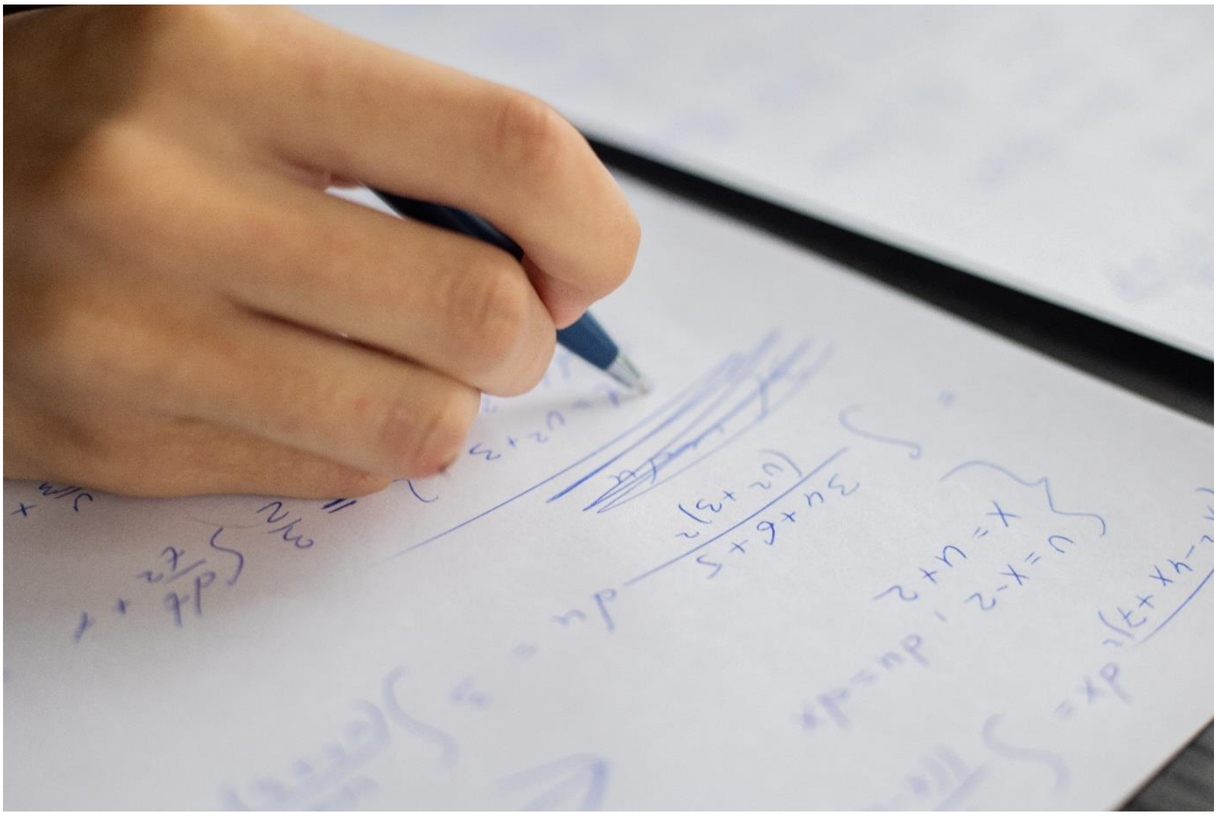
LOGIQUE

Cours



Elliot LOUVEAU

elliot.louveau@eduservices.org

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

OBJECTIFS DU COURS

- *Comprendre ce qu'est une proposition,*
- *Savoir manipuler les connecteurs logiques,*
- *Savoir réaliser des calculs booléens,*
- *Savoir transformer des énoncés en expressions booléennes,*
- *Savoir simplifier et traduire des expressions booléennes*

PROPOSITIONS ET CONNECTEURS LOGIQUES

PROPOSITIONS

Définitions

Une proposition est un énoncé ayant un sens et dont on peut dire avec **certitude** qu'il est vrai ou faux.

Toute proposition est soit vraie soit fausse. Cette convention permet d'associer à chaque proposition une « **valeur de vérité** ».

