《矩阵分析与应用》第3 次作业

姓名：谷绍伟　　学号：202418020428007

1： $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m \times n$ 和 $n \times p$ 的矩阵，简要说明下面结论成立：

(1) $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) $N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$.

答：

(1) $\forall \mathbf{b} \in R(\mathbf{AB})$，$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$，满足 $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$，即 $\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{b}$，即 $\mathbf{y} = \mathbf{Bx}$，$\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$，因此 $\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})$，则 $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) $\forall \mathbf{x} \in N(\mathbf{B})$，都有 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$，等式两边同时左乘 $\mathbf{A}$，则 $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$，即 $\mathbf{x} \in N(\mathbf{AB})$，因此 $N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$.

2： 已知集合：$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$，试判断该集合是否线性无关。

答： 要判断该集合是否验证无关，只需验证：

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是否有唯一解 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$，即求解方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

显然，该方程有唯一解 $(0, 0, 0, 0)^T$，则原集合线性无关。

3： 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$，验证：$rank(\mathbf{A^T A}) = rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{AA^T})$.

答： 对 $\mathbf{A}$ 进行行变换，可以得到：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，$\mathbf{A}$ 的秩为 2，即 $rank(\mathbf{A}) = 2$.

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 4 & -20 \\ 18 & 54 & 12 & -60 \\ 4 & 12 & 6 & -20 \\ -20 & -60 & -20 & 80 \end{pmatrix}$$

对 $\mathbf{A^T A}$ 进行行变换，可以得到：

$$\mathbf{A^T A} \overset{r_2-3r_1}{\longrightarrow} \overset{r4-2(r_1+r_2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 18 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 6 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $rank(\mathbf{A^T A}) = 2$.

$$\mathbf{A A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -9 & 54 \\ -9 & 11 & -18 \\ 54 & -18 & 108 \end{pmatrix}$$

对 $\mathbf{A A^T}$ 进行行变换，可以得到：

$$\mathbf{A A^T} \overset{r_3-2r_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 27 & -9 & 54 \\ -9 & 11 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $rank(\mathbf{A A^T}) = 2$.
综上，$rank(\mathbf{A^T A}) = rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A A^T})$.