Lógica Computacional - TP1 Exercício 2 - G01

Bruno Dias da Gião A96544, João Luis da Cruz Pereira A95375, David Alberto Agra A95726

October 25, 2023

1 Exercício 2 - Enunciado

2. O Conway's Game of Life é um exemplo conhecido de um autómato celular . Aqui vamos modificar as regras do autómato de forma a usar um espaço de estados finito
   1. O espaço de estados é definido por uma grelha de células booleanas (morta=0/viva=1) de dimensão $N \times N$ (com $N > 3$) identificadas por índices $(i, j) \in \{1..N\}$. Estas $N \uparrow 2$ células são aqui referidas como "normais".
   2. Inicialmente todas as células normais estão mortas excepto as células $i, j \leq 3$ que estão vivas. Um estado onde todas as células normais estão mortas é um "estado de erro".
   3. Adicionalmente existem $2\,N + 1$ "células da borda" que correspondem a um dos índices, i ou j, ser zero. As células da borda têm valores constantes que, no estado inicial, são gerados aleatoriamente com uma probabilidade $1/2$ de estarem vivas.
   4. As células normais o autómato modificam o estado de acordo com a regra "B3/S23": i.e. a célula nasce (passa de 0 a 1) se tem exatamente 3 vizinhos vivos e sobrevive (mantém-se viva) se o número de vizinhos vivos é 2 ou 3, caso contrário morre ou continua morta.

A célula (i_0, j_0) *e* (i_1, j_1) *são vizinhas sse* $(i_0 - i_1 = \pm 1) \vee (j_0 - j_1 = \pm 1)$

Pretende-se:

```
1. Construir uma máquina de estados finita que represente este autómato.
2. Provar as seguintes propriedades:
    1. Nunca se alcança o estado de erro
    2. Nenhuma célula normal está permanentemente morta ou permanentemente viva.
```

2 Exercício 2 - Solução

Pretendemos construir a FSM que representa o autómato celular do GoL (Game of Life) e provar as duas propriedades do enunciado.

No entanto, de forma a verificar o funcionamento esperado deste autómato, começemos pela criação da FSM e com a criação de código que procure animar o autómato.

2.1 Criação da FSM e Animação do GoL

[1]:
```
from pysmt.shortcuts import Solver, Symbol,  And, Or, Implies, Not
from pysmt.shortcuts import Equals, Int, GT, LE, LT, Plus, Minus
from pysmt.shortcuts import is_sat, get_model, AllDifferent
```

```python
from pysmt.typing import INT
from random import choices
from pprint import pprint
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import colors
import numpy as np
```

Começemos por definir uma classe que defina os estados deste autómato.

Nesta conceção de estado, teremos informação sobre quais células estão vivas nomeadamente de células normais e de borda.

[2]:
```python
class ST:
    def __init__(self, s=''):
        self.living = []
        self.border = []
    def __str__(self):
        return f"({str(self.living), str(self.border)})"
```

Consideremos $N = \{0, \dots, 9\}$, teremos o conjunto $N \uparrow 2$ de cardinalidade 100 com um total de 121 células incluindo as *Border Cells*.

Ora, com isto, criemos o tabuleiro de jogo:

[3]:
```python
N = 10
table = [[Symbol('c'+str(i)+','+str(j)) for j in range(N+1)] for i in␣
 ↪range(N+1)]
```

Note-se também que o "Jogo da Vida" de Conway é **indecidível**, sendo assim, a cardinalidade do traço tenderá para o infinito.

Sendo assim, limitemos superiormente a execução por um número arbitrário:

[4]:
```python
M = 19
trace= [ST('ST'+str(i)) for i in range(M)]
```

Teremos então de inicializar a tabela com os requisitos, começemos por diferenciar células normais de células de fronteira:

```python
live_init_ncell = {table[1][1],table[1][2],table[1][3],
                   table[2][1],table[2][2],table[2][3],
                   table[3][1],table[3][2],table[3][3]}
for i in range(N+1):
    for j in range(N+1):
        if i == 0 or j == 0:
            bcell.add(table[i][j])
dead_init_ncell = {table[i][j] for i in range(N+1)
                               for j in range(N+1)
                        if table[i][j] not in live_init_ncell
                                      and table[i][j]
                                      not in bcell}
```

Com isto podemos definir a configuração inicial das células normais através de uma simples restrição lógica:

```
const_dead = Not(And(dead_init_ncell))
const_live = And(live_init_ncell)
normal = And(const_dead, const_live)
```

Com isto, podemos proceder a inicializar as células que se encontram na fronteira.

Ora, estas são inicializadas de forma aleatória com uma probabilidade de nascer de $\frac{1}{2}$.

De notar que uma biblioteca Standard (`random`) contem a subrotina (`choices`) que permite gerar resultados aleatórios com pesos.

```
distribution = [choices([False,True], [1/2,1/2]) for i in range(2*N+2)]
bcell_list = list(bcell)
if distribution[0][0]:
    bord = And(bcell_list[0])
else:
    bord = And(Not(bcell_list[0]))
for i in range(1, len(bcell_list)):
    if distribution[i][0]:
        bord = And(bord, bcell_list[i])
    else:
        bord = And(bord, Not(bcell_list[i]))
```

Com isto podemos definir a função init que coincidirá com a "entrada" no estado I da nossa máquina de estados finita:

```
[5]: def init(N, table, trace):
    live_init_ncell = set()
    bcell = set()
    dead_init_ncell = set()

    live_init_ncell = {table[1][1],table[1][2],table[1][3],
                   table[2][1],table[2][2],table[2][3],
                   table[3][1],table[3][2],table[3][3]}
    for i in range(N+1):
        for j in range(N+1):
            if i == 0 or j == 0:
                bcell.add(table[i][j])
    dead_init_ncell = {table[i][j] for i in range(N+1)
                                   for j in range(N+1)
                            if table[i][j] not in live_init_ncell
                                            and table[i][j]
                                            not in bcell}
    const_dead = Not(And(dead_init_ncell))
    const_live = And(live_init_ncell)
    normal = And(const_dead, const_live)
    #print(normal)
```

```
    distribution = [choices([False,True], [1/2,1/2]) for i in range(2*N+2)]
    bcell_list = list(bcell)
    if distribution[0][0]:
        bord = And(bcell_list[0])
    else:
        bord = And(Not(bcell_list[0]))
    for i in range(1, len(bcell_list)):
        if distribution[i][0]:
            bord = And(bord, bcell_list[i])
        else:
            bord = And(bord, Not(bcell_list[i]))
    global_const = And(normal, bord)
    return global_const
```

Agora, de forma a podermos implementar uma função de transição, procederemos com a implementação de alguma subrotina que conte o número de células vizinhas vivas e um procedimento que dite o que acontecerá a cada célula do tabuleiro:

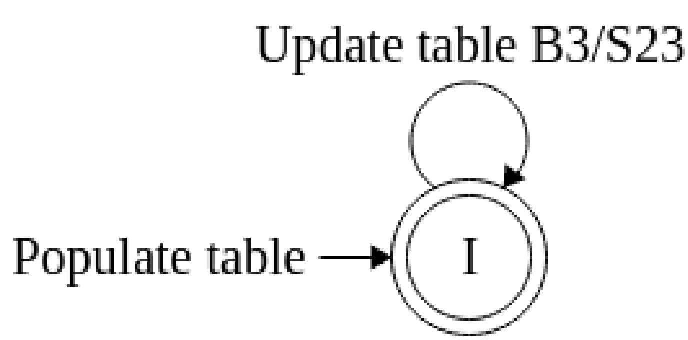
[6]:
```
def living_neigh(s, study, N, table):
    x, y = study
    # study_x != 0 study_y != 0
    # i_0 - i_1 = +- 1 OR j_0 - j_1 = +- 1
    living = []

    # normal line normal column
    if (x > 0 and x < N) and (y > 0 and y < N):
        for i in range(x-1,x+2):
            for j in range(y-1,y+2):
                if (abs(x-i) == 1 or abs(y-j) == 1):
                    if (table[i][j] in s.living or table[i][j] in s.border):
                        living.append((i,j))
    # final column normal line
    elif (x == N and y < N and y > 0):
        for i in range(x-1,x+1):
            for j in range(y-1,y+2):
                if (abs(x-i) == 1 or abs(y-j) == 1):
                    if (table[i][j] in s.living or table[i][j] in s.border):
                        living.append((i,j))
    # final column final line
    elif (x == N and y == N):
        for i in range(x-1,x+1):
            for j in range(y-1,y+1):
                if (abs(x-i) == 1 or abs(y-j) == 1):
                    if (table[i][j] in s.living or table[i][j] in s.border):
                        living.append((i,j))
    # final line normal column
```

```
    elif (x > 0 and x < N and y == N):
        for i in range(x-1,x+2):
            for j in range(y-1,y+1):
                if (abs(x-i) == 1 or abs(y-j) == 1):
                    if (table[i][j] in s.living or table[i][j] in s.border):
                        living.append((i,j))
    return len(living);
```

A implementação da regra B3/S23 é relativamente simples considerando a estrutura das instâncias de classe `ST`.

[7]:
```
def update_table(s, s_, N, table):
    prob = And(s.border)
    for i in range(1, N+1):
        for j in range(1, N+1):
            study = (i,j)
            n_nei = living_neigh(s, study, N, table)
            if n_nei == 3 and table[i][j] not in s.living:
                prob = And(prob, table[i][j])
            elif (n_nei < 2 or n_nei > 3):
                prob = And(prob, Not(table[i][j]))
            else:
                prob = And(prob, table[i][j])
    return prob
```

Notemos como as instâncias da classe `ST` não possuem program counter, isto porque a nossa máquina de estados consegue ser representada com um (ou dois) estados, nomeadamente o estado inicial `I` e um possível estado de erro `E`. O posterior estado será ignorado por questões de redundância. Então a nossa máquina pode ser representada pelo seguinte autómato:



Ou seja, temos uma Máquina de Estados finita definida do seguinte modo:

$$\langle Q, \delta, S \rangle \ ; \ Q := \{I\} \ , \ \delta := \{(I, I)\} \ , \ S := \{I\}$$

[8]:
```
def trans(s, s_, N, table):
    return And(update_table(s, s_, N, table))
```

Estamos finalmente em vias de resolver algum modo de animar o nosso problema, tentaremos, então animar a primeira configuração do Autómato Celular a ser estudado:

Comecemos por definir uma subrotina que preencha o traço com estados válidos representantes de um tabuleiro do Jogo:

