# Lógica Computacional - TP1 Exercício 1 - G01

Bruno Dias da Gião A96544, João Luis da Cruz Pereira A95375, David Alberto Agra A95726 October 1, 2023

## 1 Exercício 1 - Enunciado

- 1. Pretende-se construir o horário semanal de aulas de uma turma.
  - 1. Existe um conjunto de salas S classificadas em "grandes" e "pequenas".
  - 2. O tempo do horário está organizado em "slots" de uma hora. O total do tempo disponível é 5 horas de manhã e 5 horas às tarde.
  - 3. Existe um conjunto D de disciplinas. Cada disciplina tem um atributo  $d \in \{1,2\}$  que classifica a duração de cada sessão (um ou dois "slots"), um atributo  $a \in \{2,3\}$  que define o número de sessões semanais e um atributo  $s \in \{0,1\}$  que diz se a sessão necessita de uma sala grande ou não.
  - d. Existe um conjunto P de professores. Cada professor tem associado um conjunto h das disciplinas que está habilitado a lecionar.
  - e. O horário está organizado em sessões concorrentes onde cada sessão é definido por uma disciplina desce que salas e professores verifiquem as seguintes restrições.
    - 1. Para cada disciplina todas as aulas decorrem na mesma sala e com o mesmo professor.
    - 2. O número total de horas lecionadas por cada professor está num intervalo de  $\pm 20\%$  do número médio de horas lecionadas pela totalidade dos professores.
    - 3. Nenhuma sala pode ser ocupada simultaneamente por mais do que uma aula e nenhum professor pode lecionar simultaneamente mais do que uma aula.
    - 4. Em cada disciplina, cada aula é lecionada por um professor habilitado para essa disciplina e ocorre numa sala de tamanho apropriado à disciplina.

Use o package ortools para encontrar uma solução que verifique todas as restrições e maximize o número de partes de dia (manhãs ou tardes) que estão livres de qualquer aula.

## 2 Exercício 1 - Solução

## 2.1 Exercício 1 - Restrições e Metodologia

Os inputs seguirão o seguinte formato, S, D, P sendo inputs númericos que remetem para o tamanho dos conjuntos descritos no enunciado e gp, ph, dd, na, ts sendo arrays que contêm informação sobre as salas, docentes e disciplinas.

- gp será um array booleano onde o sinal positivo 1 representa uma sala de tamanho grande e o bit 0 representa uma sala pequena;
- ph será uma matriz booleana  $D \times P$  onde cada coluna representa uma disciplina e as linhas representam a equipa docente, com informação sobre se cada docente está habilitado para ensinar uma dada disciplina.

- dd será um array com os elementos do atributo d descrito no enunciado, isto é,  $d \in \{1, 2\}$ , que será a informação sobre quantas horas cada aula de uma disciplina dura.
- na é um array com os elementos do atributo a descrito no enunciado, isto é,  $a \in \{2,3\}$ , que representa quantas aulas semanais cada disciplina tem.
- ts é um array booleano com a informação sobre se uma dada disciplina necessita ou não de uma sala grande.

Como, por exemplo, o seguinte conjunto de *input*:

```
S = 3

D = 3

P = 3

gp = [0, 1, 1]
ph = [[0, 1, 0], [1, 1, 0], [0, 0, 1]]
dd = [2, 2, 2]
na = [2, 2, 2]
ts = [0, 1, 0]
```

De forma a encontrar solução para este problema, utilizaremos o Solver de Programação de Inteiros com restrições, SCIP, proveniente do package ortools

```
from ortools.linear_solver import pywraplp
solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('SCIP')
```

Começamos por criar o dicionário onde iremos guardar a ocorrência de aulas num determinado dia, hora, sala, disciplina e professor. O solver preencherá com uma flag binária, indicando a existência de aulas num dado *slot*, através de uma BoolVar.

De seguida criamos dois dicionários auxiliares que irão guardar qual é a sala de cada disciplina e qual o professor de cada discilina, conseguindo assim assegurar a unicidade de sala e professor por disciplina.

```
for s in range(S):
    sala_disc[s] = {}
    for d in range(D):
        sala_disc[s][d] = solver.BoolVar("[%i][%i]" % (s, d))

for d in range(D):
```

```
disc_prof[d] = {}
for p in range(P):
    disc_prof[d][p] = solver.BoolVar("[%i][%i]" % (d, p))
```

Esta restrição garante que a duração de cada aula está correta, para isso estamos a percorrer todos os parâmetros (dias, horas, salas, disciplinas, professores) e para cada disciplina verificamos qual a duração de aula pretendida (1 ou 2 horas).

