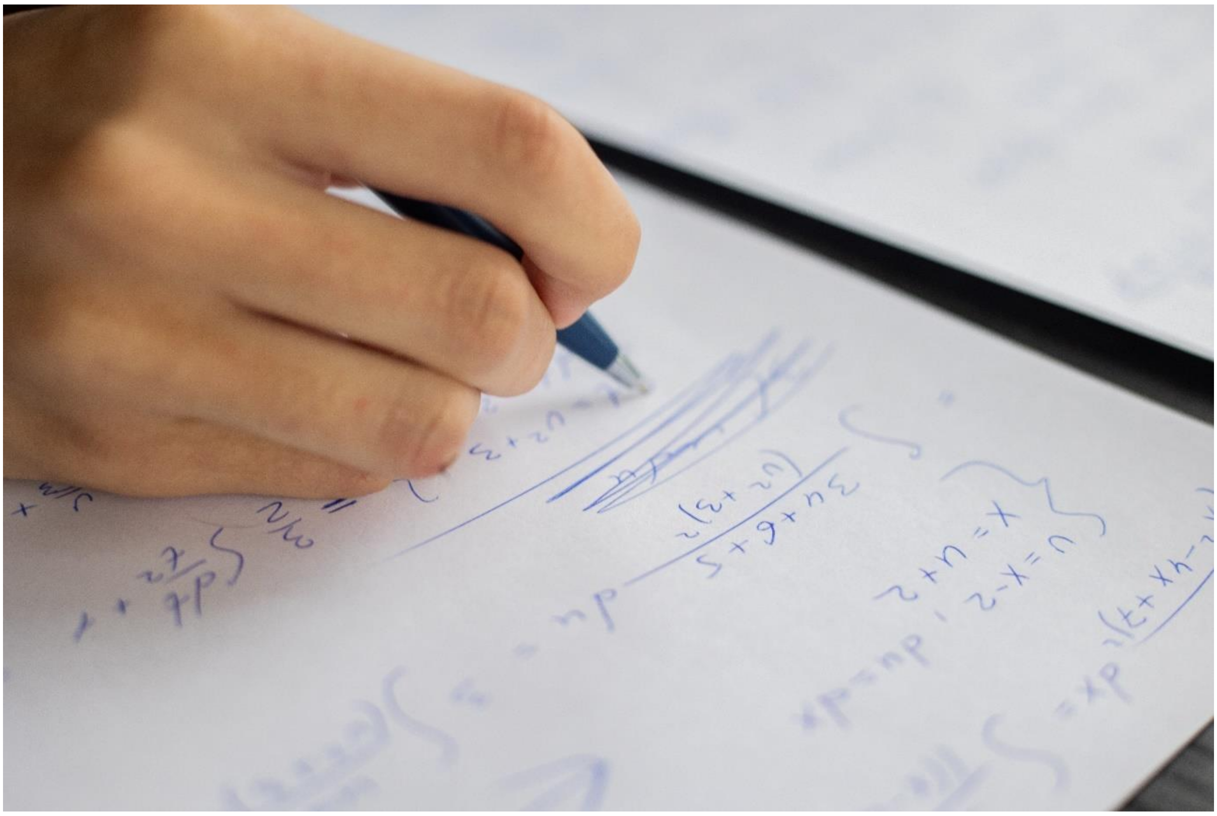
ARITHMETIQUE

1. Équation du premier degré - Cours



Elliot LOUVEAU

elliot.louveau@eduservices.org

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

PROGRAMME DE L'ANNEE :

https://sherpas.com/blog/programme-bts-sio/

DEFINITION « ARITHMETIQUE » :

1. Science qui a pour objet **l'étude de la formation des nombres**, de leurs propriétés et des rapports qui existent entre eux (**théorie des opérations** ; les quatre opérations de l'arithmétique : addition, soustraction, multiplication, division)
2. Art de calculer, d'effectuer des opérations[1]

OBJECTIFS DU COURS

L'objectif de ce premier chapitre est de vous présenter et de vous apprendre à maîtriser les principales notions arithmétiques utiles à l'informatique, notamment l'arithmétique modulaire. Nous allons aborder la conversion et les calculs élémentaires dans différentes bases. Puis, pour introduire l'arithmétique modulaire nous parlerons de « la divisibilité des entiers », nombres premiers.

---

[1] https://www.lalanguefrancaise.com/dictionnaire/definition/arithmetique

Pour commencer, nous allons voir quelques rappels sur des principes de bases en mathématiques qui nous serons utile pour la suite : les équations du premier degré et la division euclidienne.

