《人工智能原理与算法》第14 章作业

姓名：谷绍伟 学号：202418020428007

有一位教授想知道学生是否睡眠充足。每天，教授观察学生在课堂上是否睡觉，并观察他们是否有红眼。教授获得如下的领域知识：

- 没有观察数据时，学生睡眠充足的先验概率为 0.7。
- 给定学生前一天睡眠充足为条件，学生在晚上睡眠充足的概率是 0.8；如果前一天睡眠不充足，则是 0.3。
- 如果学生睡眠充足，则红眼的概率是 0.2，否则是 0.7。
- 如果学生睡眠充足，则在课堂上睡觉的概率是 0.1，否则是 0.3。

1. 将这些信息形式化为一个动态贝叶斯网络，使教授可以使用这个网络从观察序列中进行滤波和预测。然后再将其形式化为一个只有一个观察变量的隐马尔可夫模型。给出这个模型的完整的概率表。

答：动态贝叶斯网络的结果如图所示：

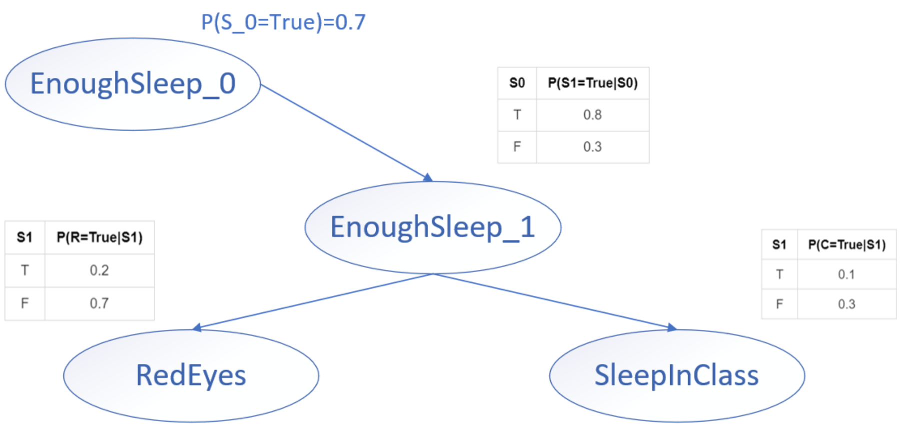

Figure 1: 动态贝叶斯网络

将其形式化为马尔可夫模型如下：

隐变量：S 表示睡眠情况，取值为 $\{EnoughSleep, NotEnoughSleep\}$

观察变量：E 表示观察到的现象，取值为 $\{e_1, e_2, e_3\}$

初始概率向量 $\Pi = [0.7, 0.3]$，分别对应睡眠充足和不充足的概率。

写出状态转移概率和发射矩阵概率如下：
状态转移概率：

	EnoughSleep	NotEnoughSleep
EnoughSleep	0.8	0.2
NotEnoughSleep	0.3	0.7

根据题意写出的发射矩阵概率：

	e1	e2	e3
EnoughSleep	0.7	0.2	0.1
NotEnoughSleep	0.3	0.8	0.9

2. 假定：

- e_1= 没有红眼，没有在课堂上睡觉
- e_2= 有红眼，没有在课堂上睡觉
- e_3= 有红眼，在课堂上睡觉

执行下面的计算：

- 状态估计：针对每个 $t = 1, 2, 3$，计算 $P(EnoughSleep_t | e_{1:t})$
- 平滑：针对每个 $t = 1, 2, 3,$，计算 $P(EnoughSleep_t | e_{1:3})$
- 针对 $t = 1$ 和 $t = 2$，比较滤波概率和平滑概率

答：状态估计
采用前向法计算概率：

$$P(S_0) = [0.7, 0.3]$$

$$P(S_1) = \sum_{S_0} P(S_1|S_0)P(S_0) = [0.65, 0.35]$$

$$P(S_1|e_1) = \alpha P(e_1|S_1)P(S_1) = [0.8 \times 0.9, 0.7 \times 0.3]P(S_0) = [0.8643, 0.1357]$$

$$P(S_2|e_1) = \sum_{S_1} P(S_2|S_1)P(S_1|e_1) = [0.7321, 0.2679]$$

$$P(S_2|e_{1:2}) = \alpha P(e_2|S_2)P(S_2|e_1) = [0.5010, 0.4990]$$

$$P(S_3|e_{1:2}) = \sum_{S_2} P(S_3|S_2)P(S_2|e_{1:2}) = [0.5505, 0.4495]$$

$$P(S_3|e_{1:3}) = \alpha P(e_3|S_3)P(S_3|e_{1:2}) = [0.1045, 0.8955]$$

平滑

采用后向法计算概率：

$$P(e_3|S_3) = [0.2 \times 0.1, 0.7 \times 0.3] = [0.02, 0.21]$$

$$P(e_3|S_2) = \sum_{S_3} P(e_3|S_3)P(|S_3)P(S_3\S_2) = [0.0588, 0.153]$$

$$P(e_{2:3}|S_1) = \sum_{S_2} P(e_2|S_2)P(e_3|S_2)P(S_2|S_1) = [0.0233, 0.0556]$$

与前向信息合并，归一化：

$$P(S_1|e_{1:3}) = \alpha P(S_1|e_1)P(e_{2:3}|S_1) = [0.7277, 0.2723]$$

$$P(S_2|e_{1:3}) = \alpha P(S_2|e_{1:2})P(e_3|S_1) = [0.2757, 0.7243]$$

$$P(S_3|e_{1:3}) = [0.1045, 0.8955]$$

比较滤波概率和平滑概率：

相比于比 = 过滤分析，平滑分析将学生开始睡眠质量差的时间提前了一步，并在最后一步整合了显示睡眠不足的未来观察结果。