Arbeitskreis Mengenlehre und Typentheorie

Das Auswahlaxiom – Kon-Sequenzen und Bedenken

Agenda

1. Auswahlmengen vs. Auswahlfunktionen
2. Intuitionismus
3. Das Auswahlaxiom und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Das heutige ZFC im Überblick

Name des Axioms	Formel
Extensionalität	$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$
Paarmengen	$\forall x \forall y \exists z \forall x' (x' \in z \leftrightarrow (x' = x \vee x' = y))$
Aussonderung	$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \alpha[z])$
Potenzmengen	$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall x' (x' \in y \rightarrow x' \in x))$
Vereinigung	$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists x' (x' \in x \wedge z \in x'))$
Unendlichkeit	$\exists x (\exists y (y \in x \wedge \forall z\, z \notin y) \wedge \forall z (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x)$
Ersetzung	$\forall x \forall y \forall z (\alpha[x, y] \wedge \alpha[x, z] \rightarrow y = z) \rightarrow$ $\quad \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists x' (x' \in x \wedge \alpha[x', z]))$
Fundierung	$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$
Auswahl	$\forall x (\emptyset \notin x \wedge$ $\quad \forall y \forall z \forall x' (y \in x \wedge z \in x \wedge x' \in y \wedge x' \in z \rightarrow y = z) \rightarrow$ $\quad \exists y' \forall z' (z' \in x \rightarrow \exists x'' (x'' \in x \wedge x'' \in y')))$

Das Auswahlaxiom

Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat. (Axiom der Auswahl.)

Man kann das Axiom auch so ausdrücken, daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente M, N, R, … von T ein einzelnes Element m, n, r, … *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen.

— Ernst Zermelo, „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I“, 1908, S. 266

Das Auswahlaxiom

Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat. (Axiom der Auswahl.)

Man kann das Axiom auch so ausdrücken, daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente M, N, R, ... von T ein einzelnes Element m, n, r, ... *auszuwählen* und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen.

— Ernst Zermelo, „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I“, 1908, S. 266

$$\emptyset \notin \mathrm{T} \wedge$$
$$\forall x \forall y \forall z (x \in \mathrm{T} \wedge y \in \mathrm{T} \wedge z \in x \wedge z \in y \to x = y) \to$$
$$\exists x (x \subseteq \bigcup \mathrm{T} \wedge \forall y (y \in \mathrm{T} \to \exists! z (z \in y \wedge z \in x)))$$

Funktionen – ein Überblick

Definition 1: Alles zu Funktionen

$$\mathrm{Funk}(R) := \forall x \exists! y (x \in A \land y \in B \to Rxy)$$

Schreibe: „f“ statt „R“

$$f(x) = y := \mathrm{Funk}(R) \land Rxy$$

$$f(x) := \iota y Rxy$$

$$D(f) := \{x \mid \exists y Rxy\}$$

$D(f) = A!$

$$W(f) := \{y \mid \exists x Rxy\}$$

$W(f) = B!$

$$f : X \mapsto Y := \mathrm{Funk}(R) \land X = D(f) \land W(f) \subseteq Y$$

$$x \mapsto f(x) := \forall x\, (x \in X \to f(x) \in Y)$$

Auswahlfunktionen

Definition 2: Auswahlfunktion

Sei A eine Menge, sodass $\emptyset \notin A$. Sei a ein beliebiges Element von A. Dann gilt: Eine *Auswahlfunktion* für A ist eine Funktion $f\colon A \mapsto \bigcup A$, sodass für jedes $a \in A$ gilt, dass $f(a) \in a$.

Auswahlfunktionen

Definition 2: Auswahlfunktion

Sei A eine Menge, sodass $\emptyset \notin A$. Sei a ein beliebiges Element von A. Dann gilt: Eine *Auswahlfunktion* für A ist eine Funktion $f\colon A \mapsto \bigcup A$, sodass für jedes $a \in A$ gilt, dass $f(a) \in a$.

