Hinter den Kulissen von K-AL

Einleitung

In der Logikvorlesung haben wir die Regeln vom Kalkül des natürlichen Schließens kennengelernt und ihn für die Analyse von philosophischen Argumenten eingesetzt. Damit wissen wir nun, *wie* wir Beweise im Kalkül führen. Wenn man etwas länger über K-AL nachdenkt, steht aber sehr schnell auch die Frage im Raum, *warum* das Herleitungsspiel überhaupt funktioniert. Zwar bräuchte man wohl eine eigene Vorlesung über Beweistheorie, um eine vollumfassende Antwort auf diese Frage zu erhalten, aber wir können uns der Antwort zumindest so weit annähern, dass wir ein tieferes Verständnis vom Kalkül des natürlichen Schließens erhalten – und genau das ist Ziel dieses kurzen Papiers. Auf dem Weg dorthin werde ich ein paar wichtige Zusammenhänge zwischen normalsprachlichen Phänomenen, sprachphilosophischen Konzepten und formalen AL-Definitionen erläutern, um eben diesen Definitionen den Schein der Willkür zu rauben.

Im ersten Teil erläutere ich, warum Logik als Theorie des gültigen Schließens aufgefasst werden kann, und führe das Konzept der allgemeingültigen Formel auf das der Kon-Sequenz zurück. Daraufhin stelle ich im zweiten Teil die wichtigsten Unterschiede zwischen Syntax und Semantik dar, um die Begriffe der syntaktischen und semantischen Folge voneinander trennen zu können. Im dritten und vierten Teil widme ich mich dann jeweils einer von zwei Fragen zu K-AL, die sehr häufig im Tutorium gestellt werden:

(1) Warum benutzen wir den Kalkül des natürlichen Schließens, bei dem es um die rein *syntaktische* Manipulation von Zeichenketten geht, für die Rekonstruktion von Schlüssen, also *semantischen* Folgerungen?

(2) Warum darf man mit den Regeln I$\mapsto$ und I$\mapsto^+$ Sterne löschen, wenn die Sterne doch für Prämissen stehen?

Diese beiden Fragen treffen die Kernpunkte des natürlichen Schließens: Den Zusammenhang zwischen syntaktischer und semantischer Folge sowie den Zusammenhang zwischen der Konditionalisierung und dem syntaktischen Deduktionstheorem. Um diese Zusammenhänge zu erläutern, wagen wir einen Blick hinter die Kulissen des Kalküls, indem wir dessen Schlussregeln als Regeln der Manipulation metasprachlicher Folgerungsbehauptungen auffassen. Auf diese Weise wollen wir verstehen, welche Verbindungen genau zwischen Sternen und Prämissen sowie zwischen I$\mapsto$, I$\mapsto^+$ und dem Deduktionstheorem bestehen.

Im fünften und letzten Teil befindet sich eine Legende, sodass dieses Dokument auch zum Nachschlagen genutzt werden kann. Ganz generell habe ich sehr viele Hyperlinks eingebaut, die auf Definitionen, Erläuterungen oder Literatur verweisen. Ziel dieser Verlinkungen ist, möglichst schnell Dinge nachschauen zu können und damit die Wahrscheinlichkeit zu verringern, den Faden, die Geduld oder im Zweifelsfall auch beides zu verlieren.

Aus didaktischen Gründen werde ich im Text einige philosophisch umstrittene Annahmen machen. All diese Annahmen werde ich aber als solche kennzeichnen und in Fußnoten ihre Probleme oder Gegenpositionen anreißen. Stelle ich Behauptungen über formale Sprachen auf, so beziehen sich diese zunächst ausschließlich auf die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik. Auch hier aber bemühe ich mich, auf Sonderfälle, von denen es freilich genug gibt, hinzuweisen.

1 Allgemeingültigkeit als Kon-Sequenz mit der leeren Menge

1.1 Logik als Theorie des gültigen Schließens

Am Anfang unserer Reise in die Gefilde der Logik haben wir diese als die Theorie vom korrekten Gebrauch des Wörtchens „also" kennengelernt. Erinnern wir uns zurück, warum das so war:

Definition 1: Schluss

Ein *Schluss* ist der Kontext des bedeutungsvollen Gebrauchs des Wörtchens „also" (bzw. entsprechend funktionierender Wörter anderer Sprachen).

Ziel der Logik ist also (!), eine Theorie über das korrekte Schließen aufzustellen. Nun, mit etwas mehr Vokabular, können wir auch sagen: Es ist die Theorie des gültigen Schlusses. Was genau ein gültiger Schluss ist, wissen wir auch bereits:

Definition 2: Gültigkeit eines Schlusses

Ein Schluss ist genau dann *gültig*, wenn es unmöglich ist, dass all seine Prämissen wahr, seine Konklusion aber falsch ist.

Nun sind Kon-Sequenzen das formale Gegenstück zu gültigen Schlüssen: Auf dieselbe Weise, wie die Prämissen eines Schlusses in der Normalsprache der Menge von wohlgeformten Formeln in der Kon-Sequenz-Behauptung entsprechen, entspricht die Konklusion des normalsprachlichen Schlusses auch der wohlgeformten Formel hinter dem Double Turnstile („$\models$"), der dieselbe Rolle wie das Wörtchen „also" in einem normalsprachlichen Schluss spielt. Ganz analog zur Definition eines gültigen Schlusses können wir nun auch die Definition einer Kon-Sequenz aufstellen:

Definition 3: Kon-Sequenz

$\{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \models_{\overline{AL}} \beta$ genau dann, wenn es kein Modell $[\![\dots]\!]$ gibt, sodass gilt:
$[\![\alpha_1]\!] = \bullet$ und ... und $[\![\alpha_n]\!] = \bullet$, aber $[\![\beta]\!] = \circ$.

Die Definition besagt: Eine Menge von Formeln bildet mit einer einzelnen wohlgeformten Formel genau dann eine Kon-Sequenz, wenn es kein Modell gibt, das alle Prämissen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\bullet$, die Konklusion β aber $\circ$ macht. Vergleicht man diese Definition mit der von Definition 2, so fällt auf, dass sie dasselbe leisten. Wir können also festhalten: *Genau dann, wenn ein normalsprachlicher Schluss gültig ist, besteht zwischen der Menge, in der die formalisierten Prämissen enthalten sind, und der wohlgeformten Formel, die die Formalisierung der Konklusion ist, eine Kon-Sequenz.* Aus diesem Grund können wir Logik, statt von ihr als Theorie des gültigen Schlusses zu reden, auch als *Theorie der Kon-Sequenzen* charakterisieren.

1.2 Logisch wahre Sätze

Neben gültigen Schlüssen kennen wir aber auch noch logisch wahre Sätze. Solche Sätze[1] sind schon für sich genommen immer wahr – und zwar ganz ohne Prämissen:

Definition 4: Logische Wahrheit eines Satzes

Ein Satz ist genau dann *logisch wahr*, wenn jede Ersetzung der Inhaltswörter in ihm wieder einen wahren Satz ergibt, solange man nur die Strukturwörter so lässt, wie sie sind.

Die Definition besagt: Ein logisch wahrer Satz ist allein aufgrund seiner Struktur wahr. Anders gesagt: Es kann nicht sein, dass er falsch ist. Das formale Gegenstück zu logisch wahren Sätzen – allgemeingültige Formeln – ist auf analoge Weise definiert:

Definition 5: Allgemeingültigkeit einer Formel von AL

Sei α eine beliebige wohlgeformte Formel von AL. Dann gilt:
α ist *AL-allgemeingültig* gdw α für jedes AL-Modell schwarz ist.

Vergleichen wir nun Definition 4 mit Definition 2, so erkennen wir eine Gemeinsamkeit: In beiden Fällen ist davon die Rede, dass eine Formel nicht falsch sein kann. Beim gültigen Schluss handelt es sich um die Konklusion, beim logisch wahren Satz um die in Frage stehende Formel. Der wichtige Unterschied ist jedoch, dass der logisch wahre Satz *an sich* nicht falsch sein kann, während die Konklusion *nur dann* nicht falsch sein kann, *wenn alle Prämissen wahr sind.*

Diese Gemeinsamkeit können wir auch wie folgt ausdrücken: Logische Wahrheiten sind gültige Null-Prämissen-Schüsse – Wenn alle Prämissen des logisch wahren Satzes wahr sind, dann auch der logisch wahre Satz selbst. Nun hat ein logisch wahrer Satz aber überhaupt keine Prämissen. Also reduziert sich „Es ist unmöglich, dass alle Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist“ auf „Es ist unmöglich, dass die Konklusion falsch ist“. Und genau das macht einen logisch wahren Satz aus – er kann nicht falsch sein, also ist er immer wahr[2]. Etwas gestelzt können wir auch sagen: Ein logisch wahrer Satz folgt genauso wie die Konklusion eines Schlusses – nur eben *unmittelbar*, ganz ohne Prämissen.

