《矩阵分析与应用》第6 次作业

姓名：谷绍伟　　　学号：202418020428007

1. 对于矩阵：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

分别计算 Frobenius-norm,1-norm,2-norm,∞-norm。

答：

$$||\mathbf{A}||_F=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}=\sqrt{10}$$

$$||\mathbf{A}||_1=\max_j\sum_i|a_{ij}|=4$$

$$\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\begin{pmatrix}2-\lambda & -4\\ 4 & 8-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_{max}=10\Rightarrow||\mathbf{A}||_2=\sqrt{\lambda_{max}}=\sqrt{10}$$

$$||\mathbf{A}||_\infty=\max_i\sum_j|a_{ij}|=3$$

$$||\mathbf{B}||_F=\sqrt{\sum_{i,j}|b_{ij}|^2}=\sqrt{3}$$

$$||\mathbf{B}||_1=\max_j\sum_i|b_{ij}|=1$$

$$\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_{max}=1\Rightarrow||\mathbf{B}||_2=\sqrt{\lambda_{max}}=1$$

$$||\mathbf{B}||_\infty=\max_i\sum_j|b_{ij}|=1$$

$$||\mathbf{C}||_F=\sqrt{\sum_{i,j}|c_{ij}|^2}=\sqrt{81}=9$$

$$||\mathbf{C}||_1=\max_j\sum_i|c_{ij}|=10$$

$$\mathbf{C^TC}-\lambda\mathbf{I}=\begin{pmatrix}36-\lambda & -18 & 36\\ -18 & 9-\lambda & -18\\ 36 & -18 & 36-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_{max}=81\Rightarrow||\mathbf{C}||_2=\sqrt{\lambda_{max}}=\sqrt{81}=9$$

$$||\mathbf{C}||_\infty=\max_i\sum_j|c_{ij}|=10$$

2. 对于向量空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$，定义 $\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle=trace(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$。

(1) 简要说明 $\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle$ 满足内积定义，为 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 空间的一个内积。

(2) 证明

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\frac12\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\frac12\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$$

为向量空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一组标准正交基，并计算矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 在该组基下的傅里叶展开 (Fouier expansion)。

答： (1)$\forall\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbf{R}^{2\times2}$，$\forall\alpha\in R$：

$$\langle\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle=trace(\mathbf{A^TA})=\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\geq0$$

$$\langle\mathbf{A},\alpha\mathbf{B}\rangle=trace(\mathbf{A^T}(\alpha\mathbf{B}))=\alpha\cdot trace(\mathbf{A^TB})=\alpha\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle$$

$$\langle\mathbf{A},\mathbf{B}+\mathbf{C}\rangle=trace(\mathbf{A^T}(\mathbf{B}+\mathbf{C}))=trace(\mathbf{A^TB}+\mathbf{A^TC})=\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle+\langle\mathbf{A},\mathbf{C}\rangle$$

$$\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle=trace(\mathbf{A^TB})=\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}=\sum_{i,j}b_{ij}a_{ij}=trace(\mathbf{B^TA})=\langle\mathbf{B},\mathbf{A}\rangle$$

运算 $\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle$ 满足以上四条性质，因此为 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 空间的一个内积。

(2):

记 $\mathcal{B}=\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3},\mathbf{u_4}$，可以验证 $\langle\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\rangle=0$、$\langle\mathbf{u_1},\mathbf{u_3}\rangle=0$、$\langle\mathbf{u_1},\mathbf{u_4}\rangle=0$、$\langle\mathbf{u_2},\mathbf{u_3}\rangle=0$、$\langle\mathbf{u_2},\mathbf{u_4}\rangle=0$、$\langle\mathbf{u_3},\mathbf{u_4}\rangle=0$，即 $\mathcal{B}$ 中任意两个向量正交。

另外，可以计算模 $||\mathbf{u_1}||=\langle\mathbf{u_1},\mathbf{u_1}\rangle=1$，$||\mathbf{u_2}||=\langle\mathbf{u_2},\mathbf{u_2}\rangle=1$，$||\mathbf{u_3}||=\langle\mathbf{u_3},\mathbf{u_3}\rangle=1$，$||\mathbf{u_4}||=\langle\mathbf{u_4},\mathbf{u_4}\rangle=1$，即 $\mathcal{B}$ 中任意一个向量的模为 1。因此 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 空间的一组标准正交基。

由于

$$\langle\mathbf{u_1},\mathbf{x}\rangle\mathbf{u_1}=\sqrt2\mathbf{u_1}$$

$$\langle\mathbf{u_2},\mathbf{x}\rangle\mathbf{u_2}=0\mathbf{u_2}$$

$$\langle\mathbf{u_3},\mathbf{x}\rangle\mathbf{u_3}=\mathbf{u_3}$$

$$\langle\mathbf{u_4},\mathbf{x}\rangle\mathbf{u_4}=\mathbf{u_4}$$

因此傅里叶展开为

$$\mathbf{A}=\sqrt{2}\mathbf{u_1}+\mathbf{u_3}+\mathbf{u_4}$$

3. 对于向量组 $\left\{\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix},\mathbf{x_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{x_3}=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\0\end{pmatrix}\right\}$，在三个有效数字情形下，分别使用传统 Gram-Schmidt 和修改后的 Gram-Schmidt 方法，把上述向量组正交化。