Verificamos também casos base (1º hora da manhã, última hora da manhã, 1º hora da tarde, última hora da tarde). Fazemos isto pois no caso de a duração da aula ser de duas horas queremos verificar se há uma aula da mesma disciplina na hora anterior ou na hora seguinte. Para isso fazemos o somatório da hora anterior com a hora seguinte.

Nos restantes casos só temos que verificar a hora seguinte quando é a  $1^{\circ}$  hora manhã/tarde ou a hora anterior quando é a última hora manhã/tarde.

```
# Duração de aula correta
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha + horas_tarde):
        for d in range(D):
            for s in range(S):
                for p in range(P):
                    if (dd[d] == 2 and hora != 0 and hora != horas_manha-1 and
                        hora != horas manha and hora != horas manha+horas tarde-1):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <= solver.Sum(h[dia][h1][s][d][p]</pre>
                                         for h1 in range(hora-1, hora+2, 2)))
                    elif (dd[d] == 2 and hora == horas_manha-1):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] \leftarrow h[dia][hora-1][s][d][p])
                    elif (dd[d] == 2 and hora == horas_manha):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <= h[dia][hora+1][s][d][p])
                    elif (dd[d] == 2 and hora == 0):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <= h[dia][hora+1][s][d][p])
                    elif (dd[d] == 2) and hora == horas_manha+horas_tarde-1:
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <= h[dia][hora-1][s][d][p])
                    else:
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] == 0)
```

Nesta situação, "bloqueamos" cada disciplina e de seguida percorremos todos os parâmetros para a mesma e verificamos que o somatório do número de aulas dessa disciplina é igual ao número de aulas a multiplicar pela duração da mesma.

Para confirmar que o professor atribuído pode dar a disciplina fazemos o contrário e encontramos todas as disciplinas que o professor não está habilitado a dar a disciplina e colocamos todas as

ocorrências dessa disciplina com esse professor como 0 (Não há aula).

Adicionamos esse valor também ao dicionário auxiliar para posteriormente verificarmos que só há um professor por cada disciplina.

```
# Professor poder dar a disciplina
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for s in range(S):
            for d in range(D):
                for p in range(P):
                     if ph[p][d] == 0:
                         solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] == 0)
                         solver.Add(disc_prof[d][p] == 0)
```

No caso de verificar que a sala tem o tamanho adequado à disciplina, usamos um processo idêntico ao de verificar que o professor pode dar a disciplina.

Percorremos todos os parâmetros e de seguida verificamos se o tamanho da sala necessário para a disciplina é diferente do tamanho da sala.

De seguida adicionamos ao dicionário principal esse valor e também ao auxiliar para posteriormente verificarmos que só há uma sala por cada disciplina.

Um professor só pode lecionar uma aula em cada *slot* de hora, então vamos confirmar que em cada dia, em cada hora e para cada professor, o número total de horas de aulas é no máximo 1.

Numa hora só pode haver um total de uma aula de cada disciplina, por isso percorremos os dias, as horas e as disciplinas e verificamos que o somatório para cada disciplina em cada sala e para cada professor é no máximo 1.

```
# Não pode haver aulas da mesma disciplina ao mesmo tempo
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for d in range(D):
```

Foi estipulado que cada disciplina só poderia ter um professor. Sendo assim, adicionemos a restrição que para cada disciplina, ao acedermos ao dicionário auxiliar (que nos diz qual professor leciona cada disciplina) iremos ter uma só entrada verdadeira.

Após isso percorremos todos os slots de aulas e verificamos que o valor no nosso dicionário horário será sempre menor ou igual que o do dicionário auxiliar.

Ou seja, não há aula nessa entrada ou então há aula e o professor está correto.

Para verificarmos que só existe uma sala para cada disciplina efetuamos o mesmo processo que foi descrito na restrição em cima. Confirmando assim que só há uma sala e que está bem atribuída em todas as ocorrências.

