RESUMO PARA A SEGUNDA PROVA DE TEORIA DOS GRAFOS

→ CAMINHO HAMILTONIANO

Se um grafo é acíclico e dirigido um caminho hamiltoniano pode ser encontrado fazendo uma ordenação topológica e verificando se cada par de vértices contíguos na ordenação possuem uma aresta entre eles.

Para outros grafos pode-se usar programação dinâmica:

	1	2	3	4
1	0	10	∞	5
2	4	0	10	9
3	∞	12	0	2
4	12	9	13	0

$F(1, \{2,3,4\})$

$C_{1\to2} + f(2, \{3,4\})$ $C_{1\to3} + f(3, \{2,4\}) = \infty$ $C_{1\to4} + f(4, \{2,3\})$ ...

$C_{2\to3} + f(3, \{4\})$ $C_{2\to4} + f(4, \{3\}) = \infty$

$C_{2\to3} + C_{3\to4} + C_{4\to1} = 24$

sempre volta p/ o 1

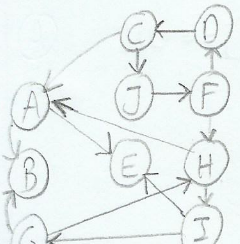
soma desse ramo: $C_{1\to2} + C_{2\to3} + C_{3\to4} + C_{4\to1} = 34$

→ IDENTIFICAÇÃO DE COMPONENTES FORTEMENTE CONEXAS

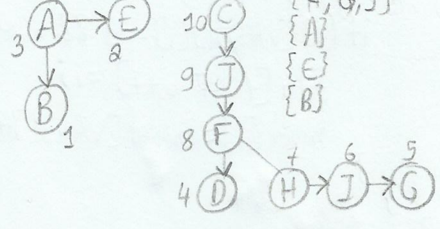
Gerar uma árvore DFS (T), realizar uma busca de profundidade em T (numerando em pós-ordem), construir o grafo invertido (G'), fazer uma busca em profundidade em G' começando pelo de maior numeração pós-ordem; todos os vért. alcançados formam uma componente fortemente conexa.

```
dfs_pos-ordem (v){
  visit[v]=1;
  for(i=0;i<N;i++){
    if(G[v][i]==1 && visit[i]==0){
      dfs_pos-ordem (i);
    }
  }
  nump++;
  posnum[v] = nump;
```

grafo:



árvore DFS:



{C, D, F, J}
{H, G, I}
{A}
{E}
{B}

→ PROBLEMA DO CAMINHO CRÍTICO / PERT

No diagrama PERT, o caminho do vértice inicial ao final cuja soma das durações das atividades seja máxima é chamado de caminho crítico, ou seja, as atividades críticas ocorrem onde data mais cedo = data mais tarde.

→ ORDENAÇÃO TOPOLÓGICA

Em um dígrafo acíclico é uma ordenação, possivelmente parcial, linear de todos os seus vértices em que cada nó vem antes de todos os nós para os quais este tenha arestas de saída.

Uma forma de achar a ordenação topológica é remover, a cada iteração, um vértice com grau de entrada nulo, gerando um novo dígrafo, até que não hajam mais vértices.

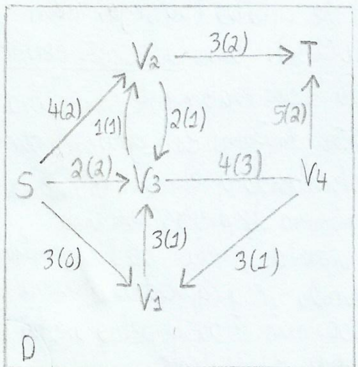
Uma outra forma é utilizar a dfs_pos-ordem, que gera uma ordenação topológica invertida.

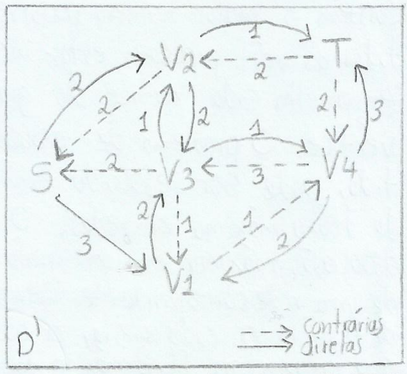
→ PROBLEMA DA CIRCULAÇÃO DE FLUXO EM REDES

Uma rede é um grafo dirigido com dois vértices especiais: uma fonte (S), de onde só partem arcos, e um sumidouro (T), de onde só chegam arcos. Cada arco tem uma capacidade máxima e um fluxo. A soma dos fluxos é conservada. Se o fluxo da fonte for diferente do fluxo do sumidouro, a rede não é válida.

