Arbeitskreis Modallogik

Normale Modallogiken: K, D, T, B, S4, S5

Wichtige Relationseigenschaften

Seien d, d‘ und d‘‘ beliebige Objekte. Dann gilt:

Kürzel	Eigenschaft	Bedingung	Formel	Beispiel
ρ	Reflexivität	$\langle d, d \rangle \in [\![R]\!]$	$\forall x\, Rxx$	x ähnelt y
σ	Symmetrie	Wenn $\langle d, d' \rangle \in [\![R]\!]$, dann $\langle d', d \rangle \in [\![R]\!]$	$\forall xy\, (Rxy \rightarrow Ryx)$	x diskutiert-mit y
τ	Transitivität	Wenn $\langle d, d' \rangle \in [\![R]\!]$ und $\langle d', d'' \rangle \in [\![R]\!]$, dann $\langle d, d'' \rangle \in [\![R]\!]$	$\forall xyz\, (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$	x ist-kleiner-als y
η	Serialität	$\langle d, d' \rangle \in [\![R]\!]$	$\forall x \exists y\, Rxy$	x ist-Kind-von y

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist eine Äquivalenzrelation.
Eine serielle, symmetrische und transitive Relation ist eine reflexive Relation.
Reflexivität impliziert Serialität.

K: Axiomatik

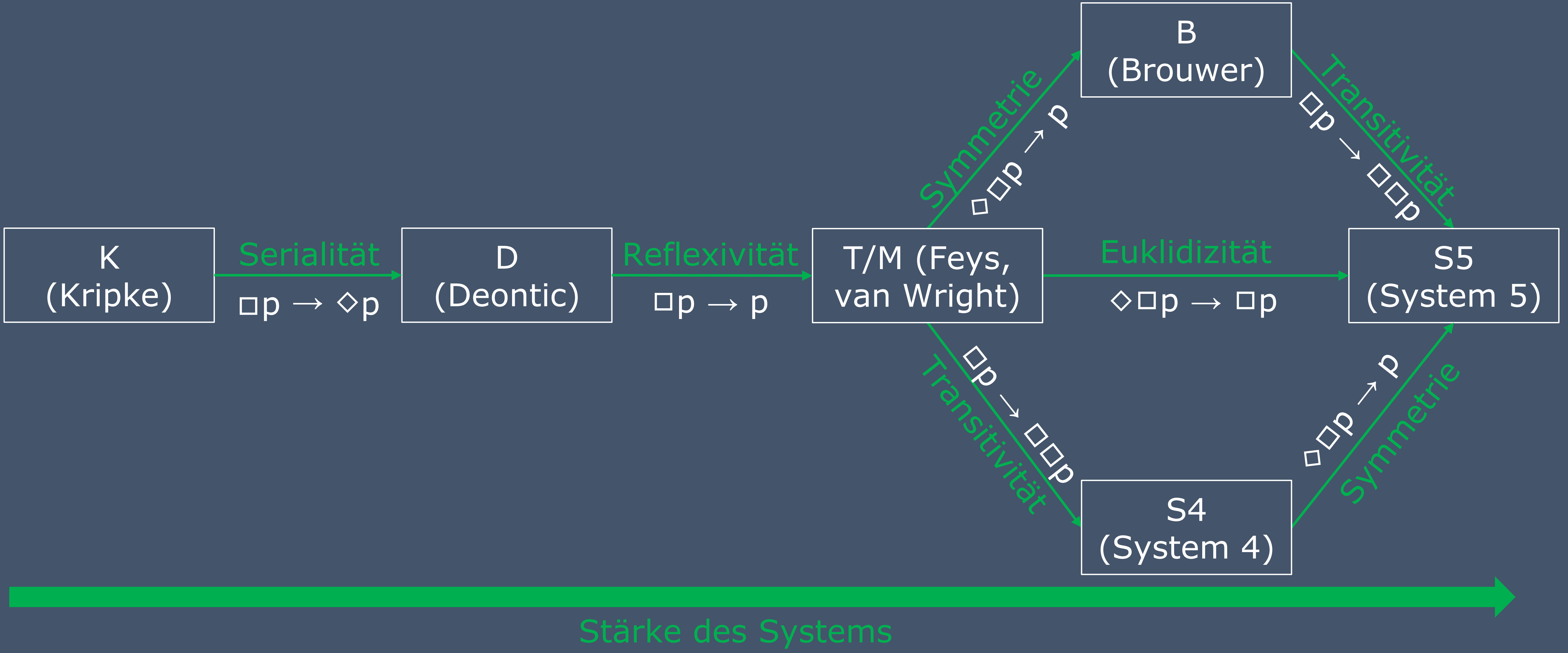
AL

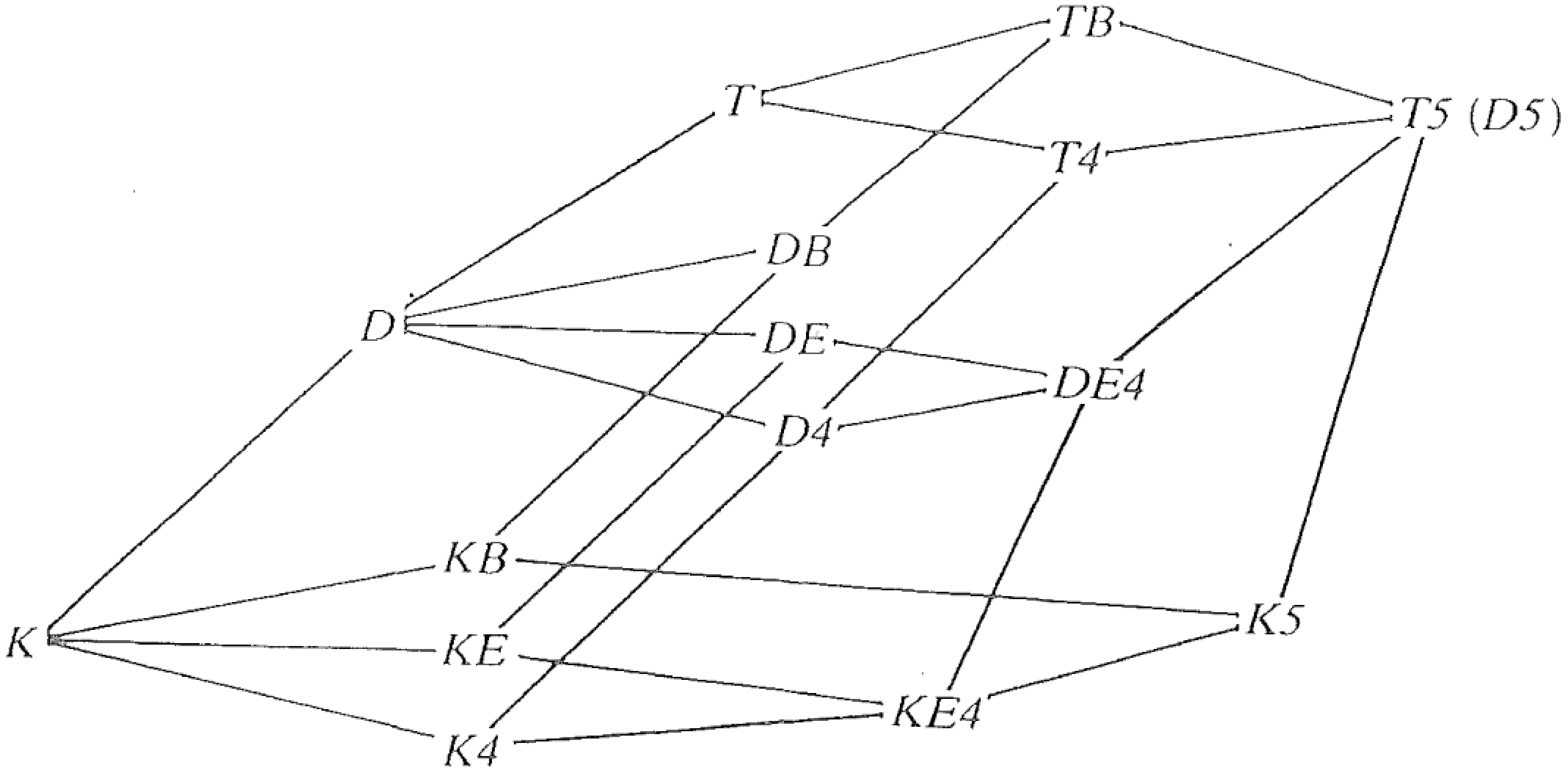
Formel	Name
$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	2. Paradoxie des materialen Konditionals
$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	Pfeil-Verteiler
$(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	Kontraposition
$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	Box-Verteiler

