5.0 / 7.0

UCS
UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL

Área do Conhecimento de Ciências Exatas e Engenharias
FBX5010AA - Cálculo Diferencial e Integral I – Período Letivo: 2022-4
Professor André Mauro Santos de Espíndola – Data: 27/09/2022
Nome: Eduardo Eberhardt Pereira

Primeira Prova Parcial
(Peso 7,0)

Instruções

- **Leia com atenção as questões a seguir, e responda aquilo que é solicitado detalhadamente e com organização e linguagem adequada. Respostas sem desenvolvimento (apenas com a resposta final) não serão consideradas. Erros na notação serão descontados: 0,2 de cada questão que apresentar erro(s) de notação.**
- **Desenvolva os cálculos a lápis e destaque as respostas finais colocando-as à caneta, inclusive os gráficos. Respostas a lápis não estarão sujeitas a questionamentos posteriores.**
- **Na correção de gráficos, o gráfico será considerado correto se detalhar tudo o que foi solicitado, e não apresentar qualquer tipo de erro.**
- **O uso de celular é proibido durante a prova. Mantenha seu celular no modo silencioso e guardado até sair da sala de aula.**
- **Você terá 45 minutos para consultar SOMENTE O CADERNO, após este tempo não será permitido consulta.**
- **O aluno só pode entregar a prova após 30 minutos do início da prova.**
- **Após o primeiro aluno sair da sala não será permitido que alunos atrasados entre na sala para realizar a prova.**

Questão 1 (2,4 pontos – 0,3 por item) Dada a função $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1}$, responda as questões abaixo. Resposta sem justificativa ou sem desenvolvimento não serão consideradas.

a) Qual o $\lim_{x \to 1} f(x)$?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{1+2-3}{2} = \lim_{x \to 1} \frac{0}{2} = 0$$

b) Qual o $\lim_{x \to \infty} f(x)$?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

c) A função f(x) tem uma assíntota vertical em x = 1? Justifique sua resposta. (a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{1+2-3}{2} = \lim_{x \to 1} \frac{0}{2} = 0$$

$$0 \neq \infty$$

Não possui assíntota vertical, pois para que ela exista, o limite deve ser ~~infinito, ou não~~, o resultado não poderia ser o valor 0.

d) A função f(x) tem uma assíntota horizontal? Justifique sua resposta. (b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2x-3}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = -\infty$$

Não possui assíntota horizontal, pois quando x tende ao infinito, y o acompanha. Não havendo um valor definido para y, não há assíntota horizontal

x configura um limite infinito no infinito

$\frac{16}{3} - \frac{(-3)}{1} = \frac{16-(-3)}{3}$

$\frac{x^2+2x-3}{x+1}$

e) Qual a taxa de variação média da função no intervalo [0, 5]?

$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\frac{16}{3}-(-3)}{5-0} = \frac{\frac{16+9}{3}}{5} = \frac{\frac{25}{3}}{5} = \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{25}{15} = 5/3$

$\frac{25}{3} / \frac{5}{1}$

$\frac{0^2+2.0-3}{0+1} = \frac{-3}{1} = -3$

$\frac{5^2+2.5-3}{5+1} = \frac{25+10-3}{6} = \frac{32}{6} \rightarrow \frac{16}{3}$

f) A função é contínua em x = -1? Justifique sua resposta.

$f(-1) = \frac{(-1)^2+2.(-1)-3}{-1+1} = \frac{1-2-3}{0}$ = indeterminação

Como $f(-1)$ não pode ser determinada, a função NÃO é contínua em $x=-1$.

g) A função é crescente ou decrescente em x= 4? Justifique sua resposta. É crescente pois $f'(4)>0$, visto que o estudo do sinal da derivada indica o comportamento da função.

$f'(x) = \frac{U(x).V'(x) - V(x).U'(x)}{U(x)^2}$

$f'(x) = \frac{(x+1).(2x+2) - (x^2+2x-3).1}{(x+1)^2}$

$V(x) = x^2+2x-3$ $\quad V'(x) = 2x+2$

$U(x) = x+1$ $\quad U'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x+3}{x^2+2x+1} = \frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+1}$

$f'(4) = \frac{4^2+2.4+5}{4^2+2.4+1}$

h) Qual a equação da reta tangente ao gráfico da função em x= 4?