Eine Auswahlfunktion f mit $\mathrm{Dom}(f) = A$ zieht für jede Menge $a \in A$ genau ein Element von a heraus. Der Wert von $f(a)$ ist also immer ein Element von seinem Argument: $f(a) \in a$! Anders gesagt: Der Output einer Auswahlfunktion ist immer ein Element von ihrem Input. Deshalb darf auch die leere Menge kein Argument von f sein, denn dafür müsste sie mindestens ein Element haben.

Auswahlmengen und Auswahlfunktionen

Definition 3: Das Auswahlaxiom mit Auswahlfunktionen

Für jede Menge A mit $\emptyset \notin \mathrm{A}$ existiert eine Auswahlfunktion für A:

$\forall \mathrm{x}(\emptyset \notin \mathrm{x} \rightarrow \exists \mathrm{y}(\mathrm{Funk}(\mathrm{y}) \wedge \mathrm{D}(\mathrm{y}) = \mathrm{x} \wedge \mathrm{W}(\mathrm{y}) \subseteq \bigcup \mathrm{x} \wedge \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} \in \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{y}(\mathrm{z}) \in \mathrm{z})))$

Auswahlmengen und Auswahlfunktionen

Definition 3: Das Auswahlaxiom mit Auswahlfunktionen

Für jede Menge A mit $\emptyset \notin \mathrm{A}$ existiert eine Auswahlfunktion für A:

$$\forall \mathrm{x}(\emptyset \notin \mathrm{x} \rightarrow \exists \mathrm{y}(\mathrm{Funk}(\mathrm{y}) \wedge \mathrm{D}(\mathrm{y}) = \mathrm{x} \wedge \mathrm{W}(\mathrm{y}) \subseteq \bigcup \mathrm{x} \wedge \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} \in \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{y}(\mathrm{z}) \in \mathrm{z})))$$

Das Auswahlaxiom sichert nur, dass für jede Menge, deren sämtliche Elemente nicht-leer sind, *mindestens* eine Auswahlfunktion existiert, nicht zwingend aber *genau eine*.

Auswahlmengen vs. Auswahlfunktionen

?

Warum kann man das Auswahlaxiom sowohl mit Auswahlmengen als auch mit Auswahlfunktionen beschreiben?

Beide Formulierungen sind im Licht der anderen Axiome äquivalent. Ganz generell gilt nämlich:

1. Sind A und B beliebige Mengen, so existieren auch alle Funktionen $f\colon A \mapsto B$.
2. Sind A und B beliebige Mengen und existiert eine Funktion $f\colon A \mapsto B$, so existieren auch A und B.

Genau das werden wir im Folgenden zeigen.

Aus Mengen Funktionen basteln

Wir können mithilfe der Axiome der Vereinigung, Potenzmenge und Aussonderung zeigen, dass das cartesische Produkt zweier beliebiger Mengen existiert, indem wir definieren:

$$A \times B := \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B)) \mid \exists x \exists y (x \in A \land y \in B \land z = \{\{x\}, \{x, y\}\})\}$$

Existiert das cartesische Produkt $A \times B$, so existieren alle Relationen $R \subseteq A \times B$ und damit auch alle Funktionen $f\colon A \mapsto B$.

Da für A und B alle Funktionen $f\colon A \mapsto B$ existieren, existieren auch alle Funktionen $f\colon A \mapsto \bigcup A$ mit $f(a) \in a$ – und damit auch alle Auswahlfunktionen einer Menge!

Auswahlmengen basteln

Funktionen sind Relationen und Relationen sind Teilmengen von cartesischen Produkten. Existiert eine Funktion f, so existiert also auch immer ein cartesisches Produkt, von dem f Teilmenge ist.