Mit dieser Motivation können wir logisch wahre Sätze als Sonderfälle von Schlüssen auffassen – nämlich als solche, die keine Prämissen haben. Auch dazu gibt es ein formales Gegenstück:

[1] Ich habe mich entschieden, davon zu reden, dass Sätze wahr oder falsch sind. Nicht wenige Philosoph:innen behaupten aber, Sätze seien überhaupt gar keine Träger von Wahrheitswerten, sondern nur *das, was sie ausdrücken*. Diese alternativen Träger von Wahrheitswerten nennt man auch *Propositionen*. Ein Beispiel: Die Sätze „It is raining“ und „Es regnet“ sind verschieden, weil es sich um verschiedene Zeichenkombinationen handelt, aber sie drücken dasselbe – nämlich dieselbe Proposition – aus. Auch bei dieser Position aber kriegen nicht wenige Philosoph:innen Bauchschmerzen, denn wenn man behauptet, dass Propositionen Träger von Wahrheitswerten sind, verpflichtet man sich darauf, dass es Propositionen überhaupt gibt. Der Einfachheit halber werden wir diese Debatte hier aber ausklammern und schlichtweg darüber reden, dass Sätze wahr oder falsch sind.

[2] Dieser Schluss ist für AL und PL nur zulässig, weil dort das Bivalenzprinzip gilt, welches garantiert, dass jede Formel einen von genau zwei Wahrheitswerten erhält; wenn nicht den einen, dann den anderen; siehe dazu auch Fußnote 11.

Abbildung 1: Logische Wahrheiten als prämissenlose gültige Schlüsse

(a) gültiger Schluss	(b) logische Wahrheit
Prämisse 1 Prämisse 2 ⋮ Prämisse n ——— Konklusion	 ——— Konklusion

Definition 6: Allgemeingültigkeit einer Formel

$\models_{\text{AL}} \alpha := \{\,\} \models_{\text{AL}} \alpha$

Auf dieselbe Weise, wie ein Satz genau dann logisch wahr ist, wenn er Konklusion eines gültigen 0-Prämissen-Schlusses ist, ist eine Formel genau dann allgemeingültig, wenn sie eine Kon-Sequenz mit der leeren Menge bildet. Allgemeingültigkeit ist also ein Sonderfall einer Kon-Sequenz, nämlich ein solcher, bei dem die Prämissenmenge leer ist!

2 Syntax und Semantik

Im vorherigen Teil haben wir uns den Zusammenhang zwischen gültigen Schlüssen und Kon-Sequenzen klar gemacht. Dabei mussten wir darüber reden, dass Sätze wahr oder falsch sind und dass Formeln Farbwerte zugewiesen bekommen. Wie wir gleich sehen werden, handelt es sich dabei um *semantische* Begriffe.

Nun bestehen Schlüsse aber aus Sätzen und Kon-Sequenzen aus Formeln. So ist es nicht verwunderlich, dass wir zunächst wissen müssen, was Sätze und Formeln überhaupt sind, um sinnvoll über Schlüsse oder Kon-Sequenzen reden zu können. Die Regeln, die angeben, wann ein Satz ein Satz oder eine Formel eine Formel ist, sind Teil der *Syntax*.

Für die Rede von gültigen Schlüssen bzw. Kon-Sequenzen benötigt es also sowohl syntaktische als auch semantische Begriffe – und genau diese wollen wir im Folgenden näher untersuchen. Um einen ersten Eindruck davon zu gewinnen, beginnen wir zunächst mit Unterschieden zwischen syntaktischen und semantischen Konzepten in natürlichen Sprachen, um auf diesem Wege zu den formalen Gegenstücken zu gelangen. Dort angekommen beleuchten wir dann genauer, was syntaktische und semantische Folgen einer formalen Sprache überhaupt sind, und arbeiten Unterschiede und Gemeinsamkeiten zur Normalsprache heraus.

2.1 Syntax und syntaktische Folge

2.1.1 Syntax natürlicher Sprachen

2.1.1.1 Bestandteile einer Syntax natürlicher Sprachen

Um eine Sprache zu sprechen, benötigen wir offensichtlich sprachliche Ausdrücke – bspw. Phrasen und Sätze –, und da solche Ausdrücke aus sprachlichen Zeichen bestehen, benötigen wir auch zuallererst eben diese. Die Menge dieser Zeichen nennen wir *Alphabet*. In der deutschen Sprache handelt es sich um die 26 Buchstaben von „a“ bis „z“. Nun ist aber nicht jede zufällige Kombination aus Zeichen des Alphabets auch ein Ausdruck der deutschen Sprache; beispielsweise lassen sich sowohl die Zeichenreihen „ordentlich“ als auch „ozjhqe“ aus dem Alphabet bilden, aber nur bei der ersten handelt es sich tatsächlich um einen deutschen Ausdruck. Wir benötigen also Regeln, die bestimmen, welche Zeichenkombinationen Wörter sind – und welche nicht.

Nun kann man aber auch mit einzelnen Wörtern noch nicht viel anfangen. Wir müssen diese Wörter in Beziehung zueinander setzen und in einer bestimmten Reihenfolge äußern, um komplexe Sachverhalte auszudrücken. Kurzum: Wir brauchen Sätze. So wie Wörter aus Buchstaben bestehen, bestehen Sätze aus Wörtern. Und auch hier gilt: Nicht jede Kombination aus Wörtern ist ein Satz. Betrachten wir dafür diese beiden Zeichenketten:

(1) „Vitus ist und.“

(2) „Vitus ist Logiktutor.“

Es bedarf keiner Überzeugungsarbeit, dass es sich bei (2) um einen Satz handelt, bei (1) aber nicht. Auch wenn wir uns dessen meist nicht bewusst sind, gibt es also eine Menge von Regeln, die festlegen, bei welchen Zeichenketten es sich um Wörter oder Sätze handelt (oder zumindest handeln kann). Diese Regeln nennen wir – zusammen mit dem Alphabet – *Syntax*. Ein Blick ins Griechische raubt dem Fachwort schnell seine Fremdartigkeit: „Syntax“ stammt von „σύνταξις“ („syntaxis“) ab und bedeutet nichts anderes als „Zusammenstellung“ – und das macht auch Sinn, schließlich gibt sie an, welche Zusammenstellungen von Zeichen des Alphabets Wörter und welche Zusammenstellungen von Wörtern der Sprache Sätze sind. Ein Beispiel für eine syntaktische Regel ist, dass nach dem Wort „und“ niemals ein Punkt folgen darf.

Definition 7: Syntax

Eine *Syntax* ist eine Menge von Regeln, die

(1) die grundlegenden <u>Zeichen</u> einer Sprache (das *Alphabet*)

(2) die Bildung von grundlegenden <u>Zeichenkombinationen</u> (von *Phrasen*) und

(3) die Bildung von <u>komplexen Ausdrücken</u> (von *Sätzen*)

festlegt.

2.1.1.2 Syntaktische Definitionen natürlicher Sprachen

Nun haben wir einen Eindruck davon gewonnen, was die Aufgaben einer Syntax sind. Eine sorgfältige Beobachterin könnte nun aber festgestellt haben, dass das deutsche Alphabet neben den bereits genannten Buchstaben auch noch die Umlaute sowie das scharfe S enthält. Im Gegensatz zu den 26 Buchstaben des Alphabets können wir diese Zeichen aber mithilfe von sogenannten *syntaktischen Definitionen* einführen. Ein Beispiel:

Definition 8: Beispiel: syntaktische Definition

Die Zeichenkette „ae“ darf immer durch die Zeichenkette „ä“ abgekürzt werden.

Es handelt sich hierbei um eine syntaktische Definition, weil wir lediglich davon reden, dass wir eine Zeichenkette in jedem Fall durch eine andere ersetzen dürfen. Will man nun bspw. das Wort „Bär“ erzeugen, so stellt man zunächst aus dem deutschen Alphabet die Zeichenkombination „Baer“ zusammen und kürzt daraufhin „ae“ durch „ä“ ab.[3] Definieren wir die Umlaute und das scharfe S auf diese Weise, so reicht unser Alphabet auch aus, um Wörter mit Umlauten zu bilden. Mithilfe von syntaktischen Definitionen können wir unseren Zeichenvorrat also minimal halten.

2.1.1.3 Syntaktische Folge natürlicher Sprachen

Dennoch gibt es ein syntaktisches Konzept in der Logik, das der Normalsprache zunächst fremdartig scheint – das der syntaktischen Folge. Wie kann man schließlich wissen, dass aus einem Satz ein anderer folgt, wenn man die Bedeutung beider Sätze nicht kennt? Die Antwort darauf ist so einfach wie genial: Die Bedeutung der Sätze ist irrelevant. Man muss lediglich spezifische Zeichenkombinationen erkennen und diese mithilfe von festgelegten Herleitungsregeln manipulieren. Setzen wir beispielsweise die folgende Regel fest:

(E_{und}) Steht „und“ zwischen zwei Sätzen, so darf man daraus sowohl den Satz, der vor „und“ steht als auch den, der nach „und“ steht, herleiten.