[12]:
```
def generate_trace(trace, M, init, N, table):
    init = init(N,table,trace)
    with Solver() as solver:
        res = False;
        prop = init
        for t_ind in range(M-1):
            state = trace[t_ind]
            solver.push()
            solver.add_assertion(prop);
            if solver.solve():
                trace[t_ind].living = [table[i][j]
                                        for j in range(1,N+1)
                                        for i in range(1, N+1)
                                        if solver.get_value(table[i][j]).
↪constant_value()]
                trace[t_ind].border = [table[i][j]
                                        for j in range(N+1)
                                        for i in range(N+1)
                                        if (i == 0 or j == 0)
                                            and solver.
↪get_value(table[i][j]).constant_value()]
                prop = trans(trace[t_ind], trace[t_ind+1], N, table)
            solver.pop()
        solver.add_assertion(prop);
        if solver.solve():
            trace[-1].living = [table[i][j]
                                for j in range(1,N+1)
                                for i in range(1, N+1)
                                if solver.get_value(table[i][j]).
↪constant_value()]
            trace[-1].border = [table[i][j]
                                for j in range(N+1)
                                for i in range(N+1)
                                if (i == 0 or j == 0)
                            and solver.get_value(table[i][j]).
↪constant_value()]
```

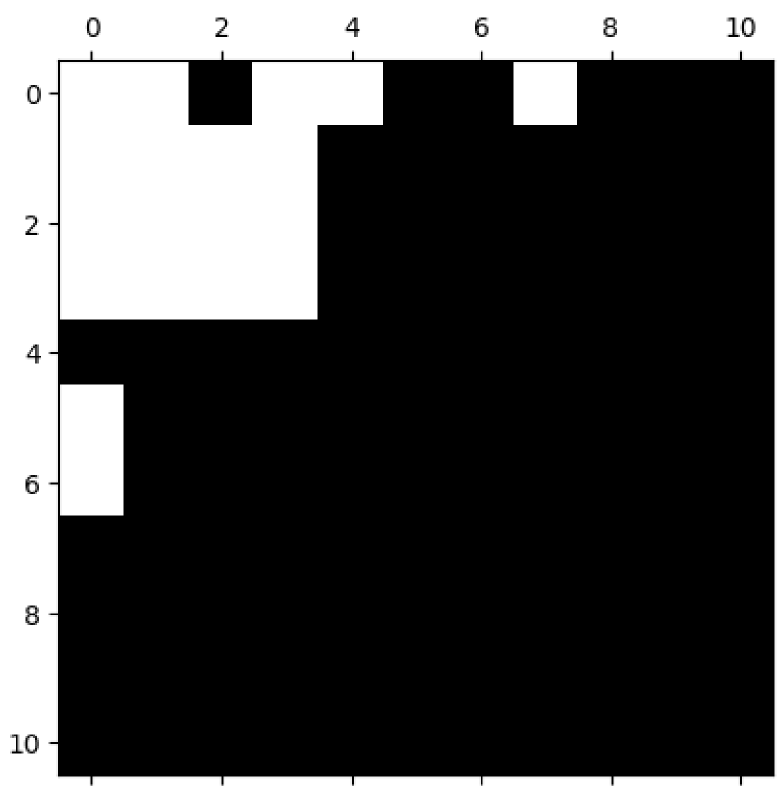
Trivialmente, através de `matplotlib`, podemos criar uma imagem que permite, assim, animar o tabuleiro:

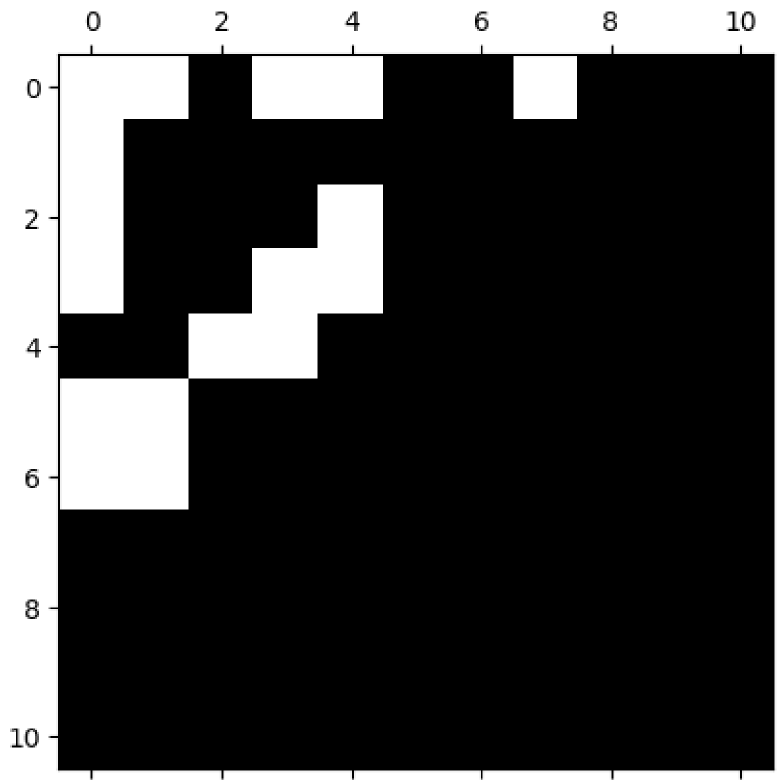
[13]:
```
def animate_trace(trace, t_ind, N, table):
    state = trace[t_ind]
    living = list()
    for i in range(N+1):
        living.append([])
        for j in range(N+1):
            if (table[i][j] in state.living
                or table[i][j] in state.border):
                living[i].append(True)
            else:
                living[i].append(False)
    plt.matshow(living , cmap='gray')
```

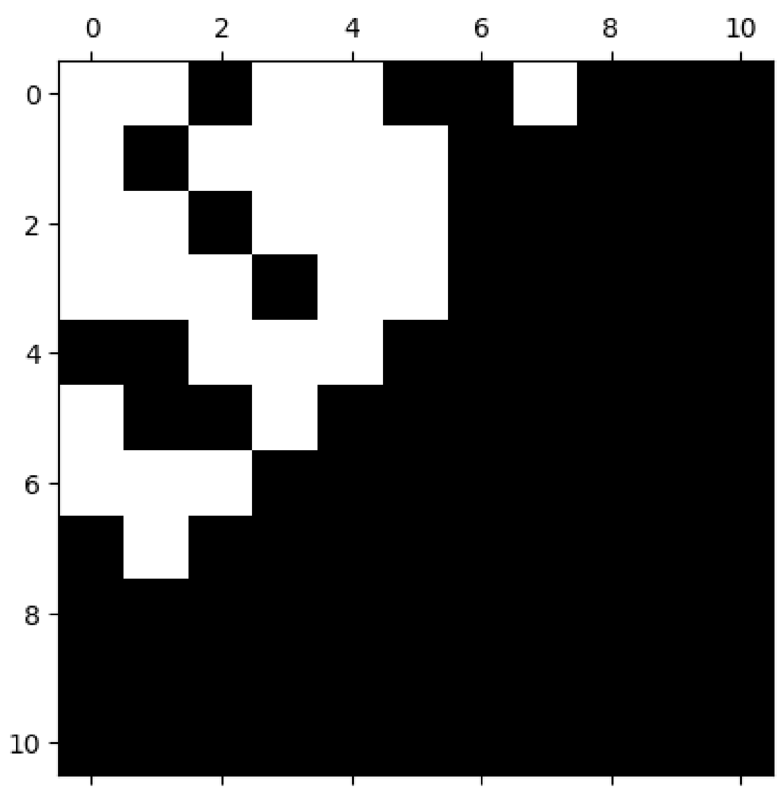
E, finalmente temos a nossa configuração inicial e algumas iterações mais do Jogo da Vida.

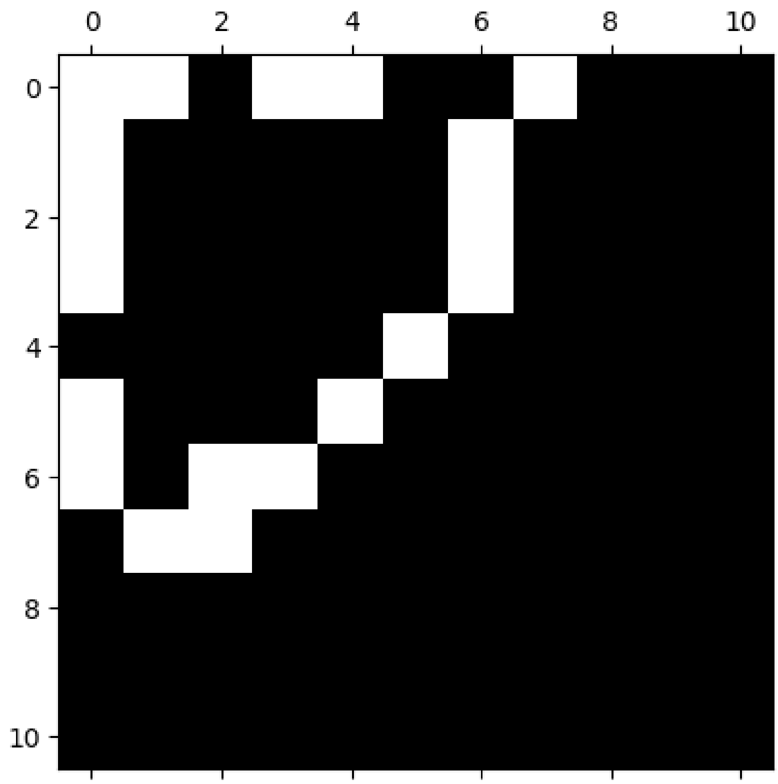
Esta será a configuração inicial que utilizaremos para provar as propriedades do enunciado.

[14]:
```
generate_trace(trace, M, init, N, table)
for i in range(5):
    animate_trace(trace, i, N, table)
```

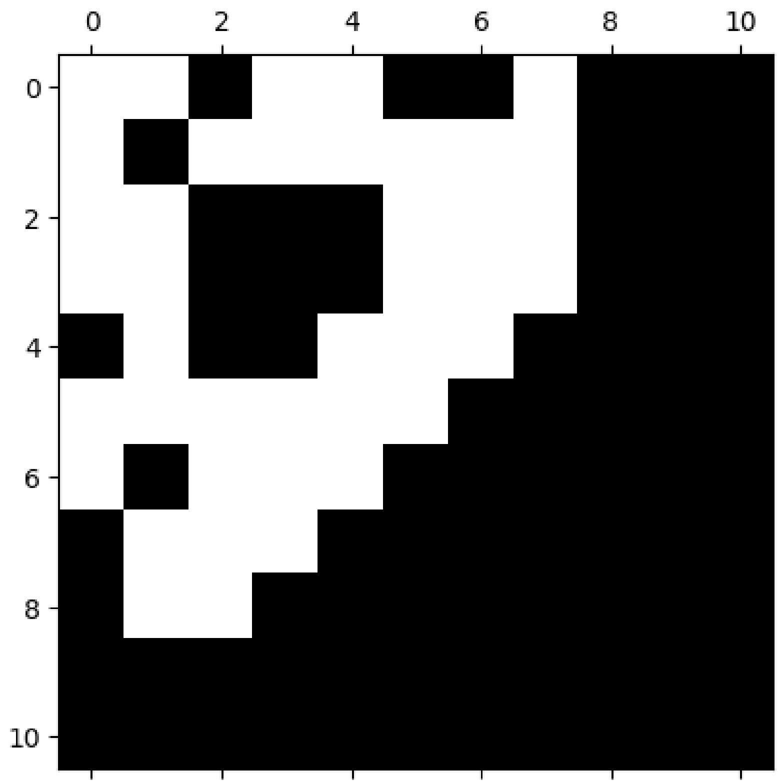



0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10


0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10



0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10



2.2 Verificação das Propriedades

Passaremos agora para a segunda parte do exercício, a prova de duas propriedades.

