《矩阵分析与应用》第5 次作业

姓名：谷绍伟　　　学号：202418020428007

1. $\mathbf{A}(x,y,z)=(x+2y-z,-y,x+7z)$ 为 R^3 的一个线性算子，记 $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$，$\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(1) 计算 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}$.

(2) 求矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}=\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}\mathbf{Q}$ 成立.

答： (1)：

记

$$\mathcal{B}=\left\{\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{B}'=\left\{\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u_1})=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{u_1}+0\mathbf{u_2}+\mathbf{u_3}\Rightarrow[\mathbf{A}(\mathbf{u_1})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u_2})=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=2\mathbf{u_1}-\mathbf{u_2}+0\mathbf{u_3}\Rightarrow[\mathbf{A}(\mathbf{u_2})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u_3})=\begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}=-\mathbf{u_1}+0\mathbf{u_2}+\mathbf{u_3}\Rightarrow[\mathbf{A}(\mathbf{u_3})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}$$

因此 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&0\\1&0&7\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{A}(\mathbf{v_1})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{v_2}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\mathbf{v_1} - 2\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{A}(\mathbf{v_2})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{v_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = 3\mathbf{v_1} - 9\mathbf{v_2} + 8\mathbf{v_3} \Rightarrow [\mathbf{A}(\mathbf{v_3})]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

因此 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

(2)：
可知，当 $\mathbf{Q} = [\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 时，有 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{Q^{-1}}[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}\mathbf{Q}$。则满足条件的矩阵 $\mathbf{Q}$ 为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^4 的一个线性算子，其定义为 $\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, x_2 + x_4, 2x_3 - x_4, x_3 + x_4)$，令 $\mathcal{X} = span\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$，试说明 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，并计算 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{}\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.

答： 由于 $\mathbf{T}(\mathbf{e_1}) = \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1}$，$\mathbf{T}(\mathbf{e_2}) = \mathbf{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$。则 $\forall \mathbf{x} = \alpha\mathbf{e_1} + \beta\mathbf{e_2} \in \mathcal{X}$，都有 $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\alpha\mathbf{e_1} + \beta\mathbf{e_2}) = \alpha\mathbf{e_1} + \beta(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) = (\alpha + \beta)\mathbf{e_1} + \beta\mathbf{e_2} \in \mathcal{X}$，因此 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间。

$$[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{}\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\} = \big([\mathbf{T}_{/\mathcal{B}}(\mathbf{e_1})]_{\mathcal{B}} | [\mathbf{T}_{/\mathcal{B}}(\mathbf{e_2})]_{\mathcal{B}}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 对于 $\mathcal{R}^{2\times 2}$ 空间，$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 为其一组基，对于该空间中任意矩阵 $\mathbf{A}$，线性算子 $\mathbf{T}$ 定义如下：

$$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A^T}}{2}$$

计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$.

答： 记

$$\mathcal{B}=\left\{\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\mathbf{u_4}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u_1})=\frac{\mathbf{u_1}+\mathbf{u_1}^T}{2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\mathbf{u_1}\Rightarrow[\mathbf{T}(\mathbf{u_1})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u_2})=\frac{\mathbf{u_2}+\mathbf{u_2}^T}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\mathbf{u_2}+\frac{1}{2}\mathbf{u_3}\Rightarrow[\mathbf{T}(\mathbf{u_2})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u_3})=\frac{\mathbf{u_3}+\mathbf{u_3}^T}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\mathbf{u_2}+\frac{1}{2}\mathbf{u_3}\Rightarrow[\mathbf{T}(\mathbf{u_3})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u_4})=\frac{\mathbf{u_4}+\mathbf{u_4}^T}{2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\mathbf{u_4}\Rightarrow[\mathbf{T}(\mathbf{u_4})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

因此，$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.