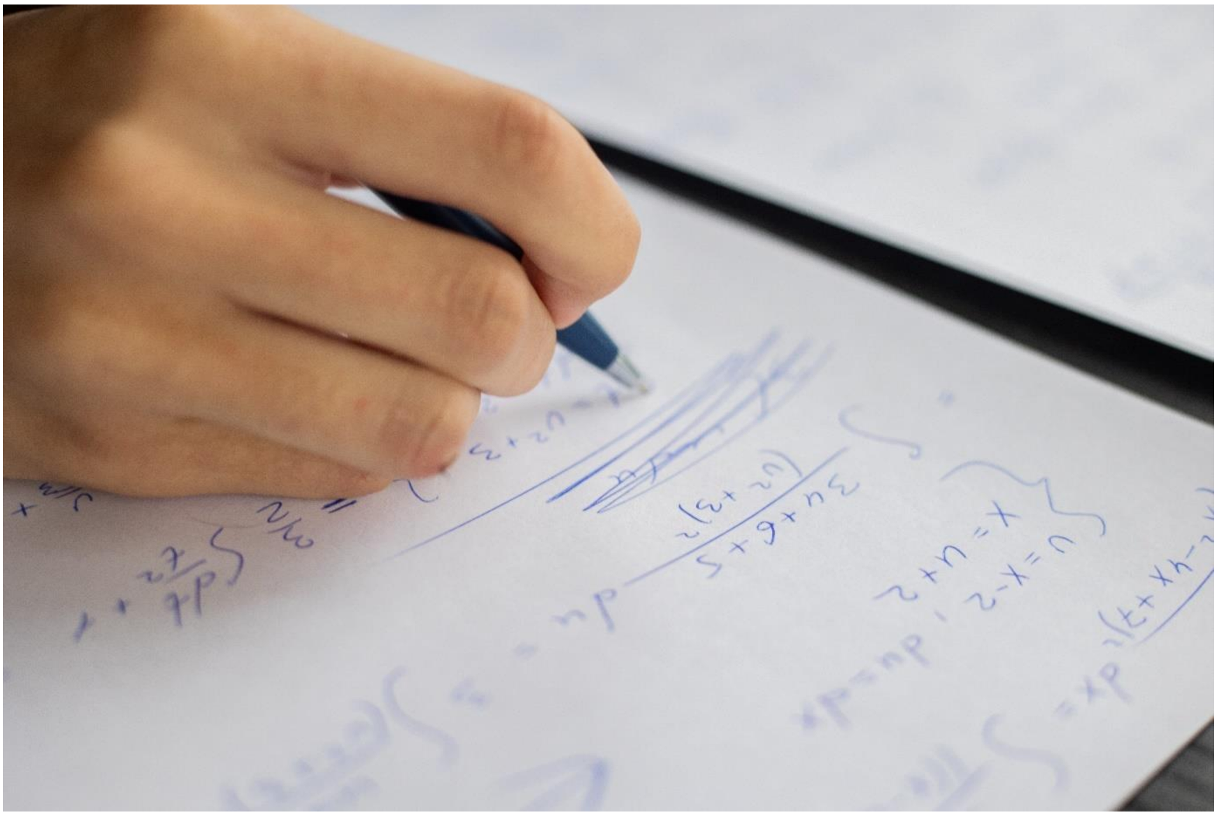
ARITHMETIQUE

2. Division euclidienne et arithmétique des bases - Cours



Elliot LOUVEAU

elliot.louveau@eduservices.org

TABLE DES MATIERES

LA DIVISION EUCLIDIENNE

Avant de parler de numération, de conversion d'une base à une autre et un peu plus loin dans ce chapitre, de congruences/d'arithmétique modulaire, il est nécessaire de redéfinir clairement ce qu'est la division euclidienne.

FORMULE

Effectuer la division euclidienne d'un entier naturel* A (**dividende**) par un entier naturel B (**diviseur**) non nul c'est déterminer les uniques entiers Q (appelé **quotient**) et r (appelé **reste**) tels que :

$$A = B * Q + r \text{ et } 0 \leq r < B$$

* *Les « entiers naturels » sont l'ensemble des nombres sans virgule*

⚠️ *Le reste est toujours inférieur au diviseur, si ce n'est pas le cas c'est que le quotient a été mal calculé et qu'on peut l'augmenter d'au moins 1.*

EXEMPLE :

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 362 par 25 et écrire la division euclidienne en ligne.

