《矩阵分析与应用》第7 次作业

姓名：谷绍伟　　　学号：202418020428007

1. 以 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{15})^T$ 为例，简要写出快速傅里叶变换 FFT 的实现过程。

答：数据的长度 $N = 16$，则可以将数据分为四级，每级将数据重新排布并分为两个长度为当前长度一半的子序列，该操作通过蝶形网络完成，如图 1所示。其中箭头向上为加法，向下为减法。

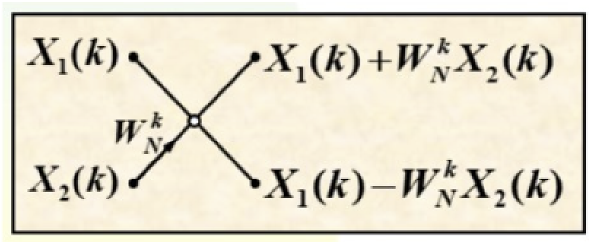

Figure 1: FFT 蝶形网络

对每一集数据，计算旋转因子 $W_N^k = e^{2\pi i k/N}$，其中 N 为当前序列数据点数，k 由迭代级别和当前数据位置决定。总共通过四级蝶形网络完成 FFT。

2. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别为 R^3 的子空间，且

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

分别为其一组基。

(1) 试说明 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 R^3 的一对补空间；

(2) 分别给出沿 $\mathcal{Y}$ 空间到 $\mathcal{X}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{P}$，以及沿 $\mathcal{X}$ 空间到 $\mathcal{Y}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{Q}$，并验证矩阵 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{P}$ 是幂等矩阵。

答：(1)

注意到 $rank([\mathcal{B}_{\mathcal{X}}|\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}]) = rank \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 = rank(R^3)$，因此 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 R^3 的一对补空间。

(2)

沿 $\mathcal{Y}$ 空间到 $\mathcal{X}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{P}$：

由于 $[\mathcal{B}_{\mathcal{X}}|\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$，则沿 $\mathcal{Y}$ 空间到 $\mathcal{X}$ 空间的投影矩阵为：

$$\mathbf{P}=[\mathcal{B}_{\mathcal{X}}|\mathbf{0}][\mathcal{B}_{\mathcal{X}}|\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}$$

沿 $\mathcal{X}$ 空间到 $\mathcal{Y}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{Q}$：

由于 $[\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{B}_{\mathcal{X}}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}^{-}1=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}$，则沿 $\mathcal{X}$ 空间到 $\mathcal{Y}$ 空间的投影矩阵为：

$$\mathbf{Q}=[\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}|\mathbf{0}][\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{B}_{\mathcal{X}}]^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}$$

幂等矩阵验证：

$$\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}$$

3. 设 $\mathcal{R}^{n\times n}$ 为所有 $n\times n$ 的矩阵构成的向量空间，试说明 $\mathcal{R}^{n\times n}=\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{K}$ 成立，这里 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示所有 $n\times n$ 的对称矩阵和反对称矩阵构成的集合。

答：$\forall\mathbf{A}\in R^{n\times n}$，都有唯一的分解

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}+\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$$

其中 $\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$ 是对称矩阵，属于 $\mathcal{S}$ 空间，$\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$ 是反对称矩阵，属于 $\mathcal{K}$ 空间。因此 $\mathcal{R}^{n\times n}=\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{K}$ 成立。

4. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&0&-4\\4&2&4\\3&2&2\end{pmatrix}$, 计算出 core-nilpoten 的分解形式，并给出对应的 Drazin 逆的形式。

答: 由于 $rank(\mathbf{A}) = 2$，$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -16 & -16 & 0 \\ 24 & 24 & 0 \\ 16 & 16 & 0 \end{pmatrix}$，则 $rank(\mathbf{A}) > rank(\mathbf{A}^2) = rank(\mathbf{A}^3) = 1$，因此 $\mathbf{A}$ 的 $index = 2$。

$R(\mathbf{A}^2)$ 的一组基为 $\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$，$N(\mathbf{A}^2)$ 的一组基为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$，则 core-nilpoten 分解中，$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 12 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。求逆矩阵，得到 $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$。

则 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 12 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，即 $\mathbf{C} = [2]$，$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

则 Drazin 逆为

$$\mathbf{A}^D = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$