A carga horária de qualquer membro da equipa docente, tem de seguir uma dada fórmula:

Seja  $Avg \in \mathbb{Q}$ , na e dd os parámetros de input descritos no início da presente secção,  $ub, lb \in \mathbb{N}$  e dda, naa são estruturas arbitrárias que representam os  $inputs\ dd$  e na adaptados às disciplinas associadas a cada docente pelo Solver:

$$Avg := \frac{\sum_{i:=0}^{D} (na_i \times dd_i)}{P}; lb, ub := 0.8 \times Avg, 1.2 \times Avg$$

Temos que:

$$\forall_{i:=0}^{P}(lb \leq \sum_{i:=0}^{\#dda_i}((dda_i)_j \times (naa_i)_j) \leq ub)$$

Tem de se verificar.

Para tal efeito, tratamos de calcular a média de cargos horários por todos os professores *a priori* e finalmente aplicar a fórmula, embora, em vez de utilizar estruturas auxiliares, aproveitamos o dicionário anterior disc\_prof para calcular ou o número de horas de cada docente, ou se não existem essas horas, aproveitando o facto de disc\_prof ser uma variável booleana.

De forma a maximizar o número de tardes e manhãs livres, tentamos vários métodos de contar o número destas partes. Que, infelizmente não funcionaram ou então ao realizar o *maximize*, o resultado não se alterava.

Então para tentar maximizar ao máximo sem utilizarmos as partes de dia, tentamos maximizar o número de aulas por cada hora. Este método melhorou significativamente o resultado mas, mesmo assim, existe sempre algumas partes de dia que poderiam ficar livres e não ficam. De qualquer das formas, é um resultado aceitável.

Quanto ao método de resolução, criamos uma lista de IntVar que irá guardar o número de aulas em cada hora e uma lista de número máximo de horas que irá guardar os 5 maiores valores de números de aulas em uma hora. Após essas listas serem preenchidas fazemos maximize do somatório do max hora.

```
if sum_hora[dia][hora] >= max_hora[d]:
    max_hora[d] = sum_hora[dia][hora]
```

### 2.2 Exercício 1 - Testes

Primeiramente, teremos o exemplo simples (demonstrado no ínicio do relatório) que consiste num input generico, onde:

$$S := 3; D := 3; P := 3$$

Especificamente:

$$gp := [0,1,1]; ph := [[0,1,0],[1,1,0],[0,0,1]]; dd := [2,2,2];$$
 
$$na := [2,2,2]; ts := [0,1,0]$$

Que, passando as restrições e maximizações anteriores, resultará no seguinte resultado:

#### Solução encontrada

Dia 3:

```
Dia 1:
Hora 1: Sala 3, Disciplina 2, Professor 1
Hora 2: Sala 3, Disciplina 2, Professor 1
Hora 3:
Hora 4:
Hora 5:
Hora 6: Sala 1, Disciplina 3, Professor 3
Hora 7: Sala 1, Disciplina 3, Professor 3
Hora 8:
Hora 9:
Hora 10:
Dia 2:
Hora 1: Sala 1, Disciplina 1, Professor 2
Hora 2: Sala 1, Disciplina 1, Professor 2
Hora 3:
Hora 4:
Hora 5:
Hora 6:
Hora 7:
Hora 8:
Hora 9:
Hora 10:
```

```
Hora 1:
    Hora 2:
    Hora 3:
    Hora 4:
    Hora 5:
    Hora 6:
    Hora 7:
    Hora 8:
    Hora 9: Sala 1, Disciplina 3, Professor 3
    Hora 10: Sala 1, Disciplina 3, Professor 3
    Dia 4:
    Hora 1:
    Hora 2:
    Hora 3:
    Hora 4:
    Hora 5:
    Hora 6:
    Hora 7:
    Hora 8:
    Hora 9:
    Hora 10:
    Dia 5:
    Hora 1:
    Hora 2:
    Hora 3:
    Hora 4:
    Hora 5:
    Hora 6:
    Hora 7:
    Hora 8:
    Hora 9: Sala 1, Disciplina 1, Professor 2
         Sala 3, Disciplina 2, Professor 1
    Hora 10: Sala 1, Disciplina 1, Professor 2
         Sala 3, Disciplina 2, Professor 1
[]: S = 3
    D = 3
    P = 3
```

```
gp = [0, 1, 1]
ph = [[0, 1, 0], [1, 1, 0], [0, 0, 1]]
dd = [2, 2, 2]
na = [2, 2, 2]
ts = [0, 1, 0]
```

Consideremos agora o seguinte conjunto de inputs cujo solver interpreta como um problema *infea-sible*.