Schauen wir uns hierzu ein Beispiel an:

(1) „Fleebs meemen saas und Dinglebobs klamen leel.“

Offensichtlich hat der obige Satz keine Bedeutung – und dennoch kann man erkennen, wie er zusammengesetzt ist: Er besteht aus zwei untergeordneten Sätzen, nämlich aus „Fleebs meemen saas“ sowie aus „Dinglebobs klamen leel“, die durch das Strukturwort „und“ miteinander verbunden sind. Egal, was diese Sätze nun bedeuten, mit unserer Regel können wir festhalten:

(1) „Fleebs meemen saas und Dinglebobs klamen leel.“ $\vdash$ „Fleebs meemen saas.“

(2) „Fleebs meemen saas und Dinglebobs klamen leel.” $\vdash$ „Dinglebobs klamen leel.“

[3] Es gibt seltene Fälle, in denen man „ae“ nicht mit „ä“ abkürzen darf. Meistens handelt es sich dabei um Eigennamen. Die oben angerissene Analogie dient jedoch nur der Plausibilisierung des Konzepts syntaktischer Definitionen, ohne eine Eins-zu-Eins-Entsprechung in der Normalsprache zu behaupten.

Das Zeichen „$\vdash$“ verwende ich hier, in Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt, lediglich als Abkürzung für „folgt syntaktisch aus“. Der Zusatz „syntaktisch“ soll hier klarmachen, dass wir beim Schluss die Bedeutung der Sätze außen vor gelassen und stattdessen lediglich eine Herleitungsregel auf die Satzstruktur angewandt haben. Wir können also allein anhand der syntaktischen Kategorien *Satz* und *Strukturwort* Schlüsse ziehen, ohne dass die Bedeutung der Sätze eine Rolle spielt.[4] Und genau das – völlig unabhängig von der Bedeutung eines Satzes Schlüsse zu ziehen – nennen wir *syntaktische Folge*.

2.1.2 Syntax formaler Sprachen

2.1.2.1 Unterschiede zwischen formaler und normalsprachlicher Syntax

Zwischen der Syntax einer natürlichen Sprache und der einer formalen bestehen ein paar wichtige Unterschiede. Zum einen gibt es für natürliche Sprachen keinen Mechanismus, mit dem man *alle* sprachlichen Ausdrücke (und nur diese) erzeugen kann. Vielmehr legt der Gebrauch im Alltag fest, welche Zeichenkombinationen Wörter sind. Die Ausdrücke formaler Sprachen hingegen sind rekursiv definiert, sodass nur ein paar Regeln ausreichen, um für jede Zeichenkombination entscheiden zu können, ob sie ein Ausdruck der Sprache ist oder nicht.

Zum anderen kommt es in natürlichen Sprachen manchmal vor, dass ein und dieselbe Zeichenkette verschiedenen syntaktischen Kategorien angehört. Beispielsweise kann die Zeichenkombination „modern“ im Deutschen zum einen die Rolle eines Adjektivs einnehmen, wie in „Deutschlands Schulen sind alles andere als modern“, zum anderen aber auch die Rolle eines Verbs, wie in „Schon seit Jahren modern die Vorräte im Keller vor sich hin“. Bei der Definition formaler Sprachen wird das vermieden.

Auch wenn sich keine Regeln für eine natürliche Sprache finden lassen, die all ihre wohlgeformten Ausdrücke und nur diese erzeugen, und auch wenn einige sprachliche Ausdrücke je nach Kontext verschiedene Funktionen haben können, besitzt jede natürliche Sprache syntaktische Regeln, von denen einige konstruktiv und andere restriktiv sind. Konstruktive Regeln geben an, wann es sich um einen wohlgeformten Ausdruck handelt. Ein Beispiel für solch eine Regel ist: Verbinde zwei Sätze mit einem „und“ und du erhältst wieder einen Satz. Restriktive Regeln geben an, welche Zeichenkombinationen nie wohlgeformt sind; bspw. ist keine Zeichenkombination, die mit vier oder mehr aufeinanderfolgenden Konsonanten beginnt, ein Wort der deutschen Sprache.

2.1.2.2 Gemeinsamkeiten zwischen formaler und normalsprachlicher Syntax

Trotz der gerade genannten Unterschiede haben formale Systeme syntaktische Regeln, die in einigen Hinsichten den Regeln natürlicher Sprachen ähneln: Sie bestimmen ein Alphabet, geben

[4] Auch diese Behauptung ist philosophisch umstritten. Sogenannte *Inferentialist:innen* sehen nämlich gerade die Bedeutung von Sätzen in den Regeln, die man auf sie anwenden darf. Durch die oben definierte Regel, so könnte man argumentieren, weiß man schon, was „und“ bedeutet. Dennoch lässt sich festhalten, dass (1) die Regel nichts über die durch das „und“ verbundenen Sätze aussagt und (2) uns nichts daran hindert, eine Herleitungsregel einzuführen, für die es keine sinnvolle normalsprachliche Deutung gibt. Die starke Abgrenzung von syntaktischen Regeln und Bedeutung mag nicht so scharf sein, wie ich sie hier ziehe, dient aber der Verdeutlichung des Unterschieds zwischen syntaktischer und semantischer Folge.

an, wie man daraus grundlegende Ausdrücke – atomare Formeln – gewinnen kann und wie sich daraus wiederum verschachteltere Ausdrücke – komplexe wohlgeformte Formeln – bilden lassen. Auf dieselbe Weise, wie „ϕ“ nicht zum deutschen Alphabet gehört, gehört „$\Diamond$“ nicht zum Alphabet von AL, und auf dieselbe Weise, wie „Vitus ist und“ syntaktischer Unfug im Deutschen ist, ist „$pp\wedge q\sim$“ syntaktischer Unfug in AL. Auch die Einführung von syntaktischen Definitionen kennen wir aus AL: So, wie „ä“ in der deutschen Sprache „ae“ abkürzt, kürzt $\ulcorner\alpha \rightarrow \beta\urcorner$ in AL $\ulcorner{\sim}(\alpha \wedge {\sim}\beta)\urcorner$ ab. Auch hier gilt wieder die Devise: Halte den Zeichenvorrat möglichst klein![5]

2.1.2.3 Syntaktische Folge

Das Konzept der syntaktischen Folge findet sich auch in formalen Sprachen wieder. Eine Menge von Regeln, die bestimmen, was aus was syntaktisch folgt, nennen wir *Herleitungsspiel* oder *Kalkül*. Grundsätzlich gibt es viele verschiedene solcher Herleitungsspiele, aber das für die Argumentanalyse am geeignetsten ist der Kalkül des natürlichen Schließens. Passenderweise haben wir mit unserem Beispiel aus Abschnitt 2.1.1.3 eine Regel erläutert, die sich in fast allen Herleitungsspielen wiederfindet: Aus $\ulcorner\alpha \wedge \beta\urcorner$ darf man sowohl α als auch β schließen. Hierbei handelt es sich um nichts anderes als um die Regel I$\wedge$, die wir formal so aufschreiben können:

(1) $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash_{AL} \alpha$

(2) $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash_{AL} \beta$

Die Regel erlaubt lediglich, den linken und/oder rechten Teil eines Ausdrucks, dessen Hauptjunktor die Konjunktion ist, abzuschrauben. Ganz analog dazu, dass es in der natürlichen Sprache irrelevant ist, was „Fleebs meemen saas“ oder „Dinglebobs klamen leel“ bedeuten, ist es in AL völlig egal, ob α oder β wahr oder falsch sind.

2.2 Semantik und semantische Folge

2.2.1 Semantik natürlicher Sprachen

2.2.1.1 Die Rolle der Semantik einer natürlichen Sprache

Eins der Hauptmerkmale einer Sprache ist, dass mit ihr Kommunikation stattfindet. Das kann aber nur dann passieren, wenn ihre Ausdrücke bedeutungstragend sind. Dass nicht alle Kombinationen des Alphabets einer Sprache diese Bedingung erfüllen, haben wir bereits im letzten Abschnitt gesehen. Machen wir diesen Gedanken noch stärker, indem wir das folgende Beispiel aus der Zeichentrickserie *Rick and Morty* betrachten.