Cartesische Produkte sind per Definition nun immer Produkte von zwei oder mehr Mengen. Wir müssen also zwei Fälle unterscheiden:

$$\mathrm{f} \subseteq \begin{cases} \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, & \text{falls } \mathrm{f} \text{ einstellig} \\ \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_\mathrm{n} \times \mathfrak{B}, & \text{falls } \mathrm{f} \text{ mehrstellig} \end{cases}$$

Auswahlmengen basteln

Der Wert $f(x_1, \ldots, x_n)$ einer n-stelligen Funktion f ist per Definition immer die letzte Komponente y des Tupels $\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle$. Nun ist per Definition des cartesischen Produkts $y \in \mathfrak{B}$. Unabhängig davon, ob f nun ein- oder mehrstellig ist, gilt also $B \subseteq \mathfrak{B}$. Wir können also aussondern:

$$B = \{y \in \mathfrak{B} \mid \exists x \; f(x) = y\}$$

Hierbei handelt es sich um $W(f)$ – und damit bereits um die Auswahlmenge.

Auswahlmengen basteln

Ist f einstellig, so existieren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Ist f mehrstellig, so existieren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$.

Ferner gilt, dass $A \subseteq \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$. Auch hier können wir also aussondern:

$$A = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{A} \mid \exists y\ f(x) = y\}, & \text{falls } f \text{ einstellig} \\ \{x \in \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n \mid \exists y\ f(x) = y\}, & \text{falls } f \text{ mehrstellig} \end{cases}$$

Also gilt: Existiert eine Funktion $f\colon A \mapsto B$, so existieren auch A und B!

Crashkurs Intuitionismus

Der Intuitionismus ...

- ist eine philosophische Position über das Wesen der Mathematik, die eine eigene Logik mit sich zieht $\rightarrow$ intuitionistische Logik

Crashkurs Intuitionismus

Der Intuitionismus ...

- ist eine philosophische Position über das Wesen der Mathematik, die eine eigene Logik mit sich zieht $\rightarrow$ intuitionistische Logik
- wurde Anfang der 1920er Jahre durch Brouwer und Heyting bekannt

Crashkurs Intuitionismus

Der Intuitionismus ...

- ist eine philosophische Position über das Wesen der Mathematik, die eine eigene Logik mit sich zieht $\rightarrow$ intuitionistische Logik
- wurde Anfang der 1920er Jahre durch Brouwer und Heyting bekannt
- versteht mathematische Objekte wie Zahlen und Beweise als rein mentale Konstruktionen

Crashkurs Intuitionismus

Der Intuitionismus …

- ist eine philosophische Position über das Wesen der Mathematik, die eine eigene Logik mit sich zieht $\rightarrow$ intuitionistische Logik
- wurde Anfang der 1920er Jahre durch Brouwer und Heyting bekannt
- versteht mathematische Objekte wie Zahlen und Beweise als rein mentale Konstruktionen
- versteht die Existenz solcher Objekte als Möglichkeit, konstruiert werden zu können $\rightarrow$ Widerspruch zur platonistischen Auffassung der Mathematik

Crashkurs Intuitionismus

Der Intuitionismus …

- ist eine philosophische Position über das Wesen der Mathematik, die eine eigene Logik mit sich zieht → intuitionistische Logik
- wurde Anfang der 1920er Jahre durch Brouwer und Heyting bekannt
- versteht mathematische Objekte wie Zahlen und Beweise als rein mentale Konstruktionen
- versteht die Existenz solcher Objekte als Möglichkeit, konstruiert werden zu können → Widerspruch zur platonistischen Auffassung der Mathematik
- lehnt die klassische Sichtweise, dass eine (mathematische) Behauptung wahr sein kann, ohne dass wir um ihre Wahrheit wissen, ab

Intuitionist:innen und Wahrheit

Für Intuitionist:innen ist eine mathematische Behauptung nur dann wahr, wenn wir *wissen*, dass sie wahr ist.