Uma aresta é saturada se f(aresta) = c(aresta). Um vértice é saturado se todas as suas arestas convergentes estão saturadas. Quando todo o caminho de S a T possui pelo menos uma aresta saturada, temos um fluxo maximal, que não necessariamente é o fluxo máximo.

Uma rede residual D' de uma rede D é uma rede com os mesmos vértices de D, mas com arestas diretas (c(aresta) - f(aresta)) e contrárias (f(aresta)).





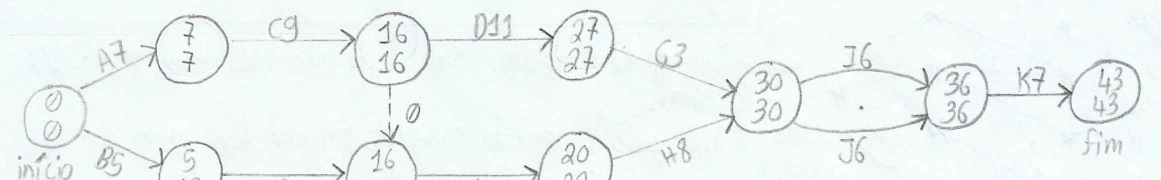
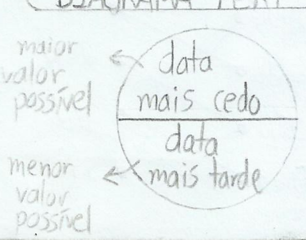


DIAGRAMA PERT



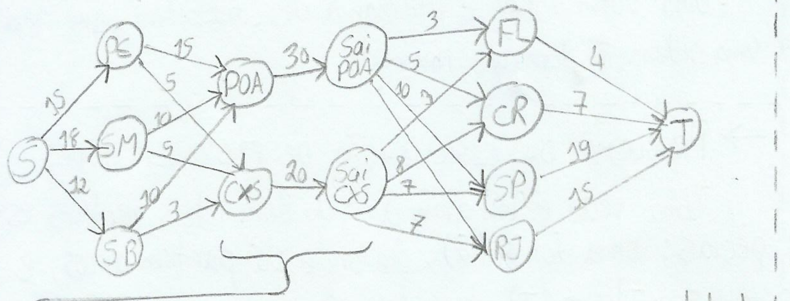
Na rede residual D' há um caminho aumentante (S, V_1, V_4, T) de fluxo F' = 1. Isso significa que o fluxo em D pode ser incrementado em 1.

Para encontrar o fluxo máximo, pode-se usar o algoritmo de Ford-Fulkerson, que funciona da seguinte maneira:

1º) Crie uma rede p/ o problema. Deixe-a com fluxo zero.
2º) Encontre um caminho aumentante e gere a nova rede.
3º) Crie uma rede residual e ache um caminho aumentante
4º) Atualize a rede normal c/ o caminho encontrado e repita o passo 3-4 até não ter mais caminhos aumentantes.

→ PROBLEMA PRODUTOR CONSUMIDOR

Resolvido com Ford-Fulkerson, encontrando o fluxo máx.
Exemplo de modelagem (as arestas representam capacidad.):



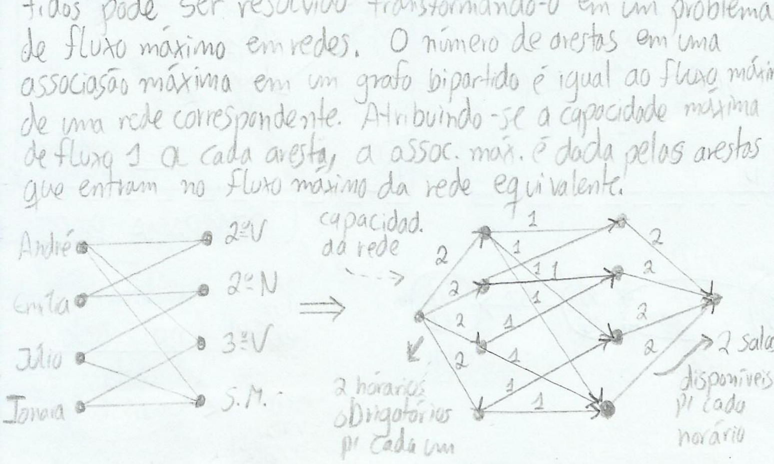
↳ Quando um vértice possui capacidade, como a capacidade de processar a mercadoria que chega, acrescenta-se outro vértice e um arco com essa capacidade de processamento.