Consideremos, então, as proposições que queremos provar:

1. `Nunca se alcança o estado de erro`
2. `Nenhuma célula normal está permanentemente morta ou permanentemente viva.`

Notemos que é possivel encontrar proposições em lógicas SMT e FOL exatamente equivalentes às anteriores, nomeadamente:

1. `A existência de uma célula viva em qualquer estado do traço é sat;`
2. `A eventual alteração de estado pelo menos uma vez de todas as células ao longo do traço`

Que por sua vez podemos negar de tal forma a poder utilizar em algoritmos BMC:

1. ``A variável `living` estar vazia em algum estado do traço é unsat;``
2. `Existir alguma célula invariável ao longo do traço é unsat.`

De salientar a linguagem usada nestas propriedades, "eventual" e "qualquer", sendo assim, temos que podemos utilizar uma função `bmc_always` para 1, sendo esta uma invariante do problema e `bmc_eventually` para 2.

Definemos:

```
[17]: def bmc_always(init, trans,inv,M,N,trace, table):
          #generate_trace(trace, M, init, N, table)
          for k in range(M):
              with Solver(name="z3") as s:
                  s.add_assertion(inv(trace, M, N, table, k-1))
                  if s.solve():
                      print(f"> A propriedade não é invariante para traço de tamanho␣
       ↪{M}.")
                      print([state.living for state in trace])
                      return
          print(f"> A propriedade é invariante para traço de tamanho {M}.")
```

```
[18]: def bmc_eventually(init, trans,prop,M,N,trace, table):

          with Solver() as solver:

              never_occurs = Not(prop(trace, M, N, table, 0))
              solver.add_assertion(never_occurs)

              if solver.solve():
                  print(f"> A propriedade não se verifica para traço de tamanho {M}.")
                  return
              else:
                  print(f"> A propriedade verifica-se para traço de tamanho {M}.")
```

A tradução da negação dos problemas vistos previamente para código PySMT é trivial:

```
[19]: def prop1(trace, M, N, table, ind):
          return Equals(Int(len(trace[ind].living)), Int(0))
```

De notar, no entanto, o modo como se verifica se existem células sem alterações no traço, isto é:

$$n := \sum_{k=0}^{\#\text{trace}} 1 \times (\text{table[i][j]} \in \text{trace[k].living?}), \forall_{(i,j)\in N\uparrow 2}$$

$$n = \#\text{trace} \lor n = 0$$

Onde o primeiro caso denota a permanência de uma célula num estado vivo e o segundo a permanência como célula morta.

```
[20]: def prop2(trace, M, N, table, ind):
          return And(And(Not(Equals(Int(sum(table[i][j] in trace[k].living for k in␣
       ↪range(M))), Int(M))),
                         Not(Equals(Int(sum(table[i][j] in trace[k].living for k in␣
       ↪range(M))), Int(0)))
                    )
                  for i in range(1, N+1) for j in range(1, N+1))
```

Com isto só nos resta verificar a validade das propriedades:

[21]:
```
bmc_always(init, trans,prop1,M,N,trace, table)
```

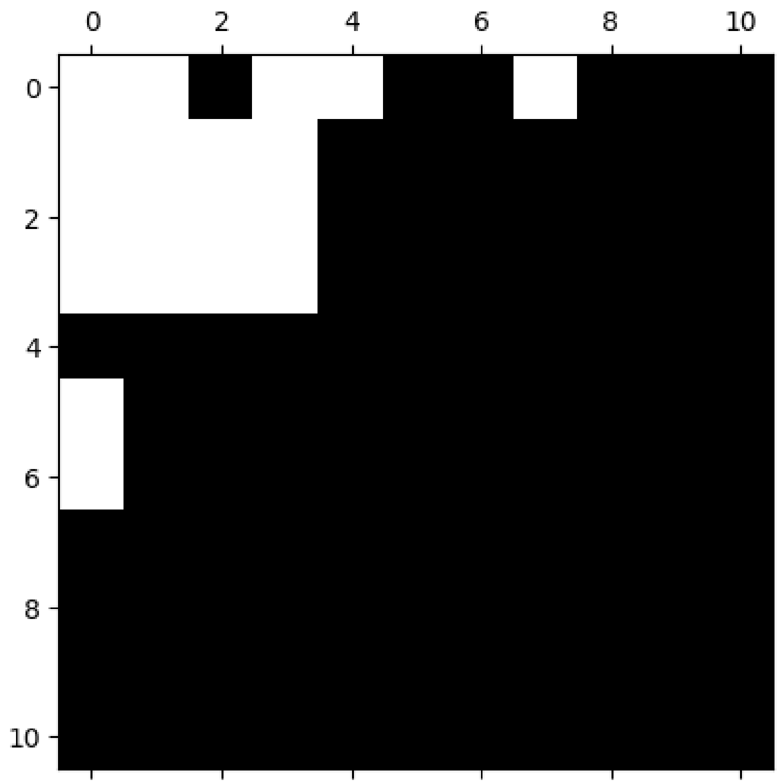
```
> A propriedade é invariante para traço de tamanho 19.
```

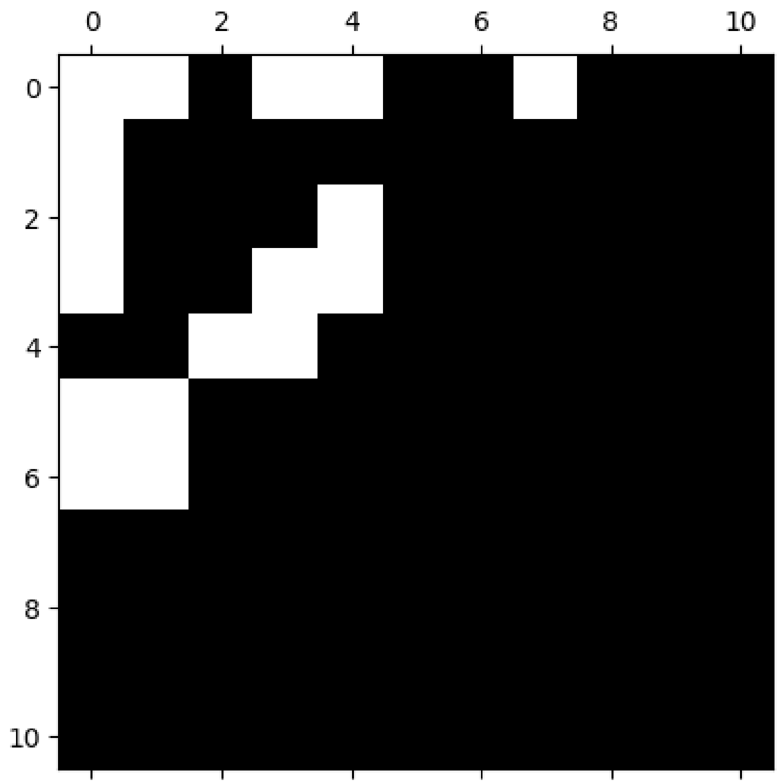
[22]:
```
bmc_eventually(init, trans,prop2 ,M,N,trace, table)
```

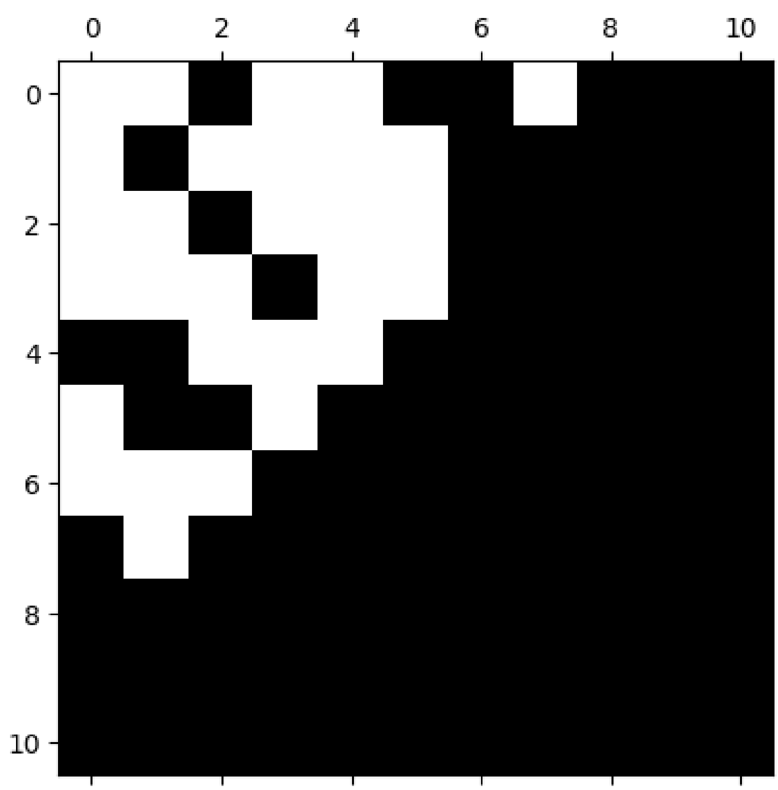
```
> A propriedade verifica-se para traço de tamanho 19.
```

