《矩阵分析与应用》大作业二

姓名：谷绍伟　　学号：202418020428007

完成课堂上讲的关于矩阵正交分解的程序实现，包括 Modified Gram-Schmid 方法，Houshold reduction 和 Givens reduction 方法，要求如下：

- 一个综合程序，根据选择参数的不同，实现不同方法的矩阵分解；在此基础上，实现 Ax=b 方程组的求解；
- 以用 matlab、Python 等编写程序，需附上简单的程序说明，比如参数代表什么意思，输入什么，输出什么等等，附上相应的例子；
- 一定是可执行文件，例如.m 文件等, 不能是 word 或者 txt 文档。附上源代码，不能为直接调用 matlab 等函数库；

程序说明

程序源代码见压缩包中 QR_factorization.py。

施密特正交化。使用 Modified Gram-Schmid 方法，Q 的大小为 $n \times c$，其中 n 为输入矩阵的行数，m 为列数，$c = min(m, n)$。对于输入 A 的第一列向量，将其单位化作为正交矩阵 Q 中的第一列，同时将正交矩阵 Q 中的其他列更新为输入矩阵 A 中的其他列。然后进行循环，再第 k 个循环中，j 从 k 到最后一列将 Q 中第 j 列剪去向第 k-1 列的投影，最后将第 k 列单位化。

Houshold reduction。在计算中，每次通过 (i, i) 位置及其右下角构成子矩阵，用子矩阵的第一列构造反射投影矩阵，通过反射变换将 (i, i) 位置下方的元素消去，最后再将投影矩阵相乘，得到 Q^T，消去后得到的矩阵即为上三角矩阵 R。

Givens reduction。通过旋转变换消去，每次用 (i, i) 位置的元素消去其下方的一个元素，遍历结束后，得到的消去后结果即为 R，将旋转矩阵累乘，得到正交矩阵的转置 Q^T。

解方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$。求解方程时，已知 $\mathbf{QR} = \mathbf{A}$，在方程两边同时左乘 $\mathbf{Q^T}$，可以得到 $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q^T b}$，进行回代即可得到方程的解。

最后对以上子程序进行综合，程序测试时，先输入矩阵 $\mathbf{A}$ 的行数和列数，再逐行输入矩阵的值，并根据提升输入方程的右边 $\mathbf{b}$，根据提示选择对应的 QR 分解方法，就可以自动计算分解的结果，并求解方程组。最后程序会根据求解的结果，计算 $\mathbf{Ax}$ 的乘

积，验证求解是否正确。编写程序时，构造矩阵、计算矩阵乘法时使用了 numpy 库的 matmul() 函数，其余均为手工实现。

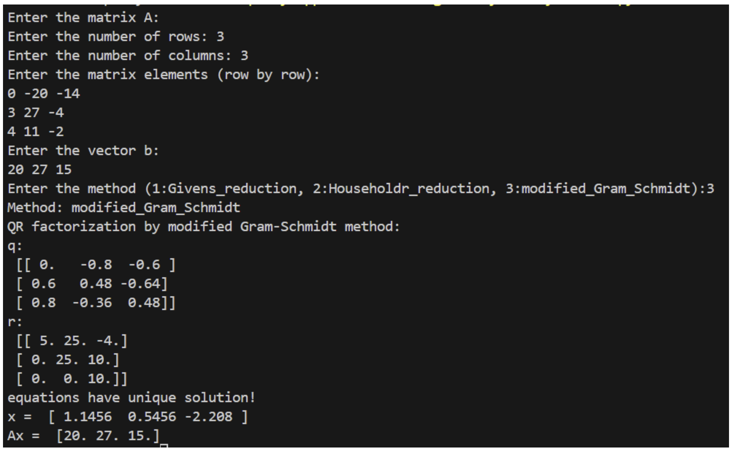
测试

分别用 3×3 和 2×3 的矩阵进行测试。

其中 3×3 的矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$ 为：

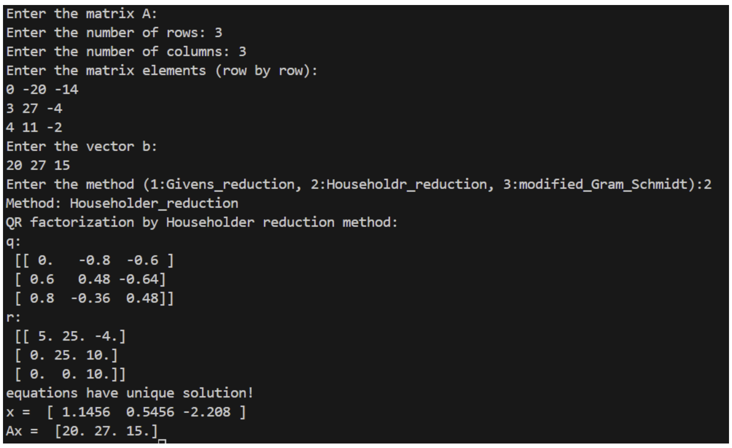
$$\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 27 \\ 15 \end{pmatrix}$$

分别用三种方法进行 QR 分解并求解方程组，程序计算结果如图 1、图 2和图 3所示。三种方法都正确计算了 QR 分解并对方程组进行了正确求解。



```
Enter the matrix A:
Enter the number of rows: 3
Enter the number of columns: 3
Enter the matrix elements (row by row):
0 -20 -14
3 27 -4
4 11 -2
Enter the vector b:
20 27 15
Enter the method (1:Givens_reduction, 2:Householdr_reduction, 3:modified_Gram_Schmidt):3
Method: modified_Gram_Schmidt
QR factorization by modified Gram-Schmidt method:
q:
 [[ 0.   -0.8  -0.6 ]
 [ 0.6   0.48 -0.64]
 [ 0.8  -0.36  0.48]]
r:
 [[ 5. 25. -4.]
 [ 0. 25. 10.]
 [ 0.  0. 10.]]
equations have unique solution!
x =  [ 1.1456  0.5456 -2.208 ]
Ax =  [20. 27. 15.]
```

