中国科学院大学

考试日期：

课程编号：721009H

课程名称：矩阵分析与应用

任课教师：李保滨

试题专用纸

姓名__________ 学号__________ 成绩__________

本试题共八题，满分 100，要求全做，答案请写在答题纸上。

一、判断下面说法是否正确。（15 分）

X 1.高斯消去法求解 $n\times n$ 线性方程组时，使用乘法次数为 $\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{n}{3}$， Gauss-Jordan 方法使用乘法次数为 $\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}$；

✓ 2. $rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$；

✓ 3. Hermitian 矩阵不一定是对称矩阵，但对称矩阵一定是 Hermitian 矩阵；

4.矩阵 $A=[a_{ij}]$ 是反对称矩阵（skew symmetric matrix）， 那么对角线元素 $a_{ii}=0$；

5. 矩阵 $U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i & -1+i\\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}$ 为酉矩阵；

X 6. $trace(ABC)=trace(CAB)=trace(BAC)$ ；

X 7. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，$R(A^TA)=R(A)$；

X 8. A 为 $m\times n$ 的矩阵，且满足 $A^TA=0$，那么矩阵 $A=0$；

X 9.矩阵 $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵；

X 10. $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det(AD)-\det(BC)$；

X 11. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，$\|A\|_F=\|A^*\|_F$；

✓ 12.如果 $\sigma(A)=\sigma(B)$，那么矩阵 A 和 B 有相同的特征多项式（Characteristic Polynomial）；

X 13.如果矩阵 A 和 B 都为对称矩阵，那么两个矩阵的乘积 AB 也为对称矩阵；

✓ 14.对于 $n\times n$ 的矩阵 A，有 $R(A)\oplus N(A)=R^n$；

X 15. $A=\begin{pmatrix}5+i & -2i\\ 2 & 4+2i\end{pmatrix}$ 为 Normal matrix。 $\begin{pmatrix}5-i & 2\\ 2i & 4-2i\end{pmatrix}$

$A^T=A$ $\quad xy=yx$

$B^T=B$

$AB=A^TB^T$

$A^*A=A\cdot A^*$

$A^*A=$ 24

$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}i & -2i\\ 0 & 2i\end{pmatrix}=$

$A^*=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}i & -2i\\ 0 & 2i\end{pmatrix}$

$A^*A=(x-y)(x+y)=x^2+y^2+xy-yx$

$AA^*=(x+y)(x-y)=$

二、（1）写出三维空间中分别绕 x 轴、y 轴和 z 轴旋转 θ 角的旋转矩阵；（3 分）

（2）写出矩阵 1-Norm,2-Norm 和 ∞-Norm 的定义。（3 分）

三、（1）简要说明所有实矩阵 $A_{m\times n}$ 构成实数域 R 上的向量空间；（10 分）

（2）并说明其中零元素的唯一性。（5 分）

四、设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

（1） 求矩阵 A 的 LU 分解 $PA=LU$；（10 分）

（2） 使用 LU 分解求解线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{b}=(3,60,1,5)^T$；（7 分）

五、（1）写出 Classical Gram-Schmidt 实现算法；（5 分）

（2）设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

使用 Gram-Schmidt 正交化方法求出矩阵 A 的 QR 分解。（12 分）

六、设

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & -14 & -3 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

（1）使用 Householder reduction 方法，找出 $R(A)$ 的一组标准正交基；（12 分）

（2）使用 Householder reduction 方法计算 $Ax=b$ 的最小二乘解。（7 分）

七、设 A 为 $n\times n$ 的矩阵，证明：（1）$|trace(A)|^2\leq n\,trace(A^*A)$；（5 分）

（2）如果 A 为对称矩阵（symmetric matrix），$index(A)\leq 1$。（6 分）