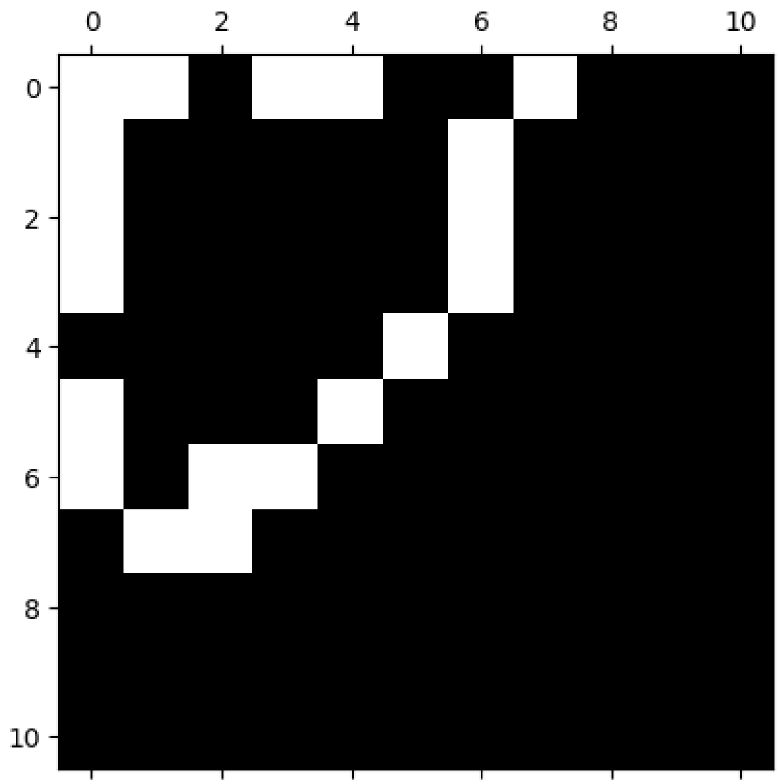
Visualizemos o traço deste exemplo na sua totalidade:

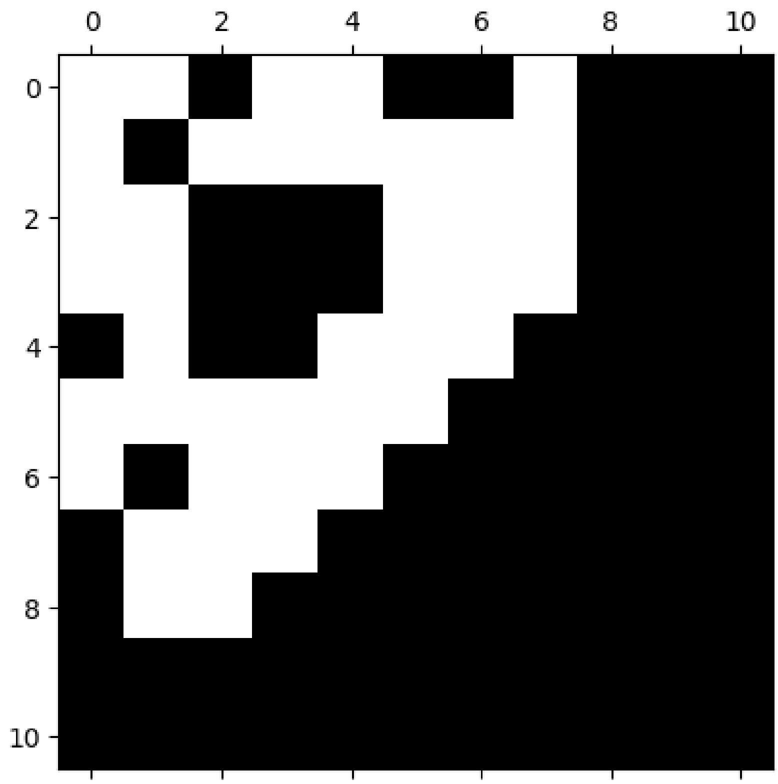
[25]:
```
for i in range(M):
    animate_trace(trace, i, N, table)
```