> Zuerst nehmen Sie das Dinglebob und verfeinern es mit ein wenig Schleem. Das Schleem wird dann aber in anderen Produkten wiederverwertet. Sie nehmen das Dinglebob und schieben es durch den Grumbo, wo das Fleeb gerubbelt wird. Es ist wichtig, dass das Fleeb gerubbelt wird, weil das Fleeb den Fleebsaft produziert. Dann kommt ein Schlami vorbei und reibt es. Und spuckt drauf. Sie zerschneiden das Fleeb – es sind noch einige Schritte zu tun. Die

[5] Der Grund dafür, das Alphabet möglichst klein zu halten, liegt darin, dass man Beweise über die formale Sprache dann einfacher führen kann. Syntaktische Definitionen werden also mehr oder minder aus Faulheitsgründen eingeführt.

> Blamfs reiben an den Shumbles. Dann werden die Plubis und der Grumbo entfernt. Und fertig ist der ganz alltägliche Plumbus.

Im Gegensatz zu „Vitus ist und“ handelt es sich ausschließlich um syntaktisch korrekte Sätze, und dennoch würde nach der Lektüre dieses Zitats niemand ernsthaft behaupten, er oder sie wüsste, wie ein Plumbus hergestellt wird – oder gar, was ein Plumbus ist. Das ist schlichtweg der Tatsache geschuldet, dass in der Produktionsbeschreibung eine Reihe bedeutungsloser Wörter vorkommen.

2.2.1.2 Wahrheit und Falschheit als semantische Begriffe

Wie das obige Beispiel zeigt, ist eine Sprache nicht sinnvoll, wenn ihre sprachlichen Zeichen keine Bedeutung haben[6]. Wollen wir also eine sinnvolle Sprache konstruieren, so müssen wir ihren Wörtern und Sätzen irgendwie Bedeutungen zuweisen. Die Regeln, die genau das tun, nennen wir *Semantik*. Genauso, wie die Syntax festlegt, wann eine Zeichenkombination ein Ausdruck einer Sprache ist, legt die Semantik also fest, welche Bedeutung einem sprachlichen Ausdruck zukommt. „Semantik“ leitet sich vom griechischen Wort „σημαίνειν“ („semainein“) ab, das auch passenderweise mit „bedeuten“ übersetzt werden kann. Ein wichtiges semantisches Prinzip ist beispielsweise, dass sich die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks – bspw. eines Satzes – (1) durch die Bedeutungen seiner Teilausdrücke sowie (2) durch die Art, wie diese Teilausdrücke miteinander verknüpft sind, ergibt.[7]

Nur wenn wir wissen, was ein Satz, der nicht gerade logisch wahr oder logisch falsch ist[8], bedeutet, können wir auch sagen, ob er wahr oder falsch ist. Um diesen Punkt zu verdeutlichen, nehmen wir an, dass ein Satz genau dann wahr ist, wenn er etwas über die Welt behauptet, das tatsächlich der Fall ist.[9] Der Abgleich zwischen einer Behauptung über die Welt und der Welt selbst kann nur dann stattfinden, wenn die Behauptung über die Welt verständlich ist; ob „Dinglebobs klamen leel“ wahr oder falsch ist, können nur die wissen, die die Bedeutung von „Dinglebobs“, „klamen“ und „leel“ kennen. Kurzum: Die Bedeutung eines Satzes bestimmt seinen Wahrheitswert[10]. Wir können also festhalten: *Wahrheit und Falschheit sind semantische Begriffe.*

2.2.1.3 Situationen als wahrheitswertrelevante Faktoren

Ein wichtiger Faktor, der die Bedeutung eines Satzes – und damit seine Wahrheit oder Falschheit – maßgeblich mitbestimmt, ist die Situation, in der man ihn äußert. Betrachten wir dafür

[6] Wichtig: Da syntaktische Folge die Bedeutung von sprachlichen Ausdrücken außen vorlässt, ist es also möglich, mithilfe von Herleitungsregeln Schlüsse aus Sätzen einer Sprache zu ziehen, die völlig bedeutungslos ist!

[7] Hierbei handelt es sich um Freges Kompositionalitätsprinzip des Sinns_F.

[8] Da logisch wahre Sätze allein aufgrund ihrer Struktur wahr sind, müssen wir ihre Bedeutung nicht kennen, um sagen zu können, dass sie wahr sind. Sie sind nämlich ganz unabhängig von den Bedeutungen seiner Teilausdrücke wahr. Ähnlich sieht es mit logisch falschen Sätzen aus.

[9] Neben der Behauptung, dass Sätze Träger von Wahrheitswerten sind, kaufen wir uns hiermit auch die umstrittene These ein, dass Wahrheit Übereinstimmung mit (Tatsachen in) der Welt ist. Diese sogenannte *Korrespondenztheorie der Wahrheit* hat aber einige attraktive Nebenbuhler, wie beispielsweise die Kohärenztheorie oder die Identitätstheorie der Wahrheit. Ein schöner Überblick zu diesem Thema findet sich in der *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

[10] Auch diesen Gedanken findet man bei Frege wieder: Der Sinn_F eines Ausdrucks bestimmt dessen $\text{Bedeutung}_\text{F}$.

beispielhaft den Satz „Alle Männer putzen ihr Bad selbst". Redet man über alle Männer, die in Deutschland leben, so ist der Satz offenkundig falsch. Man kann mit dem Satz aber durchaus etwas Wahres sagen – beispielsweise dann, wenn man über die Insassen der JVA Münster redet. Sätze sind also in der Regel nicht *per se* wahr oder falsch, sondern *abhängig von der Situation*. Im Gespräch mit anderen fällt uns das meist nur nicht auf, weil sich die Gesprächsteilnehmer:innen in der Regel in derselben Situation befinden.

2.2.2 Semantik formaler Sprachen

2.2.2.1 Unterschiede zwischen formaler und normalsprachlicher Semantik

Auch formale Sprachen besitzen in der Regel eine Semantik, aber im Gegensatz zur Semantik von natürlichen Sprachen ist sie deutlich einfacher gestrickt. Der wichtigste Unterschied ist, dass die formale Semantik lediglich über Wahrheitswerte von Sätzen redet, nicht aber über deren Bedeutung[11]. Zudem gibt es in der natürlichen Sprache Bereiche der Semantik, die in formalen Sprachen nicht auftreten – bspw. die Morphologie –, und sie kann syntaktisch wohlgeformte, aber dennoch bedeutungslose Ausdrücke enthalten, während formale Semantiken in der Regel sicherstellen, dass jeder syntaktisch korrekte Satz auch wahr oder falsch ist[12]. Ferner kann es sich bei Ausdrücken in normalsprachlicher Semantik auch um sogenannte *Äquivokationen* handeln, also sprachliche Ausdrücke, deren Bedeutung ohne Kontext nicht eindeutig festgelegt ist. Ein bekanntes Beispiel dafür ist das Wort „Bank", mit dem man zum einen auf ein Geldinstitut, zum anderen aber auch auf eine Sitzgelegenheit Bezug nehmen kann. In formalen Sprachen gibt es keine Äquivokationen[13].

Ein weiterer wichtiger Unterschied ist, dass eine natürliche Sprache ohne Semantik kaum denkbar ist, während wir, wie oben bereits erläutert, formale Sprachen rein syntaktisch betrachten können – eine Semantik ist nicht zwingend erforderlich. Aber auch wenn wir Logik theoretisch nur mit Herleitungsspielen betreiben können, wollen wir zumindest bei der Argumentanalyse nicht darüber reden, welche Zeichenketten wir aus anderen gewinnen können, sondern darüber, welche Sätze *wahr* sind, wenn andere wahr sind; deshalb gibt es für die meisten formalen Sprachen auch eine Semantik. Wer durch diese Erläuterungen nun besorgt ist, dass das natürliche Schließen zur Argumentanalyse ungeeignet ist, weil es rein syntaktisch vorgeht, hat bisher gute Gründe dazu; umso mehr Grund aber gibt es, bis Kapitel 3 weiterzulesen, um von dieser Sorge befreit zu werden.

[11] Zumindest trifft das auf die Sprachen zu, die wir in diesem Logikkurs kennenlernen. Es gibt formale Sprachen, mit denen man versucht, auch die Bedeutung von Sätzen zu fassen. Eine kürzlich erschienene Sprache, die für sehr viel Aufmerksamkeit gesorgt hat, ist Hannes Leitgebs System *HYPE*.

[12] Anders gesagt: Das Bivalenzprinzip gilt; vgl. Fußnote 1. Das ist für AL und PL zwar der Fall, aber im Allgemeinen alles andere als selbstverständlich. Neben der *Fuzzy Logic* und der Logik des *First-Degree Entailment* gilt das Prinzip auch in *intuitionistischer Logik* nicht. Es gibt auch Logiken, in denen das Konsistenzprinzip nicht gilt, beispielsweise Graham Priests *Logic of Paradoxes*, und sogar solche, in denen weder das Bivalenzprinip noch das Konsistenzprinzip gelten, wie in der Logik des *First-Degree Entailment*.