- La valeur de vérité d'une proposition vraie est notée VRAI, V, 1 ou True

- La valeur de vérité d'une proposition fausse est notée FAUX, F, 0 ou False

Exemples

- *La ville d'Angers si situe dans le Maine et Loire*

- *Est une proposition avec une valeur de vérité VRAI.*

- *Demain il fera beau.*

    - *N'est pas une proposition car on ne peut pas affirmer avec certitude que ce sera le cas.*
- $8 < 10$

  - *Est une proposition avec une valeur de vérité VRAI*
- *$3 + 5 = 2$*

    - *Est une proposition avec une valeur de vérité FAUX*
- *Vous allez tous obtenir votre BTS*

    - *N’est malheureusement pas une proposition, impossible de savoir si cet énoncé est vrai ou faux.*
- *$i < 10$*

- *Est une proposition dès lors que i est une variable qui possède une valeur numérique, autrement ce n'est pas une proposition.*

Les propositions sont utilisées dans les structures conditionnelles et dans les boucles en algorithmie, en fonction de leur valeur de vérité on programmera d'effectuer telle ou telle instruction.

LES CONNECTEURS LOGIQUES / CALCUL DES PROPOSITIONS

Les connecteurs logiques permettent de construire une nouvelle proposition à partir de plusieurs propositions.

La valeur de vérité de cette nouvelle proposition dépendra des valeurs de vérités des propositions initiales et des connecteurs logiques utilisées. On la calculera en utilisant une « **table de vérité** »

Il existe 5 types de connecteurs logiques :

- *La négation,*
- *La conjonction (le « ET »)*
- *La disjonction (le « OU »),*
- *L'équivalence*
- *L'implication*

À savoir : On appelle **tautologie** une proposition qui est toujours vraie quelques soit les valeurs de vérité des propositions qui la composent

La négation

La négation d'une proposition P que l'on note $non(P)$ ou $\bar{P}$ ou $\neg P$ est définie par la table de vérité suivante :

P	**non(p)**
VRAI	FAUX
FAUX	VRAI

Exemples

- *Soit P la proposition :* $8 < 5$ *; non(P) sera alors* $8 \geq 5$
  - *La valeur de vérité de P est FAUX, non(P) est VRAI*
- *Soit P la proposition* $5 + 2 = 7$ *; non(P) sera* $5 + 2 \neq 7$
  - *P est VRAI, non(P) est FAUX*

Pour infos

La négation d'une négation aura la valeur de vérité de la proposition initiale.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{\neg P}$	$\boldsymbol{\neg(\neg P)}$
VRAI	FAUX	VRAI
FAUX	VRAI	FAUX

La conjonction / le « ET »

Si P et Q sont deux propositions, la proposition noté « P et Q » ou « $P \wedge Q$ » est définie par la table de vérité suivante :

P	**Q**	**P ∧ Q**
VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	FAUX
FAUX	FAUX	FAUX

« P et Q » n’est vraie que si P et Q sont vraies.

Exemples

- *Valeur de vérité de la proposition «(12 % 3 == 3) ET (3 + 1 == 4)» ?*

    - *FAUX car 12 % 3 == 3 est FAUX.*
- *Valeur de vérité de « 3<5 ET 8>2 » ?*
    - *VRAI car les deux propositions sont vraies.*
- *Valeur de vérité de « (3+4=5) ET (2-5=7) » ?*
    - *FAUX car les deux propositions sont fausses.*

La disjonction / le « OU »

Si P et Q sont deux propositions, la proposition noté « P ou Q » ou « P ∨ Q » est définie par la table de vérité suivante :

P	**Q**	**P ∨ Q**
VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	VRAI
FAUX	VRAI	VRAI
FAUX	FAUX	FAUX

« P ou Q » est vraie dès que P ou Q est vraie.