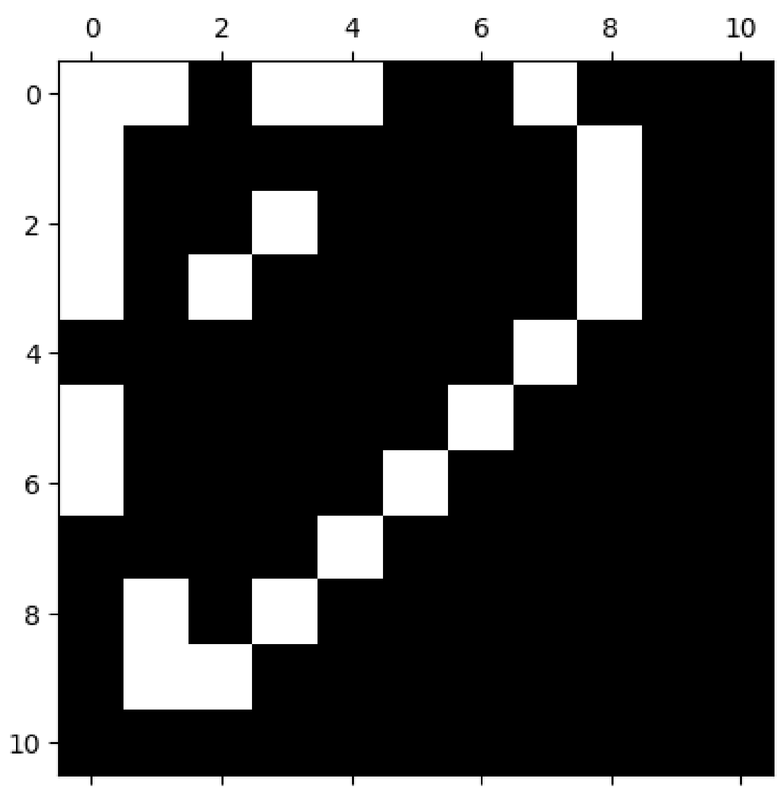


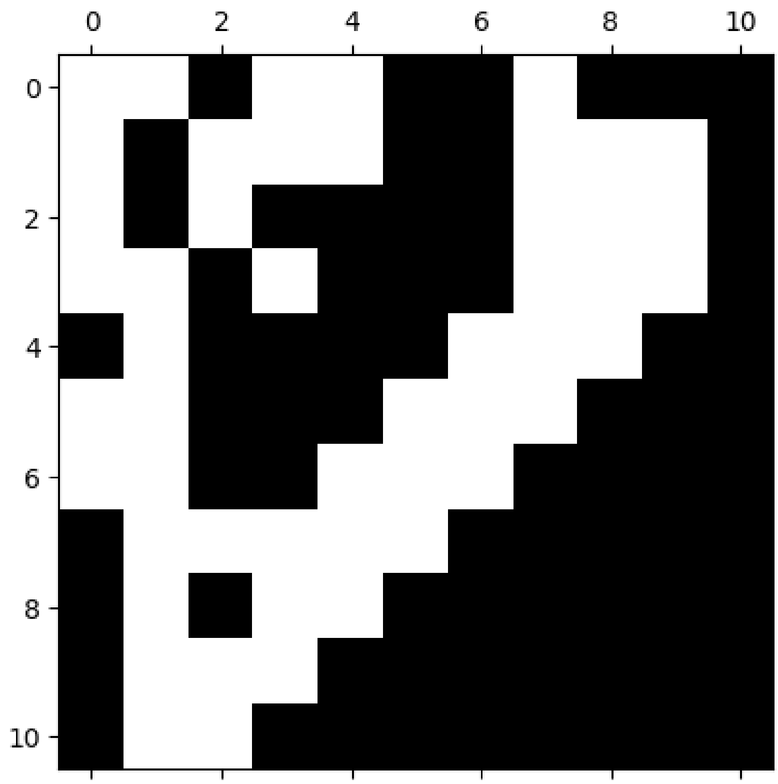




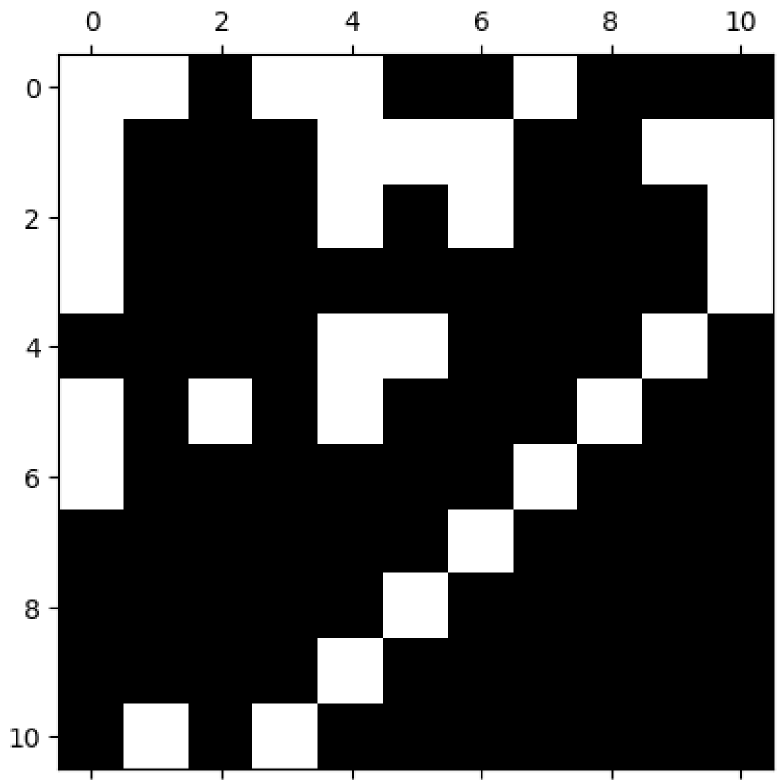

0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10

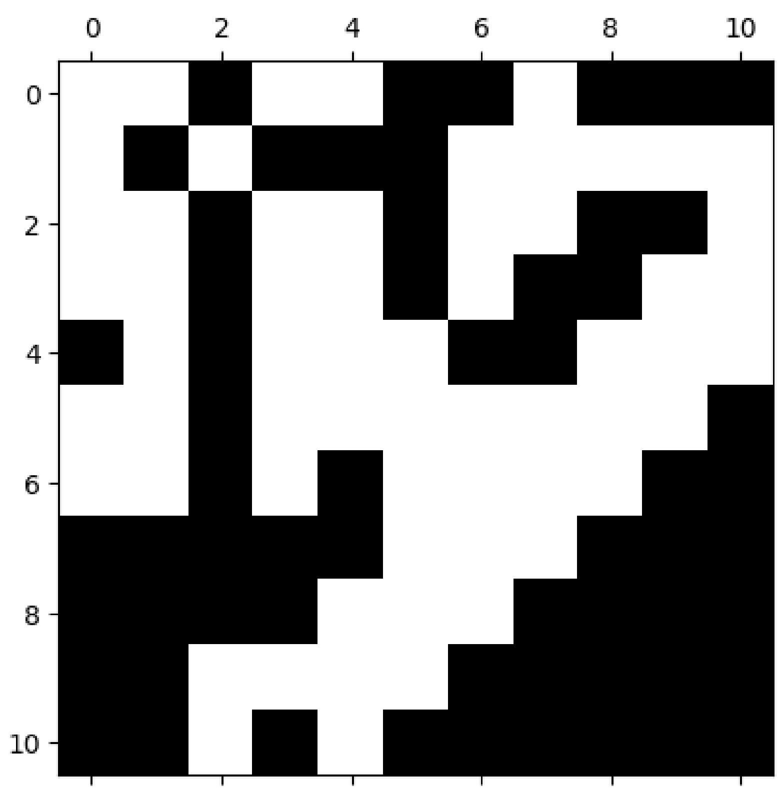

0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10

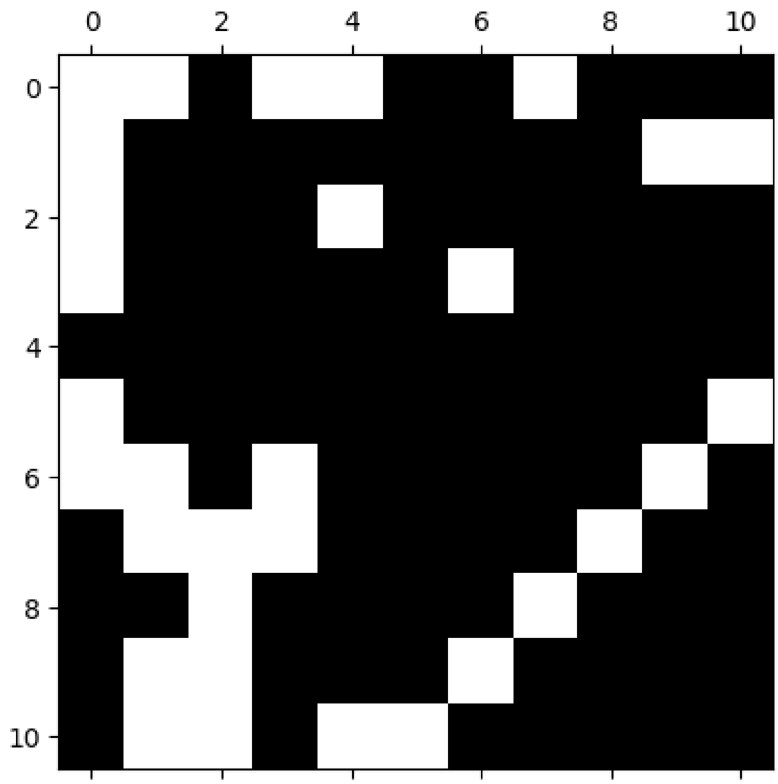

0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10

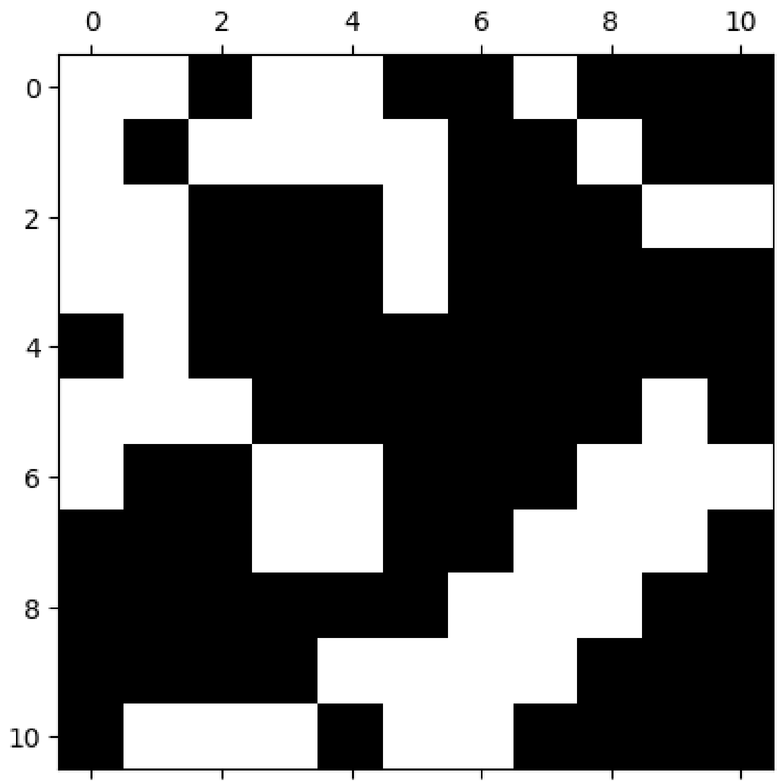


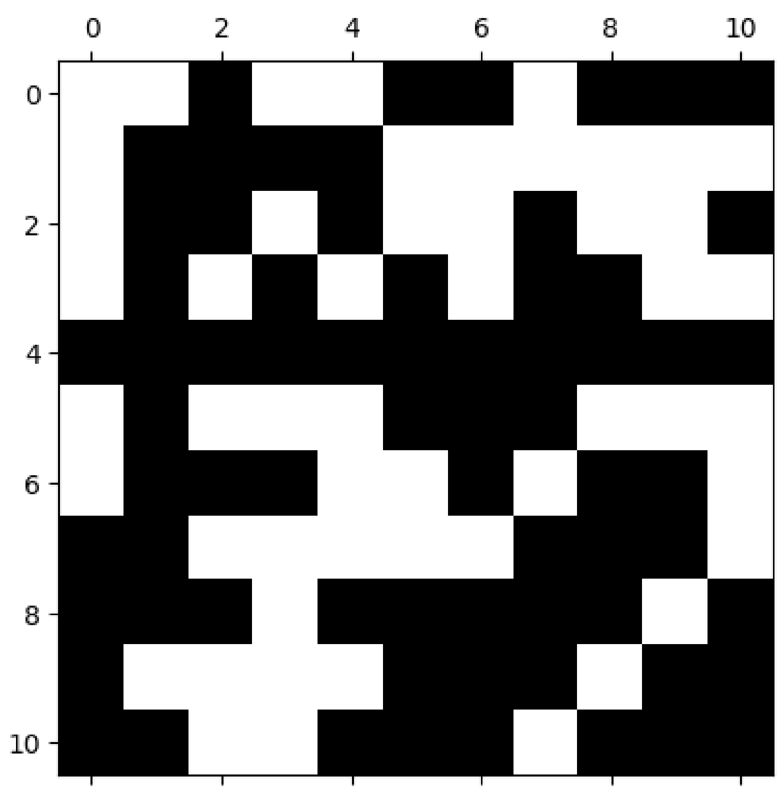
0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10