<u>En posant la division :</u>

$$\begin{array}{r|l} 362 & 25 \\ \cline{2-2} 112 & 14 \\ 12 & \end{array}$$

12 étant inférieur à 25, c'est le reste. 14 est le quotient.

L'écriture en ligne de la division euclidienne de 362 par 25 est :
$362 = 25 * 14 + 12$

<u>Avec la calculatrice :</u>

Si votre calculatrice ne dispose pas de fonctionnalité permettant de calculer directement la division euclidienne, il faut considérer le quotient comme étant le nombre entier du résultat trouvé, puis il faut chercher le reste en calculant la différence entre le dividende et le produit du diviseur et du quotient.

$362 : 25 = 14{,}48$; je note que le quotient est 14 et je cherche le reste :

Si 14 est le quotient alors :

$362 = 25 * 14 + reste \Leftrightarrow reste = 362 - (25 * 14) = 12$

NUMERATION ET CONVERSION

NUMERATION DES ENTIERS

<u>Numération, définition :</u>

Nommage des nombres ; système qui permet de nommer et d'écrire les nombres.

Les « bases »

Dans la vie de tous les jours, nous comptons **en base 10**; avec les 10 chiffres arabes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 nous écrivons les nombres que nous manipulons. Nous utilisons le « **système décimal** ».

L'ordinateur, plus précisément le microprocesseur de l'ordinateur, lui ne travaille qu'avec deux chiffres 0 et 1. Il utilise le « **système binaire** » ; les calculs se font en **base 2.**

Pour compter en base 2 on utilise que le 0 et le 1, les premiers nombres sont : 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, etc.

Une autre base très utilisée en informatique est la **base 16.** Ce « **système hexadécimal** » utilise les 10 chiffres de 0 à 9 et les lettres de A à F pour représenter 10 jusqu'à 15. L'écriture des couleurs par exemple se fait souvent avec ce système. Il présente l'avantage de simplifier les conversions avec le système binaire. Nous verrons ça par la suite.

Les premiers nombres en bases 16 sont :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 1C, 1E, 1F, 20, 21, 22, ect.

⚠ 10 en base 2 ne représente pas le même nombre que 10 en base 10. Idem pour 10 en base 16. Pour éviter les confusions il faudra utiliser la notation $(n)_p$ pour indiquer que le nombre n est écrit en base p.

$$(10)_{16} = (16)_{10} = (10000)_2$$

Les écritures en bases 2, 10 et 16 s'appellent respectivement les écritures binaires, décimales et hexadécimales. Lorsqu'un nombre est écrit en base 10, on peut simplifier la notation $(\mathrm{x})_{10}$. Par exemple $(21)_{10}$ peut s'écrire simplement 21.

CONVERSIONS

Pour convertir un entier d'une base à l'autre, il est important de comprendre la relation algébrique qui existe entre une base p et l'écriture du nombre dans cette base p. Autrement dit, comprendre comment se décompose un nombre, quelle est la relation entre l'écriture d'un nombre et la base à laquelle il appartient.

Exemple introductif avec la base 10 :

1234, si on le range dans un tableau comme en primaire on obtient :

Millier	Centaine	Dizaine	Unité
10^3	*10^2*	*10^1*	*10^0*
1	2	3	4

On peut dire que $1234 = 1*10^3 + 2*10^2 + 3*10^1 + 4*10^0$

Peu importe la base dans laquelle un nombre est exprimé, le principe est toujours le même. En partant du principe que le chiffre le plus à droite est à la position 0 : en fonction de la position n d'un chiffre a dans un nombre, si ce nombre est écrit en base p ce chiffre « représente » $a * p^n$

Dans notre exemple, le chiffre 2 de 1234 est à la position 2 (4 étant la position 0), il représente donc $2*10^2 = 200$.

Conversion vers la base 10

Propriété :

Quels que soient les nombres entiers $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ compris entre 0 et $p-1$, où p désigne 2, 10, 16, ou n'importe quelle autre base on a :

$$(a_n \dots a_2 a_1 a_0)_p = a_n * p^n + \dots + a_2 * p^2 + a_1 * p^1 + a_0$$

Dans le cas où $p > 10$, on remplace dans l'écriture du membre de droite, tout a_i égal à A, B, C… par sa valeur en base 10.

Pour convertir un nombre de la base p vers la base 10 il suffit d'appliquer la formule et de remplacer les a, les n et les p par les chiffres, les positions et la valeur de la base dans lequel le nombre est exprimé.