Wissen, dass eine mathematische Behauptung wahr ist, bedeutet für Intuitionist:innen, einen konstruktiven Beweis für diese Behauptung zu haben. Dieser Beweis kann formal sein, muss er aber nicht. In jedem Fall aber muss er intuitiv zugänglich sein. Der Forderung dieser intuitiven Zugänglichkeit hat der Intuitionismus seinen Namen zu verdanken.

wissen, dass α	$\vdash_{\mathrm{INT}} \alpha$
wissen, dass $\neg\alpha$	$\vdash_{\mathrm{INT}} \neg\alpha$
nicht wissen, dass α	$\nvdash_{\mathrm{INT}} \alpha$
nicht wissen, dass $\neg\alpha$	$\nvdash_{\mathrm{INT}} \neg\alpha$

Die intuitionistische Negation

Intuitionist:innen führen die neue wff $\bot$ ein. Sie funktioniert syntaktisch wie jede andere wff, ist aber per Definition in jedem Modell falsch. Dieser Schachzug erlaubt ihnen, die Negation zu definieren:

$$\neg\alpha := \alpha \to \bot$$

Anhand der Farbtabelle sehen wir schnell, dass die Negation so funktioniert wie geplant – Sie tauscht die Wahrheitswerte der negierten Formel:

α	$\bot$	$\alpha \to \bot$	$\neg\alpha$
●	○	○	○
○	○	●	●

Die Idee ist: Wenn α falsch ist, dann gibt es keinen Beweis für α, also ist jeder Beweis für α gleichzeitig auch ein Beweis für einen Widerspruch, d.h. für $\bot$.

Konstruktive Beweise

Ein Beweis der Form	ist konstruktiv genau dann, wenn …
$\neg\alpha$	es einen Beweis für $\bot$ unter der Annahme von α gibt
$\alpha \wedge \beta$	es einen Beweis für α und einen Beweis für β gibt
$\alpha \vee \beta$	es einen Beweis für α oder einen Beweis für β gibt
$\alpha \to \beta$	jeder Beweis von α auch ein Beweis für β ist
$\exists\chi\ \alpha[\chi]$	es einen Beweis der Form $\alpha[\tau/\chi]$ gibt*
$\forall\chi\ \alpha[\chi]$	es einen Beweis gibt, aus dem sich ergibt, dass für jedes $[\![\tau]\!]$ $\alpha[\tau/\chi]$ gilt*

und keine der Regeln $\mathrm{DN_E}$, $\mathrm{red.}$ oder der SAD benutzt worden sind.

*oder zumindest prinzipiell ein Verfahren für solch einen Beweis angegeben werden kann.

Intuitionistische Axiomatik

Definition 4: Intuitionistische Axiomatik

(1)	$\alpha \to \alpha \land \alpha$	Idempotenz $\land$
(2)	$\alpha \land \beta \to \beta \land \alpha$	Kommutativität $\land$
(3)	$((\alpha \to \beta) \to \alpha \land \gamma) \to \beta \land \gamma$	$\land$ und $\to$
(4)	$(\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	Transitivität $\to$
(5)	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	positive Paradoxie $\to$
(6)	$\alpha \land (\alpha \to \beta) \to \beta$	modus ponens
(7)	$\alpha \to \alpha \lor \beta$	$\mathrm{I}\lor$
(8)	$\alpha \lor \beta \to \beta \lor \alpha$	Kommutativität $\lor$
(9)	$(\alpha \to \gamma) \land (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \lor \beta) \to \gamma)$	$\mathrm{E}\lor$
(10)	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$	negative Paradoxie $\to$
(11)	$(\alpha \to \beta) \land (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$	$\mathrm{I}\neg$
(12)	$\forall\chi\alpha[\chi] \to \alpha[\tau/\chi]$	US
(13)	$\alpha[\tau] \to \exists\chi\alpha[\chi//\tau]$	EG

Intuitionist:innen und Wahrheit

In der Mathematik kommt es vor, dass wir nicht wissen, dass eine mathematische Behauptung α zutrifft, und auch nicht wissen, dass ihr Gegenteil $\neg\alpha$ zutrifft:

$$\nvdash \alpha \;\wedge\; \nvdash \neg\alpha$$

Ein berühmtes Beispiel hierfür ist die Kontinuumshypothese; sowohl sie als auch ihre Negation ist relativ widerspruchsfrei zu ZFC.