Exemples

- *Valeur de vérité de la proposition «(12 % 3 == 3) OU (3 + 1 == 4)» ?*
    - *VRAI car 12 % 3 == 3 est FAUX mais 3 + 1 == 4 est VRAI.*
- *Valeur de vérité de « 3<5 OU 8>2 » ?*
    - *VRAI car les deux propositions sont vraies.*
- *Valeur de vérité de « (3+4=5) OU (2-5=7) » ?*
    - *FAUX car les deux propositions sont fausses.*

L'équivalence

Si P et Q sont deux propositions, la proposition notée « P ⇔ Q » (P équivaut à Q) est définie par la table de vérité suivante :

P	**Q**	**P ⇔ Q**
VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	FAUX
FAUX	FAUX	VRAI

Deux propositions ne sont équivalentes que si elles ont la même valeur de vérité.

Exemples

- *Valeur de vérité de la proposition «(12 % 3 == 3) ⇔ (3 + 1 == 4)» ?*
    - *FAUX car 12 % 3 == 3 est FAUX et 3 + 1 == 4 est VRAI.*
- *Valeur de vérité de « 3<5 ⇔ 8>2 » ?*
    - *VRAI car les deux propositions sont vraies.*
- *Valeur de vérité de « (3+4=5) ⇔ (2-5=7) » ?*
    - *VRAI car les deux propositions sont fausses.*

L’implication

Si P et Q sont deux propositions, la proposition notée « $P \Rightarrow Q$ » (P implique Q) est définie par la table de vérité suivante :

P	Q	P ⇒ Q
VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	VRAI
FAUX	FAUX	VRAI

On dit que le Faux implique « n'importe quoi » mais que le vrai n'implique que le vrai.

Pour l'implication on peut aussi lire P ⇒ Q comme « Si P alors Q »

Exemples

- *Valeur de vérité de la proposition «(12 % 3 == 3) ⇒ (3 + 1 == 5)» ?*

- *VRAI car 12 % 3 == 3 est FAUX et le faux implique le vrai.*
  Si on lit la proposition comme « Si 12 modulo 3 = 3 alors 3+1=5 », étant donné que 12 modulo 3 n'est pas égal à 3, alors pourquoi pas 3+1=5 ; l'implication est vraie. Le faux implique n'importe quoi…

- *Valeur de vérité de « 3<5 ⇒ 8>2 » ?*

- *VRAI car les deux propositions sont vraies.*

- *Valeur de vérité de « (3+4=5) ⇒ (2-5=7) » ?*

- *VRAI car les deux propositions sont fausses.*

- *Valeur de vérité de « (5+4=9) $\Rightarrow$ (2-5=7) »*

- *FAUX car (2-5=7) est FAUX*

À savoir :

P ⇒ Q ⇔ (non(P) OU Q) est toujours vraie, c'est une tautologie

Démonstration :

P	Q	non(P)	P ⇒ Q	non(P) OU Q	P ⇒ Q ⇔ (non(P) OU Q)
VRAI	VRAI	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI
FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
FAUX	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI

Avec cette propriété, on peut réécrire des propositions d'implications sans implications.

Exemple :

Écrire sans implication la proposition suivante : $x < 1 \Rightarrow \mathrm{y} = 3$

Soit P : $x < 1$ et Q : $\mathrm{y} = 3$

P ⇒ Q ⇔ (non(P) OU Q) donc

$x < 1 \Rightarrow \mathrm{y} = 3 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ OU } \mathrm{y} = 3$

PROPRIETES DES CONNECTEURS LOGIQUES

Commutativité

L'ordre des propositions n'influence pas la valeur d'une conjonction ou d'une disjonction :

P ∧ Q ⇔ Q ∧ P

P ∨ Q ⇔ Q ∨ P

Associativité

Si on a plusieurs conjonctions ou plusieurs disjonctions, l'ordre dans lequel on effectue les opérations n'a pas d'importance.

(P ∧ Q) ∧ R ⇔ P ∧ (Q ∧ R)

(P ∨ Q) ∨ R ⇔ P ∨ (Q ∨ R)

Distributivité

Les opérations ∧ et ∨ sont distributive l'une par rapport à l'autre :

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Loi de De Morgan

La négation de « il fait beau et chaud » n'est pas « il fait moche et froid » mais « il fait moche ou froid ». C'est ce que nous disent les lois de Morgan :

$(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

$(\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$

Exercices :