$f'(4) = m = \frac{29}{25}$ $\quad y - y_0 = m(x - x_0)$ $\quad y - \frac{21}{5} = \frac{29}{25}(x-4)$

$f'(4) = \frac{16+8+5}{16+8+1} = \boxed{\frac{29}{25}}$

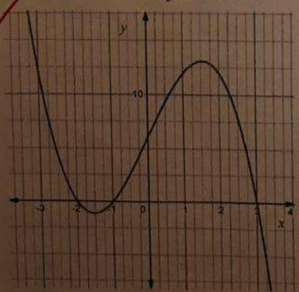
$y = \frac{29x-116}{25} + \frac{21}{5} = \frac{29x-116+105}{25} = \frac{29x-11}{25}$

$\frac{x^2+2x-3}{x+1} = \frac{4^2+2.4-3}{4+1} = \frac{21}{5}$

$(4, \frac{21}{5})$

1,1

Questão 2 (1,1 pontos) O gráfico abaixo representa da ***derivada*** da função f(x). Determine os intervalos de variação do x onde a função f(x) é crescente ou decrescente.



$\hookrightarrow x>0$ $\quad \hookrightarrow x<0$

F(x) é crescente se $x<-2$ ou $-1<x<3$

F(x) é decrescente se $-2<x<-1$ ou $x>3$

$\frac{2}{1}+\frac{1}{4}=\frac{12+1}{4}=\frac{13}{4}$ $\frac{1}{4}-\frac{1}{1}=\frac{1-4}{4}=-\frac{3}{4}$ $\frac{4}{1}-\frac{3}{4}=\frac{16-3}{4}=\frac{13}{4}$

Questão 3 (2,0 pontos) Dada a função $f(x) = (x^4 + 2x^3 + 1)(\sqrt[4]{x} + x)$, responda:

a) (1,0) Qual a equação da reta tangente ao gráfico da função em x = 1.

$f'(x) = V'(x).U(x) + V(x).U'(x)$

$V(x) = x^4 + 2x^3 + 1 \quad V'(x) = 4x^3 + 6x^2$

$U(x) = \sqrt[4]{x} + x = x^{1/4} + x \quad U'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} + 1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{3/4}} + 1 = \frac{1}{4x^{3/4}} + 1$

$f'(x) = (4x^3 + 6x^2).(x^{1/4} + x) + (x^4 + 2x^3 + 1).\left(\frac{1}{4x^{3/4}} + 1\right)$

$f'(x) = 4x^{13/4} + 6x^{9/4} + 4x^4 + 6x^3 + \left(\frac{x^{13/4}}{4} + \frac{x^{9/4}}{2} + \frac{1}{4x^{3/4}} + x^4 + 2x^3 + 1\right)$

$f'(x) = \frac{17x^{13/4}}{4} + \frac{13x^{9/4}}{2} + 5x^4 + 8x^3 + \frac{1}{4x^{3/4}} + 1$ → continuo no verso

b) (0,5) Qual a taxa de variação instantânea da função em x = 1? (a) → derivada em 1

$f'(x) = \frac{17\sqrt[4]{x^{13}} + 26\sqrt[4]{x^9} + 20x^4 + 32x^3 + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + 4}{4}$

$f'(1) = \frac{17.1 + 26.1 + 20.1 + 32.1 + 1 + 4}{4} = \frac{84}{4} = 21$

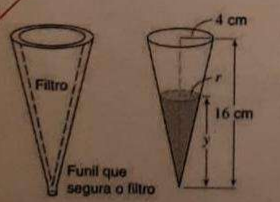
c) (0,5) A função é crescente ou decrescente em x = 2? Justifique sua resposta.

CONTA NO VERSO

R: é crescente, pois o estudo do sinal da derivada nos prova que, como $f'(2) > 0$, a função está variando positivamente e, portanto, crescendo.

Questão 4 (1,5 pontos - 0,5 ponto por item) Suponhamos que um líquido deva ser purificado por decantação através de um filtro cônico com 16 cm de altura e raio de 4 cm no topo (Figura abaixo). Onde r é raio da superfície do líquido em cm, y é a profundidade do líquido em cm e V é o volume de líquido no cone. Sabendo que $y = 4r$ e que o volume do cone pode ser dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 y$, determine:

1,5



a) A taxa de variação média do volume quando r varia de 4 para 3 cm.

b) $\frac{d[V]}{dr}$

c) A taxa de variação instantânea do Volume de líquido quando r = 2 cm. → derivada

(a) $\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\frac{256\pi}{3} - \frac{108\pi}{3}}{4-3} = \frac{\frac{148\pi}{3}}{1} = \frac{148\pi}{3}$ cm³/cm

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 4r$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 4r$