Dazu kommen Behauptungen, die wahr scheinen, noch nicht bewiesen wurden, aber womöglich beweisbar sind. Beispiele hierfür sind die Riemannsche Vermutung und die Goldbachsche Vermutung $\rightarrow$ Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz.

Da Intuitionist:innen Wahrheit als Beweisbarkeit deuten, gibt es also mindestens eine Einsetzung für α, sodass weder sie noch ihr Gegenteil wahr ist. Der SAD behauptet aber, dass solche Fälle nicht auftreten. Also gilt er in der intuitionistischen Logik nicht.

Intuitionist:innen und der SAD

> [S]ince we cannot, save for the most elementary statements, guarantee that we can find either a proof or a disproof of a given statement, we have no right to assume, of each statement, that it is either true or false; nor, therefore, to offer as a proof of a theorem a demonstration that it is derivable from the assumption either of the truth or of the falsity of some as yet undecided proposition.
>
> — Michael Dummett, *Elements of Intuitionism*, 2000

Zwar gilt der SAD in INT nicht, aber gerade deswegen folgt nicht, dass $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ gilt. Im Gegenteil: Diese Formel ist in der intuitionistischen Logik widersprüchlich.

Sie liest sich nämlich als „Jeder Beweis, dass α beweisbar oder widerlegbar ist, führt zu einem Widerspruch". Das stimmt aber nicht, denn es gibt genügend Formeln der Form $\alpha \vee \neg\alpha$, die INT-beweisbar sind, bspw. $x = x \vee x \neq x$.

Das bedeutet, jeder Beweis für $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$, führt zu einem Widerspruch. Und genau aus diesem Grund gilt $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$. Da $\mathrm{DN_E}$ keine Regel von INT ist, ergibt sich hier aber kein Widerspruch zu der Behauptung, dass $\alpha \vee \neg\alpha$ nicht gilt: Nicht immer ist es so, dass α beweisbar oder widerlegbar ist, aber jeder Beweis, dass $\alpha \vee \neg\alpha$ (immer) widerlegbar ist, ist widerlegbar.

Cashkurs Intuitionismus

Intuitionist:innen lehnen die folgenden klassischen Prinzipien ab:

(SAD)	$\alpha \vee \neg\alpha$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
(red.)	$(\neg\alpha \to \beta \wedge \neg\beta) \to \alpha$	indirekter Beweis
($\mathrm{DN_E}$)	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	Auflösung der doppelten Negation
(DT)	$\neg\forall\chi\ \alpha[\chi] \to \exists x\ \neg\alpha[\chi]$	Durchtauschen
(Peirce)	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	Peirce's Law

Cashkurs Intuitionismus

Intuitionist:innen lehnen die folgenden klassischen Prinzipien ab:

(SAD)	$\alpha \vee \neg\alpha$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
(red.)	$(\neg\alpha \to \beta \wedge \neg\beta) \to \alpha$	indirekter Beweis
$(\mathrm{DN_E})$	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	Auflösung der doppelten Negation
(DT)	$\neg\forall\chi\ \alpha[\chi] \to \exists x\ \neg\alpha[\chi]$	Durchtauschen
(Peirce)	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	Peirce's Law

Dennoch gelten die folgenden Prinzipien:

1. $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$
2. $(\alpha \to \beta \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$
3. $\alpha \to \neg\neg\alpha$
4. $\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$
5. $\alpha \to (\alpha \vee \neg\alpha)$
6. $\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$
7. $\exists\chi\neg\ \alpha[\chi] \to \neg\forall\chi\ \alpha[\chi]$
8. $\forall\chi\neg\ \alpha[\chi] \to \neg\exists\chi\ \alpha[\chi]$
9. $\neg\exists\chi\ \alpha[\chi] \to \forall\chi\neg\ \alpha[\chi]$

DN aus SAD

$$\dfrac{\alpha \vee \neg\alpha \quad \textcolor{red}{\text{SAD}} \qquad \neg\neg\alpha}{\alpha}\ \text{DS} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ \textcolor{red}{\mathrm{DN_E}}$$

