《矩阵分析与应用》第4 次作业

姓名：谷绍伟　　学号：202418020428007

1. 设 $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$, 试说明下面哪些是线性变换：

(1) $\mathbf{T}(\mathbf{X_{n\times n}}) = \mathbf{AX} - \mathbf{XA}$.

(2) $\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{A^T}$.

(3) $\mathbf{T}(\mathbf{X_{n\times n}}) = \frac{\mathbf{X}+\mathbf{X^T}}{2}$.

(4) $\mathbf{T}(\mathbf{X_{n\times 1}}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$，$\mathbf{b} \neq 0$.

答：根据定义，线性映射的充要条件为 $\mathbf{T}(c\mathbf{X_1} + d\mathbf{X_2}) = c\mathbf{T}(\mathbf{X_1}) + d\mathbf{T}(\mathbf{X_2})$.

(1)**：**$\mathbf{T}(c\mathbf{X_1}+d\mathbf{X_2}) = \mathbf{A}(c\mathbf{X_1}+d\mathbf{X_2}) - (c\mathbf{X_1}+d\mathbf{X_2})\mathbf{A} = c(\mathbf{AX_1} - \mathbf{X_1A}) + d(\mathbf{AX_2} - \mathbf{X_2A}) = c\mathbf{T}(\mathbf{X_1}) + d\mathbf{T}(\mathbf{X_2})$ 是线性变换。

(2)：$\mathbf{T}(c\mathbf{X_1} + d\mathbf{X_2}) = (c\mathbf{X_1} + d\mathbf{X_2})^T = c\mathbf{X_1}^T + d\mathbf{X_2}^T = c\mathbf{T}(\mathbf{X_1}) + d\mathbf{T}(\mathbf{X_2})$ 是线性变换。

(3)：$\mathbf{T}(c\mathbf{X_1} + d\mathbf{X_2}) = \frac{(c\mathbf{X_1}+d\mathbf{X_2})+(c\mathbf{X_1}+d\mathbf{X_2})^T}{2} = c\frac{\mathbf{X_1}+\mathbf{X_1^T}}{2} + d\frac{\mathbf{X_2}+\mathbf{X_2^T}}{2} = c\mathbf{T}(\mathbf{X_1}) + d\mathbf{T}(\mathbf{X_2})$ 是线性变换。

(4)：由于 $\mathbf{b} \neq 0$，$\mathbf{T}(c\mathbf{X_1} + d\mathbf{X_2}) = \mathbf{A}(c\mathbf{X_1} + d\mathbf{X_2}) + b = c\mathbf{AX_1} + d\mathbf{AX_2} + b \neq c\mathbf{T}(\mathbf{X_1}) + d\mathbf{T}(\mathbf{X_2})$ 不是线性变换。

2. 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R^{n\times n}}$，$\mathbf{T}$ 为 $R^{n\times 1}$ 的一个线性算子，定义为：$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. 记 S 为标准基，试说明 $[\mathbf{T}]_\mathbf{S} = \mathbf{A}$.

答：根据定义，$\forall\mathbf{x} \in R^n$，都有 $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = [\mathbf{T}(\mathbf{x})]_S = [\mathbf{T}]_S[\mathbf{x}]_S = [\mathbf{T}]_S\mathbf{x} = \mathbf{Ax}$，则 $([\mathbf{T}]_S - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 对任意的 $\mathbf{x}$ 都成立，因此 $[\mathbf{T}]_\mathbf{S} = \mathbf{A}$。

3. 对于向量空间 R^3，

$$\mathcal{B} = \left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

为该空间的两组基。

(1) 对于恒等算子 $\mathbf{I}$，分别计算 $[\mathbf{I}]_\mathcal{B}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

(2) 对于投影算子 $\mathbf{P}$：$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$，计算 $[\mathbf{P}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$。

答： (1)：

$$\mathbf{I}(\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1} = 1\mathbf{u_1} + 0\mathbf{u_2} + 0\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{u_1})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2} = 0\mathbf{u_1} + 1\mathbf{u_2} + 0\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{u_2})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{u_3}) = \mathbf{u_3} = 0\mathbf{u_1} + 0\mathbf{u_2} + 1\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{u_3})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此 $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{I}(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} = 1\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_2} = 0\mathbf{v_1} + 1\mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{v_2})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{v_3}) = \mathbf{v_3} = 0\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_2} + 1\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{v_3})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此 $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{I}(\mathbf{u_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{u_1})]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{u_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{u_2})]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{u_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2} - \mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{I}(\mathbf{u_3})]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

因此 $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2)：

$$\mathbf{P}(\mathbf{u_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{P}(\mathbf{u_1})]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{u_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{v_1} + 1\mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{P}(\mathbf{u_2})]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{u_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{v_1} + 1\mathbf{v_2} + 0\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{P}(\mathbf{u_3})]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此 $[\mathbf{P}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^3 的一个线性算子，其定义为 $\mathbf{T}(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$，$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 为其一组基，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 为 R^3 的一个向量。

(1) 分别计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$。

(2) 计算 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$，并验证 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 成立。

答： (1)：

$$\mathbf{T}(\mathbf{u_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u_1} - \mathbf{u_2} + 0\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{T}(\mathbf{u_1})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\mathbf{u_1} + \frac{1}{2}\mathbf{u_2} + \frac{1}{2}\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{T}(\mathbf{u_2})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{u_1} + \frac{1}{2}\mathbf{u_2} - \frac{1}{2}\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{T}(\mathbf{u_3})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因此 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 0\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)：

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{u_1} - \frac{1}{2}\mathbf{u_2} + \frac{1}{2}\mathbf{u_3} \Rightarrow [\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

式子左边 = 右边，因此 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 成立