[13] Dennoch kommt es in der Prädikatenlogik fast immer vor, dass ein Gegenstand mehrere Namen hat. In der formalen Semantik können deshalb mehrere Ausdrücke (nämlich Individuenkonstanten) zwar dasselbe bezeichnen, aber ein und derselbe Ausdruck nicht Mehreres.

2.2.2.2 Gemeinsamkeiten zwischen formaler und normalsprachlicher Semantik

Neben ihren Unterschieden gibt es dennoch einiges, das formale und natürlichsprachliche Semantik verbindet. So, wie sich die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks aus dessen Teilausdrücken und der Art, wie diese verknüpft sind, ergibt, ergibt sich auch der Wahrheitswert einer komplexen Formel aus den Wahrheitswerten ihrer Teilformeln sowie den Wahrheitsbedingungen der Junktoren, die sie verbinden; diese Eigenschaft nennen wir *Wahrheitswertfunktionalität*[14]. Und es gibt noch eine weitere Gemeinsamkeit: Auf dieselbe Weise, wie normalsprachliche Sätze in einigen Situationen wahr und in anderen falsch sein können, können auch AL-Formeln in einigen Modellen wahr und in anderen falsch sein. Modelle können wir also als formale Repräsentationen von spezifischen Situationen verstehen.

Abbildung 2: Logische Konzepte in natürlichen und formalen Sprachen

Natürliche Sprache	Formale Sprache
Behauptung	wohlgeformte Formel
Strukturwort	Junktor
wahr/falsch	schwarz/weiß
gültiger Schluss	Kon-Sequenz
Prämissen	$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$
„also“	„$\models$“
logisch wahrer Satz	allgemeingültige Formel
spezifische Situation	Modell

2.2.2.3 Semantische Folge

Den Begriff der Kon-Sequenz haben wir bereits im ersten Teil ausführlich behandelt. Nun, mit etwas mehr normalsprachlicher Intuition, können wir dessen Definition aber besser verstehen. Deuten wir Modelle als Situationen und die Farben als Wahrheitswerte, so besagt die Definition der Kon-Sequenz nämlich, dass es keine Situation gibt, in der die Prämissen alle wahr, die Konklusion aber falsch ist. Anders gesagt: In allen Situationen, in denen die durch die Prämissen beschriebenen Zustände herrschen, herrscht auch der durch die Konklusion beschriebene Zustand. Und genau das meinen wir, wenn wir von gültigen Schlüssen reden.

2.3 Syntaktische und semantische Folge – ein Überblick

Halten wir also noch einmal den Unterschied zwischen syntaktischer und semantischer Folge in formalen Sprachen fest: Schließen wir von einer Menge von wohlgeformten Formeln $\alpha_1, ..., \alpha_n$ auf eine weitere wohlgeformte Formel β allein aufgrund der Art, wie $\alpha_1, ..., \alpha_n$ mithilfe der Syntaxregeln jeweils zusammengesetzt sind, so handelt es sich um eine *syntaktische Folge*. Die Wahrheit oder Falschheit der Formeln ist für syntaktische Folgen völlig irrelevant. Um auszudrücken, dass

[14] Es gibt jedoch gute Gründe, eine formale Sprache zu definieren, die nicht wahrheitswertfunktional ist – beispielsweise dann, wenn man versuchen will, die zunächst unintuitiven Wahrheitsbedingungen des materialen Konditionals unseren normalsprachlichen Intuitionen über Wenn-Dann-Sätze anzupassen.

es sich um eine syntaktische Folge handelt, benutzen wir das Zeichen „$\vdash$“, den sogenannten *Turnstile*. Der Name „Turnstile“ rührt daher, dass das Zeichen an ein Drehkreuz erinnert. Haben wir gezeigt, dass $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_{AL} \beta$, so sagen wir, dass β aus $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *herleitbar* ist. Haben wir gezeigt, dass $\vdash_{AL} \alpha$, so sagen wir, α ist *beweisbar*.

Schließen wir hingegen von einer Menge wohlgeformter Formeln $\alpha_1, ..., \alpha_n$ auf eine weitere wohlgeformte Formel β, weil β in keinem Modell falsch ist, in dem $\alpha_1, ..., \alpha_n$ jeweils wahr sind, so handelt es sich um eine *semantische Folge*. Wenn wir über diese Folgerungsbeziehung reden, benutzen wir das Zeichen „$\vDash$“, den sogenannten Double Turnstile. Der Ausdruck „double“ wird ergänzt, um – in Abgrenzung zum einfachen Turnstile – darauf hinzuweisen, dass an dem vertikalen Strich nicht nur ein, sondern gleich zwei horizontale Striche angebracht sind. Haben wir gezeigt, dass $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vDash_{AL} \beta$, so sagen wir, dass $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ mit β eine *Kon-Sequenz* bildet. Haben wir hingegen gezeigt, dass $\vDash_{AL} \alpha$, so sagen wir, α ist *allgemeingültig*.

Abbildung 3: Logische Folgerungsbeziehungen

Metasprachliche Behauptung	Redeweise
$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$	β ist aus $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ herleitbar
$\vdash \alpha$	α ist beweisbar
$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vDash \beta$	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bildet mit β eine Kon-Sequenz
$\vDash \alpha$	α ist allgemeingültig

Zuletzt noch ein sehr wichtiger Punkt, der den Status der Folgerungsbeziehung betrifft: Behaupten wir, dass eine Formel aus eine Menge anderer Formeln folgt – egal, ob syntaktisch oder semantisch –, so sprechen wir *über* eine formale Sprache. Der Begriff der Folgerung ist also ein *metasprachlicher* Begriff. Die Zeichen „$\vdash$“ und „$\vDash$“ sind entsprechend auch keine Zeichen von AL (sonst wären sie im Alphabet aufgeführt), sondern *metasprachliche Zeichen*. Da nach dem Double Turnstile immer objektsprachliche Ausdrücke folgen, hat es sich eingebürgert, keine Anführungszeichen zu schreiben. Dieser Konvention werden wir im Verlauf des Texts folgen. Im nächsten Teil wird es fast ausschließlich um metasprachliche Konzepte gehen.

3 Das Verhältnis zwischen syntaktischer und semantischer Folge

Zwischen syntaktischer und semantischer Folge scheint eine merkwürdige Spannung zu bestehen: Eigentlich interessiert uns die semantische Folge, aber da syntaktische Folgerungen bereits ohne Semantik möglich sind, sind diese immer schon mit im Boot, wenn wir uns die Frage nach einem gültigen Schluss stellen. Man könnte auch sagen: Ohne syntaktische Folge keine semantische. Aus diesem Grund ist man in der Logik stets bemüht, dass syntaktische und semantische Folge zusammenfallen; funktioniert die semantische Folgerungsbeziehung in der Logik nämlich so, wie wir es uns vorstellen, und besteht genau dann eine syntaktische Folge, wenn auch eine semantische besteht, so muss uns die Eigenart der syntaktischen Folgerungsbeziehung nicht mehr stören. Im Idealfall gilt also:

Definition 9: Adäquatheit eines Herleitungsspiels

$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_{AL} \beta$ genau dann, wenn $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models_{AL} \beta$

Die oben beschriebene Eigenschaft nennt man auch *Adäquatheit*. Da „… genau dann, wenn …“ ein „wenn …, dann …“ in beide Richtungen ist, können wir die Behauptung in ihre beiden Bestandteile aufteilen. Betrachten wir zunächst die Links-rechts-Richtung:

Definition 10: Korrektheit eines Herleitungsspiels

Wenn $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_{AL} \beta$, dann $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models_{AL} \beta$

Diese Eigenschaft, die üblicherweise *Korrektheit* genannt wird, besagt, dass jede syntaktische Folge auch eine semantische ist. Das heißt für K-AL konkret: Gelangt man durch Anwendung der Regeln von K-AL zu einer Formel β, deren Sterne ihren Ursprung in denjenigen Zeilen haben, in denen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ stehen, so gibt es kein Modell, in dem alle $\alpha_1, ..., \alpha_n$ wahr, β aber falsch ist. Ganz analog dazu funktioniert die Rechts-Links-Richtung:

Definition 11: Vollständigkeit eines Herleitungsspiels

Wenn $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models_{AL} \beta$, dann $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_{AL} \beta$

Ist jede semantische Folge auch eine syntaktische, so sagen wir, der Kalkül ist *vollständig*. Das heißt für K-AL konkret: Findet man – beispielsweise durch eine Farbtabelle – heraus, dass die Menge $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ mit β eine Kon-Sequenz bildet, so kann man mithilfe der Schlussregeln von K-AL zu β gelangen, wenn man $\alpha_1, ..., \alpha_n$ als Hypothesen annimmt.