Exemples

$(1101)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1*2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$

$(A83)_{16} = 10 * 16^2 + 8 * 16^1 + 3 * 16^0 = 10 * 256 + 128 + 3 = 2691$

$(142)_8 = 1*8^2 + 4*8^1 + 2*8^0 = 98$

Conversion de la base 10 vers n'importe quelle base

Méthode 1

Pour convertir un nombre de la base 10 vers la base p il faut faire en sorte de retrouver l'écriture de ce nombre sous la forme : $a_n * p^n + \cdots + a_2 * p^2 + a_1 * p + a_0$ pour pouvoir en déduire son écriture $(a_n \dots a_2 a_1 a_0)_p$

Pour ce faire, on effectue la division euclidienne du nombre par la plus grande puissance de p qui lui est inférieure ou égale, puis on recommence avec le reste et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il soit nul.

<u>Exemple 1 :</u> Convertir 75 en base 2

<u>1ère étape :</u> Trouver la plus grande puissance de 2 inférieur ou égale à 75.

<u>2ème étape :</u> Faire la division euclidienne de 75 par cette valeur pour trouver le quotient et le reste. Puis noter $75 = quotient * 2^{étape1} + reste$

<u>3ème étape :</u> Répéter l'étape 1 et 2 avec le reste et retravailler l'égalité pour arriver jusqu'à la puissance 0.

Dernière étape : Réécrire le nombre en base 2 en fonction des puissances trouvées.

$2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $2^7 = 128$.

Nous allons donc choisir 2^6 comme point de départ pour décomposer 75.

$75 = 1*2^6 + 11$

Ensuite il faut faire la même chose avec le reste.

- *$11 = 1*2^3 + 3$*

Et ainsi de suite jusqu'à écrire la décomposition de 75 avec toutes les puissances de 2 de 6 à 0.

- *$3 = 1*2^1 + 1$*

⇨ *Donc $75 = 1*2^6 + 0*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$*
J'exprime toutes les valeurs des puissances intermédiaires pour retrouver les chiffres associés.

J'en déduis le nombre converti.

$75 = (1001011)_2$

Exemple 2 : Convertir 2 014 en base 16

1ière étape : Retrouver la plus grande puissance de 16 ≤ 2014

$16^3 = 4096 > 2014$ => Pas bon

$16^2 = 256 < 2014$ OK

2ième étape, trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de 2014 par 256, autrement dit : déterminer combien de fois j'ai 256 dans 2014 et quel est le reste à décomposer.

2014 / 256 = 7,8671… => J'ai donc 7x256 (+ un reste à déterminer)

Reste = 2014 – (7*256) = 222

On peut déjà poser que 2014 = $7*16^2 + 222$

$3^{ième}$ étape : Je décompose le reste en puissance de 16 de la même manière.

$16^2 = 256 > 222$ => pas ok (ce qui est logique car le reste de la division précédente est inférieur à 16^2)

La plus grande puissance de 16 ≤ 222 est donc 1

222/16 = 13,875 => J'ai donc 13*16 dans 222 + un reste

Reste = 222 – (13*16) = 14

14 < 16 donc je ne peux plus redécomposer le reste, j'ai la forme que je souhaitais obtenir à savoir :

$2014 = 7*16^2 + 13 * 16^1 + 14 * 16^0$

Donc 2014 = $(7DE)_{16}$

Méthode 1bis : Avec des tableaux

Similaire à la méthode 1 mais plus visuel : il s'agit de remplir un tableau de conversion :

<u>Exemple avec la base 2 :</u> Convertir 144 en base 2

<u>Rappel :</u> En base deux, pour écrire un nombre il n'y a que 2 chiffres possibles, le 1 et le 0.

Puissance de 2	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Représentation en base 10	128	64	32	16	8	4	2	1
144 en base 2	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

Dans 144 il y a une fois 128 et il reste 16. Je note 1 dans la colonne 2^7 et 1 dans la colonne 2^4 et 0 dans les autres pour obtenir le nombre en base 2.

$144 = (10010000)_2$

<u>Exemple avec la base 8 :</u> Convertir 426 en base 8

<u>Rappel :</u> en base 8, il y a 8 chiffres possibles, les chiffres de 0 à 7.