$V = \frac{\pi}{3}.16.16 \quad V = \frac{\pi}{3}.9.12$

$V = \frac{256\pi}{3} \quad V = \frac{108\pi}{3} = 36\pi$

b) $V(x).U'(x) + U(x).V'(x)$

$V(x) = 4r \quad V'(x) = 4$

$U(x) = r^2 \quad U'(x) = 2r$

$\frac{d[V]}{dr} = 4r.2r + 4r^2 = 8r^2 + 4r^2 = 12r^2$

$V(x) = r^2.4r \quad V'(x) = 12r^2$

$U(x) = \frac{\pi}{3} \quad U'(x) = 0$

$0 + 4\pi r^2 \to \frac{d[V]}{dr} = 4\pi r^2$

→ numerador

$\frac{U(x).V'(x) - V(x).U'(x)}{U(x)^2}$ → denominador

C no verso

4.c) $\frac{d[V]}{dr} = 4\pi r^2$ $\qquad \frac{d[V]}{d2} = 4\pi \cdot (2)^2 = 4\pi 4 = 16\pi$

3.a) $\frac{17x^{13/4} + 26x^{9/4} + 20x^4 + 32x^3 + x^{3/4} + 4}{4}$

$f'(x) = \frac{17\sqrt[4]{x^{13}} + 26\sqrt[4]{x^9} + 20x^4 + 32x^3 + \sqrt[4]{x^3} + 4}{4}$

$f'(1) = \frac{17.1 + 26.1 + 20.1 + 32.1 + 1 + 4}{4} = \frac{84}{4} = 21$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 8 = 21(x-1)$

$y = 21x - 21 + 8 = 21x - 13$

$f(x) = (x^4 + 2x^3 + 1)(\sqrt[4]{x} + x)$

$f(1) = (1+2+1).(1+1) = 4.2 = 8$

$\boxed{y = 21x - 13}$

3.c) $f'(2) = \frac{17\sqrt[4]{2^{13}} + 26\sqrt[4]{2^9} + 20.2^4 + 32.2^3 + \sqrt[4]{2^3} + 4}{4}$

$f'(2) = \frac{161{,}732 + 123{,}677 + 320 + 240 + 1{,}682 + 4}{4}$

$f'(2) = \frac{851{,}091}{4} \approx 212{,}773$

Questão 5 (2,0 pontos – 1,0 por item) Determine a derivada de primeira ordem das seguintes funções apresentando a função derivada na forma mais simples possível.

1.0

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{-\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$

$f'(x) = \frac{1/x \cdot (-\operatorname{sen}x + \cos x) - \ln x \cdot (-\cos x - \operatorname{sen} x)}{(-\operatorname{sen}x + \cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{x} - (\ln x \cdot (-\cos x - \operatorname{sen} x))}{\operatorname{sen}^2 x - (\operatorname{sen}x \cdot \cos x) - (\operatorname{sen}x \cdot \cos x) + \cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x - (x \cdot \ln x)(-\cos x - \operatorname{sen} x)}{x}}{\underbrace{-2 \cdot \operatorname{sen}x \cdot \cos x}_{-\operatorname{sen}(2x)} + \underbrace{\operatorname{sen}^2 + \cos^2}_{1}}$

$f'(x) = \frac{\cos x - \operatorname{sen}x - (x \cdot \ln x) \cdot (-\cos x - \operatorname{sen} x)}{x} \cdot \frac{1}{(-\operatorname{sen}(2x) + 1)} = \frac{\cos x - \operatorname{sen}x - (x \cdot \ln x) \cdot (-\cos x - \operatorname{sen}x)}{x \cdot -\operatorname{sen}(2x) + x}$

$= \frac{\cos x - \operatorname{sen}x - ((x \cdot \ln x) \cdot (-\cos x - \operatorname{sen}x))}{x \cdot (-\operatorname{sen}(2x) + 1)} =$ C

0

b) $g(x) = \frac{\sec^2(x) \cdot tg^2(x)}{1+tg^2(x)} + \log_2 4x$

$g(x) = \frac{\cancel{\sec^2 x} \cdot (\sec^2 x - 1)}{\cancel{\sec^2 x}} + \log_2 4x$

$g(x) = \sec^2 x - 1 + \log_2 4x$ $\qquad g(x) = \sec x \cdot \sec x + \log_2 x + \underbrace{\log_2 4}_{2} - 1$

$g'(x) = -tg x \sec x \cdot \sec x + -tg x \sec x \sec x + 1/x \cdot \ln 2 + 0 - 0$

$g'(x) = (-tg x \cdot \sec^2 x) 2 + \frac{\ln 2}{x} = \frac{2x \cdot (-tg x \cdot \sec^2 x) + \ln 2}{x}$