Bei K-AL handelt es sich glücklicherweise um ein adäquates – also korrektes und vollständiges – Herleitungsspiel. Damit ist auch die oben zuerst gestellte Frage beantwortet: Weil syntaktische und semantische Folge in AL zusammenfallen, ist es kein Problem, Argumente in einem zunächst rein syntaktischen Spiel zu rekonstruieren; wir wissen schließlich, dass wir alle und nur diejenigen syntaktischen Folgen herleiten können, die auch semantische Folgen sind.

Durch die Vollständigkeit von K-AL ergibt sich ein weiterer gewünschter Zusammenhang: Stellen wir uns vor, die Prämissenmenge vor dem Double Turnstile sei leer. Wie wir bereits in Abschnitt 1.2 gesehen haben, ist die Formel dann allgemeingültig (vgl. auch Definition 6). Dieser Fall ist auch durch den Vollständigkeitssatz abgedeckt[15], sodass gilt: Wenn $\{\,\} \models_{AL} \alpha$, dann $\{\,\} \vdash_{AL} \alpha$. Aus diesem Grund können wir uns auch den Begriff der Beweisbarkeit syntaktisch definieren:

Definition 12: Beweisbarkeit einer Formel

$\vdash_{AL} \alpha := \{\,\} \vdash_{AL} \alpha$

[15]Um genau zu sein, ist das nicht durch *diese* Variante des Vollständigkeitssatzes ausgedrückt, weil sie suggeriert, dass es mindestens eine Prämisse gibt. Die allgemeinste Formulierung des Vollständigkeitssatzes redet daher von einer beliebigen Menge von wohlgeformten Γ Formeln, denn diese kann leer sein.

Folgt eine Formel semantisch ohne Prämissen, so folgt sie also auch syntaktisch ohne Prämissen. Anders gesagt: Ist eine Formel allgemeingültig, so lässt sie sich in K-AL ungesternt herleiten; wir sagen, sie ist *beweisbar*. Durch die Korrektheit gilt mit derselben Argumentation wie oben natürlich auch die andere Richtung: Wenn $\{\,\} \vdash_{\mathrm{AL}} \alpha$, dann $\{\,\} \models_{\mathrm{AL}} \alpha$. Für Formeln können wir deshalb festhalten:

Definition 13: Schwache Adäquatheit eines Herleitungsspiels

$\vdash_{\mathrm{AL}} \alpha$ genau dann, wenn $\models_{\mathrm{AL}} \alpha$

Die gerade genannten Eigenschaften sind alles andere als trivial, schließlich stellen sie einen unüblichen Zusammenhang fest: Gibt es für eine Formel auch nur *einen einzigen Beweis*, so ist sie *in allen Modellen* wahr – und für jede Formel, die in allen Modellen wahr ist, gibt es auch einen Beweis[16]. Besonders in Logiken, deren Modelle komplexer sind als die der Aussagenlogik, nutzt man das gerne aus, indem man die Allgemeingültigkeit einer Formel mit einem einzigen Beweis oder ihre Nicht-Allgemeingültigkeit mit einem einzigen Gegenmodell aufzeigt. Unglücklicherweise gilt der Vollständigkeitssatz in ausdrucksstärkeren Systemen[17] aber nicht; diese Erkenntnis, die der österreichische Logiker Kurt Friedich Gödel im Jahre 1931 veröffentlichte, versetzte die Welt der Mathematik in eine Schockstarre, denn insbesondere die Mengenlehre, mit der fast die gesamte Mathematik formulierbar ist, ist von diesem Resultat betroffen. Die Systeme, die das Standardhandwerkszeug einer analytischen Philosophin sind – Aussagenlogik, Prädikatenlogik, (alethische) Modallogik –, müssen dieses metalogische Joch jedoch nicht tragen; sie sind alle korrekt und vollständig.

4 Konditionalisierung und das Deduktionstheorem

4.1 Das Deduktionstheorem von AL

Mit all dem, was wir bisher erarbeitet haben, stehen wir nun kurz davor, auch die letzte Frage zu beantworten: Warum darf man mit $\mathrm{I}{\rightarrow}$ und $\mathrm{I}{\rightarrow}^{+}$ Annahmesterne löschen? Nur noch ein einziges formales Konzept benötigen wir, um den Sachverhalt zu verstehen – das Deduktionstheorem von AL.

Betrachten wir dafür beispielhaft untenstehenden Schlüsse: Sie scheinen in einem sehr engen Verhältnis zu stehen, denn sie enthalten dieselben Sätze und haben auch eine sehr ähnliche Bedeutung. Es scheint uns so zu sein, dass genau dann, wenn aus „Peter ist ehrgeizig und Klara erfolgreich" „Peter ist ehrgeizig" folgt, der Satz „Wenn Peter ehrgeizig ist und Klara erfolgreich, dann ist Peter ehrgeizig" logisch wahr ist. Hiermit drücken wir eine besondere Beziehung zwischen den Prämissen eines gültigen Schlusses und Konditionalsätzen in Konklusionen aus: Wir

[16] Es sei bemerkt, dass Vollständigkeit nur besagt, *dass* es einen Beweis gibt. Darüber, *wie* der Beweis genau aussieht, erfahren wir nichts. Nicht selten passiert es einer Logikerin, dass sie Probleme hat, einen Beweis zu finden, obwohl sie weiß, dass es ihn geben muss.

[17] Um genau zu sein: In allen Systemen, in denen Robinson's Q (ein bestimmter Teil der Arithmetik) formalisierbar ist, ist die Logik entweder widersprüchlich oder unvollständig. Das ist *der erste Gödel'sche Unvollständigkeitssatz*. Der *zweite Gödel'sche Unvollständigkeitsatz* besagt, dass ein solches System seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann. Der zweite Unvollständigkeitssatz folgt aus dem ersten.

Abbildung 4: Double Turnstile und Implikation

Peter ist ehrgeizig und Klara ist erfolgreich.	$p \land q$
Also ist Peter ehrgeizig.	p
Wenn Peter ehrgeizig ist und Klara erfolgreich, dann ist Peter ehrgeizig.	$p \land q \to p$

können einen Satz, statt ihn als Prämisse aufzufassen, mit in die Konklusion aufnehmen, wenn wir ihn in den Bedingungsteil eines Konditionalsatzes packen. Genau dieser Intuition entspricht auch ein formales Theorem, das wird das *Deduktionstheorem* nennen.

Definition 14: Syntaktisches Deduktionstheorem

$\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n\} \vdash_{AL} \beta$ genau dann, wenn $\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\} \vdash_{AL} \alpha_n \to \beta$

Das Deduktionstheorem besagt: Folgt eine Formel aus einer Prämissenmenge, so können wir aus eben dieser eine beliebige Prämisse[18] herausziehen und diese mit der Formel verbinden, indem wir ein Konditional zwischen die beiden Formeln schreiben. Hat man beispielsweise bewiesen, dass $\{p, q\} \vdash_{AL} q$, so kann man folgern, dass $\{p\} \vdash_{AL} q \to q$ oder $\{q\} \vdash_{AL} p \to q$. Wendet man das Theorem erneut an, erhält man $\{\} \vdash_{AL} p \to (q \to q)$ bzw. $\{\} \vdash_{AL} q \to (p \to q)$ und, mit Definition 12, $\vdash_{AL} p \to (q \to q)$ bzw. $\vdash_{AL} q \to (p \to q)$. Auch die Rückrichtung funktioniert: Hat man eine Formel bewiesen, deren Hauptjunktor das Konditional ist, so darf man das Antezedens in die Prämissenklammer schreiben und das Konditional löschen, um eine syntaktische Folge zu erhalten. Hat man beispielsweise bewiesen, dass $\vdash_{AL} (p \to q) \land p \to q$, so gewinnt man mithilfe des Deduktionstheorems $\{(p \to q) \land p\} \vdash_{AL} q$. Durch Korrektheit (siehe Definition 10) gilt das Deduktionstheorem auch für Kon-Sequenzen und allgemeingültige Formeln:

Definition 15: Semantisches Deduktionstheorem

$\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n\} \vDash_{AL} \beta$ genau dann, wenn $\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\} \vDash_{AL} \alpha_n \to \beta$

Damit ist auch ein starker Zusammenhang zwischen gültigen Schlüssen und allgemeingültigen Formeln hergestellt: Aus jedem gültigen Schluss mit n Prämissen können wir eine allgemeingültige Formel basteln, indem wir das semantische Deduktionstheorem n mal anwenden. Anders ausgedrückt: Die metasprachliche Folgerungsbeziehung, die wir mit „$\vDash$“ bezeichnen, steht in einem sehr engen Verhältnis zum objektsprachlichen Konditional, für das wir das Zeichen „$\to$“ verwenden.

[18] Man mag sich zunächst vielleicht wundern, warum man eine *beliebige Formel* aus der Prämissenmenge herausnehmen darf; in der formalen Definition sind schließlich alle Formeln nummeriert und nur *die letzte* wird herausgezogen. An dieser Stelle sei daran erinnert, dass Mengen – im Gegensatz zu Tupeln – keine Reihenfolge haben. Wir können also jedes Element einer Menge ans Ende ziehen – es handelt sich um dieselbe Menge.