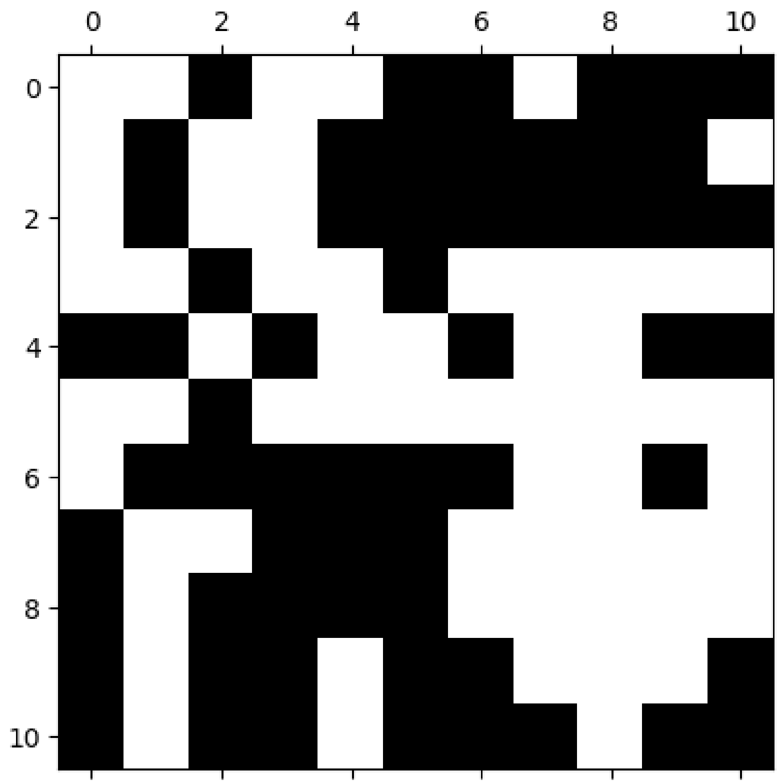

0 2 4 6 8 10
0 2 4 6 8 10

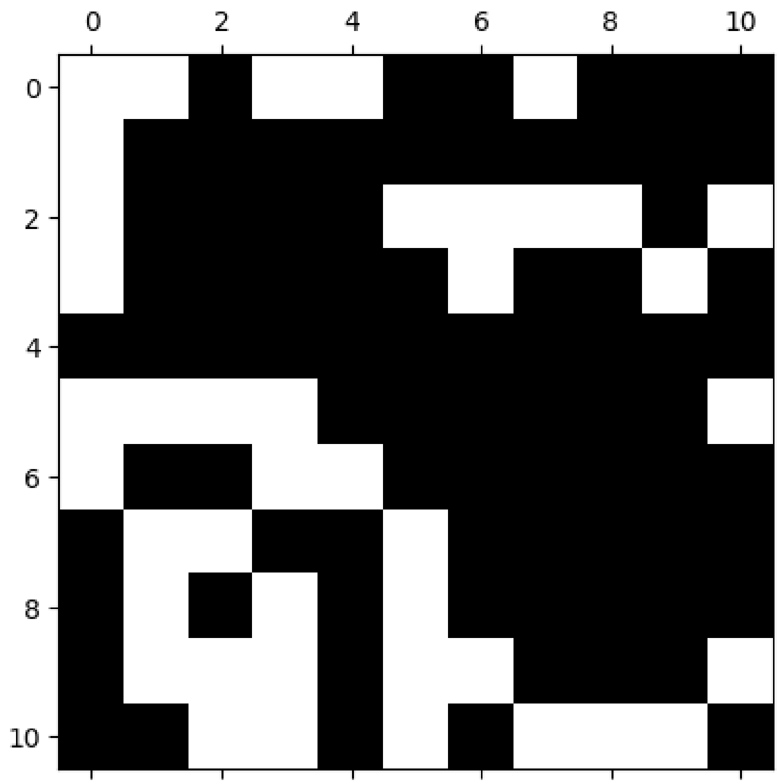

0 2 4 6 8 10
0 2 4 6 8 10


0
2
4
6
8
10

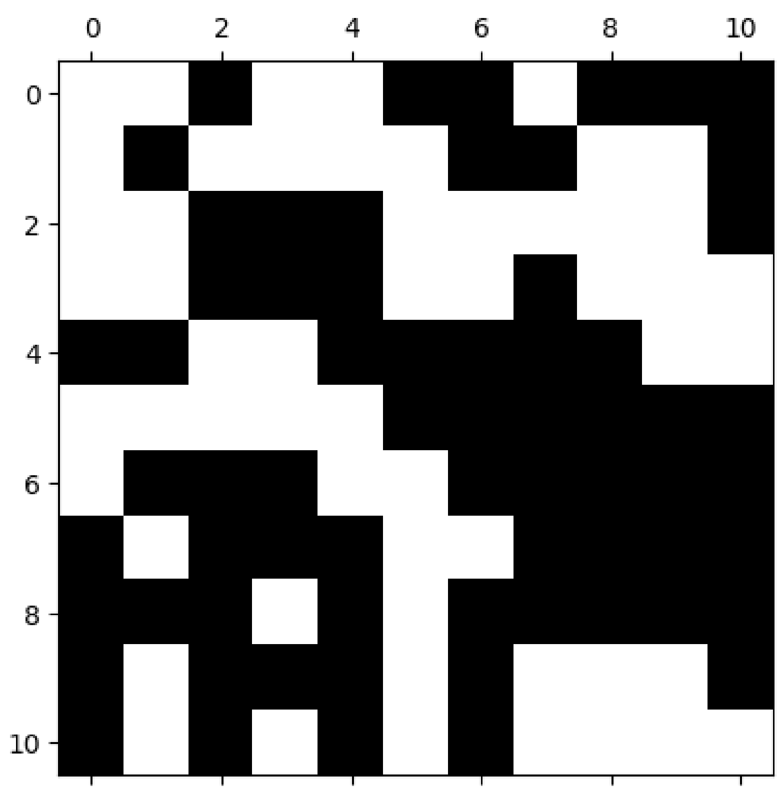

0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10


0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10

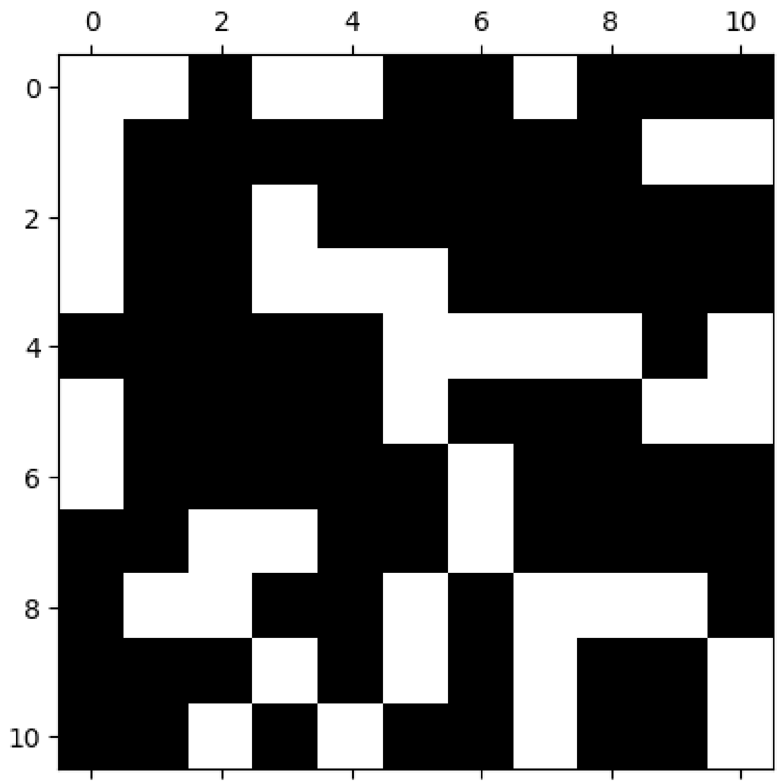

0
2
4
6
8
10

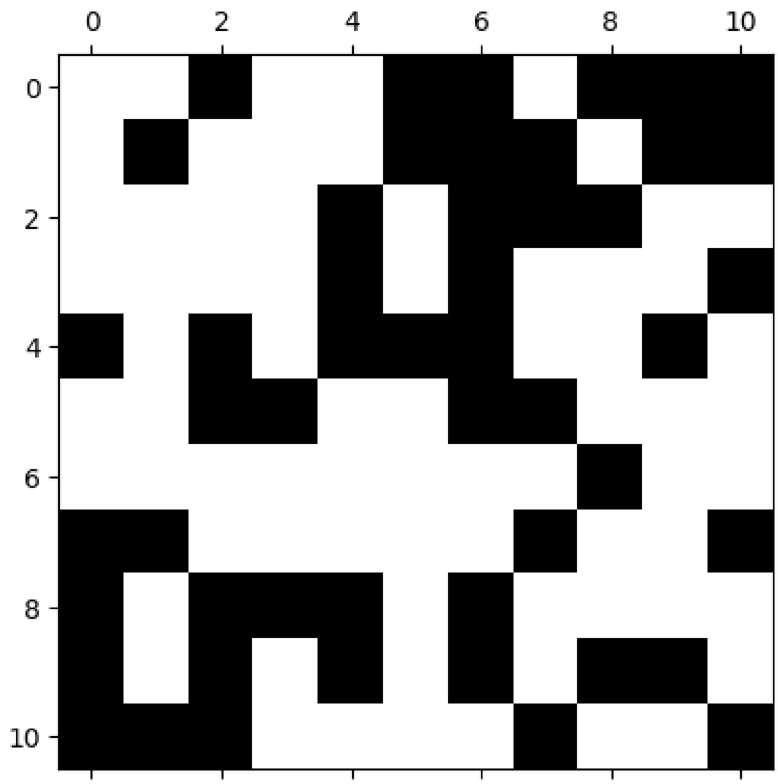


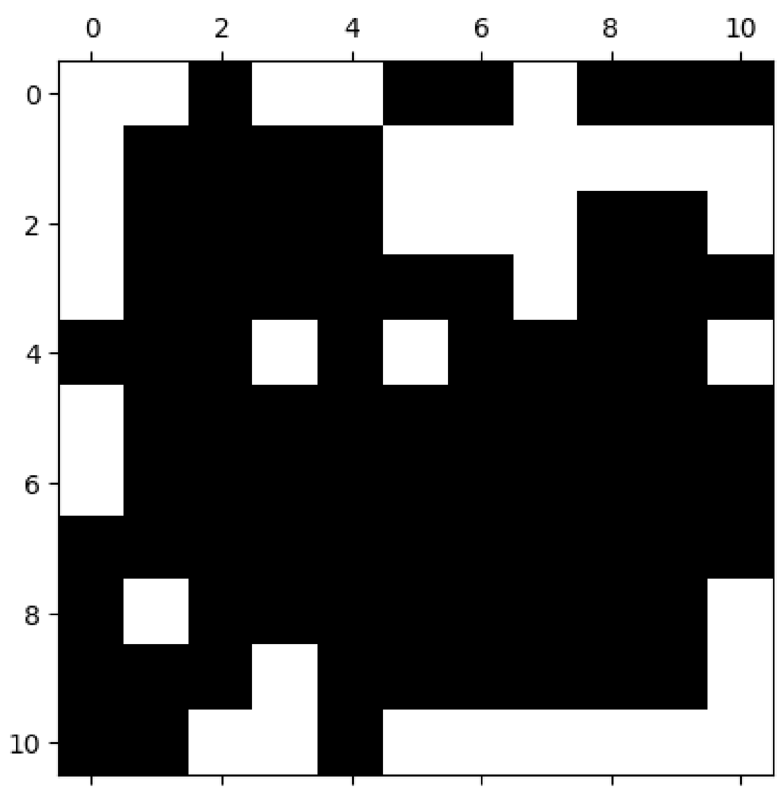
0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10