Puissance de 8	8^3	8^2	8^1	8^0
Représentation en base 10	512	64	8	1
144 en base 8	**0**	**6**	**5**	**2**

Dans 424 il y a 6 fois 64 et il reste 42 (5*8 + 2). Je note 6 dans la colonne 8^2, 5 dans la colonne 8^1 et 2 dans la colonne 8^0 pour obtenir le nombre en base 8. Les premiers zéros sont inutiles.

$426 = (652)_8$

<u>Exemple avec la base 16 :</u> Convertir 226 en base 16

<u>Rappel :</u> en base 16 il y a 16 « chiffres » possible, de 0 à 9 puis pour les 6 autres on utilise les premières lettres de l'alphabet de A à F, A valant 10 en base 10 et F valant 15.

Puissance de 8	16^2	16^1	16^0
Représentation en base 10	256	16	1
226 en base 16	**0**	**E**	**2**

226 / 16 = 14,125

*Reste de la division euclidienne = 226 – 14*16 = 2*

Dans 226 il y a 14 fois 16 et il reste 2. En base 16, 14 est représenté par la lettre E. Je note E dans la colonne 16^1 et 2 dans la colonne 16^0.

$226 = (E2)_{16}$

Méthode 2 : Divisions euclidiennes successives

On effectue la division euclidienne du nombre par *p* puis on recommence avec le quotient et ainsi de suite jusqu'à obtenir 0. À la fin, on inverse l'ordre des restes obtenus.

<u>Exemple avec la base 10 :</u>

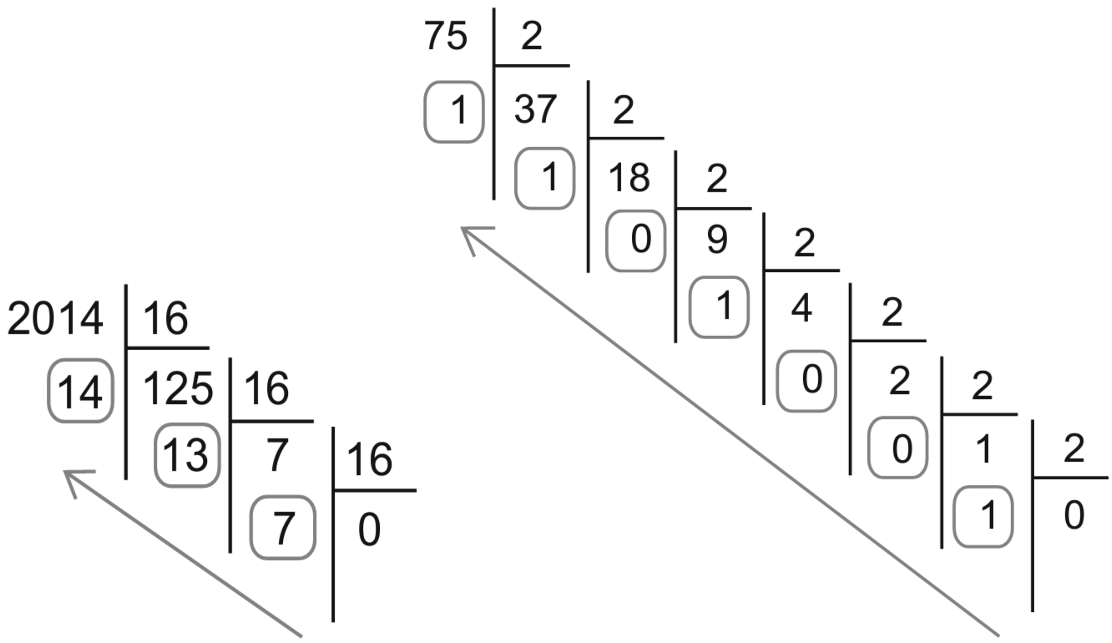
1234 / 10, quotient = 123, reste 4

123 / 10, quotient = 12, reste 3

12 / 10, quotient = 1, reste 2

1 / 10, quotient = 0, reste 1

<u>Exemple avec la base 2 et la base 16 :</u>



On retrouve 2 014 = $(7DE)_{16}$ et 75 = $(1001011)_2$

Conversion entre la base 2 et la base 16

On peut passer directement de la base 2 à la base 16, et inversement, en utilisant le tableau de conversion suivant :

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Exemples :

- *Convertir $(3D)_{16}$ en base 2 :*

Il suffit de remplacer les valeurs de base 16 par leurs valeurs en base 2 et de supprimer les 0 inutiles

$(3D)_{16} = (00111101)_2 = (111101)_2$

- *Convertir $(101011)_2$ en base 16 :*

Cette fois-ci il faut rajouter les 0 inutiles pour obtenir des « paquets » de quatre chiffres puis de les remplacer par leurs équivalents en base 16.