EQUATIONS DU PREMIER DEGRE

DEFINITIONS ET VOCABULAIRE

- *Une **équation** est une **égalité** qui comporte **un ou plusieurs nombres inconnus.***
- *Une équation est composée de **2 membres** situés de part et d'autre du signe =.*
- *L'expression devant le signe = est appelée 1er membre, celle après est appelée 2nd membre.*
- *Chaque membre est composé d'un ou plusieurs « **termes** »*
    - *Si un terme contient l'inconnue x, on l'appelle « **terme en x** »*

Exemple : $5x - 1 = 9$

- *Le premier membre est constitué des termes $5x$ et -1,*
- *Le deuxième membre ne contient qu'un seul terme : $+9$*
- *Le terme en x est $5x$*

Une équation est une égalité que l'on peut / doit manipuler pour déduire la ou les inconnues. Nous allons choisir de réaliser des opérations qui nous permettront d'isoler le ou les termes en x. Pour conserver l'égalité il faudra réaliser les mêmes opérations sur les deux membres en même temps. Idem pour les inéquations.

- ***Transposer un terme**, c'est le faire changer de membre.*
    - *Lorsque l'on transpose un terme + / - : il change de signe.*
    - *Lorsque l'on transpose un multiplicateur : il devient diviseur.*
    - *Lorsque l'on transpose un diviseur : il devient multiplicateur.*

Exemples :

- $5x - 1 = 9$

⇔ $5x = 9 + 1 = 10$

- $2x = 9$

⇔ $x = \frac{9}{2}$

- $\frac{x}{3} = 4$

⇔ $x = 4 * 3 = 12$

- ***Réduire une équation** c'est, dans chaque membre, opérer les termes en x entre-eux et les autres termes entre-eux.*

Exemples :

- $8x - 3x + 3 - 7 = 2x + 4x + 10$

⇔ $5x - 4 = 6x + 10 \ldots$

- $5x + \frac{1}{3}x = 48$

$\Leftrightarrow \frac{15}{3}x + \frac{1}{3}x = 48$

$\Leftrightarrow \frac{16}{3}x = 48\ldots$

- ***Développer un terme*** *c'est utiliser « la distributivité simple » ou les « identités remarquables » pour faire disparaître les parenthèses :*
  - ***Distributivité simple :***
    - $a(b + c) = (a * b) + (a * c)$
  - ***Identités remarquables :***
    - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
    - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
    - $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemples :

- $2(x + 3) = 2x + 6$
- $(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 * 3x * 5 + 5^2 = 9x^2 - 30x + 25$

- ***Factoriser une somme ou une différence*** *c'est la transformer en produit, soit grâce à la distributivité simple (en reconnaissant un facteur commun) soit en utilisant les «* ***identités remarquables*** *».*
  - $50 + 50 * 3x = 50(1 + 3x)$
  - $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
  - $25x^2 + 40x + 16 = (5x + 4)^2$

ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Résolution

Pour résoudre une équation du premier degré, il faut **isoler l'inconnue** en développant, factorisant et/ou réduisant l'égalité.

Rappel :

« Il est possible d'appliquer n'importe quelle opération sur un membre, à partir du moment où l'on réalise la même opération sur l'autre membre. »

➔ *En d'autres termes :*
  - *Il est possible d'ajouter ou de soustraire un même nombre aux deux membres de l'équation.*
  - *Il est possible de multiplier ou diviser les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.*

Résoudre une équation consiste donc à réaliser une **série d'opérations et de transpositions pour arriver à un résultat sous la forme** $x = \cdots$

⚠ *Il est recommandé de vérifier la solution trouvée en remplaçant la valeur trouvée dans les membres de l'équation où un terme en x est présent. Les deux membres de l'équation doivent rester égaux.*

Exemples :

Exemple 1 : Résolvons l'équation $4x + 8 = -(2x + 10)$

⚠ Quand il y a un signe "-" devant une parenthèse, il est possible de retirer les parenthèses à condition de changer le signe de tous les termes entre parenthèse.

$-(2x + 10) = \cdots$

*On peut considérer le – comme étant un -1 **

$-(2x - 10) = -1 * (2x - 10) = -2x - 10$

$4x + 8 = -(2x + 10)$

⇔ $4x + 8 = -2x - 10$

⇔ $6x + 8 = -10$

$\Leftrightarrow 6x = -18$

$\Leftrightarrow x = -\frac{18}{6}$

$\Leftrightarrow x = -3$

Vérification :

- *D'une part :* $4 * (-3) + 8 = -4$
- *D'autre part :* $-2 * (-3) - 10 = -4$

Après avoir trouvé une valeur pour x, l'égalité est bonne. La valeur trouvée pour x est donc bonne.