- *Démontrer que (P ou (Q et R)) ⇔ (P ou Q) et (P ou R)*

P	Q	R	(Q et R)	P ou (Q et R)	(P ou Q)	(P ou R)	(P ou Q) et (P ou R)	(P ou (Q et R)) ⇔ (P ou Q) et (P ou R)
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	0	0	1	0	**1**
0	1	0	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	1	1	1	**1**
1	0	1	0	1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	1	1	**1**
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**

- *Démontrer que (non(P ou Q)) ⇔ (non(P)) et (non(Q))*

P	Q	(P ou Q)	(non(P ou Q))	Non(P)	Non(Q)	Non(P) et non(Q)	(non(P ou Q)) ⇔ (non(P)) et (non(Q))
0	0	0	1	1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	**1**
1	0	1	0	0	1	0	**1**
1	1	1	0	0	0	0	**1**

___ Exercices

CALCUL BOOLEEN / ALGEBRE DE BOOLE

DEFINITIONS

Algèbre :

(nom féminin) : « Ensemble d'opérations, de résolutions d'équations avec substitution de lettres aux valeurs numériques et de la formule générale au calcul numérique particulier »

« Toute algèbre est composée de deux éléments : **les variables** et **les opérateurs**. Dans l'algèbre conventionnelle, les variables sont les nombres et les opérateurs sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. »
(source, avec cours expliqué différemment)

Algèbre de Boole :

Elle est constituée uniquement de **« variables Booléennes »**. Ces variables ne peuvent avoir que **deux valeurs possibles, le 0 et le 1**. Elles servent à modéliser deux états possibles, le VRAI et le FAUX. En logique on utilise l'algèbre de Boole pour modéliser des relations logiques entre plusieurs propositions.

On utilise en générale les lettres de l'alphabet pour noter ces variables qui représentent chacune une proposition. La variable vaut 0 quand la proposition est fausse, 1 quand elle est vraie.

Trois types d'opérations existent dans l'algèbre de Boole, **l'addition, la multiplication et la négation** (appelé «complémentation»)

LES OPERATEURS BOOLEENS

L'addition

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

L'addition est l'équivalent du OU en logique. 1 + 1 = 1 dans l'algèbre de Boole car il n'y a que deux valeurs possible 0 ou 1.

La multiplication

a	b	$a * b = ab$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La multiplication est l'équivalent du ET en logique.

La complémentation / la négation

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

La complémentation est l'équivalent de la négation en logique.

Propriétés :

Comme pour la logique, dans l'algèbre de Boole :

- *L'addition et la multiplication sont commutatives :*
  - $a + b = b + a;\ \ a * b = b * a$
- *L'addition et la multiplication sont associatives :*
  - $(a + b) + c = a + (b + c);\ \ (a * b) * c = a * (b * c)$

- ***L'addition et la multiplication sont distributives l'une par rapport à l'autre :***
  - $\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac};\qquad \boldsymbol{a + bc = (a + b)(a + c)}$

- *Quelques soit* a *:* $a + \bar{a} = 1$ *;* $a * \bar{a} = 0$
- *0 est l'élément neutre de l'addition :* $a + 0 = a$
- *1 est l'élément neutre de la multiplication :* $a * 1 = a$
- *1 est l'élément absorbant de l'addition :* $a + 1 = 1$
- *0 est l'élément absorbant de la multiplication* $a * 0 = 0$
- $a + a = a;\ a + a + a + \cdots + a = a$ ⇔ *Il n'y a pas de multiple dans l'algèbre de Boole*
- $a * a = a;\ \ a * a * a * \ldots * a = a$ ⇔ *Il n'y a pas de puissance dans l'algèbre de Boole.*

Il est possible de démontrer ces propriétés à l'aide de tableau de vérité. Pour l'exemple nous allons démontrer que la multiplication est distributive :

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{b+c}$	$\boldsymbol{a(b+c)}$	$\boldsymbol{ab}$	$\boldsymbol{ac}$	$\boldsymbol{ab+ac}$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Priorités

1. *La complémentation (la négation) est prioritaire sur tout*
2. *La multiplication est prioritaire sur l'addition*