$(101011)_2 = (00101011)_2 = (2B)_{16}$

NUMERATION DES REELS

Nous avons vu la logique qui existe dans l'écriture d'un nombre entier dans n'importe quelle base. Nous allons voir maintenant ce qui se cache derrière l'écriture d'un nombre réel (avec virgule).

Pour comprendre, prenons l'exemple de deux réels en base 10 :

$(53{,}627)_{10} = \cdots$

$53 = 5 * 10^1 + 3 * 10^0$

$0{,}627 = \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{100} = 6 * 10^{-1} + 2 * 10^{-2} + 7 * 10^{-3}$

Donc

$53{,}627 = 5 * 10^1 + 3 * 10^0 + 6 * 10^{-1} + 2 * 10^{-2} + 7 * 10^{-3}$

$(456{,}905)_{10} = 4 * 10^2 + 5 * 10 + 6 + \frac{9}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{5}{10^3}$

Propriété

Quels que soient les nombres entiers $a_0, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ compris entre 0 et $p - 1$, où p désigne 2, 10, 16, ou n'importe quelle autre base on a :

$$(a_n \ldots a_0, b_1 \ldots b_m)_p = a_n * p^n + \cdots + a_2 * p^2 + a_1 * p + a_0 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m}{p^m}$$

Dans le cas où $p > 10$, on remplace dans l'écriture du membre de droite, tout a_i égal à A, B, C… par sa valeur en base 10.

Exemples

$(101{,}11)_2$ en base 10 :
$(101{,}11)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 + 1/2 + 1/2^2 = 5{,}75$

$(B,3C)_{16}$ en base 10 :

$(B,3C)_{16} = 11 + 3/16 + 12/16^2 = 11,234375$

7,25 en base 2 :

$7,25 = 7 + 0,25 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 + 1/2^2 = (111,01)_2$

12,875 en base 2 :

En utilisant la méthode par division successive :

12 = 2*6 + 0

6 = 2*3 + 0

3 = 2*1 + 1

1 = 2*0 + 1

Le nombre 12 s'écrit donc $(1100)_2$. Pour déterminer la valeur de « ,875 » ; au lieu de faire des divisions nous allons faire des multiplications par 2 (par 16 si nous étions en base 16), garder la valeur avant la virgule et faire la même chose avec les nombres après la virgule jusqu'à trouver un nombre sans virgule.

0,875 * 2 = 1,750

0,750 * 2 = 1,5

0,5 * 2 = 1

$0,875 = (0,111)_2$

Donc $12,875 = (1100,111)_2$

PRECISION ET ARRONDI

Exemple introductif

<u>Considérons le nombre N = 432,615 :</u>

- *L'arrondi à 10 près de N est 430 (car ce nombre est plus proche de N que 440).*
- *L'arrondi à 1 près de N est 433 (car ce nombre est plus proche de N que 432).*
- *L'arrondi à 0,1 près de N est 432,6 (car ce nombre est plus proche de N que 432,7).*
- *L'arrondi à 0,01 près de N est 432,62 (ce nombre est aussi plus proche de N que 432,61 et dans un tel cas on prend le plus grand).*

Cette notion d'arrondi se généralise aux nombres réels écrits dans n'importe quelle base *p* : l'arrondi d'un nombre réel *x* à une certaine précision est le nombre le plus proche de *x* tel que tous les chiffres allant au-delà de cette précision soient nuls.

Par convention, lorsqu'il existe deux nombres possibles, l'arrondi est alors le plus grand.

La technique

La technique consiste à déterminer **quelle est la valeur haute et la valeur basse** possible pour l'arrondi recherché. Puis de « calculer » **quelle est la valeur la plus proche du nombre.**

3 types de bases possibles :

Les bases « paires » type la base 10, 8, 16… :

Il suffit de déterminer le chiffre « base/2 » puis d'observer le chiffre après l'arrondi souhaité pour savoir s'il faut choisir la valeur basse ou la valeur haute.

<u>Exemple avec la base 8 :</u>

Le chiffre « base/2 » est 4.

