Arbeitskreis Modallogik

K: Syntax, Axiomatik, Semantik

K: Vokabular

Satzbuchstabe	„p“
Junktoren	„~“, „∧“
Klammern	„)“, „(„
Modaloperator	„□“

K: Syntax (atomare Formeln)

1. Basisklausel — „p“ ist eine atomare Formel von K.
2. Rekursionsklausel — Wenn α eine atomare Formel von K ist, dann ist auch ⌜α*⌝ eine atomare Formel von K.
3. Abschlussklausel — Nichts sonst ist eine atomare Formel von K.

Zusatzdefinition: Eine atomare Formel von K darf mit „q“, „r“ oder „s“ abgekürzt werden.

K: Syntax (wohlgeformte Formeln)

1.	Basis-klausel	Jede atomare Formel von K ist eine wohlgeformte Formel von K.
2.1	Rekursions-klausel I	Wenn α eine wohlgeformte Formel von K ist, dann auch ⌜~α⌝.
2.2	Rekursions-klausel II	Wenn α und β wohlgeformte Formeln von K sind, dann ist auch ⌜(α ∧ β)⌝ eine wohlgeformte Formel von K.
2.3	Rekursions-Klausel III	Wenn α eine wohlgeformte Formel von K ist, dann auch ⌜□α⌝.
3.	Abschluss-klausel	Sonst ist nichts eine wohlgeformte Formel von K.

K: Syntax (Zusatzdefinitionen)

Seien α und β wohlgeformte Formeln von K. Dann gilt:

1.	$\ulcorner{\sim}({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta)\urcorner$	darf durch	$\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner$	abgekürzt werden.
2.	$\ulcorner{\sim}(\alpha \wedge {\sim}\beta)\urcorner$	darf durch	$\ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)\urcorner$	abgekürzt werden.
3.	$\ulcorner(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)\urcorner$	darf durch	$\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$	abgekürzt werden.
4.	$\ulcorner(\alpha \vee \beta) \wedge {\sim} (\alpha \wedge \beta)\urcorner$	darf durch	$\ulcorner(\alpha \nabla \beta)\urcorner$	abgekürzt werden.
5.	$\ulcorner{\sim}\Box{\sim}\alpha\urcorner$	darf durch	$\ulcorner\Diamond\alpha\urcorner$	abgekürzt werden.

K: Axiomatik

AL

Formel	Name
$p \to (q \to p)$	2. Paradoxie des materialen Konditionals
$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	Pfeil-Verteiler
$(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$	Kontraposition
$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	Box-Verteiler

Herleitungsregeln:

Name	Abkürzung	Regel
modus ponens	m. p.	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta$
Nezessisierungsregel	NEC	$\{\} \vdash \alpha \Rightarrow \{\} \vdash \Box\alpha$

NOTWENDIGE UND HINREICHENDE BEDINGUNG

- p ist notwendige Bedingung für q genau dann, wenn gilt:
  - Informal: Wenn p nicht der Fall ist, ist q nicht der Fall
  - Formal: $\sim p \rightarrow \sim q$
- r ist hinreichende Bedingung für q genau dann, wenn gilt:
  - Informal: Wenn r der Fall ist, dann ist auch q der Fall
  - Formal: $r \rightarrow q$

Nehmen wir an, p ist notwendige und hinreichende Bedingung für q. Da „$\sim p \rightarrow \sim q$“ durch Kontraposition äquivalent mit „$q \rightarrow p$“ ist, ist die Konjunktion aus notwendiger und hinreichender Bedingung „$(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$“. Das ist äquivalent mit „$p \leftrightarrow q$“. Notwendige und hinreichende Bedingung haben also zusammen immer denselben Wahrheitswert wie q!

K – SYNTAKTISCHE FOLGE (AXIOMATIK)

Eine Herleitung ist eine Folge von wffs, sodass für jede wff gilt, dass sie

(1) eine Prämisse

(2) ein Axiom oder

(3) eine bereits hergeleitete Formel ist.

Ein Beweis ist eine Herleitung ohne Prämissen.

Ein Theorem ist die letzte Zeile eines Beweises.

K-Semantik (Modell)

Ein K-Modell ist ein Tripel $\langle W, R, [\![\ldots]\!] \rangle$, für den gilt:

W ist eine nicht-leere Menge.

R ist eine Relation auf W (also: $R \subseteq W \times W$).

