《矩阵分析与应用》第1 次作业

姓名：<u>谷绍伟</u>　　学号：<u>202418020428007</u>

1：对于线性方程组

$$\begin{cases} 0.835x + 0.667y = 0.168 \\ 0.333x + 0.266y = 0.067 \end{cases}$$

记矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ 为此线性方程组的系数矩阵和增广矩阵。分别使用 5 个和 6 个有效数字计算矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ 的 Rank，并判断方程组是否可解。

答：根据题意，有：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 0.835 & 0.667 & 0.168 \\ 0.333 & 0.266 & 0.067 \end{array}\right]$$

用五位有效数字计算，得到：$-0.333/0.835 \approx -0.39880$，则五位有效数字下，$0.266 - 0.667 \times 0.39880 = 0.266 - 0.26600 = 0$。则矩阵 $\mathbf{A}$ 通过第一行乘以 -0.39880 加上第二行进行消元，五位有效数字下第二行全为 0，即 $rank(\mathbf{A}) = 1$。而 $0.067 - 0.39880 \times 0.168 = 0.067 - 0.066998 = 2 \times 10^{-6}$，增广矩阵 $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ 第二行有非零元素，则 $rank((\mathbf{A}|\mathbf{b})) = 2$，方程组无解。

用六位有效数字计算，得到 $-0.333/0.835 \approx -0.398802$。$0.266 - 0.667 \times 0.398802 = 0.266 - 0.266001 = -1 \times 10^{-6}$，矩阵 $\mathbf{A}$ 消元后第二行有非零元素，则 $rank(\mathbf{A}) = 2$。同时，$0.067 - 0.398802 \times 0.168 = 0.067 - 0.0669987 = 1.3 \times 10^{-6}$，消元后增广矩阵 $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ 第二行有非零元素，则 $rank((\mathbf{A}|\mathbf{b})) = 2$，方程组有唯一解。

2：$\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 的矩阵，分别计算 $\mathbf{Ae_j}$、$\mathbf{e_i^T Ae_j}$，这里 $\mathbf{e_i}$ 和 $\mathbf{e_j}$ 分别为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 的第 i 列和第 j 列。

答：$\mathbf{Ae_j} = [a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}]^T$，即为矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 j 列元素组成的列向量。

$\mathbf{e_i^T Ae_j} = a_{ij}$, 即为矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列元素。

3：如果 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 都为 $n \times n$ 的矩阵，证明：$trace(\mathbf{ABC}) = trace(\mathbf{BCA})$.

答：

$$
\begin{aligned}
trace(\mathbf{ABC}) &= \sum_{p=1}^{n}(\mathbf{ABC})_{pp} \\
&= \sum_{p=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{pk}b_{kj})c_{jp}) \\
&= \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}c_{jp}a_{pk} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{pk}(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}c_{jp}) \\
&= trace(\mathbf{BCA})
\end{aligned}
$$

4： 简要说明：两个上（下）三角矩阵相乘仍为上（下）三角矩阵。

答： 另 **A**、**B** 为两个下三角矩阵，$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$，则有：

$$
c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj}
$$

由于 **A**、**B** 是下三角矩阵，则当 $i < j$ 时，有 $a_{ij} = 0$、$b_{ij} = 0$，则：

$$
\sum_{k=1}^{i} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \cdot 0 = 0
$$

$$
\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i+1}^{n} 0 \cdot b_{kj} = 0
$$

即 $i < j$ 时，$c_{ij} = 0$，所以 **C** 为下三角矩阵。

4： 给出实现矩阵转置的算法。(选做)

答： 如下图

```python
# 创建一个示例矩阵
matrix = [[1, 2, 3],
          [4, 5, 6]]

# 使用列表推导式来转置矩阵
transposed_matrix = [[matrix[j][i] for j in range(len(matrix))] for i in range(len(matrix[0]))]

print("原始矩阵:")
for row in matrix:
    print(row)
print("转置后的矩阵:")
for row in transposed_matrix:
    print(row)

'''
输出:
原始矩阵:
[1, 2, 3]
[4, 5, 6]
转置后的矩阵:
[1, 4]
[2, 5]
[3, 6]
'''
```