<u>Exemple 2 :</u> Résolvons l'équation $\frac{-x+3}{3} + \frac{2x-5}{5} = 1$

<u>Méthode :</u> On met les fractions sur le même dénominateur

$\Leftrightarrow \frac{5*(-x+3)}{15} + \frac{3*(2x-5)}{15} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{-5x+15 + 6x - 15}{15} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{15} = 1$

$\Leftrightarrow x = 15$

Vérification :

$\frac{-15+3}{3} + \frac{2*15-5}{5} = -\frac{12}{3} + \frac{25}{5} = -\frac{60}{15} + \frac{75}{15} = \frac{15}{15} = 1$

<u>Exemple 3 :</u> Résolvons l'équation rationnelle $\frac{5}{x+2} = \frac{4}{x}$

On appelle équation rationnelle les équations ou au moins un x se trouve au dénominateur d'une fraction. Dans ces équations, il convient de préciser quelles valeurs de x sont impossible.

Le dénominateur ne peut pas être nul

Si $x \neq -2$ et $x \neq 0$ alors

$\frac{5}{x+2} = \frac{4}{x}$

$\Leftrightarrow$ …

La première étape consiste à « remonter » les x, tant qu'ils sont au dénominateur, impossible de trouver $x = \cdots$

$\Leftrightarrow 5 = \frac{4(x+2)}{x} \Leftrightarrow 5x = 4(x+2)$

$\Leftrightarrow 5x = 4x + 8$

$\Leftrightarrow x = 8$

Vérification :

D'une part : $\frac{5}{8+2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

D'autre part : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

LES EQUATIONS A PRODUIT NUL

Il s'agit d'équation de la forme : $(ax + b)(cx + d) = 0$

Résolution

«Un produit de facteur est nul si l'un au moins des facteurs est nul.»

Pour résoudre une équation à produit nul, il faut chercher pour quelle(s) valeur(s) de x l'un et l'autre des facteurs est nul. Il faut donc chercher deux valeurs de x.

Exemple :

$(3x - 6)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \ldots$

« Un produit de facteur est nul si l'un au moins des facteurs est égal à 0 », donc :

Soit $3x - 6 = 0$ soit $2x + 5 = 0$

D'une part :

$3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow\ 3x = 6$

$\Leftrightarrow\ x = 2$

D'autre part :

$2x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow\ 2x = -5$

$\Leftrightarrow\ x = -\frac{5}{2}$

L'équation a donc deux solutions distinctes : $x = 2$ et $x = -\frac{5}{2}$

TRANSFORMER UN PROBLEME EN EQUATION

5 étapes clés :

1) Comprendre le problème

Avant de commencer à écrire une équation, assurez-vous de bien comprendre le problème. **Identifiez les quantités inconnues** et **les informations fournies**.

2) Choisir la variable

Désignez une lettre comme variable pour représenter la quantité inconnue qui vous permettra de résoudre le problème.

3) Écrire l'équation

Utilisez les informations fournies dans le problème pour écrire une équation. Il s’agit en pratique de traduire les phrases en français par une relation mathématique équivalente.

4) Résoudre l’équation

On résout l’équation créée avec la méthode habituelle.

5) Conclure

On répond à la question posée dans l’énoncé par une phrase en français.

SYSTEME D'EQUATION DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

Un **système d'équations** est **un ensemble d'équations à plusieurs inconnues** relatives à un même problème.

Propriété

Résoudre un système d'équation du premier degré à deux inconnues revient à chercher tous le couple $(x; y)$ qui vérifie ces deux équations. On appelle ce couple de valeurs « la solution du système d'équation ».

Tous les systèmes d'équations n'ont pas forcément de solution (quand, sur la représentation graphique des équations, les droites ne se croisent jamais), certains autres en ont une infinité (quand, sur la représentation graphique des équations, les droites sont confondues)

Résolution

Pour résoudre un système d'équations de ce type :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

Trois méthodes sont possibles.

La méthode par substitution

Il s'agit d'**isoler une des deux inconnues** dans une des équations et de la **substituer** (la remplacer) **dans l'autre équation**. On pourra facilement trouver la valeur d'une première inconnue et trouver la valeur de la deuxième avec ce résultat.