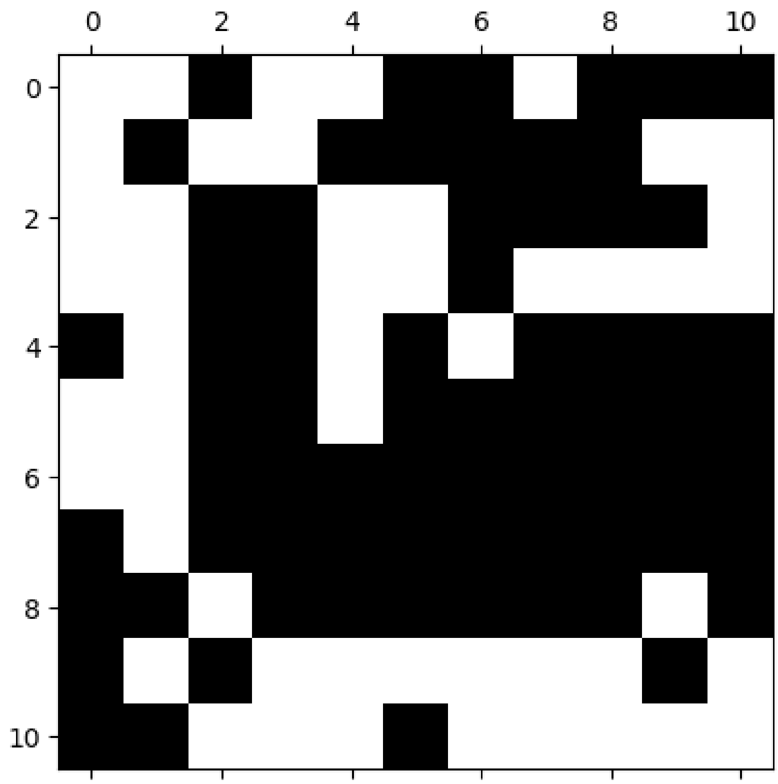


0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10


0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10



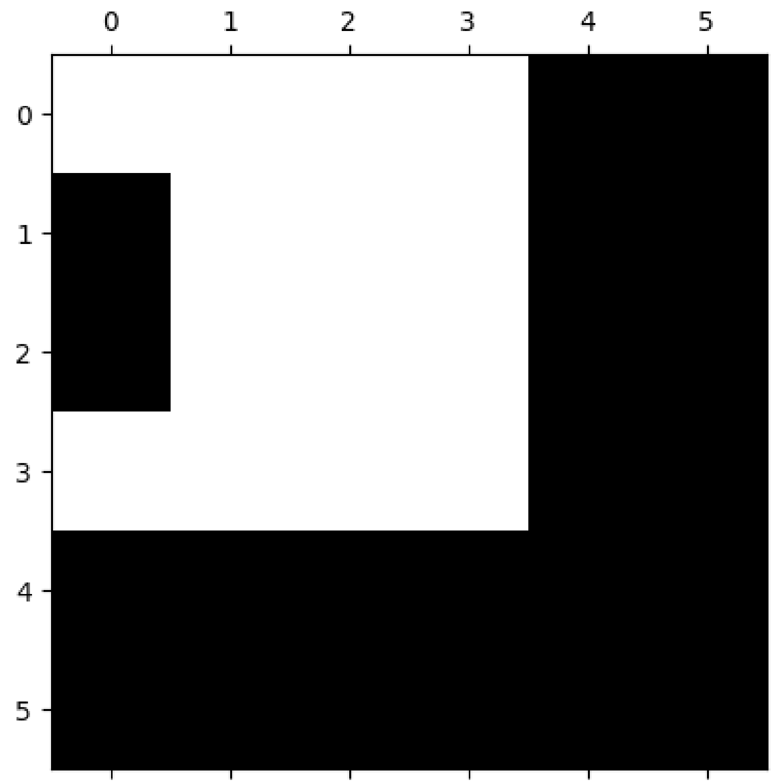


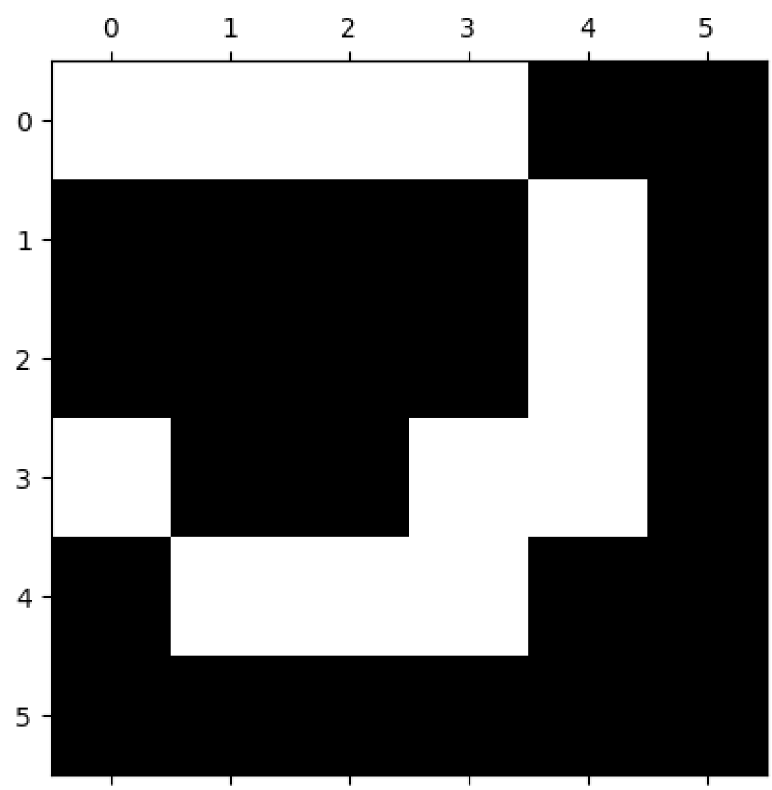


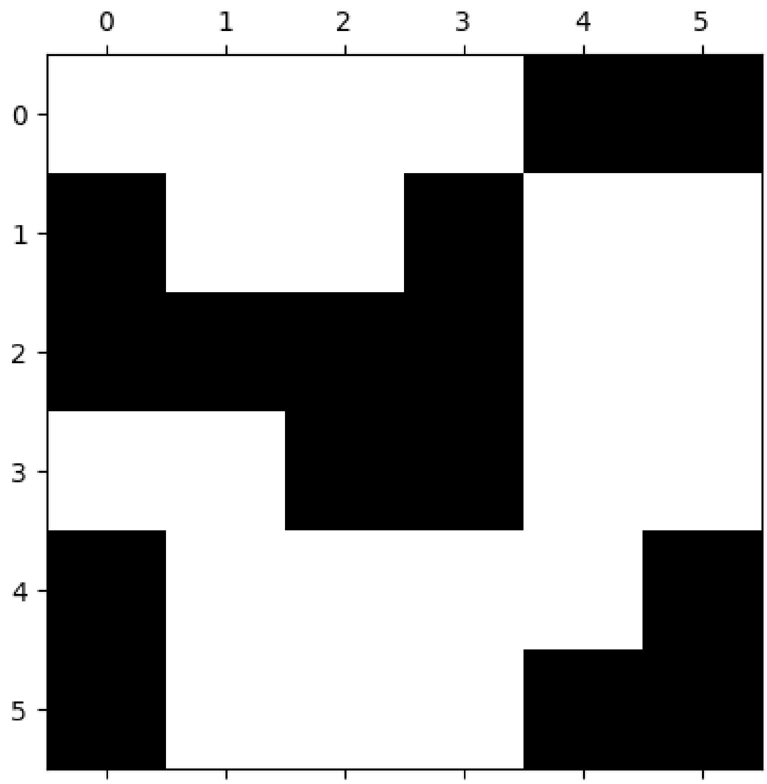
2.3 Exercício 2: Testes

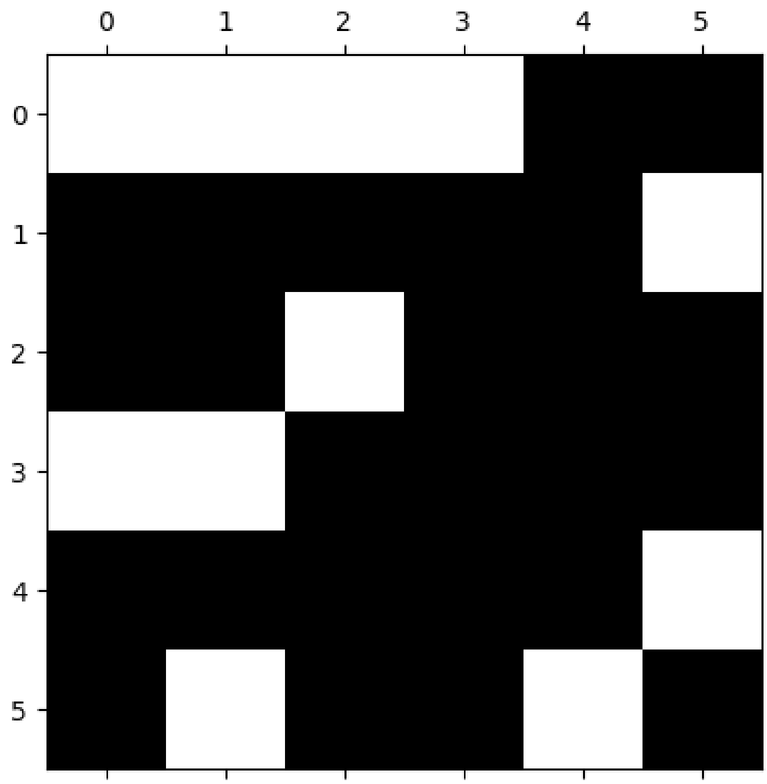
```
[30]: N = 5
table = [[Symbol('c'+str(i)+','+str(j)) for j in range(N+1)] for i in␣
 ↪range(N+1)]
M = 15
trace= [ST('ST'+str(i)) for i in range(M)]
generate_trace(trace, M, init, N, table)
bmc_always(init, trans,prop1,M,N,trace, table)
bmc_eventually(init, trans,prop2 ,M,N,trace, table)
for i in range(M):
    animate_trace(trace, i, N, table)
```

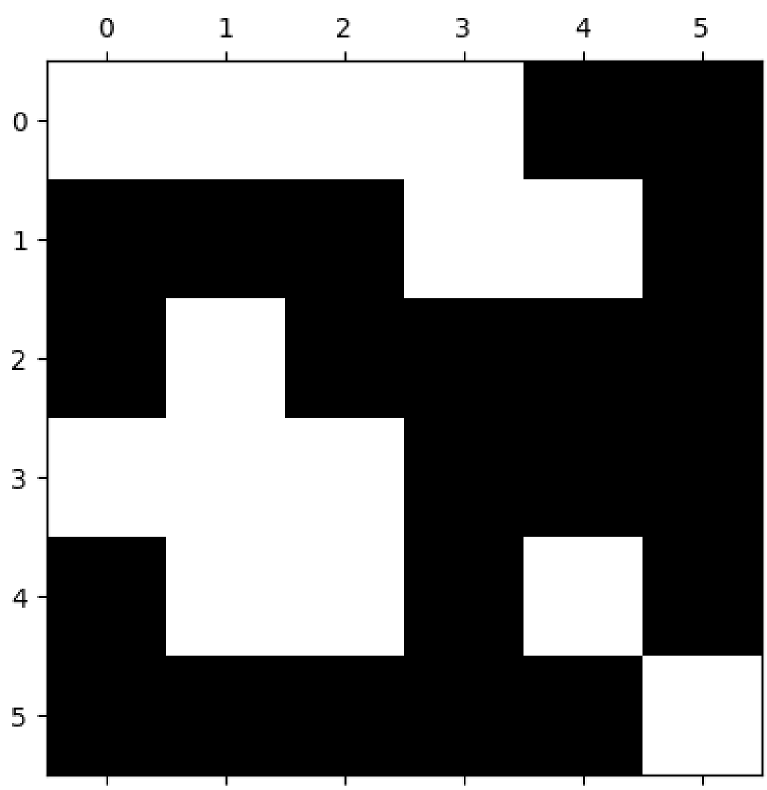
```
> A propriedade é invariante para traço de tamanho 15.
> A propriedade verifica-se para traço de tamanho 15.
```