$[\![\ldots]\!]$ ist eine Funktion, die jeder wff von K für jeden Kontext $w \in W$ einen Wahrheitswert aus der Menge $\{1, 0\}$ zuordnet. Dabei gelten die folgenden einschränkenden Bedingungen:

1. $[\![\ulcorner {\sim}\alpha \urcorner]\!]_w = 1$ gdw $[\![\alpha]\!]_w = 0$
2. $[\![\ulcorner \alpha \wedge \beta \urcorner]\!]_w = 1$ gdw sowohl $[\![\alpha]\!]_w = 1$ als auch $[\![\beta]\!]_w = 1$
3. $[\![\ulcorner \Box\alpha \urcorner]\!]_w = 1$ gdw für alle Kontexte $w' \in W$ gilt: Wenn wRw', dann $[\![\alpha]\!]_{w'} = 1$

K-Semantik: Definitionen zu semantischen Begriffen

Sei α eine wohlgeformte Formel von K. Dann gilt:

1. α ist K-allgemeingültig genau dann, wenn α für jeden Kontext innerhalb jedes K-Modells wahr ist. (geschrieben: $\vDash_K \alpha$)
2. α ist K-widersprüchlich genau dann, wenn α für jeden Kontext innerhalb jedes K-Modells falsch ist.
3. α ist K-erfüllbar genau dann, wenn α für mindestens einen Kontext innerhalb von mindestens einem K-Modell wahr ist.

K-Semantik: Unterschiede zu PL

1. Modell kein Tupel, sondern Tripel
2. Kontextabhängige Bewertung von wffs
3. Bewertung für Formeln mit Box und Diamant
4. Zugänglichkeitsrelation zwischen Kontexten

K-Tableaux: Regeln I

Seien i und j $\in \mathbb{N}_0$, α und β wffs. Dann gilt:

1. Alle Tableau-Regeln von AL werden übernommen.
2. An jedem Knoten des Tableaus steht entweder
   a) „α, w_i“ oder
   b) eine Zeichenkombination der Form „$w_i R w_j$“
3. Für alle Prämissen und die reductio gilt: i=0
4. Für jeden Knoten „β, w_j“, der dadurch entstanden ist, dass man den Hauptjunktor von α in einem Knoten der Form „α, w_i“ aufgelöst hat, gilt: i=j

K-TABLEAUX: REGELN II

Seien i und j $\in \mathbb{N}_0$, α eine wff. Dann gilt:

5. Die AL-Tableauxregeln werden erweitert:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \sim\Box\alpha,\ w_i & \qquad & \sim\Diamond\alpha,\ w_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Diamond\sim\alpha,\ w_i & & \Box\sim\alpha,\ w_i \end{array}}_{\text{Durchtauschen der Modaloperatoren}}$$

$$\underbrace{\begin{tikzcd} \Box\alpha,\ w_i \arrow[d, dash, dashed] & \Diamond\alpha,\ w_i \arrow[d] \\ w_iRw_j \arrow[d] & w_iRw_j \arrow[d, dash, dashed] \\ \alpha,\ w_j & \alpha,\ w_j \end{tikzcd}}_{\text{Auflösen der Modaloperatoren}}$$

j muss
frisch sein!

K-Tableaux: Regeln III

1. Ein Ast ist geschlossen (closed) gdw auf ihm sowohl „α, w_i“ als auch „$\sim\alpha$, w_i“ vorkommt.
2. Ein Ast ist offen (open) gdw er nicht geschlossen ist.
3. Ein Tableau ist geschlossen gdw alle seine Äste geschlossen sind.
4. Ein Tableau ist offen gdw es nicht geschlossen ist.
5. Ein Tableau ist vollständig (complete) gdw jede anwendbare Regel angewendet wurde.

K-Tableaux: logische Folge I

Sei $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Dann gilt:

$\Gamma \vdash_K \beta$ gdw es ein vollständiges und geschlossenes Tableau gibt, dessen ersten Formeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und $\sim\beta$ sind.

$\Gamma \vDash_K \beta$ gdw für alle K-Modelle gilt: Es gibt keinen Kontext $w \in W$, in dem alle $\alpha \in \Gamma$ wahr sind, aber β falsch.

„$\vdash_K \beta$" kürzt „$\{\} \vdash_K \beta$" ab. „$\vDash_K \beta$" kürzt „$\{\} \vDash_K \beta$" ab.

K-Tableaux: logische Folge II

Ein System ist korrekt gdw alle beweisbaren Formeln allgemeingültig sind. (Wenn $\vdash_K \alpha$, dann $\vDash_K \alpha$)

Ein System ist vollständig gdw alle allgemeingültigen Formeln beweisbar sind. (Wenn $\vDash_K \alpha$, dann $\vdash_K \alpha$)

Ein System ist adäquat gdw es korrekt und vollständig ist.

→ K ist adäquat, also korrekt und vollständig!

zz: $\Box(p \rightarrow q) \vdash_K \Box p \rightarrow \Box q$

$\Box(p \rightarrow q), w_o$

$\sim(\Box p \rightarrow \Box q), w_o$

$\Box p, w_o$

$\sim\Box q, w_o$

$\Diamond\sim q, w_o$

$w_o R w_1$

$\sim q, w_1$

p, w_1

$p \rightarrow q, w_1$

$\sim p, w_1$	q, w_1
x	x

q. e. d.

