Eduardo Pereira

Propriedades de log:

$\log_n 1 = 0$ | $\log_n n = 1$ | $\log_b n = \log_K n / \log_K b$

$\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$ | $\log_b x/y = \log_b x - \log_b y$ | $^{*} \log_n n^a = a \log_n n = a$

$\log_b n^x = x \log_b n^{*}$ | $b^{\log_b n} = n^{\log_b b} = n$ | $\log_b x = 1/\log_b x$

$(a^b)^c = (a^c)^b = a^{b.c}$ | $a^b a^c = a^{b+c} \Rightarrow a^{\log_b c + 1} = a^{\log_b c} . a^1$

$(c.n)^{\log_b a} = c^{\log_b a} . n^{\log_b a}$

Somatório: $\sum_{i=m}^{n} t$

- n → valor final { $<$ ⇒ limite-1 ; $<=$ ⇒ limite }
- t → termo incrementado a cada iteração
- m → valor inicial
- i → iterador

Propriedades:

$\sum_{i=m}^{n} (a+b) = \sum_{i=m}^{n} a + \sum_{i=m}^{n} b$

$\sum_{i=m}^{n} c.i = c . \sum_{i=m}^{n} i$

Resoluções:

$\sum_{i=m}^{n} \text{const} = \text{const} \times (n-m+1)$

$\sum_{i=m}^{n} i = \frac{(n+m)}{2} \times (n-m+1)$

$\sum_{i=m}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

$\sum_{i=m}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)(n+1)}{4}$

$\sum_{i=m}^{n} r^i = r^m . \frac{r^{n-m+1} - 1}{r-1}$ | $\sum_{i=0}^{n-1} n = n^2 \to \sum_{i=0}^{n} n = ((n+1).n) \to \sum_{i=1}^{n-1} = (n-1).n$

$F(x_1) \times t_r \times v_r = F(x_2)$, $t_r = \frac{\text{tempo 2}}{\text{tempo 1}}$ $v_r = \frac{\text{velocidade 2}}{\text{velocidade 1}}$ } relação de complexidade em diferentes máquinas

Progressão Aritmética:

$a_1 = 1^{\circ}$ valor r = valor somado $= a_n - a_{n-1}$ $a_n = a_1 + r.(n-1)$

$\text{Soma}_{PA} = \frac{(a_1 + a_n) \times n\_termos}{2}$

Progressão Geométrica:

$a_1 = 1^{\circ}$ valor q = valor multiplicado $= a_n / a_{n-1}$ $a_n = a_1 \times q^{n\_termos - 1}$

$\text{Soma}_{PG} = \frac{(q \times a_n) - a_1}{q-1}$

Iterativas:

```
soma=0
for(i=1; i<=n; i++)
  for(j=1; j<=n; j++)
    for(k=1; k<=j; k++)
      // op. fund.
```

j | $\sum_{j=1}^{n} j$ | $n . \sum_{j=1}^{n} j$ OU $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j} 1 \right) \right)$

Recursivas:

```
tower(n){
  if(n==1){
    1 //1 }
  else {
    tower(n-1)
    //1
    tower(n-1) }
}
```

Eq. Recorrência $= a.T(r)+c$

a = número de chamadas recursivas

r = valor da chamada recursiva

c = nº de operações fundamentais

$$\rightarrow T(n) = \begin{cases} 1 & p/\ n \leq 1 \\ 2T(n-1)+1 & p/\ n>1 \end{cases}$$

Indução: p/ uma equação de expansão encontrada

$a_1 = 1 \quad q = 2 \quad a_n = 2^{n-1}$

$$S_{PG} = \frac{q.a_n - a_1}{q-1} = \frac{2.2^{n-1}-1}{2-1} = \frac{2^n - 1}{1}$$

$T(1) = 1$

$T(2) = 2.(1)+1 = 2+1$

$T(3) = 2.(2+1)+1 = 4+2+1$

$T(4) = 2.(4+2+1)+1 = 8+4+2+1$

se verifica se equivale a de ~~re~~corrência p/ o valor seguinte, não só até 4. Aqui, substitui n por $n+1$

$$2T((n+1)-1)+1 = 2^{n+1}-1 \rightarrow 2T(n)+1 = 2^n.2-1 \rightarrow 2.(2^n-1)+1 = 2^n.2-1 \rightarrow$$
$$2.2^n - 2+1 = 2.2^n-1 \rightarrow 2.2^n-1 = 2.2^n-1$$ } provado verdadeiro por indução

Iterativas com incremento que não é em 1:

~~while n≥0 {~~ Inicia convertendo valor geométrico em uma variável incrementada em 1:

```
for(i=1; i<=n; i++)
  x=1
  while x<=n
    for(j=1; j<=x; j++)
      1 //1
    x *= 2 -> x = 2^y
```