答：使用传统 Gram-Schmidt 方法计算：

$$\mathbf{u_1}=\frac{\mathbf{x_1}}{||\mathbf{x_1}||}=\frac{1}{\sqrt{1+10{-6}}}\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_2}=\frac{\mathbf{x_2}-\langle\mathbf{x_2}|\mathbf{u_1}\rangle\mathbf{u_1}}{||\mathbf{x_2}-\langle\mathbf{x_2}|\mathbf{u_1}\rangle\mathbf{u_1}||}=\frac{-1}{\sqrt{1+10^{-6}}}\begin{pmatrix}0\\0\\10{-}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_3}=\frac{\mathbf{x_3}-\langle\mathbf{x_3}|\mathbf{u_1}\rangle\mathbf{u_1}-\langle\mathbf{x_3}|\mathbf{u_2}\rangle\mathbf{u_2}}{||\mathbf{x_3}-\langle\mathbf{x_3}|\mathbf{u_1}\rangle\mathbf{u_1}-\langle\mathbf{x_3}|\mathbf{u_2}\rangle\mathbf{u_2}||}=\frac{1}{\sqrt{2\times10^{-6}}}\begin{pmatrix}0\\10^{-3}\\-10^{-3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0.709\\-0.709\end{pmatrix}$$

使用修改后的 Gram-Schmidt 方法计算：

$k=1$，有 $||\mathbf{x_1}||=1$。则 $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3}\}\leftarrow\{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x_3}\}$；

$k=2$，由于 $\mathbf{u_1^Tu_2}=1$，$\mathbf{u_1^Tu_3}=1$，则 $\mathbf{u_2}\leftarrow\mathbf{u_2}-(\mathbf{u_1^Tu_2})\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\10^{-3}\end{pmatrix}$，$\mathbf{u_3}\leftarrow\mathbf{u_3}-(\mathbf{u_2^Tu_3})\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}0\\10^{-3}\\-10^{-3}\end{pmatrix}$，可以计算 $\mathbf{u_2}\leftarrow\frac{\mathbf{u_2}}{||\mathbf{u_2}||}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$；

$k=3$，由于 $\mathbf{u_2^Tu_3}=10^{-3}$，则 $\mathbf{u_3}\leftarrow\mathbf{u_3}-(\mathbf{u_2^Tu_3})\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0\\10^{-3}\\0\end{pmatrix}$，可以计算 $\mathbf{u_3}\leftarrow\frac{\mathbf{u_3}}{||\mathbf{u_3}||}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$。

因此正交化后的向量组为 $\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix}$，$\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$。

4. 试判断矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 是否为酉矩阵。

答：记矩阵的列为 $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，$\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$。

可以计算，$\mathbf{u_1^*u_1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = 1$，$\mathbf{u_2^*u_2} = 1$，即 $\mathbf{u_1}$ 和 $\mathbf{u_1}$ 为单位向量。再计算 $\mathbf{u_1^*u_2} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0$，即 $\mathbf{u_1}$ 和 $\mathbf{u_2}$ 正交。因此该矩阵为酉矩阵。

5. 从向量 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 出发，使用 elementary reflector 构造 R^3 的一组标准正交基。

答：记 $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，则：

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{uu}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

矩阵 $\mathbf{R}$ 的列即为 R^3 的一组标准正交基。

6. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$，使用 Given reduction 方法找到一个正交矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA} = \mathbf{T}$，这里 $\mathbf{T}$ 为上三角矩阵，且对角元素都为正数。

答： $\mathbf{P_{12}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $\mathbf{P_{12}A} = \begin{pmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$。进一步对 $\mathbf{P_{12}A}$ 进行消去，有：

$$\mathbf{P_{13}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P_{13}P_{12}A} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P_{23}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}A} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

因此，$\mathbf{P} = \mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -20 & 12 & -9 \\ -15 & -16 & 12 \end{pmatrix}$

7. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$，分别使用 Householder reduction 和 Givens reduction 实现该矩阵的 QR 分解。

答：用 Householder reduction 进行 QR 分解：

取矩阵 $\mathbf{A}$ 的第一列 $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $||\mathbf{x_1}|| = 3$，$\mathbf{u_1} = \frac{\mathbf{x_1} - ||\mathbf{x_1}||\mathbf{e_1}}{||\mathbf{x_1} - ||\mathbf{x_1}||\mathbf{e_1}||} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则：

$\mathbf{H_1} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u_1}\mathbf{u_1^T} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{H_1A} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & -9 & 54 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}$。

记 $\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$，可以得到 $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}$，则 $||\mathbf{x_2}|| = 15$，$\mathbf{u_2} = \frac{\mathbf{x_2} - ||\mathbf{x_2}||\mathbf{e_2}}{||\mathbf{x_2} - ||\mathbf{x_2}||\mathbf{e_2}||} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\widetilde{\mathbf{H_2}} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u_2}\mathbf{u_2^T} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，有 $\widetilde{\mathbf{H_2}}\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$. 因此，$\mathbf{H_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathbf{H_2}} \end{pmatrix}$。

QR 分解中 $\mathbf{Q} = \mathbf{H_1H_2} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 14 & -2 \\ -10 & 5 & 10 \\ 10 & -2 & 11 \end{pmatrix}$，$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$

用 Givens reduction 进行 QR 分解：

取矩阵 $\mathbf{A}$ 的第一列 $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$，计算 $c_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$，$s_1 = \frac{-2}{\sqrt{1+4}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$，则：

$\mathbf{T_{12}} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{T_{12}A} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{29\sqrt{5}}{5} & \frac{-74\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{33\sqrt{5}}{5} & \frac{-48\sqrt{5}}{5} \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$。

同理可以计算得到 $\mathbf{T}_{13} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}$，$\mathbf{P}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11/5\sqrt{5} & -2/5\sqrt{5} \\ 0 & 2/5\sqrt{5} & 11/5\sqrt{5} \end{pmatrix}$，$\mathbf{Q} = (\mathbf{T_{12}T_{13}T_{23}})^T$。