4.2 Das konjunktive Deduktionstheorem

Ein Nachteil des Deduktionstheorems ist, dass wir, wenn wir es häufiger anwenden, schrecklich stark verschachtelte Konditionalsätze erhalten, sodass die Formeln, die wir erzeugen, immer schwerer zu lesen sind. Wenden wir auf $\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \vdash_{\mathrm{AL}} r$ das Deduktionstheorem dreimal in Folge an, erhalten wir beispielsweise $\vdash_{\mathrm{AL}} (p \vee q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow r))$. Diese Formel ist schon ziemlich schwer zu verstehen, geschweige denn laut vorzulesen. Glücklicherweise gibt es aber eine Möglichkeit, sie stark zu vereinfachen.

Betrachten wir dafür beispielhaft den Satz „Wenn Peter Tiere mag, dann sollte er, wenn er Freizeit hat, im Tierheim helfen". Dieser Satz klingt zwar etwas gestelzt, ist aber dennoch verständlich: Gemeint ist, dass Peter im Tierheim helfen sollte, wenn er Tiere mag *und* wenn er Freizeit hat. Die Sätze „Wenn Peter Tiere mag, dann sollte er, wenn er Freizeit hat, im Tierheim helfen" und „Wenn Peter Tiere mag und Freizeit hat, sollte er im Tierheim helfen" sind also gleichbedeutend. Daraus können wir erahnen: Einen Satz, der zwei ineinander verschachtelte Konditionalsätze enthält, kann man vereinfachen, indem man ein „wenn" durch ein „und" ersetzt. Auf dieselbe Weise verhält es sich auch in AL: Die Formel „$p \rightarrow (q \rightarrow r)$" ist äquivalent mit „$p \wedge q \rightarrow r$". Ganz generell lässt sich formulieren:

Definition 16: Importationsgesetz

$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash_{\mathrm{AL}} \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$

Das Importationsgesetz erlaubt uns, eine Konditionalformel, in deren Sukzedens erneut eine Konditionalformel vorkommt, umzuformen, und zwar, indem wir die Klammern um das Sukzedens löschen und aus dem ersten Konditional eine Konjunktion machen.[19] Haben wir nun das Deduktionstheorem angewandt, liegt genau eine solche Formel vor. Noch genauer können wir sagen: Haben wir mithilfe des Deduktionstheorems n Prämissen aus der Prämissenmenge gezogen, so enthält die daraus resultierende Formel n mehr Konditionale als vorher. Diese Konditionale können wir aber nun alle durch Konjunktionen ersetzen, indem wir das Importationsgesetz $n-1$ mal anwenden[20].

Da das nun alles sehr allgemein war, betrachten wir ein Beispiel: Haben wir gezeigt, dass $\{p \rightarrow q, p\} \models_{\mathrm{AL}} q$, so können wir das Deduktionstheorem $n = 2$ mal anwenden, um zunächst $\{p \rightarrow q\} \models_{\mathrm{AL}} p \rightarrow q$ und dann $\{\} \models_{\mathrm{AL}} (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ zu erhalten. Daraufhin können wir $n-1 = 2-1 = 1$ mal Gebrauch vom Importationsgesetz machen. Wir löschen also die Klammern um „$p \rightarrow q$" und ersetzen das davorstehende „$\rightarrow$" durch ein „$\wedge$", um $\{\} \models_{\mathrm{AL}} (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ zu erhalten. Auf diese Weise kann man immer vorgehen, sodass sich ganz allgemein ergibt:

[19] Im Übrigen gilt auch die Rückrichtung des Theorems: $\{\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma\} \vdash_{\mathrm{AL}} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Diese Rückrichtung ist das *Exportationsgesetz*. So, wie wir beim Importationsgesetz das Konditional gegen die Konjunktion austauschen, tauschen wir beim Exportationsgesetz die Konjunktion mit dem Konditional aus.

[20] Wir löschen mit dem Importationsgesetz alle Vorkommnisse von den Konditionalen, die durch das Deduktionstheorem entstanden sind – bis auf das letzte. „-1" in „n-1" ist also das übrig bleibende Konditional.

Definition 17: Konjunktives Deduktionstheorem

$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash_{AL} \beta$ genau dann, wenn $\{\} \vdash_{AL} \alpha_1 \land ... \land \alpha_n \rightarrow \beta$

Das konjunktive Deduktionstheorem erlaubt uns, alle Prämissen auf einmal aus der Prämissenklammer in die Formel hinter den Turnstile zu schieben, indem wir sie mit Konjunktionen verbinden und zwischen die daraus entstandene Konjunktionskette und die ursprüngliche Konklusion ein Konditional schreiben. Das ist besonders praktisch, wenn wir eine Formel unter der Annahme mehrerer Prämissen hergeleitet haben und daraus eine beweisbare Formel erzeugen wollen.[21]

4.3 Konditionalisierung und das syntaktische Deduktionstheorem

Widmen wir uns zuletzt der Beantwortung der zweiten Frage: Warum darf man in K-AL mit I→ und I→$^+$ einfach so Prämissen löschen? Machen wir uns dafür zunächst klar, dass die Bezeichnung „Schlussregel“ als Sammelbegriff für die Einführungs- und Eliminationsregeln von K-AL wörtlich zu nehmen ist: Jede Anwendung einer Einführungs- oder Eliminationsregel ist ein Schluss! Für den Kalkül bedeutet das: Die Formeln in der Formelspalte, die durch eine Schlussregel zustande gekommen sind, sind die Konklusionen dieses Schlusses, und die Sterne in der entsprechenden Zeile kennzeichnen die Prämissen, die uns den Schluss auf die Konklusion ermöglicht haben[22]. Um uns diesen Punkt zu verdeutlichen, betrachten wir die Herleitung der Transitivität des Konditionals aus der Sternleinübung:

$$\text{zz: } \vdash_{AL} (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Sterne			Zeile	Formel	Bezug	Regel
⋆			1	$p \rightarrow q$	–	Hyp
	⋆		2	$q \rightarrow r$	–	Hyp
		⋆	3	p	–	Hyp
⋆		⋆	4	q	1,3	E→
⋆	⋆	⋆	5	r	2,4	E→
⋆	⋆		6	$p \rightarrow r$	3,5	I→
			7	$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	1,2,6	I→$^+$

q. e. d.

Die erste Schlussregel, die wir im Beweis anwenden, ist E→ in der vierten Zeile. In der Formelspalte steht „q“, welches zwei Sterne mit sich schleppt: Der erste führt hoch zu „p → q“, der

[21] Ein nerdiger Randkommentar: Das konjunktive Deduktionstheorem funktioniert nur, wenn die Prämissenmenge endlich ist. Wählen wir eine Prämissenmenge mit unenedlich vielen wohlgeformten Formeln als Elementen, so erhalten wir nach dem konjunktiven Deduktionstheorem nämlich eine Formel, die selbst unendlich viele Teilformeln enthält. Das aber ist syntaktisch nicht möglich. In der Anwendung tritt dieser Fall jedoch nicht auf. Das Deduktionstheorem, wie es in Definition 14 definiert ist, hat kein Problem mit unendlichen Prämissenmengen, schließlich erlaubt es immer nur das Verschieben *einer einzelnen Prämisse* in die Konklusion.

[22] Stehen in der Sternenspalte keine Sterne, so handelt es sich um einen 0-Prämissen-Schluss. Dieses Konzept haben wir bereits in Abschnitt 1.2 kennengelernt.

zweite zu „p“. Was wir also gezeigt haben, ist, dass „q“ aus „p → q“ und „p“ herleitbar ist: $\{p \to q, p\} \vdash_{AL} q$. Hieran kann man schön erkennen, dass E→ uns nichts anderes erlaubt als den *modus ponens* anzuwenden.

Auch in der fünften Zeile wird E→ angewandt. Dafür nutzen wir das gerade hergeleitete „q“ sowie die Hypothese, dass „q → r“, um auf „r“ zu schließen. Da wir „q“ aber gerade aus „p → q“ und „p“ hergeleitet haben, können wir auch sagen, dass wir „r“ mithilfe von „p → q“, „q → r“ und „p“ hergeleitet haben: $\{p \to q, q \to r, p\} \vdash_{AL} r$.

In der nächsten und sechsten Zeile wenden wir nun endlich die Regel an, um die es uns geht: I→. Haben wir in einer Zeile eine Formel stehen, die mit einem oder mehr Sternen versehen ist – in unserem Fall „r“ –, so dürfen wir in der darauffolgenden Zeile einen beliebigen dieser Sterne – hier: den dritten – löschen und stattdessen die Formel, für die der Stern stellvertretend stand – bei uns: „p“ –, mit der Formel der Ausgangszeile durch ein Konditional verbinden, indem wir diese ins Sukzedens und jene ins Antezedens schreiben. In unserem Fall wird also aus „r“ mit drei Sternen „p → r“ mit zwei Sternen.