Exemple

Calculer $a + b\bar{c}$ pour $a = 0;\ b = 1\ ;\ c = 0$

On calcule d'abord $\bar{c} = \bar{0} = 1$,
puis $b\bar{c} = 1 * 1 = 1$,
puis $a + b\bar{c} = 0 + 1 = 1$

_ Exercice

THEOREMES A CONNAITRE

Deux théorèmes, **qu'il faut savoir démontrer par le calcul**, découlent de ces propriétés de bases :

Le théorème d'allègement :

$$\boldsymbol{a * (\bar{a} + b) = ab}$$

$$\boldsymbol{a + \bar{a}b = a + b}$$

Démonstrations

- $\boldsymbol{a * (\bar{a} + b) = ab}$

$a * (\bar{a} + b) = a * \bar{a} + a * b$. *Par distributivité de la multiplication*

$a * \bar{a} = 0$ *donc* $a * (\bar{a} + b) = 0 + a * b = a * b$

- $\boldsymbol{a + \bar{a}b = a + b}$

$a + \bar{a}b = (a + \bar{a}) * (a + b)$. *Par distributivité de l'addition*

$a + \bar{a} = 1$ donc $a + \bar{a}b = 1 * (a + b) = a + b$

Le théorème d'absorption

$$\boldsymbol{a + ab = a}$$

$$\boldsymbol{a * (a + b) = a}$$

Démonstrations

- $\boldsymbol{a + ab = a}$

$a + ab = a(1 + b)$. *Par factorisation = distributivité inversée.*

$1 + b = 1$ donc $a + ab = a * 1 = a$

- $\boldsymbol{a * (a + b) = a}$

$a * (a + b) = a * a + a * b = \boldsymbol{a + ab}$. *Première forme du théorème d'absorption.*

$a * (a + b) = a + ab = a(1 + b) = a * 1 = a$

En plus de ces deux théorèmes, comme en logique, la loi de De Morgan existe dans l'algèbre de Boole.

Loi de De Morgan

En logique :

non(P et Q) ⇔ (non(P)) ou (non(Q))

non(P ou Q) ⇔ (non(P)) et (non(Q))

Dans l'algèbre de Boole

$\overline{a+b} = \bar{a} * \bar{b}$

$\overline{a*b} = \bar{a} + \bar{b}$

Démonstrations

$\overline{a+b} = \bar{a} * \bar{b}$

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a+b$	$\overline{a+b}$	$\bar{a} * \bar{b}$
0	0	1	1	0	**1**	**1**
0	1	1	0	1	**0**	**0**
1	0	0	1	1	**0**	**0**
1	1	0	0	1	**0**	**0**

$\overline{a*b} = \bar{a} + \bar{b}$

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	ab	$\overline{ab}$	$\bar{a} + \bar{b}$
0	0	1	1	0	**1**	**1**
0	1	1	0	0	**1**	**1**
1	0	0	1	0	**1**	**1**
1	1	0	0	1	**0**	**0**

[Résumé bien fait des propriétés de l'algèbre de Boole]

___ Exercice jusqu'à 3.25

LES TABLEAUX DE KARNAUGH

Les tableaux de Karnaugh permettent de représenter facilement des expressions booléennes. Dans le cadre du programme, il ne vous sera jamais demandé de manipuler plus de 3 variables mais la logique serait toujours la même.

Ces tableaux représentent l'ensemble des multiplications possible entre les variables et leurs complémentaires / leurs négations. Au-delà de 3 variables, le tableau devient plus complexe à lire et à mettre en place. (voir ici pour les curieux)

À deux variables

Appelons les deux variables a et b, leurs complémentaires sont $\bar{a}$ et $\bar{b}$.

Tous les produits possibles sont $ab, \bar{a}b, a\bar{b}$ *et* $\bar{a}\bar{b}$.

Le tableau de Karnaugh à deux variables est un tableau à 4 cases où chaque ligne représente les différents états de a, et où chaque colonne représente les différents états de b.

L'intérieur des cases représente le produit de la ligne par la colonne.

	b	$\bar{b}$
a	ab	$a\bar{b}$
$\bar{a}$	$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

À trois variables

Appelons les trois variables a, b et c, leurs complémentaires sont $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$.