Dans notre exemple :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Choisissons d'isoler x sur la première équation :

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Remplaçons le x de la deuxième équation

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 4 * (3 - 2y) + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

On détermine ensuite la valeur de y

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 12 - 8y + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ -3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Puis on la remplace dans la première équation pour trouver x.

$$\begin{cases} x = 3 - 2 * 2 = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

La solution du système d'équation est le couple (-1;2)

La méthode par combinaison linéaire :

Il s'agit de multiplier les équations par des nombres choisis de manière à obtenir les coefficients égaux (ou opposés) dans chacune des équations pour une des deux inconnues, puis de soustraire ou additionner membre à membre les deux équations du système afin d'obtenir une équation à une seule inconnue.

On détermine alors la première inconnue en résolvant cette équation puis on détermine la valeur de la deuxième inconnue en reportant la valeur dans l'une des équations de départ.

Avec notre exemple :

$$\begin{cases} x + 2y = 3(1) \\ 4x + 5y = 6(2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

On multiplie (1) par 4

$$\begin{cases} 4x + 8y = 12(1) \\ 4x + 5y = 6(2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

On soustrait (1) et (2) pour annuler les termes en x et isoler y

$[4x + 8y = 12] - [4x + 5y = 6] \Leftrightarrow$

$(4x + 8y) - (4x + 5y) = 12 - 6$

$4x + 8y - 4x - 5y = 6$

$3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$

On remplace y dans notre équation (1) de départ pour trouver x

$x + 2y = 3$

$\Leftrightarrow x + 2 * 2 = 3$

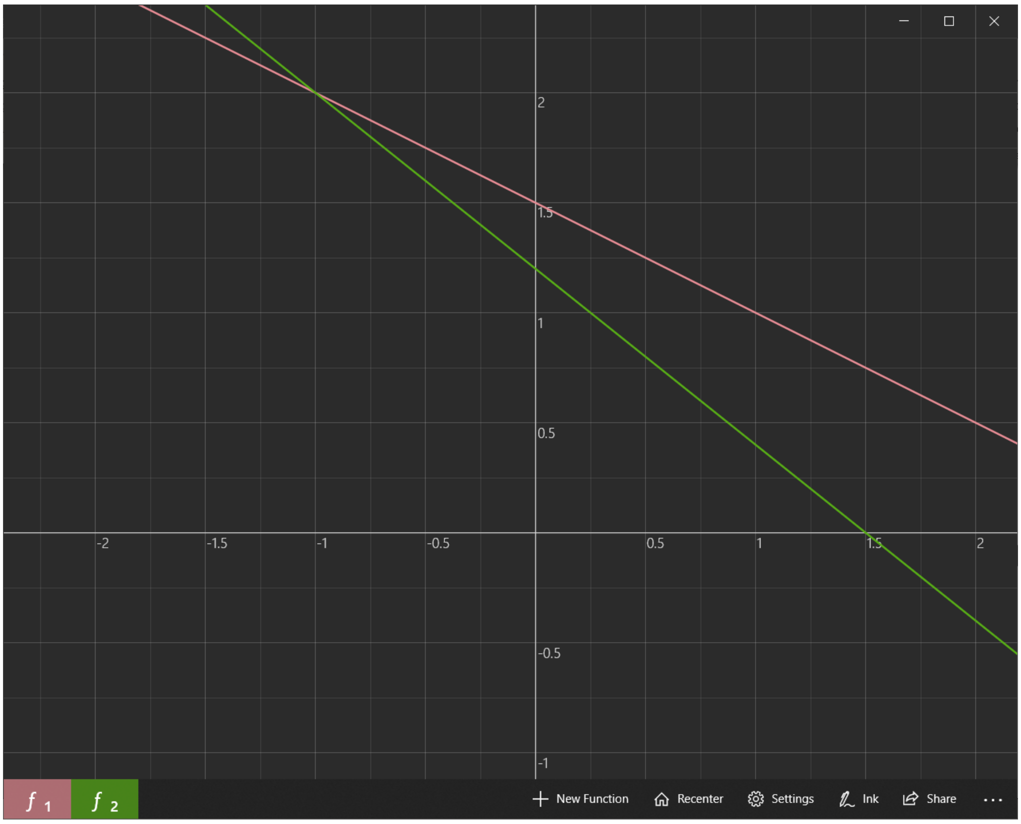
$\Leftrightarrow x = -1$

La solution du système d'équation est le couple (-1;2)

La méthode par résolution graphique :

Le principe est de transformer les deux équations de sorte à isoler y pour pouvoir modéliser deux droites représentant y en fonction de x. La solution du système d'équation est la coordonnée du point d'intersection de ces deux droites.

Avec notre exemple : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (3-x)/2 \\ y = (6-4x)/5 \end{cases}$



Les deux droites se croisent bien en (-1;2)