Warum dürfen wir das aber nun? Machen wir uns dafür klar, was auf der metasprachlichen Ebene passiert ist: Vor dem Hintergrund, dass die Sterne für Prämissen stehen und die Formeln, die nicht mit „Hyp“ gekennzeichnet sind, für Konklusionen, haben wir einfach eine Prämisse aus der Prämissenklammer in die Konklusion gezogen. Aus $\{p \to q, q \to r, p\} \vdash_{AL} r$ wurde also $\{p \to q, q \to r\} \vdash_{AL} p \to r$. Sofort erkennen wir: Dieser Schluss ist durch das Deduktionstheorem aus Definition 14 gerechtfertigt! Wir können also festhalten: Die Regel I→ baut die Links-Rechts-Richtung des syntaktischen Deduktionstheorems in den Kalkül ein. Warum diese gilt, haben wir bereits in Abschnitt 4.1 plausibilisiert.[23]

4.4 Mehrfachkonditionalisierung und das konjunktive Deduktionstheorem

Noch sind wir mit unserer Herleitung aber nicht fertig: Im letzten Schritt wird noch eine weitere Regel angewandt, und zwar I→⁺. Wir nennen sie „Mehrfachkonditionalisierung“ – und der Name ist Programm. Sie erlaubt uns, ein Konditional einzuführen und dabei mehrere Sterne auf einmal zu löschen.

$$\text{zz: } \vdash_{AL} (p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$$

Sterne			Zeile	Formel	Bezug	Regel	Herleitung
⋆			1	$p \to q$	–	Hyp	–
	⋆		2	$q \to r$	–	Hyp	–
		⋆	3	p	–	Hyp	–
⋆		⋆	4	q	1,3	E →	$\{p \to q, p\} \vdash_{AL} q$
⋆	⋆	⋆	5	r	2,4	E →	$\{p \to q, q \to r, p\} \vdash_{AL} r$
⋆	⋆		6	$p \to r$	3,5	I →	$\{p \to q, q \to r\} \vdash_{AL} p \to r$
			7	$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$	1,2,6	$\text{I} \to^{+}$	$\{\} \vdash_{AL} (p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$

q. e. d.

[23] Das Deduktionstheorem spielt auch eine wichtige Rolle, wenn es um den Zusammenhang von Formel- und Schlusstableaux geht; vgl. dazu meinen Screencast zum Deduktionstheorem.

Wie wir an der letzten Spalte des Kalküls sehen können, erlaubt uns I$\rightarrow^{+}$, alle Prämissen auf einmal aus der Prämissenklammer herauszuziehen, indem wir sie mit Konjunktionen verbinden, daraufhin ein Konditional schreiben und die Konklusion in dessen Sukzedens packen. Auch dieses Vorgehen sollte uns sofort verdächtig vorkommen: Hierbei handelt es sich um eine Anwendung des konjunktiven Deduktionstheorems aus Definition 17!

Wie wir an der letzten Spalte der obigen Tabelle erkennen können, ziehen wir direkt zwei Prämissen auf einmal in die Konklusion, indem wir ein Konditional einführen. Wenn wir uns noch einmal vor Augen führen, dass wir, statt das konjunktive Deduktionstheorem zu nutzen, auch einfach mehrfach konditionalisieren und dann das Importationsgesetz anwenden können, macht auch der Name „Mehrfachkonditionalisierung" sehr viel Sinn: Zwar wenden wir die Regel nur einmal an, aber dahinter stecken eigentlich mehrere Konditionalisierungen.

Im Gegensatz zu I$\rightarrow$ kommen mir ohne I$\rightarrow^{+}$ bestens aus; das Importationsgesetz können wir auch ohne die Regel beweisen, sodass wir sie eigentlich nicht benötigen. Dennoch kürzt sie viele Beweise von Formeln mit allgemeingültigem Konditional deutlich ab. Deshalb wird sie häufig als Zusatzregel eingeführt. Dass die normalsprachlichen Pendants zu diesen Konzepten plausibel sind, haben wir bereits in Abschnitt 4.1 erläutert. Damit ist nun auch die zweite anfangs gestellte Frage beantwortet.

5 Fazit

In diesem zugegeben sehr gehaltvollen Text haben wir zunächst ein paar wichtige Definitionen wiederholt und mithilfe normalsprachlicher Intuitionen vertieft, um daraufhin einen Blick hinter die Kulissen von K-AL zu werfen und somit ein tieferes Verständnis davon zu gewinnen, wie Herleitungsspiele funktionieren. Zum einen haben wir uns die Unterschiede zwischen syntaktischer und semantischer Folge vor Augen geführt, um daraufhin zu lernen, dass die Begriffe in den üblichen Logiken, die von Philosoph:innen als Handwerkszeug genutzt werden, zusammenfallen. Zum anderen haben wir uns den wichtigen Zusammenhang zwischen zwei Formulierungen des Deduktionstheorems und den Konditionalisierungsregeln klargemacht. Auf dem Weg dorthin sind uns viele weitere Konzepte begegnet, die zum Verständnis nötig sind, und es wäre sicherlich zu viel verlangt, all diese Konzepte nach dem ersten Lesen verinnerlicht zu haben. Aus diesem Grund ist im Folgenden eine Tabelle aufgeführt, die zum Nachschlagen der wichtigsten Take-Home-Messages dienlich sein soll.

Abbildung 3: Take-Home-Messages		
1	Logik ist die formale Theorie von *gültigen Schlüssen*.	Abschnitt 1.1
2	*Allgemeingültige Formeln* sind *Kon-Sequenzen* mit der leeren Menge.	Abschnitt 1.2
3	Eine formale *Syntax* ist eine Menge von Regeln, die das Alphabet sowie die Bildung von einfachen und komplexen Sätzen festlegt.	Abschnitt 2.1.1.1
4	Eine formale *Semantik* ist eine Menge von Regeln, die die Wahrheitsbedingungen von einfachen und komplexen Sätzen festlegt.	Abschnitt 2.2.2
5	Zu fast jedem formalen Konzept gibt es ein plausibles Konzept in der natürlichen Sprache.	Abschnitt 2.2.2.2
6	*Herleitbarkeit* (syntaktische Folge) und *Beweisbarkeit* beziehen sich ausschließlich auf die Zeichenkombinationen eines Alphabets.	Abschnitt 2.3
7	*Kon-Sequenz* (semantische Folge) und *Allgemeingültigkeit* beziehen sich auf Wahrheitswerte.	Abschnitt 2.3
8	Syntaktische und semantische Folge fallen in AL und PL zusammen, weil ihre Herleitungsspiele *adäquat*, also *korrekt* und *vollständig* sind.	Abschnitt 3
9	Die Regel I$\rightarrow$ ist dadurch gerechtfertigt, dass das (syntaktische) *Deduktionstheorem* gilt.	Abschnitt 4.3
10	Die Regel I$\rightarrow^{+}$ ist dadurch gerechtfertigt, dass das *konjunktive Deduktionstheorem* gilt, das sich mithilfe des *Deduktionstheorems* und des *Importationsgesetzes* herleiten lässt. Bei I$\rightarrow^{+}$ handelt es sich lediglich um eine Zusatzregel.	Abschnitt 4.4

Literatur

Glanzberg, M. (2021). Truth. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2021). Metaphysics Research Lab, Stanford University. Verfügbar 7. Januar 2022 unter https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entriesruth/. (Siehe S. 9)

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, *38*(1), 173–198. https://doi.org/10.1007/BF01700692 (siehe S. 14)

Hájek, P. (2002). Why Fuzzy Logics? In D. Jacquette (Hrsg.), *A Companion to Philosophical Logic* (S. 595–605). Blackwell. (Siehe S. 10).

Leitgeb, H. (2019). HYPE: A System of Hyperintensional Logic (with an Application to Semantic Paradoxes). *Journal of Philosophical Logic*, *48*(2), 305–405. https://doi.org/10.1007/s10992-018-9467-0 (siehe S. 10)

Moschovakis, J. (2021). Intuitionistic Logic. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2021). Metaphysics Research Lab, Stanford University. Verfügbar 7. Januar 2022 unter https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/logic-intuitionistic/. (Siehe S. 10)

Priest, G. (2002). Paraconsistent Logic. In D. M. Gabbay (Hrsg.), *Handbook of philosophical logic Vol. 6* (2. ed, S. 287–393). Kluwer. (Siehe S. 10).

Priest, G. (2008). First Degree Entailment. In *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is* (2. Aufl., S. 142–162). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511801174.011. (Siehe S. 10)