Seja  $Avg \in \mathbb{Q}$ :

$$\begin{aligned} dd_0, na_0 &:= 1, 2; dd_1, na_1 &:= 2, 2; dd_2, na_2 &:= 2, 3; P &:= 3; D &:= 3; \\ Avg &:= \frac{\sum_{i:=0}^D (dd_i \times na_i)}{P} \end{aligned}$$

Sendo assim, o resultado de Avg será 4.

Seja dd\_atrib e na\_atrib o conjunto com a duração e número de aulas de cada disciplina atribuida a cada docente pelo Solver, pela fórmula anterior:

$$\forall_{i:=0}^P (3 \leq \sum_{j:=0}^{\#dda_i} ((dda_i)_j \times (naa_i)_j) \leq 5)$$

Trivialmente, uma das disciplinas (onde i := 2) terá uma duração semanal de 6 horas, sendo assim, este problema nunca será possível com esta restrição:

```
[]: S = 3

D = 3

P = 3

gp = [0, 1, 1]

ph = [[0, 1, 0], [1, 1, 0], [0, 0, 1]]

dd = [1, 2, 2]

na = [2, 2, 3]

ts = [0, 1, 0]
```

Os seguintes dois exemplos são inputs com solução encontrada pelo Solver, a sua criação segue o mesmo padrão que os anteriores.

```
[]: S = 3

D = 4

P = 4

gp = [0, 1, 1]

ph = [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0]]

dd = [2, 2, 2, 2]

na = [3, 2, 2, 3]

ts = [0, 1, 1, 0]
```

```
[]: S = 3

D = 4

P = 4

gp = [0, 1, 1]

ph = [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0]]

dd = [2, 2, 2, 2]

na = [2, 2, 2, 2]

ts = [0, 1, 1, 0]
```