*3 variables, deux états possibles par variables, 2*2*2=8 produits possibles*

Tous les produits possibles sont $abc, ab\bar{c}, a\bar{b}c, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}bc, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{b}c$ et $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Le tableau correspondant :

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}c$	$\bar{b}\bar{c}$
a	abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}c$	$a\bar{b}\bar{c}$
$\bar{a}$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

Principes d'utilisation

À partir d'une expression booléenne, nous allons pouvoir remplir rapidement le tableau, trouver la négation et éventuellement faire apparaître visuellement les simplifications possibles de cette expression.

Inversement, à partir d'un tableau de Karnaugh déjà rempli, nous allons pouvoir trouver l'expression booléenne correspondante.

Comment remplir le tableau à partir d'une expression ?

Exemples

Faire les tableaux de Karnaugh, trouver les négations et simplifier quand c'est possible les expressions suivantes :

1) $\bar{a} + b$

Ici il s'agit d'une addition de deux variables isolées. Dans ce cas on va mettre un 1 dans chacune des cases où chacune des variables est présente.

	b	$\bar{b}$
a	1	0
$\bar{a}$	1	1

La négation de l'expression $\bar{a} + b$ est donc $a\bar{b}$. Si nous devions le démontrer par le calcul, nous utiliserions la loi de De Morgan : $\overline{\bar{a} + b} = \bar{\bar{a}} * \bar{b} = a\bar{b}$

2) $\bar{a}b$

Cette fois il s'agit d'une multiplication, on va alors mettre un 1 dans la case ou les deux variables sont présentes en même temps.

	b	$\bar{b}$
a	0	0
$\bar{a}$	1	0

La négation de $\bar{a}b$ est $a + \bar{b}$, soit la somme de toutes les cases ou a est présente + toutes les case où $\bar{b}$ est présente.

3) ***ac+bc+abc***

Cette fois, 3 variables et une addition de multiplications. Il faut prendre chaque multiplication l'une après l'autre

$a\bar{c}$: Je mets un 1 dans toutes les cases où le couple $a\bar{c}$ est présent.

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}c$	$\bar{b}\bar{c}$
a		1		1
$\bar{a}$				

$\bar{b}c$: idem

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}c$	$\bar{b}\bar{c}$
a		1	**1**	1
$\bar{a}$			**1**	

Enfin abc : Je mets un 1 dans la case où abc est présent et je mets des 0 dans toutes les autres cases (optionnel)

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}c$	$\bar{b}\bar{c}$
a	**1**	1	1	1
$\bar{a}$	0	0	1	0

La négation de $a\bar{c} + \bar{b}c + abc$ est donc $\bar{a}b + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ (toutes les cases où le couple $\bar{a}b$ est présent + la case $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$) ou $\bar{a}b + \bar{a}\bar{c}$ (toutes les cases où le couple $\bar{a}b$ est présent + toutes les cases ou le couple $\bar{a}\bar{c}$ est présent)

La simplification de $a\bar{c} + \bar{b}c + abc$ d'après le tableau obtenu est $a + \bar{b}c$ car la ligne des a est entièrement remplie et la colonne $\bar{b}c$ aussi.

Si on souhaitait trouver la simplification par calcul ça serait beaucoup plus long et compliqué.

_ Exercices

CAS CONCRET

ÉNONCE :

La connexion à un site Internet nécessite la saisie d'un mot de passe comportant de 8 à 12 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet français, des chiffres ou des caractères spéciaux.

Un mot de passe est valide si l'une au moins des trois conditions suivantes est respectée :

- *Il comporte au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux.*
- *Il comporte au moins cinq lettres.*
- *Il comporte moins de trois chiffres mais au moins cinq lettres et trois caractères spéciaux.*

PARTIE A : RECONNAITRE SI UN MOT DE PASSE EST VALIDE.

1) Parmi les mots de passe suivants, quels sont ceux qui sont valides ?

H32EXZ&K5=   LUC230598**   123(M*K<4

2) Alice veut créer un mot de passe avec quatre lettres, quatre chiffres et quatre caractères spéciaux. Ce mot de passe sera-t-il accepté ? Et un mot de passe de huit lettres ?