Herleitungsregeln:

Name	Abkürzung	Regel
modus ponens	m. p.	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta$
Nezessisierungsregel	NEC	$\{\} \vdash \alpha \Rightarrow \{\} \vdash \Box\alpha$

Die Hierarchie modallogischer Systeme – ein Überblick




TB
T
T5 (D5)
T4
DB
D
DE
DE4
D4
KB
K5
K
KE
KE4
K4

Name	Axiom	Condition on Frames	R is…
(D)	$\Box A \rightarrow \Diamond A$	$\exists u wRu$	Serial
(M)	$\Box A \rightarrow A$	wRw	Reflexive
(4)	$\Box A \rightarrow \Box\Box A$	$(wRv \,\&\, vRu) \Rightarrow wRu$	Transitive
(B)	$A \rightarrow \Box\Diamond A$	$wRv \Rightarrow vRw$	Symmetric
(5)	$\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	$(wRv \,\&\, wRu) \Rightarrow vRu$	Euclidean
(CD)	$\Diamond A \rightarrow \Box A$	$(wRv \,\&\, wRu) \Rightarrow v = u$	Functional
$(\Box M)$	$\Box(\Box A \rightarrow A)$	$wRv \Rightarrow vRv$	Shift Reflexive
$(C4)$	$\Box\Box A \rightarrow \Box A$	$wRv \Rightarrow \exists u(wRu \,\&\, uRv)$	Dense
(C)	$\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$	$wRv \,\&\, wRx \Rightarrow \exists u(vRu \,\&\, xRu)$	Convergent

D	=	$\mathbf{K} \oplus \Box p \to \Diamond p$
T	=	$\mathbf{K} \oplus \Box p \to p$
KB	=	$\mathbf{K} \oplus p \to \Box\Diamond p$
K4	=	$\mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$
K5	=	$\mathbf{K} \oplus \Diamond\Box p \to \Box p$
$\mathbf{Alt}_n$	=	$\mathbf{K} \oplus \Box p_1 \vee \Box(p_1 \to p_2) \vee \ldots \vee \Box(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to p_{n+1})$
D4	=	$\mathbf{K4} \oplus \Diamond\top$
S4	=	$\mathbf{K4} \oplus \Box p \to p$
GL	=	$\mathbf{K4} \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p$
Grz	=	$\mathbf{K} \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$
K4.1	=	$\mathbf{K4} \oplus \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$
K4.2	=	$\mathbf{K4} \oplus \Diamond(p \wedge \Box q) \to \Box(p \vee \Diamond q)$
K4.3	=	$\mathbf{K4} \oplus \Box(\Box^+ p \to q) \vee \Box(\Box^+ q \to p)$
S4.1	=	$\mathbf{S4} \oplus \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$
S4.2	=	$\mathbf{S4} \oplus \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$
S4.3	=	$\mathbf{S4} \oplus \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$
Triv	=	$\mathbf{K4} \oplus \Box p \leftrightarrow p$
Verum	=	$\mathbf{K4} \oplus \Box p$
S5	=	$\mathbf{S4} \oplus p \to \Box\Diamond p$
K4B	=	$\mathbf{K4} \oplus p \to \Box\Diamond p$
$\mathbf{A}^*$	=	$\mathbf{GL} \oplus \Box\Box p \to \Box(\Box^+ p \to q) \vee \Box(\Box^+ q \to p)$
Dum	=	$\mathbf{S4} \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to (\Diamond\Box p \to p)$
$\mathbf{K4BW}_n$	=	$\mathbf{K4} \oplus \bigwedge_{i=0}^{n} \Diamond p_i \to \bigvee_{0 \leq i \neq j \leq n} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j))$
$\mathbf{K4BD}_n$	=	$\mathbf{K4} \oplus B_n$
$\mathbf{K4}_{n,m}$	=	$\mathbf{K4} \oplus \Box^n p \to \Box^m p$, for $1 \leq m < n$

Table 1. A list of standard normal modal logics.