→ GRAFOS BIPARTIDOS

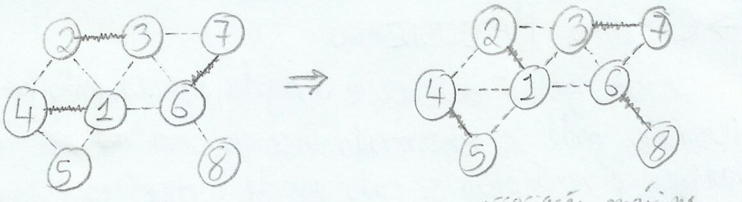
São grafos onde os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos, de modo que não haja arestas conectando vértices do mesmo conjunto. Pode-se usar BFS e DFS e coloração (2 cores) p/ ver se é bipartido.

→ ASSOCIAÇÃO MÁXIMA EM GRAFOS BIPARTIDOS

Uma associação máxima é um emparelhamento que contém o maior número possível de arestas (ou seja, nem todos os vért. precisam estar incluídos.). Uma associação perfeita emparelha cada vértice do grafo com exatamente um outro vértice. O problema de associação máxima em grafos bipartidos pode ser resolvido transformando-o em um problema de fluxo máximo em redes. O número de arestas em uma associação máxima em um grafo bipartido é igual ao fluxo máximo de uma rede correspondente. Atribuindo-se a capacidade máxima de fluxo 1 a cada aresta, a assoc. máx. é dada pelas arestas que entram no fluxo máximo da rede equivalente.



→ ASSOCIAÇÃO MÁXIMA EM GRAFOS NÃO BIPARTIDOS



associação ⇒ associação máxima

Três tipos de caminhos alternantes:
- Entre dois vértices associados
- Entre dois vértices livres:
- Entre um vértice associado e um livre.

Um caminho aumentante é um caminho simples alternante entre dois vértices livres. Se existe um caminho aumentante, a associação não é máxima

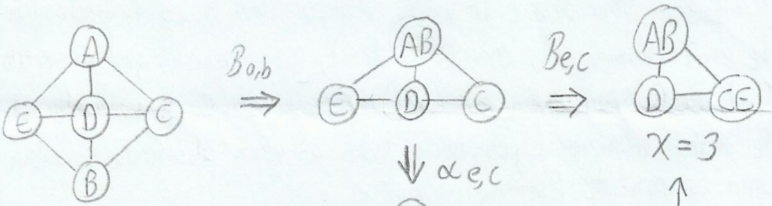
---

→ OBTENÇÃO DO NÚMERO CROMÁTICO POR ALTERAÇÃO ESTRUT.

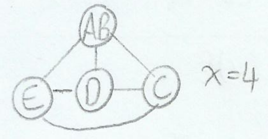
Seja G um grafo não dirigido. Se G é completo ^{K_n}, o número cromático é n, senão, há dois vértices v e w não adjacentes:

- $\alpha_{v,w}(G)$ é o grafo obtido pela add da aresta (v,w) a G
- $\beta_{v,w}(G)$ é o grafo obtido pela condensação dos vértices v e w em um único vértice z, eliminando arestas paralelas.

O número cromático $\chi(G)$ é o mínimo entre $\chi(\alpha_{v,w}(G))$ e $\chi(\beta_{v,w}(G))$.



Uma coloração aproximada é realizada começando a colorir os v ∈ V de maior grau.



```
bFS (v){
  fila [N+1], fimFila=1, inicioFila=0;
  fila [0] = V;
  nivel [V] = 0;
  while (fimFila ≠ inicioFila){
    vAtual = fila [inicioFila++];
    for (i=1; i<=N; i++){
      if (M[vAtual][i]==1 && nivel[i]==-1){
        fila [fimFila++] = i;
        nivel [i] = nivel [vAtual]+1;
      }
    }
  }
}
```

- Um grafo completo (K_n) de n vértices tem $n(n-1)/2$ arestas.
- Um grafo bipartido completo ($K_{n,m}$) tem $n \cdot m$ arestas.
- Um grafo é bipartido se todos os ciclos tem comprimento par.