- *L'arrondi à $(100)_8$ près de 5324 est 5300 car le chiffre 2 est inférieur à 4.*
- *L'arrondi à $(10)_8$ près de $(5324)_8$ est 5330 car par convention, si on est pile à la moitié, on arrondi à la valeur supérieur.*

Exemple avec la base 16 :

Le chiffre « base/2 » est 8.

- *L'arrondi à $(10)_{16}$ de $(AB3)_{16}$ est $(AB0)_{16}$*
- *L'arrondi à $(100)_{16}$ de $(AB3)_{16}$ est $(B00)_{16}$*
- *L'arrondi à $(100)_{16}$ près de $(B82A,7AB)_{16}$ est $(B800)_{16}$*
- *L'arrondi à $(0,1)_{16}$ près de $(B82A,7AB)_{16}$ est $(B82A,8)_{16}$*

Les bases « impaires » type la base 3, 7, 11… :

En calculant le nombre « base/2 » on obtiendra forcément un nombre « ,5 » ; Si le chiffre après l'arrondi souhaité est égal ou inférieur au nombre entier de « base/2 », on prend l'arrondi inférieur, s'il est supérieur, on prend l'arrondi supérieur.

Exemple avec la base 7 :

Base/2 = 3,5 ;

- *L'arrondi de $(543)_7$ à $(10)_7$ près est 540*
- *L'arrondi à $(100)_7$ est $(600)_7$*

Exemple avec la base 3 :

Base/2 = 1,5 ;

- *L'arrondi de $(112)_3$ à $(10)_3$ près est 120*
- *L'arrondi à $(100)_3$ est $(100)_3$*

La base 2 :

Cette fois-ci il n'y a pas de valeur possible pour « base/2 » ; il va falloir réfléchir à « suis-je plus près de la valeur haute ou de la valeur basse » en déterminant l'écart qui me sépare de chacune de ces valeurs.

Exemple : Considérons le nombre N = $(101,10011)_2$

- *Cherchons l'arrondi à $(10)_2$ près de N :*
  - *Valeur haute : $(110)_2$,*
  - *Valeur basse : $(100)_2$*

  Rappel :

  - *Pour passer de $(101)_2$ à $(110)_2$ il faut ajouter 1.*
  - *Pour passer de 101 à 100 il faut retirer 1.*

  Étant donné qu'il y a des valeurs après la virgule, il y a un peu moins de 1 d'écart entre $(101,10011)_2$ et $(110)_2$, alors qu'il y a un peu plus de 1 d'écart entre $(101,10011)_2$ et $(100)_2$.

- *Cherchons l'arrondi à $(0,1)_2$ près de N :*
  - *Valeur haute : $(110,0)_2$*
  - *Valeur basse : $(101,1)_2$*

  Cette fois-ci la valeur la plus proche de N est $(101,1)_2$. Il suffit de retirer trois fois $(0,0001)_2$ à N pour retomber sur $(101,1)_2$ alors qu'il faut ajouter plus de trois fois $(0,0001)_2$ pour arriver à $(110,0)_2$.

Nous verrons dans la prochaine partie du cours comment déterminer précisément ces écarts en faisant des soustractions de nombres binaires, mais ce raisonnement est suffisant pour déterminer les arrondis.

OPERATIONS ELEMENTAIRES

En base 2, 16 ou dans n'importe quelle base, on pose les opérations de la même manière qu'en base 10.

L'ADDITION :

Le point clé à comprendre c'est que lorsque l'on atteint la valeur de la base en additionnant plusieurs chiffres d'une même colonne, on ajoute une retenue et on note l'unité.

Exemples :

En base 10 : 197 + 18 =

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & 1 & 9 & 7 \\ + & & 1 & 8 \\ & 2 & 1 & 5 \end{array}$$

8+7 = 15, la valeur de la base : 10 est dépassée => je note l'unité 5 et je pose une retenue de 1

En base 2 : (101)$_2$ + (1110)$_2$ =

	1			
	1	1	1	0
+		1	0	1
1	0	0	1	1

En base 16 : (B83)$_{16}$ + (9F)$_{16}$ =

	1	1	
	B	8	3
+		9	F
	C	2	2

$(3)_{16} + (F)_{16} = 3 + 15 = 18 = (12)_{16}$ -> J'écris 2 et je pose une retenue de 1

…

En base 8 : (673)$_8$ + (57)$_8$ + (72)$_8$ =

	1	2	1	
		6	7	3
+			5	7
+			7	2
	1	0	4	4

$(3)_8 + (7)_8 + (2)_8 = 12 = (14)_8$ -> j'écris 4 et je pose une retenue de 1

$(1)_8 + (7)_8 + (5)_8 + (7)_8 = 20 = (24)_8$ -> j'écris 4 et je pose une retenue de 2

…

⇨ *Pour plus d'exemples et d'explications :* *https://www.youtube.com/watch?v=RZDbzDhNg68*

LA SOUSTRACTION

Le point clé à comprendre c'est la valeur de la retenue : en base 10 la retenue vaut 10, en base 16 la retenue vaut 16, en base 2 elle vaut 2, en base 8 elle vaut 8 etc.