PARTIE B : ECRITURE D'UNE EXPRESSION BOOLEENNE

On définit trois variables booléennes a, b et c de façon suivante :

- $a = 1$ *si le mot de passe contient au moins trois chiffres, sinon* $a = 0$
- $b = 1$ '' '' *au moins cinq lettres, sinon* $b = 0$
- $c = 1$ '' '' *au moins trois caractères spéciaux, sinon* $c = 0$

On définit aussi une variable A telle que :

- $A = 1$ *si le mot de passe est valide,* $A = 0$ *sinon.*

Conditions :

- *Il comporte au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux.*
- *Il comporte au moins cinq lettres.*
- *Il comporte moins de trois chiffres mais au moins cinq lettres et trois caractères spéciaux.*

1) Traduire chacune des trois conditions de validité d'un mot de passe à l'aide des variables a, b et c. En déduire l'expression de A.

2) Représenter A avec un tableau de Karnaugh. En déduire une expression simplifiée de A.

3) Par calculs, retrouver la forme simplifiée de A.

4) Exprimer par une phrase la condition pour qu'un mot de passe soit valide.

PARTIE C : LES MOTS DE PASSES NON VALIDES

1) En utilisant le tableau de Karnaugh, déterminer l'expression de $\bar{A}$.

2) Retrouver le résultat par calculs

3) Exprimer par une phrase la condition pour qu'un mot de passe soit refusé.

CORRECTION :

Partie A :

1) Parmi les mots de passe suivants, quels sont ceux qui sont valides ?

H32EXZ&K5= LUC230598** **123(M*K<4**

2) Alice veut créer un mot de passe avec quatre lettres, quatre chiffres et quatre caractères spéciaux. Ce mot de passe sera-t-il accepté ? Et un mot de passe de huit lettres ?

Ok, au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux. 8 lettres ok aussi, au moins 5 lettres accepté.

Partie B

On définit trois variables booléennes a, b et c de façon suivante :

- $a = 1$ *si le mot de passe contient au moins trois chiffres, sinon* $a = 0$
- $b = 1$ '' '' *au moins cinq lettres, sinon* $b = 0$
- $c = 1$ '' '' *au moins trois caractères spéciaux, sinon* $c = 0$

On définit aussi une variable A telle que :

- $A = 1$ *si le mot de passe est valide,* $A = 0$ *sinon.*

Conditions :

- *Il comporte au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux.*
- *Il comporte au moins cinq lettres.*
- *Il comporte moins de trois chiffres mais au moins cinq lettres et trois caractères spéciaux.*

1) Traduire chacune des trois conditions de validité d'un mot de passe à l'aide des variables a, b et c. En déduire l'expression de A.

Condition 1 : ac

Condition 2 : b

Condition 3 : $\bar{a}bc$

$A = ac + b + \bar{a}bc$

2) Représenter A avec un tableau de Karnaugh. En déduire une expression simplifiée de A.

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}c$	$\bar{b}\bar{c}$
a	1 et 1	1	1	0
$\bar{a}$	1 et 1	1	0	0

$A = b + a\bar{b}c$ ou en minimisant le nombre de symbole : $A = b + ac$

3) Par calculs, retrouver la forme simplifiée de A.

$A = ac + b + \bar{a}bc = ac + b(1 + \bar{a}c) = ac + b * 1 = ac + b$

4) Exprimer par une phrase la condition pour qu'un mot de passe soit valide.

Pour qu'un mot de passe soit valide il faut qu'il est au moins 5 lettres ou qu'il ait au moins trois chiffres et au moins trois caractère spéciaux.

Partie C :

1) En utilisant le tableau de Karnaugh, déterminer l'expression de $\bar{A}$.

$\bar{A} = \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c}$

2) Retrouver le résultat par calculs

D'après les lois de De Morgan :

$\bar{A} = \overline{ac + b} = \overline{ac} * \bar{b} = (\bar{a} + \bar{c}) * b = \ \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{b}$

3) Exprimer par une phrase la condition pour qu'un mot de passe soit refusé.

Un mot de passe est refusé s'il a moins de 5 lettre et moins de 3chiffres ou qu'il a moins de 5lettres et moins de trois caractères spéciaux.