AL-Tableaux: Gegenmodelle ablesen

Sei A eine *atomare* Formel von K. Dann gilt für jeden offenen Ast:

1. $[\![A]\!] = 1$ gdw „A“ vorkommt
2. $[\![A]\!] = 0$ gdw „~A“ vorkommt
3. $[\![A]\!]$ beliebig gdw weder „A“ noch „~A“ vorkommt

AL-Tableaux: Gegenmodelle ablesen (Beispiel)

zz: $\{p \rightarrow q\} \nvdash_{AL} q$

$p \rightarrow q$

$\sim q$

$\sim p$ | q

X

q. e. d.

Gegenmodell:

$[\![p]\!] = 0$

$[\![q]\!] = 0$

p	q	p → q	q
●	●	●	●
●	○	○	○
○	●	●	●
○	○	●	○

K-Tableaux: Gegenmodelle ablesen

Seien i und j $\in \mathbb{N}_0$ und A eine atomare Formel von K. Dann gilt für jeden offenen Ast:

1. Für jede Zahl i, die vorkommt, gilt: $w_i \in W$
2. <i, j> $\in$ R gdw $w_i R w_j$ vorkommt
3. $[\![A]\!]_{w_i} = 1$ gdw „A, w_i" vorkommt
4. $[\![A]\!]_{w_i} = 0$ gdw „~A, w_i" vorkommt
5. $[\![A]\!]_{w_i}$ beliebig gdw weder „A, w_i" noch „~A, w_i" vorkommt

K-Tableaux: Gegenmodelle ablesen (Beispiel)

zz: $\{\Diamond p\} \nvdash_K \Box p$

$\Diamond p, w_0$

$\sim\Box p, w_0$

$\Diamond\sim p, w_0$

w_0Rw_1

$\sim p, w_1$

w_0Rw_2

p, w_2

q. e. d.

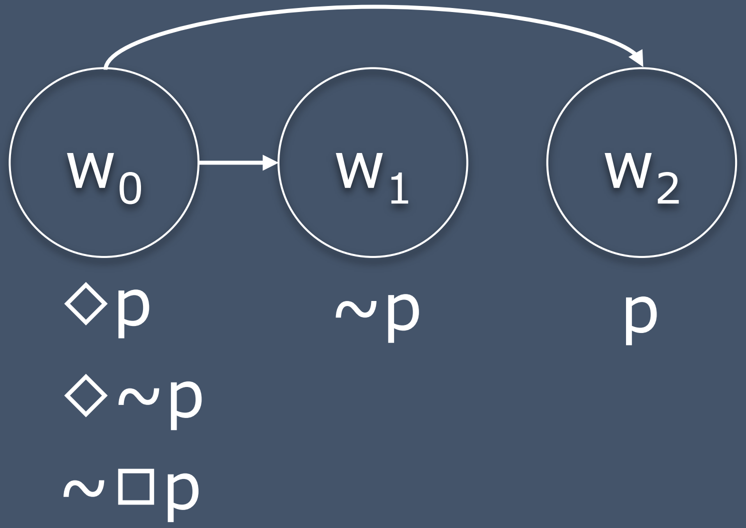
Gegenmodell:

$W = \{w_0, w_1, w_2\}$

$R = \{\langle w_0, w_1\rangle, \langle w_0, w_2\rangle\}$

$[\![p]\!]_{w_1} = 0$

$[\![p]\!]_{w_2} = 1$



K-Tableaux: Gegenmodelle ablesen (Beispiel)

zz: $\{\Box p\} \nvdash_K \Diamond p$

$\Box p, w_o$
$\sim\Diamond p, w_o$
$\Box\sim p, w_o$

q. e. d.

w_0

$\Box p$

$\sim\Diamond p$

Gegenmodell:

$W = \{w_0\}$

$R = \{\}$

$[\![\Box p]\!]_{w_1} = 1$

$[\![\Diamond p]\!]_{w_2} = 0$

3. $[\![\ulcorner\Box\alpha\urcorner]\!]_w = 1$ gdw für alle Kontexte $w' \in W$ gilt: Wenn wRw', dann $[\![\alpha]\!]_{w'} = 1$

Antezedens wird immer falsch, da R = {}.
Also wird das Konditional immer wahr!

K – einige Tautologien

$$\Diamond(p \vee q) \rightarrow \Diamond p \vee \Diamond q$$

$$\Box p \vee \Box q \rightarrow \Box(p \vee q)$$

$$\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$$

$$\Box p \rightarrow (q \rightarrow \Box p)$$

$$\sim\Diamond p \rightarrow (p \rightarrow \Box q)$$

$$\Box p \leftrightarrow (\sim p \rightarrow p)$$

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$$