SAD aus DN

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]}{\alpha \vee \neg\alpha}\,\mathrm{I}\vee \qquad [\neg(\alpha \vee \neg\alpha)]}{\bot}\,\mathrm{E}\to}{\neg\alpha}\,\mathrm{E}\to}{\alpha \vee \neg\alpha}\,\mathrm{I}\vee \qquad [\neg(\alpha \vee \neg\alpha)]}{\bot}\,\mathrm{E}\to}{\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)}\,\mathrm{E}\to}{\alpha \vee \neg\alpha}\,\mathrm{DN_E} \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{}{\alpha \vee \neg\alpha}$$

DN aus red.

$$\cfrac{\cfrac{[\neg\alpha] \qquad \neg\neg\alpha}{\bot}\ \mathrm{E}{\rightarrow}}{\alpha}\ \textcolor{red}{\textsf{red.}} \qquad \Longrightarrow \qquad \cfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ \textcolor{red}{\mathrm{DN}_{\mathrm{E}}}$$

Doppelte Negation und indirekter Beweis

Die Schlussregel $\mathrm{I}\neg$ funktioniert in der intuitionitischen Logik genauso wie in der klassischen; man kann sie sich sogar mit $\mathrm{I}\!\rightarrow$ und $\mathrm{Def}\neg$ herleiten:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\alpha \rightarrow \bot}\ \mathrm{I}\!\rightarrow}{\neg\alpha}\ \mathrm{Def}\neg \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\alpha}\ \mathrm{I}\neg$$

red. AUS DN

Die Schlussregel zum indirekten Beweis – red. – existiert in der intuitionitischen Logik *nicht*. Zusätzlich zu I¬ benötigt man nämlich DN:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\alpha]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\alpha \to \bot}\ \mathrm{I}{\to}}{\neg\neg\alpha}\ \mathrm{Def}\neg}{\alpha}\ \mathrm{DN} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\alpha]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\alpha}\ \text{red.}$$

Das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Prädikatenlogik

Es gibt zwei interessante Zusammenhänge zwischen klassischer und intuitionistischer Logik, den Gerhard Gentzen bereits 1933 bewiesen hat:

(1) Jeder PL-Beweis einer Formel α, die weder $\vee$ noch $\exists$ noch freie Variablen enthält, lässt sich in einen INT-Beweis derselben Formel umwandeln.

(2) Zu jeder PL-Formel gibt es eine klassisch äquivalente INT-Formel, die dann und nur dann intuitionistisch beweisbar ist, wenn jene klassisch beweisbar ist.

Der Beweis wurde jedoch erst 1974 – Jahrzehnte nach seinem Tod – mit dem Titel „Über Das Verhältnis Zwischen Intuitionistischer Und Klassischer Arithmetik“ veröffentlicht. Er ist nur möglich, weil Allg(INT) $\subset$ Allg(PL).

Bedenken gegen AC – Intuitionist:innen

> A formal system in which $\exists x G x$ is provable, but which provides no method for finding the x in question, is one in which the existential quantifier fails to fulfill its intended function.
>
> — R. L. Goodstein, Existence in Mathematics, 1968

Bedenken gegen AC – Intuitionist:innen

> A formal system in which $\exists x G x$ is provable, but which provides no method for finding the x in question, is one in which the existential quantifier fails to fulfill its intended function.
>
> — R. L. Goodstein, Existence in Mathematics, 1968

Intuitionist:innen lehnen Existenzaussagen ohne Zeugen ab. Sie fordern, dass eine Aussage der Form $\exists \chi\, \alpha[\chi]$ erst dann wahr ist, wenn man eine wahre Einsetzungsinstanz $\alpha[\tau/\chi]$ angeben kann. Genau das aber garantiert das Auswahlaxiom nicht. Intuitionist:innen betreiben deshalb eine andere Art von Mengenlehre ohne das Auswahlaxiom, die sogenannte konstruktive Mengenlehre.