### 2.3 Exercício 1 - Anexo

```
[]: from ortools.linear_solver import pywraplp
     solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('SCIP')
     dias = 5
    horas_manha = 5
    horas_tarde = 5
    h = \{\}
     sala_disc = {}
     disc_prof = {}
     for dia in range(dias):
         h[dia] = \{\}
         for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
             h[dia][hora] = {}
             for s in range(S):
                 h[dia][hora][s] = {}
                 for d in range(D):
                     h[dia][hora][s][d] = {}
                     for p in range(P):
                         h[dia][hora][s][d][p] = solver.
      →BoolVar("[%i][%i][%i][%i]"
                                                                 % (dia, hora, s, d, u
      ((q⊷
     for s in range(S):
         sala disc[s] = {}
         for d in range(D):
             sala_disc[s][d] = solver.BoolVar("[%i][%i]" % (s, d))
     for d in range(D):
         disc_prof[d] = {}
         for p in range(P):
             disc_prof[d][p] = solver.BoolVar("[%i][%i]" % (d, p))
```

```
# Duração de aula correta
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha + horas_tarde):
        for d in range(D):
            for s in range(S):
                for p in range(P):
                    if (dd[d] == 2 and hora != 0 and hora != horas_manha-1 and
                        hora != horas_manha and hora !=_
 →horas_manha+horas_tarde-1):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p]
                                    <= solver.Sum(h[dia][h1][s][d][p]</pre>
                                                  for h1 in
                                                  range(hora-1, hora+2, 2)))
                    elif (dd[d] == 2 and hora == horas_manha-1):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <=_u
 →h[dia][hora-1][s][d][p])
                    elif (dd[d] == 2 and hora == horas_manha):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <=_u
 →h[dia][hora+1][s][d][p])
                    elif (dd[d] == 2 \text{ and hora} == 0):
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <=__
 →h[dia][hora+1][s][d][p])
                    elif (dd[d] == 2) and hora == horas_manha+horas_tarde-1:
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <=_u
 →h[dia][hora-1][s][d][p])
                    else:
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] == 0)
# Número de horas de aulas correto
for d in range(D):
    solver.Add(solver.Sum(h[dia][hora][s][d][p] for dia in range(dias)
                                          for hora in
→range(horas_manha+horas_tarde)
                                          for s in range(S)
                                          for p in range(P)
                          ) == na[d]*dd[d])
# Professor poder dar a disciplina
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for s in range(S):
            for d in range(D):
                for p in range(P):
                    if ph[p][d] == 0:
```

```
solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] == 0)
                        solver.Add(disc_prof[d][p] == 0)
# Sala tem o tamanho certo
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for p in range(P):
            for d in range(D):
                for s in range(S):
                    if ts[d] != gp[s]:
                        solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] == 0)
                        solver.Add(sala_disc[s][d] == 0)
# Uma aula por hora por professor
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for p in range(P):
            solver.Add(solver.Sum(h[dia][hora][s][d][p]
                                   for d in range(D)
                                   for s in range(S)) <= 1)</pre>
# Não pode haver aulas da mesma disciplina ao mesmo tempo
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for d in range(D):
            solver.Add(solver.Sum(h[dia][hora][s][d][p]
                                   for s in range(S)
                                   for p in range(P)) <= 1)</pre>
# Uma sala não pode estar ocupada por mais que uma disciplina na mesma hora
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for s in range(S):
            solver.Add(solver.Sum(h[dia][hora][s][d][p]
                                   for d in range(D)
                                   for p in range(P)) <= 1)</pre>
# Um professor por disciplina
for d in range(D):
    solver.Add(solver.Sum(disc_prof[d][p]
                           for p in range(P)) == 1)
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for s in range(S):
            for d in range(D):
                for p in range(P):
                    solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <= disc_prof[d][p])</pre>
```

```
# A mesma sala para cada disciplina
for d in range(D):
    solver.Add(solver.Sum(sala_disc[s][d]
                          for s in range(S)) == 1)
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for s in range(S):
            for d in range(D):
                for p in range(P):
                    solver.Add(h[dia][hora][s][d][p] <= sala_disc[s][d])</pre>
# Número de horas lecionadas de +/-20%
total = 0
for i in range(D):
    total += na[d]*dd[d]
media = total / P
lim_inf = round(media*0.8)
lim_sup = round(media*1.2)
for p in range(P):
    solver.Add(lim_inf <= solver.Sum(disc_prof[d][p] * na[d] * dd[d]</pre>
                                          for d in range(D))
               <= lim sup)
# Maximizar partes de dia livre
sum_hora = [[solver.IntVar(0, D, 'sum_hora')
             for hora in range(horas_manha+horas_tarde)]
            for dia in range(dias)]
max_hora = [solver.IntVar(0, D, 'max_hora')
            for d in range(0, 5)]
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        sum_hora[dia][hora] = solver.Sum(h[dia][hora][s][d][p]
                                          for s in range(S)
                                          for d in range(D)
                                          for p in range(P))
for dia in range(dias):
    for hora in range(horas_manha+horas_tarde):
        for d in range(D):
            if sum_hora[dia][hora] >= max_hora[d]:
                max_hora[d] = sum_hora[dia][hora]
```

```
solver.Maximize(solver.Sum(max_hora[d]
                         for d in range(D)))
def print_horario():
   print("----")
   for dia in range(dias):
       print(f"Dia {dia + 1}:")
       for hora in range(horas_manha + horas_tarde):
           if hora == 5:
               print()
           if hora != 9:
               print(f"Hora {hora + 1}:", end=" ")
           else:
               print(f"Hora {hora + 1}:", end=" ")
           for s in range(S):
               for d in range(D):
                   for p in range(P):
                       if h[dia][hora][s][d][p].solution_value() == 1 and__
 →sum(h[dia][hora][s][d][p].solution_value() for s in range(S) for d in_
 →range(D) for p in range(P)) > 1:
                          print(f"Sala {s + 1}, Disciplina {d + 1}, Professor⊔
 \hookrightarrow{p + 1}", end="\n\t ")
                       elif h[dia][hora][s][d][p].solution_value() == 1:
                          print(f"Sala {s + 1}, Disciplina {d + 1}, Professor
 \hookrightarrow \{p + 1\}", end="")
           print()
       print("----")
r = solver.Solve()
if r == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
   print("Solução encontrada")
   print_horario()
elif r == pywraplp.Solver.INFEASIBLE:
   print("Infeasible")
else:
   print("Não foi encontrada solução")
```