Normale Modalsemantik (Modell)

Ein K-Modell ist ein Tripel <W, R, ⟦…⟧>, für den gilt:

W ist eine nicht-leere Menge.

R ist eine Relation auf W (also: $R \subseteq W \times W$), sodass gilt: …

⟦…⟧ ist eine Funktion, die jeder wff von K für jeden Kontext $w \in W$ einen Wahrheitswert aus der Menge {1, 0} zuordnet. Dabei gelten die folgenden einschränkenden Bedingungen:

1. $[\![\ulcorner{\sim}\alpha\urcorner]\!]_w = 1$ gdw $[\![\alpha]\!]_w = 0$
2. $[\![\ulcorner\alpha \wedge \beta\urcorner]\!]_w = 1$ gdw sowohl $[\![\alpha]\!]_w = 1$ als auch $[\![\beta]\!]_w = 1$
3. $[\![\ulcorner\Box\alpha\urcorner]\!]_w = 1$ gdw für alle Kontexte $w' \in W$ gilt: Wenn wRw', dann $[\![\alpha]\!]_{w'} = 1$

K-Tableaux: Regeln II

Seien i und j $\in \mathbb{N}_0$, α eine wff. Dann gilt:

5. Die AL-Tableauregeln werden erweitert:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \sim\Box\alpha,\ w_i \\ \downarrow \\ \Diamond\sim\alpha,\ w_i \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim\Diamond\alpha,\ w_i \\ \downarrow \\ \Box\sim\alpha,\ w_i \end{array}}_{\text{Durchtauschen der Modaloperatoren}} \qquad\qquad \underbrace{\begin{array}{c} \Box\alpha,\ w_i \\ \vdots \\ w_iRw_j \\ \downarrow \\ \alpha,\ w_j \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Diamond\alpha,\ w_i \\ \downarrow \\ w_iRw_j \\ \vdots \\ \alpha,\ w_j \end{array}}_{\text{Auflösen der Modaloperatoren}}$$

j muss frisch sein!

K-Tableaux: Regeln II

Seien i, j und k $\in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ w_iRw_i \end{array}$$

Reflexivität

$$\begin{array}{c} w_iRw_j \\ \downarrow \\ w_jRw_i \end{array}$$

Symmetrie

$$\begin{array}{c} w_iRw_j \\ \vdots \\ w_jRw_k \\ \downarrow \\ w_iRw_k \end{array}$$

Transitivität

w_i darf vorher auf keine Welt zugreifen!

j muss frisch sein!

$$\begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ w_iRw_j \end{array}$$

Serialität

zz: $\Box p \vdash_{\eta} \Diamond p$

$\Box p, w_o$

$\sim\Diamond p, w_o$

$\Box{\sim}p, w_o$

$w_o R w_1$

Serialität!

p, w_0

$\sim p, w_0$

X

q. e. d.

zz: $\Box p \vdash_{\rho} p$

$\Box p, w_o$

$\sim p, w_o$

$w_o R w_0$

Reflexivität!

p, w_0

X

q. e. d.

zz: $\Diamond\Box p \vdash_{\sigma} p$

$\Diamond\Box p, w_o$

$\sim p, w_o$

$w_o R w_1$

$\Box p, w_1$

$w_1 R w_0$

Symmetrie!

p, w_0

X

q. e. d.

zz: $\Box p \vdash_T \Box\Box p$

$\Box p, w_0$

$\sim\Box\Box p, w_0$

$\Diamond\sim\Box p, w_0$

w_0Rw_1

$\sim\Box p, w_1$

$\Diamond\sim p, w_1$

w_1Rw_2

$\sim p, w_2$

w_0Rw_2 ← Transitivität!

p, w_2

X

q. e. d.

zz: $\Diamond\Box p \vdash_{\sigma T} \Box p$

$\Diamond\Box p, w_o$
$\sim\Box p, w_o$
$\Diamond\sim p, w_o$
$w_o R w_1$
$\sim p, w_1$
$w_o R w_2$
$\Box p, w_2$
$w_1 R w_0$ Symmetrie
$w_1 R w_2$ Transitivität
$w_2 R w_1$ Symmetrie
p, w1

X

q. e. d.