Intuitionismus und das Auswahlaxiom

Für jede beliebige Formel α können wir diese beiden Mengen bilden:

$$U = \{x \in \{0,1\} \mid x = 0 \lor \alpha\} \qquad \text{und} \qquad V = \{x \in \{0,1\} \mid x = 1 \lor \alpha\}$$

Diese Mengen existieren, denn $\{0,1\}$ existiert und U und V sind Mengen, die entstehen, wenn man aus $\{0,1\}$ aussondert. Außerdem sind sie nicht-leer: U hat mindestens 0 als Element, V mindestens 1. Mit dem Satz des ausgeschlossenen Dritten würde gelten:

$$U = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{falls } \alpha \\ \{0\}, & \text{falls } \neg\alpha \end{cases} \qquad V = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{falls } \alpha \\ \{1\}, & \text{falls } \neg\alpha \end{cases}$$

Da in intuitionistischer Logik der SAD nicht gilt, müssen wir auch den Fall betrachten, dass $\nvdash \alpha$ und $\nvdash \neg\alpha$. Hier ist unklar, welche Elemente U bzw. V haben:

$$U = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{falls } \vdash \alpha \\ \{0\}, & \text{falls } \vdash \neg\alpha \\ ???, & \text{falls } \nvdash \alpha,\ \nvdash \neg\alpha \end{cases} \qquad V = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{falls } \vdash \alpha \\ \{1\}, & \text{falls } \vdash \neg\alpha \\ ???, & \text{falls } \nvdash \alpha,\ \nvdash \neg\alpha \end{cases}$$

Zwar gilt das Auswahlaxiom in ZF für endliche Mengen. Die Elemente von U und V sind im Fall, dass $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$, aber nicht eindeutig bestimmbar, also gibt es auch keine Bijektion von ihnen auf eine natürliche Zahl. Aus diesem Grund sind U und V in intuitionistischer Mengenlehre nicht endlich – und das Auswahlaxiom für endliche Mengen garantiert keine Auswahlfunktion.

Intuitionismus und das Auswahlaxiom

Da U und V existieren, existiert nach dem Paarmengenaxiom auch $\{\mathrm{U}, \mathrm{V}\}$. Nehmen wir das Auswahlaxiom an, so existiert für $\{\mathrm{U}, \mathrm{V}\}$ auch eine Auswahlfunktion

$\mathrm{f}\colon \{\mathrm{U}, \mathrm{V}\} \mapsto \bigcup\{\mathrm{U}, \mathrm{V}\}$ mit $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{x}$.

Da $\mathrm{D}(\mathrm{f}) = \{\mathrm{U}, \mathrm{V}\}$, gilt: $\mathrm{f}(\mathrm{U}) \in \mathrm{U} \wedge \mathrm{f}(\mathrm{V}) \in \mathrm{V}$.

Da $\mathrm{D}(\mathrm{f}) = \bigcup\{\mathrm{U}, \mathrm{V}\} = \{0, 1\}$, gilt:

$\mathrm{f}\colon \{\mathrm{U}, \mathrm{V}\} \mapsto \{0, 1\}$ mit $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{x}$.

Funktionen sind so definiert, dass jedes Argument genau einen Wert zugewiesen bekommt. Also kann es nicht passieren, dass ein Argument keinen Wert zugewiesen bekommt. Für jedes beliebige $\mathrm{x} \in \mathrm{D}(\mathrm{f}), \mathrm{y}$ gilt also: $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{y} \vee \mathrm{f}(\mathrm{x}) \neq \mathrm{y}$.

Intuitionismus und das Auswahlaxiom

Wir wissen, dass $f(x) = y \vee f(x) \neq y$. Also muss auch, mit $US : f(V)/y$, gelten, dass $f(U) = f(V) \vee f(U) \neq f(V)$. Betrachten wir nun diese beiden Fälle.

Intuitionismus und das Auswahlaxiom

Wir wissen, dass $f(x) = y \vee f(x) \neq y$. Also muss auch, mit $US : f(V)/y$, gelten, dass $f(U) = f(V) \vee f(U) \neq f(V)$. Betrachten wir nun diese beiden Fälle.