Lorsque l'on doit poser une retenue (quand le chiffre du haut est plus petit que le chiffre du bas), on doit répercuter cette retenue sur la colonne suivante en ajoutant 1 à la valeur du bas de la colonne suivante.

Exemples :

En base 10 : 31 – 17

$$\begin{array}{ccc} & & +10 \\ & 3 & 1 \\ - & 1+1 & 7 \\ & 1 & 4 \end{array}$$

Comme $1-7$ donne un nombre négatif, j'ajoute une retenue au-dessus de 1 (qui vaut 10) que je répercute sur la colonne de droite pour calculer $11-7=4$ puis $3-2=1$

En base 16 : $(5A1)_{16}$ – $(BA)_{16}$ =

$$\begin{array}{cccc} & & +16 & +16 \\ & 5 & A & 1 \\ - & +1 & \mathrm{B}+1 & \mathrm{A} \\ & 4 & \mathrm{E} & 7 \end{array}$$

Comme $(1)_{16}-(\mathrm{A})_{16}$ donne un nombre négatif, j'ajoute une retenue au-dessus de 1 (qui vaut 16) que je répercute sur la colonne de droite pour calculer
$17-10=7$

Ensuite on a encore le cas où $(\mathrm{A})_{16}$ est plus petit que $(\mathrm{B})_{16}+(1)_{16}$ donc j'ajoute une retenue au-dessus de A, ce qui donne le calcul en base 10 :

$(16+10)-12=14=(\mathrm{E})_{16}$

⚠️ *On peut faire les calculs en ramenant les valeurs en base 10 mais il faut noter les résultats en base 16.*

En base 2 : $(10110)_2$ – $(111)_2$ =

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & +2 & +2 & +2 & +2 \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
- & +1 & +1 & 1+1 & 1+1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

⇨ *Pour plus d’exemples et d’explications :* *https://www.youtube.com/watch?v=HvKHSVAeQEA*

LA MULTIPLICATION

Pour la multiplication, peu importe la base la méthode est la même, pour simplifier les calculs on convertira en base 10 chaque opération dans un coin de notre brouillon ou dans notre tête, et on ramènera les résultats en base voulue pour déterminer les valeurs à noter et les retenus.

Exemples :

Base 10 (pour rappel) : 53*17 =

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \cancel{2} \\
 & & 5 & 3 & \\
x & & 1 & 7 & \\
 & 3+1 & 7 & 1 & \\
+ & 5 & 3 & . & \\
 & 9 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$7 * 3 = 21$, je note 1 et je retiens 2 puis $7 * 5 = 35$ + la retenue de 2 = 37, je note 37 car je n’ai plus de multiplication à faire.

Je décale d’un cran à la ligne suivante et je calcule $1 * 3$ puis $1 * 5$ que je note, et je fais l’addition pour trouver 911

Base 16 : $(F3)_{16} \times (2A)_{16}$ =

					~~1~~
			F	3	
x			2	A	
	+1	9	7	E	
+	1	E	6	.	
	2	7	D	E	

$(A)_{16} * (3)_{16} = 10 * 3 = 30 = (1E)_{16}$ Je note donc E et je retiens 1. $(A)_{16} * (F)_{16} = 10 * 15 = 150 = (96)_{16}$, $(96)_{16} + la\ retenue\ de\ 1 = (97)_{16}$ je note donc 97 à la suite du E, puis je décale et je fais les calculs avec 2*3 et 2*F avant de faire l'addition…

<u>Base 8</u> : $(3,25)_8$ * $(2,5)_8$ =

⚠ Peu importe la base, lorsque l'on multiplie deux nombres dont au moins un a des chiffres après la virgule. On doit faire le calcul sans se soucier de la virgule, puis poser la virgule sur le résultat.

Le résultat a autant de chiffre après la virgule que la somme des chiffres après la virgule dans les nombres originaux.