$\rightarrow x=1 \quad 2^y = x \quad \log_2 1 = y \quad \boxed{y=0}$

$\rightarrow 2^y <= n \rightarrow y <= \log_2 n$

$\rightarrow j <= 2^y$] 2^y

$\rightarrow y{+}{+}$

$\sum_{y=0}^{\log_2 n} 2^y$

$n.\sum_{y=0}^{\log_2 n} 2^y$

Ao converter o código, resolve ~~soma~~ iterativa (como demonstrado com azul)

$$n\left(\sum_{y=0}^{\log_2 n} 2^y\right) = \frac{2^0.2^{\log_2 n+1}-1}{2-1} = \frac{1.2^{\log_2 n}.2-1}{1} = n^{\log_2 2}.2-1 = n.2-1 = 2n-1$$

$n.(2n-1) = 2n^2 - n$

Eduardo Pereira

Universidade de Caxias do Sul
Complexidade de Algoritmos
Prof. Ricardo Dorneles
Avaliação da Primeira Área - 03/10/24

1)(2 pontos) Resolva a seguinte equação de recorrência, supondo T(1)=1. Mostre por indução matemática a correção da solução encontrada:

$$T(n) = 4.T(n/2) + 3.n$$

2)(2 pontos) Para o subalgoritmo recursivo abaixo, determine a equacao de recorrencia que representa a complexidade do mesmo e a equacao fechada correspondente.

```
void p1(int n)
{                    n=1->0
    if (n>1)
        {
        p1(n/2);
        p1(n/2);   4T(n/2)
        p1(n/2);
        p1(n/2);
        for (i=1;i<=n*n;i++)
            soma = soma + i; <- operacao fundamental   n^2
        }
}
```

3)(1 ponto)(POSCOMP - Fundamentos - 2004) - Um algoritmo é executado em 10 segundos para uma entrada de tamanho 50. Se o algoritmo é quadrático, quanto tempo em segundos ele gastará, aproximadamente, no mesmo computador, se a entrada tiver tamanho 100?

1. 10 2. 20 X. 40 4. 100 5. 500

4)(2 pontos) Calcule a complexidade do trecho de código a seguir. Considere como operação fundamental o comando de escrita:

```
void Moo (int N)
```

```
{
for   ( j=1 ; j<=N ; j=j*2 )
     for ( i=j ; i>1 ; i=i/2 )
           printf("%d\n",i);
}
```

5)(1 ponto)(POSCOMP - Fundamentos - 2003) - Quais das seguintes igualdades são verdadeiras?

I. $n^2 = O(n^3)$ V
II. $2 * n + 1 = O(n^2)$ V
III. $n^3 = O(n^2)$ X
IV. $3 * n + 5 * n \log n = O(n)$ X
V. $\log n + \sqrt{n} = O(n)$ V

a) somente I e II
b) somente II, III e IV ×
c) somente III, IV e V
d) somente I, II e V
e) somente I, III e IV ×

1.0

6)(2 pontos)(POSCOMP - Fundamentos - 2006) - Considere a função Pot que calcula x^n, para x real e n inteiro:

```
Function Pot(x:real;n:integer):real;
   begin
      if x=0
      then Pot := 0
      else
         if n=0
         then Pot :=1
         else
            if n<0
            then Pot := 1/Pot(x,abs(n))
            else
               if odd(n)       <- testa se n é impar
               then
                  Pot := x * sqr(Pot(x,(n-1) div 2))    <- sqr=eleva ao quadrado
               else
                  Pot := sqr(Pot(x,n div 2))
end;
```

$T(0, n) = 1$
$T(x, 0) = 1$
$T(x, n<0) = \frac{1}{T(x, n \times -1)}$
$T(x, n) = T(n/2)^3$
→ quadrado e cubo é apenas p/ cálculo, ñ p/ chamada
$T(x, n) = T(n/2)^2$

Seja $T(n)$ o tempo de execução da função Pot para as entradas x e n. A ordem de $T(n)$ é:

a) $T(n) = \Theta(1)$
b) $T(n) = \Theta(\log n)$ *
c) $T(n) = \Theta(n)$
d) $T(n) = \Theta(n \log n)$
e) $T(n) = \Theta(n^2)$