Figure 1: 使用 Modified Gram-Schmid 方法解方程组

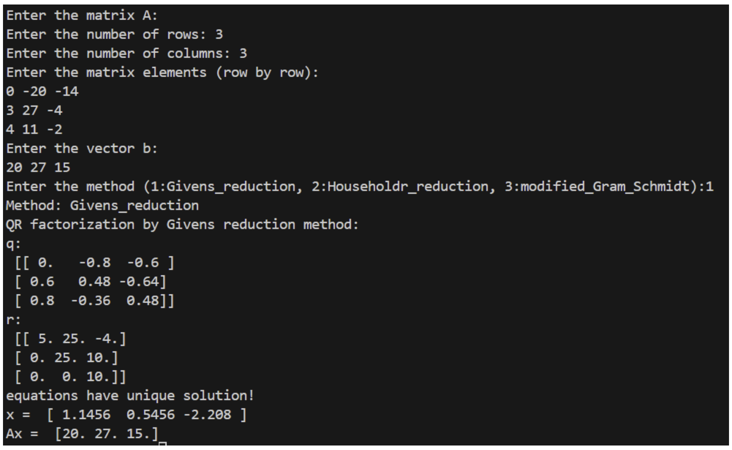


```
Enter the matrix A:
Enter the number of rows: 3
Enter the number of columns: 3
Enter the matrix elements (row by row):
0 -20 -14
3 27 -4
4 11 -2
Enter the vector b:
20 27 15
Enter the method (1:Givens_reduction, 2:Householdr_reduction, 3:modified_Gram_Schmidt):2
Method: Householder_reduction
QR factorization by Householder reduction method:
q:
 [[ 0.   -0.8  -0.6 ]
 [ 0.6   0.48 -0.64]
 [ 0.8  -0.36  0.48]]
r:
 [[ 5. 25. -4.]
 [ 0. 25. 10.]
 [ 0.  0. 10.]]
equations have unique solution!
x =  [ 1.1456  0.5456 -2.208 ]
Ax =  [20. 27. 15.]
```

Figure 2: 使用 Houshold reduction 方法求解方程组

设置 2×2 的矩阵和方程组为：

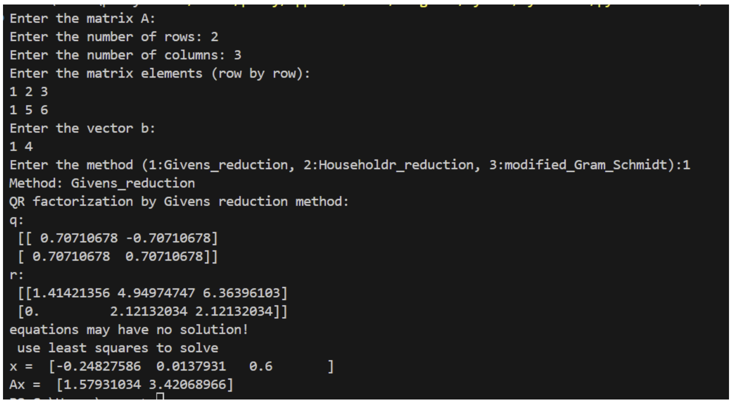
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



```
Enter the matrix A:
Enter the number of rows: 3
Enter the number of columns: 3
Enter the matrix elements (row by row):
0 -20 -14
3 27 -4
4 11 -2
Enter the vector b:
20 27 15
Enter the method (1:Givens_reduction, 2:Householdr_reduction, 3:modified_Gram_Schmidt):1
Method: Givens_reduction
QR factorization by Givens reduction method:
q:
 [[ 0.   -0.8  -0.6 ]
 [ 0.6   0.48 -0.64]
 [ 0.8  -0.36  0.48]]
r:
 [[ 5. 25. -4.]
 [ 0. 25. 10.]
 [ 0.  0. 10.]]
equations have unique solution!
x =  [ 1.1456  0.5456 -2.208 ]
Ax =  [20. 27. 15.]
```

Figure 3: 使用 Givens reduction 方法求解方程组

此时非方阵且方程组无解，程序会求最小二乘解。使用 Givens reduction 方法进行 QR 分解，并根据 QR 分解求最小二乘解，程序运行结果如图 4。使用其他方法，得到的 QR 分解结果类似，不再展示。此外，程序还能对行数大于列数的矩阵进行 QR 分解，并对方程组中的非自由变量进行求解。



```
Enter the matrix A:
Enter the number of rows: 2
Enter the number of columns: 3
Enter the matrix elements (row by row):
1 2 3
1 5 6
Enter the vector b:
1 4
Enter the method (1:Givens_reduction, 2:Householdr_reduction, 3:modified_Gram_Schmidt):1
Method: Givens_reduction
QR factorization by Givens reduction method:
q:
 [[ 0.70710678 -0.70710678]
 [ 0.70710678  0.70710678]]
r:
 [[1.41421356 4.94974747 6.36396103]
 [0.         2.12132034 2.12132034]]
equations may have no solution!
 use least squares to solve
x =  [-0.24827586  0.0137931   0.6        ]
Ax =  [1.57931034 3.42068966]
```

Figure 4: 非方阵的分解和最小二乘法求解