《矩阵分析与应用》第2 次作业

姓名：谷绍伟　　学号：202418020428007

1：已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$，试求矩阵 $\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 的逆矩阵，其中矩阵 $\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 定义如下：

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$$

答：由于 $\mathbf{A}\xrightarrow{2r_2-r_3}\mathbf{B}$，则 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\mathbf{A}$，因此 $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\1&4&-2\end{pmatrix}$。

由于 $\mathbf{A}\xrightarrow{r_1+2r_2+r_3}\mathbf{C}$，则 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\mathbf{A}$，因此 $\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&3&-1\\-1&-4&2\end{pmatrix}$

2：对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{pmatrix}$，(1) 求出它的 LU 分解形式；(2) 由 LU 分解求 $\mathbf{A}^{-1}$。

答：(1) 由于

$$\begin{pmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&4&5\\\mathbf{4}&2&6\\3&16&30\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&4&5\\\mathbf{4}&2&6\\\mathbf{3}&4&15\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&4&5\\\mathbf{4}&2&6\\\mathbf{3}&\mathbf{2}&3\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{A}=\mathbf{LU}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(2) 根据 **LU** 分解的结果，

$$\mathbf{L^{-1}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\5&-2&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{U^{-1}}=\begin{pmatrix}1&-2&\frac{7}{3}\\0&\frac{1}{2}&-1\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A^{-1}}=\mathbf{U^{-1}L^{-1}}=\begin{pmatrix}1&-2&\frac{7}{3}\\0&\frac{1}{2}&-1\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\5&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{62}{3}&-\frac{20}{3}&\frac{7}{3}\\-7&\frac{5}{2}&-1\\\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

3：矩阵 **A** 和向量 **b** 定义如下：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&4&17\\3&6&-12&3\\2&3&-3&2\\0&2&-2&6\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}17\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

使用部分主元法 (partial pivoting) 实现 $\mathbf{PA}=\mathbf{LU}$，并求解方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$。

答：可以将 **A** 写为增广矩阵：

$$(\mathbf{A}|\mathbf{z})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&17&1\\3&6&-12&3&2\\2&3&-3&2&3\\0&2&-2&6&4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}3&6&-12&3&2\\1&2&4&17&1\\2&3&-3&2&3\\0&2&-2&6&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1/3}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_1/3}\left(\begin{array}{cccc|c}3&6&-12&3&2\\\boldsymbol{\frac{1}{3}}&0&8&16&1\\\boldsymbol{\frac{2}{3}}&-1&5&0&3\\0&2&-2&6&4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}3&6&-12&3&2\\0&2&-2&6&4\\\boldsymbol{\frac{2}{3}}&-1&5&0&3\\\boldsymbol{\frac{1}{3}}&0&8&16&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&6&-12&3&2\\0&2&-2&6&4\\\boldsymbol{\frac{2}{3}}&\boldsymbol{-\frac{1}{2}}&4&3&3\\\boldsymbol{\frac{1}{3}}&0&8&16&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}3&6&-12&3&2\\0&2&-2&6&4\\\boldsymbol{\frac{1}{3}}&0&8&16&1\\\boldsymbol{\frac{2}{3}}&\boldsymbol{-\frac{1}{2}}&4&3&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3/2}\left(\begin{array}{cccc|c}3&6&-12&3&2\\0&2&-2&6&4\\\boldsymbol{\frac{1}{3}}&0&8&16&1\\\boldsymbol{\frac{2}{3}}&\boldsymbol{-\frac{1}{2}}&\boldsymbol{\frac{1}{2}}&-5&3\end{array}\right)$$

则 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}3&6&-12&3\\0&2&-2&6\\0&0&8&16\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$

由于 $\mathbf{PA}=\mathbf{LU}$，则方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 转换为 $\mathbf{LUx}=\mathbf{Pb}$，设 $\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$，求解 $\mathbf{Ly}=\mathbf{Pb}$，得 $\mathbf{y}=(3,4,16,-5)^T$，再求解 $\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$，得 $\mathbf{x}=(2,-1,0,1)^T$。

4：当 ξ 取什么值的时候，矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\xi & 2 & 0\\ 1 & \xi & 1\\ 0 & 1 & \xi\end{pmatrix}$ 不存在 LU 分解。

答：根据 **LU** 分解的定义，矩阵 $\mathbf{A}$ 存在 **LU** 分解的条件是其所有顺序主子式非零。则有：

$$\xi \neq 0, \quad \xi^2-2\neq 0, \quad \xi^3-3\xi\neq 0$$

即当 $\xi=0$，$\xi=\pm\sqrt{2}$，$\xi=\pm\sqrt{3}$ 时，矩阵 $\mathbf{A}$ 不存在 **LU** 分解。

5：试说明所有 $n\times n$ 的实数矩阵构成的集合为一个线性空间。另外判断下列哪些是该空间的子空间，并给出理由。

(1) 所有对称矩阵；(2) 所有反对称矩阵；(3) 所有可逆矩阵；(4) 所有上三角矩阵；(5) 所有下三角矩阵；(6) 满足：$trace(\mathbf{A})=0$ 的所有矩阵。

答：记 W 为所有 $n\times n$ 的实数矩阵构成的集合，则 $\forall\mathbf{A},\mathbf{B}\in W$，矩阵 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的所有元素都是实数，所以：

$$a_{ij}+b_{ij}\in\mathbb{R}$$

$$\forall c\in\mathbb{R}, ca_{ij}\in\mathbb{R}$$

即为 $\forall\mathbf{A},\mathbf{B}\in W$，有 $\mathbf{A}+\mathbf{B}\in W$；$\forall c\in\mathbb{R},\forall\mathbf{A}\in W$，有 $c\mathbf{A}\in W$。即所有 $n\times n$ 的实数矩阵构成的集合为一个线性空间。

子空间判断：(1) 所有对称矩阵：对称矩阵满足 $a_{ij}=a_{ji}$，则 $a_{ij}+bij=a_{ji}+b_{ji}$，$ca_{ij}=ca_{ji}$，所以对称矩阵的任意线性组合仍然是对称矩阵，故为子空间；

(2) 所有反对称矩阵：反对称矩阵满足 $a_{ij}=-a_{ji}$，则 $a_{ij}+bij=-(a_{ji}+b_{ji})$，$ca_{ij}=-ca_{ji}$，所以反对称矩阵的任意线性组合仍然是反对称矩阵，故为子空间；

(3) 所有可逆矩阵：可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 和可逆矩阵 $\mathbf{B}$ 的和 $\mathbf{A}+mathbfB$ 不一定可逆，不构成子空间；

(4) 所有上三角矩阵：上三角矩阵的任意线性组合仍然是上三角矩阵，故为子空间；

(5) 所有下三角矩阵：下三角矩阵的任意线性组合仍然是下三角矩阵，故为子空间；

(6) 满足 $trace(\mathbf{A})=0$ 的所有矩阵:$trace(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^n a_{ii}=0$,则对任意矩阵 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 满足 $trace(\mathbf{A})=0$，$trace(\mathbf{B})=0$，则 $trace(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\sum_{i=1}^n(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^n a_{ii}+\sum_{i=1}^n b_{ii}=0$，对加法封闭；$\forall c\in\mathbb{R}$，$trace(c\mathbf{A})=\sum_{i=1}^n ca_{ii}=c\sum_{i=1}^n a_{ii}=0$，对数乘封闭，故为子空间。