Fall 1: $f(U) = f(V)$
Nehmen wir an, dass $f(U) = f(V)$.
Das ist nur möglich, wenn $U = V = \{0, 1\}$, denn ansonsten ist $U \cap V = \emptyset$.
Aber $U = V = \{0, 1\}$ ist nur möglich, wenn α.
Das heißt: $f(U) = f(V) \rightarrow \alpha$.

Intuitionismus und das Auswahlaxiom

Wir wissen, dass $f(x) = y \vee f(x) \neq y$. Also muss auch, mit $\text{US} : f(V)/y$, gelten, dass $f(U) = f(V) \vee f(U) \neq f(V)$. Betrachten wir nun diese beiden Fälle.

Fall 1: $f(U) = f(V)$
Nehmen wir an, dass $f(U) = f(V)$.
Das ist nur möglich, wenn $U = V = \{0, 1\}$, denn ansonsten ist $U \cap V = \emptyset$.
Aber $U = V = \{0, 1\}$ ist nur möglich, wenn α.
Das heißt: $f(U) = f(V) \to \alpha$.

Fall 2: $f(U) \neq f(V)$
Nehmen wir nun an, α sei der Fall.
Dann wäre $U = V = \{0, 1\}$.
Also wäre auch $f(U) = f(V)$.
Also gilt: $\alpha \to f(U) = f(V)$.
Und per Kontraposition: $f(U) \neq f(V) \to \neg\alpha$.

Intuitionismus und das Auswahlaxiom

Wir wissen, dass $f(x) = y \vee f(x) \neq y$. Also muss auch, mit $US : f(V)/y$, gelten, dass $f(U) = f(V) \vee f(U) \neq f(V)$. Betrachten wir nun diese beiden Fälle.

Fall 1: $f(U) = f(V)$
Nehmen wir an, dass $f(U) = f(V)$.
Das ist nur möglich, wenn $U = V = \{0, 1\}$, denn ansonsten ist $U \cap V = \emptyset$.
Aber $U = V = \{0, 1\}$ ist nur möglich, wenn α.
Das heißt: $f(U) = f(V) \to \alpha$.

Fall 2: $f(U) \neq f(V)$
Nehmen wir nun an, α sei der Fall.
Dann wäre $U = V = \{0, 1\}$.
Also wäre auch $f(U) = f(V)$.
Also gilt: $\alpha \to f(U) = f(V)$.
Und per Kontraposition: $f(U) \neq f(V) \to \neg\alpha$.

Intuitionismus und das Auswahlaxiom

Wir wissen, dass $f(U) = f(V) \vee f(U) \neq f(V)$.
Außerdem haben wir gezeigt, dass
$f(U) = f(V) \to \alpha$ und
$f(U) \neq f(V) \to \neg\alpha$.
Setzen wir ein, erhalten $\alpha \vee \neg\alpha$.
Also impliziert das Auswahlaxiom den SAD in ZF!

Zwar lehnen Intuitionist:innen das Auswahlaxiom ab, weil es die Existenz von Mengen garantiert, die nicht konstruierbar sind. Dennoch nutzt man in der konstruktiven Mengenlehre häufig ein abgeschwächtes Axiom:

Axiom der abzählbaren Auswahl: Jede abzählbare Menge, deren sämtliche Elemente nicht-leer sind, besitzt eine Auswahlfunktion.

Bibliographie

Dummett, M. (2000). *Elements of Intuitionism* (2nd ed). Clarendon Press ; Oxford University Press. (Siehe S. 26).

Gentzen, G. (1974). Über Das Verhältnis Zwischen Intuitionistischer Und Klassischer Arithmetik. *Archive for Mathematical Logic*, *16*(3-4), 119–132. https://doi.org/10.1007/bf02015371 (siehe S. 35)

Goodstein, R. L. (1968). Existence in Mathematics. In A. Heyting (Hrsg.), *Logic and Foundations of Mathematics*. Wolters-Noordhoff. (Siehe S. 36, 37).

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*, *65*(2), 261–281. https://doi.org/10.1007/BF01449999 (siehe S. 4, 5)