f_x(r) = -xr^{-1.453} = ma_x, \quad f_y(r) = -yr^{-1.453} = ma_y$$

I agafem les condicions inicials:

$$(x_0, y_0) = (0.779, 0), \quad (v_x(0), v_y(0)) = (0, 1.069)$$

Calculem la posició de la següent forma:

$$v_x(t + \epsilon) = v_x(t) + \epsilon \cdot a_x(t), \quad v_y(t + \epsilon) = v_y(t) + \epsilon \cdot a_y(t)$$

$$x(t + \epsilon) = x(t) + \epsilon \cdot v_x(t), \quad y(t + \epsilon) = y(t) + \epsilon \cdot v_y(t)$$

4 Conclusions

Un cop aproximem la trajectòria de la partícula amb els 2 mètodes, podem veure que el mètode d'Euler és bastant imprecís, comparat amb el de Poincaré-Lindstedt, ja que fins que no s'utilitzen ϵ (h) molt petites, la discrepància entre els dos mètodes és substancial i es va fent cada cop més gran a mesura que es simulen més voltes (Figura 2).
Igualment, amb $h = 10^{-3}$ no és suficientment precís, ja que al cap de 5 voltes, l'òrbita no es tanca, quan aquesta s'hauria de tancar (Figura 3 dreta).

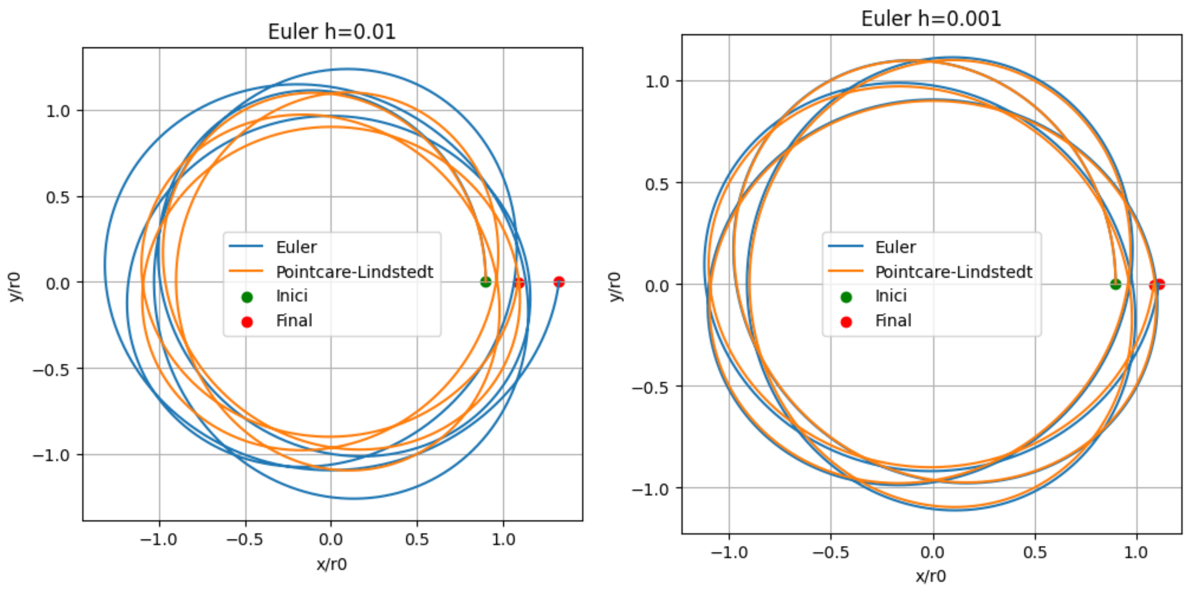


Figure 2: Comparativa Euler - Poincaré-Lindstetd amb diferents ϵ (4 voltes).

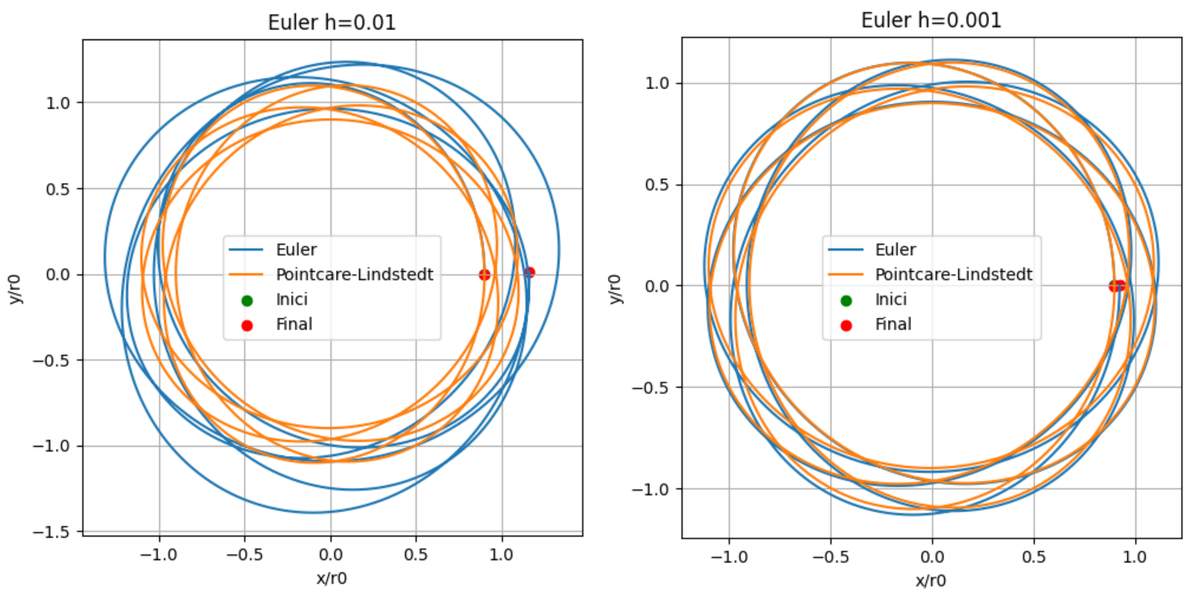


Figure 3: Comparativa Euler - Poincaré-Lindstetd amb diferents ϵ (5 voltes).