					~~3~~
		3,	2	5	~~1~~
x			2,	5	~~1~~
	2	0	5	1	
+	6	5	2	.	
1	0,	5	7	1	

$5 * 5 = 25 = (31)_8$ Je note 1 et je retiens 3, $5 * 2 = 10$, je compte la retenue précédente de 3 qui font $13 = (15)_8$; je note 5 et je retiens 1. $5 * 3 = 15 +$ la retenue de 1 qui fait $16 = (20)_8$ je note 20 car je n'ai plus rien à multiplier après.

Je décale d'un cran pour les calculs suivant avec 2, puis je fais l'addition. Enfin je positionne la virgule pour avoir 2+1 chiffres après la virgule.

⇨ *Pour plus d'exemples et d'explications : https://www.youtube.com/watch?v=MHcuBOqI2-Q*

LA DIVISION

Ici on va poser la division comme avec la base 10 en utilisant la division euclidienne. On choisit un groupe de chiffre dans le nombre à diviser en partant du chiffre le plus à droite dans lequel on sait repérer qu'il y a x fois le diviseur. On note ce chiffre, on fait la soustraction avec le groupe choisit pour obtenir le reste et on « descend » la valeur suivante. On se demande alors « combien de fois j'ai mon diviseur dans ce nombre », on note le résultat puis on descend le chiffre suivant jusqu'à n'avoir plus aucun chiffre à descendre.

Exemples :

Base 10 : 362 par 25

362	25
112	14
12	

Je choisis de prendre 36, je sais que dans 36 j'ai 1 fois 25, je note 1 et je calcule 36-25=11, je note 11 sous 36 et je descends le 2. Dans 112 il y a 4 fois 25, je note donc 4 dans le quotient, je fais 112 – 4x100 = 12, il me reste donc 12.

Base 2 :

$(110)_2 \div (11)_2 =$

$$
\begin{array}{rrr|rr}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{4-5}
-\,1 & 1 & & 1 & 0 \\ \cline{1-2}
 & 0 & 0 & & \\
- & 0 & 0 & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

On sélectionne les deux premiers chiffres de 110. Dans $(11)_2$ on a une fois $(11)_2$ et il reste 0. On pose alors 1 au quotient. On abaisse ensuite le 0 de 110. On obtient 00. Dans $(00)_2$ on a zéro fois $(11)_2$ et il reste 0. On pose 0 au quotient, ce qui termine la division.

Base 16 : $(2B9)_{16}$ par $(1A)_{16}$

En base 16 ou dans d’autres bases, ce n’est pas toujours évident de savoir combien de fois j’ai le diviseur dans le dividende. Le plus simple est de convertir en base 10 dans un premier temps.

Dans notre exemple, on sait que $(2B)_{16}$ est supérieur à $(1A)_{16}$ donc on va partir sur ça pour commencer.

$(2B)_{16} = 2*16 + 11 = 43$

$(1A)_{16} = 16 + 10 = 26$

J’ai donc 1 fois $(1A)_{16}$ dans $(2B)_{16}$ et il me reste $(2B)_{16} - 1*(1A)_{16}$

$$
\begin{array}{rcc}
 & 2 & B \\
- & 1 & A \\
 & 1 & 1
\end{array}
$$

(On peut aussi calculer en base 10 et convertir le résultat en base 16 ;
$43 - 26 = 17 = (11)_{16}$)

Je descends ensuite le 9 pour calculer la suite de mon quotient

$$
\begin{array}{r|l}
2B9 & 1A \\ \cline{2-2}
119 & 1\ldots \\
\ldots &
\end{array}
$$

Pareil, je converti en base 10 pour savoir combien de fois j'ai $(1A)_{16}$ dans $(119)_{16}$

$(119)_{16} = 1*16^2 + 16 + 9 = 256 + 16 + 9 = 281$

$(1A)_{16} = 26$

Dans $281 = 10*26 + 21 = (A)_{16}*(1A)_{16} + (15)_{16}$

Je note donc A à la suite du quotient et il me reste $21 = (15)_{16}$

Ce qui donne :

$$\begin{array}{r|l} 2B9 & 1A \\ \cline{2-2} 119 & 1A \\ 15 & \end{array}$$

- ⇨ *Pour plus d'exemples et d'explications :* [*https://www.youtube.com/watch?v=QRRx0geq0Gk*](https://www.youtube.com/watch?v=QRRx0geq0Gk)