2.0

dez

Eduardo Pereira

1) $T(n) = 4T(n/2) + 3n$ 2,0

$E = n^2 + PG$

$PG = q = 2 \quad a_1 = 3n \quad n_t = \log_2 n$

$a_n = 3n * 2^{\log_2 n - 1} = 3n \cdot 2^{\log_2 n} / 2^1$

$a_n = 3n \cdot n^{\cancel{\log_2 2}} / 2 = \frac{3n^2}{2}$

$S_{PG} = \frac{(q \times a_n) - a_1}{q - 1}$

$S_{PG} = \frac{\cancel{2} \cdot \frac{3n^2}{\cancel{2}} - 3n}{2-1} = 3n^2 - 3n$

$E = n^2 + 3n^2 - 3n = 4n^2 - 3n$ → Resposta

Indução: $4T(\frac{2n}{2}) + 3 \cdot 2n = 4 \cdot (2n)^2 - 3 \cdot (2n)$

$4 \cdot (4n^2 - 3n) + 6n = 4 \cdot 4n^2 - 6n \Rightarrow 16n^2 - 12n + 6n = 16n^2 - 6n$

validado ⇔ $16n^2 - 6n = 16n^2 - 6n$

$T(1) = 1$

$T(2) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6$

$T(4) = 4 \cdot (4+6) + 3 \cdot 4 = 16 + 24 + 12$

$T(8) = 4 \cdot (16 + 24 + 12) + 3 \cdot 8 =$

$64 + 96 + 48 + 24$

$T(16) = 4 \cdot (64 + 96 + 48 + 24) + 3 \cdot 16 =$

$256 + 384 + 192 + 96 + 48$

$T(32) = 4 \cdot (256 + 384 + 192 + 96 + 48) + 3 \cdot 32$

$= 1024 + 1536 + 768 + 384 + 192 + 96$

$T(1) = 1$

$T(2) = 4 \cdot (1) + 3 \cdot 2 = (4 \cdot 1) + (3 \cdot 2)$

$T(4) = 4 \cdot (4+6) + 3 \cdot 4 = (4 \cdot 4 \cdot 1) + (4 \cdot 3 \cdot 2) + (3 \cdot 4)$

$T(8) = 4 \cdot (16 + 24 + 12) + 3 \cdot 8 = (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1) + (4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3 \cdot 4) + (3 \cdot 8)$

$T(16) = (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1) + (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) + (4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4) + (4 \cdot 3 \cdot 8) + (3 \cdot 16)$

$4 \cdot ((4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1) + (4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3 \cdot 4) + (3 \cdot 8)) + (3 \cdot 16)$

___/___/_____ resposta

2) $4T(n/2)+n^2$

P.A = $r=0$ $a_1=n^2$ $a_n=n^2$

$S_n = \frac{(n^2+n^2) \times \log_2 n}{2}$ → n-termos

$= \frac{2n^2 \cdot \log_2 n}{2}$

$= n^2 \log_2 n$ → resposta

2.0

$T(1)=0$
$T(2)=4.0+2^2=4$
$T(4)=4.4+4^2=16+16$
$T(8)=4.(16+16)+8^2=64+64+64$
$T(16)=4.(64+64+64)+16^2=256+256+256+256$

Indução: $4T\left(\frac{2n}{2}\right)+(2n)^2=(2n)^2 \cdot \log_2(2n)$
$4(n^2\log_2 n)+4n^2=4n^2.(\log_2 2+\log_2 n)$
$4n^2\log_2 n+4n^2=4n^2.(\log_2 n+1)$
$4n^2\log_2 n+4n^2=4n^2\log_2 n+4n^2$ ✓

3) $F(x_1) \times t_n \times v_n = F(x_2)$ $x_1=50$ $t_1=10n$ $F(x)=x^2$ $x_2=100$

5^2 —— $10n$ $25x=1000$
10^2 —— xn $x=40n$ → resposta

1.0

4) `For (j=1; j<=N; j=j*2)` `for (i=j; i>1; i=i/2)` → `//1`

`For(y=0; 2^y<=N; y++)` `for(i=2; i<=2^y; i=i*2)` → `//1`

`For(y=0, 2^y<=N; y++)` `For(x=1; 2^x<=2^y; x++)` → `//1`

`For(y=0; y<=log2N; y++)` `For(x=1; x<=y; x++)` `//1`

Relag → $n=2$ 2 - 1 -1 | $n=2$ -1 conversão correta
$n=4$ 3 -3 | $n=4$ -3
$n=8$ -6 | $n=8$ -6
$n=16$ -10 | $n=16$ -10

___/___/___

```
for(y=0;y<=log2m;y++)
  for(x=1;x<=y;x++)
    //1
```

$$\sum_{y=0}^{\log_2 m} y = \frac{\log_2 m}{2} \times \log_2 m + 1$$

$$\frac{\log_2^2 m + \log_2 m}{2}$$ → resposta

2.0

5) $T(m) = T(m/2) + 1$ → teste

$T(0) = 1$

P.A. = $r = 0$ $a_1 = 1$ $a_m = 1$ retorna ao por anterior ← ímpar $T(1) = 1$

$\frac{(1+1)}{2} \times m\_termos$ → $\log_2 m + 1$

$T(2) = 1 + 1 = 1 + 1$

$T(4) = (1+1) + 1 = 1 + 1 + 1$

$T(8) = (1+1+1) + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

$\frac{2}{2} \times \log_2 m + 1 = \log_2 m + 1$

→ considerando teste como op. fund.

(ou própria chamada)