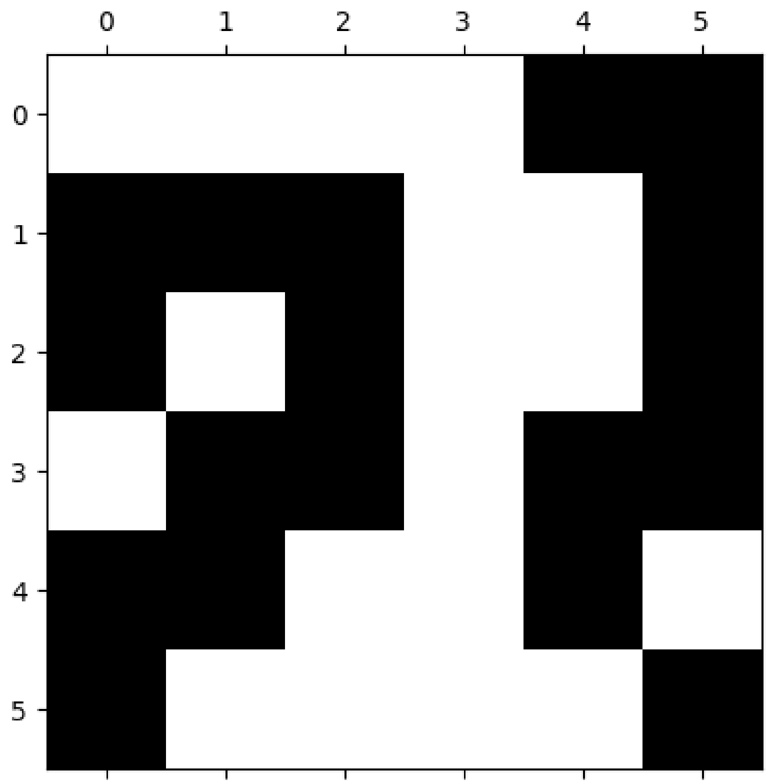

0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

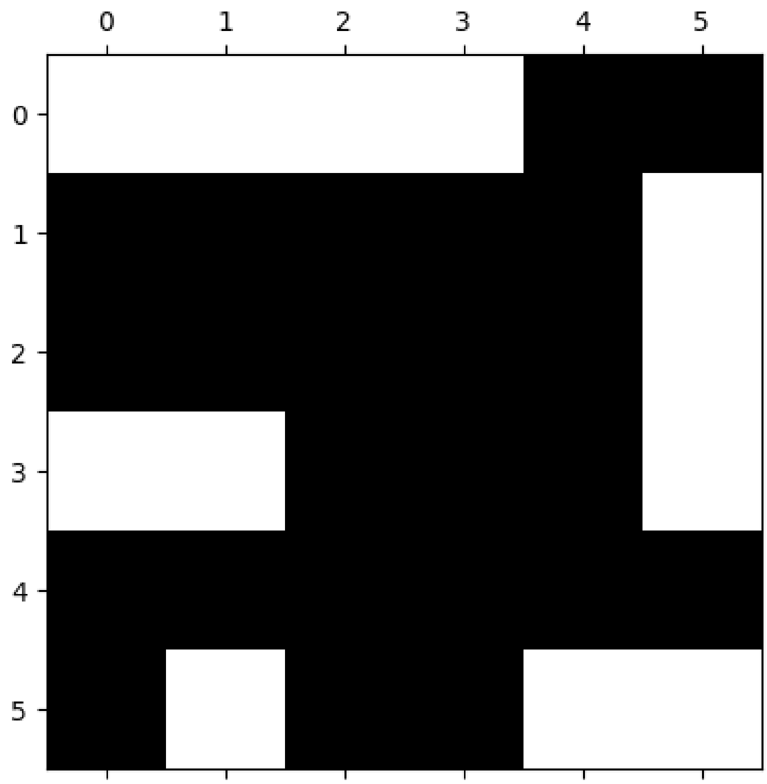

0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5


0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5

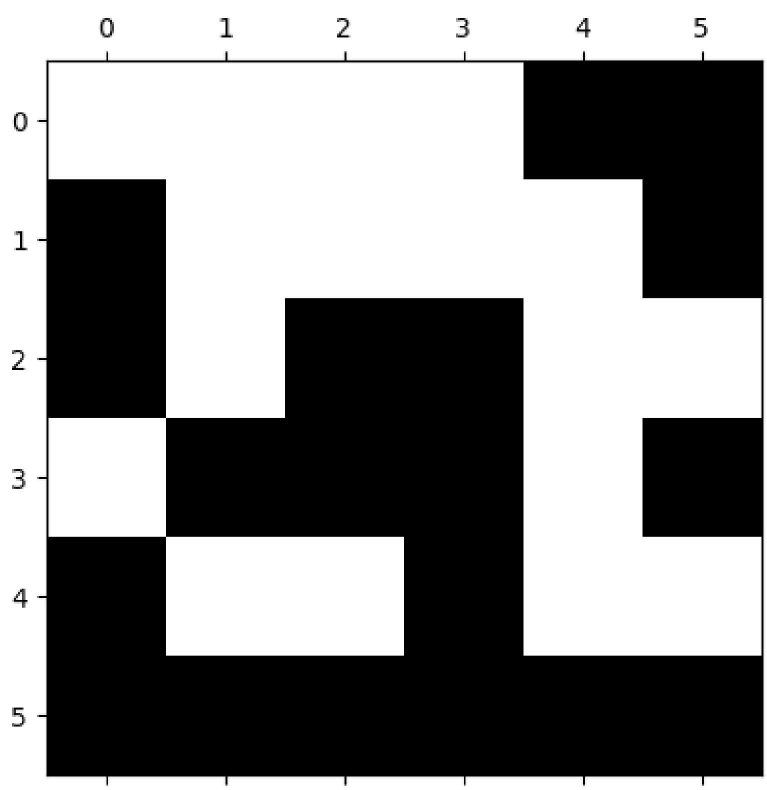

0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5


0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

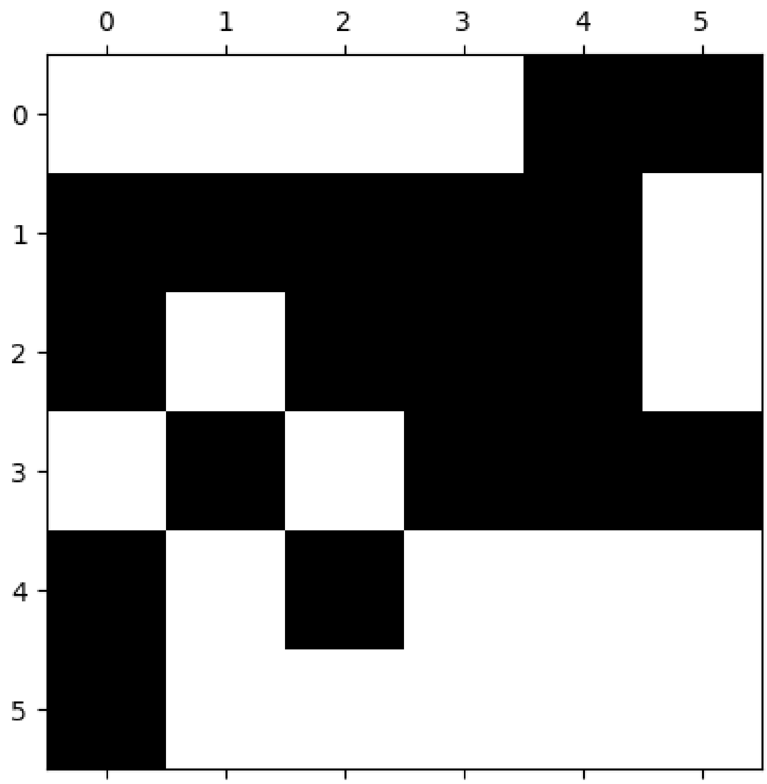

0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5

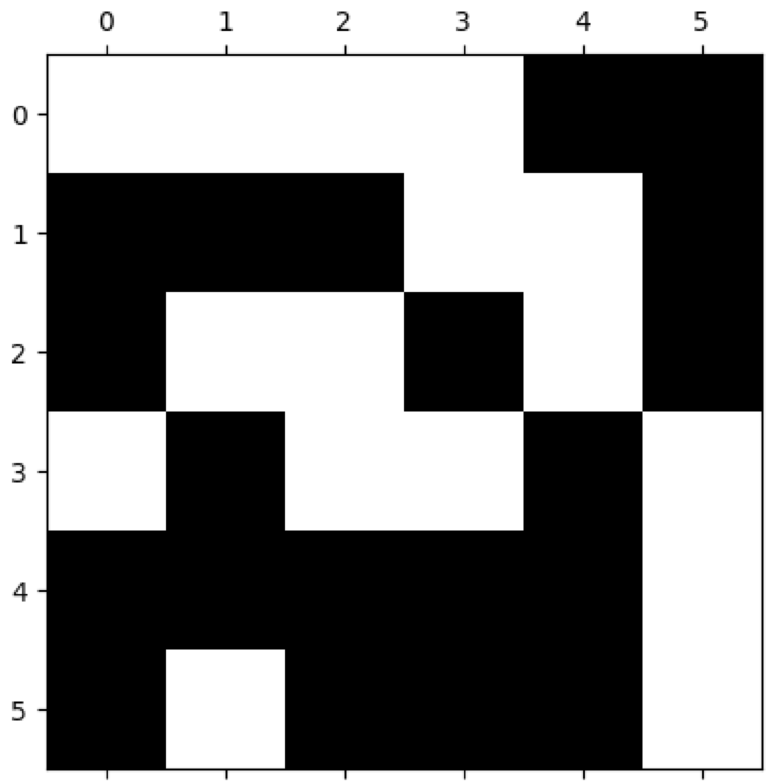


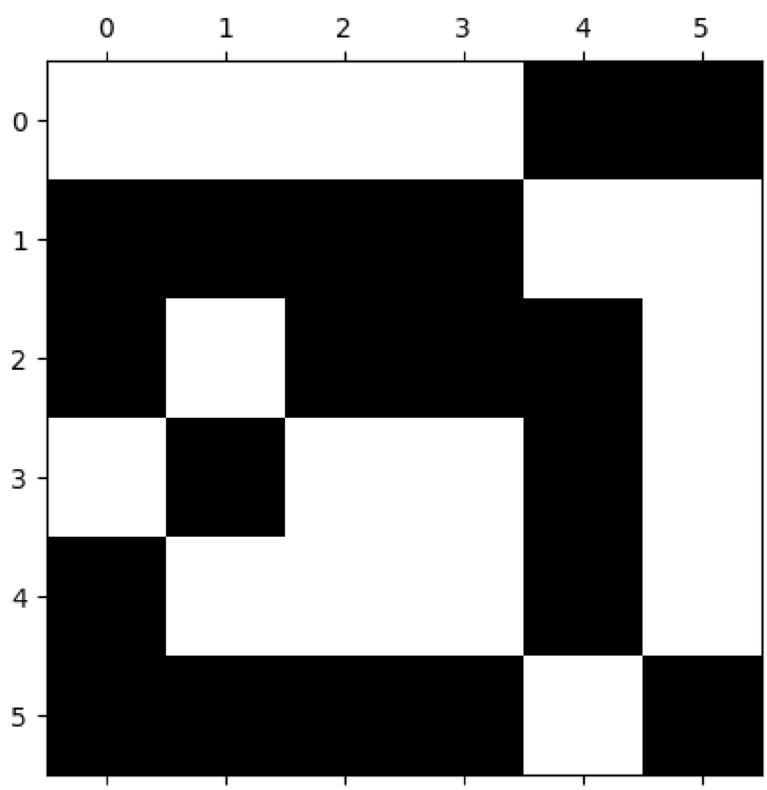
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

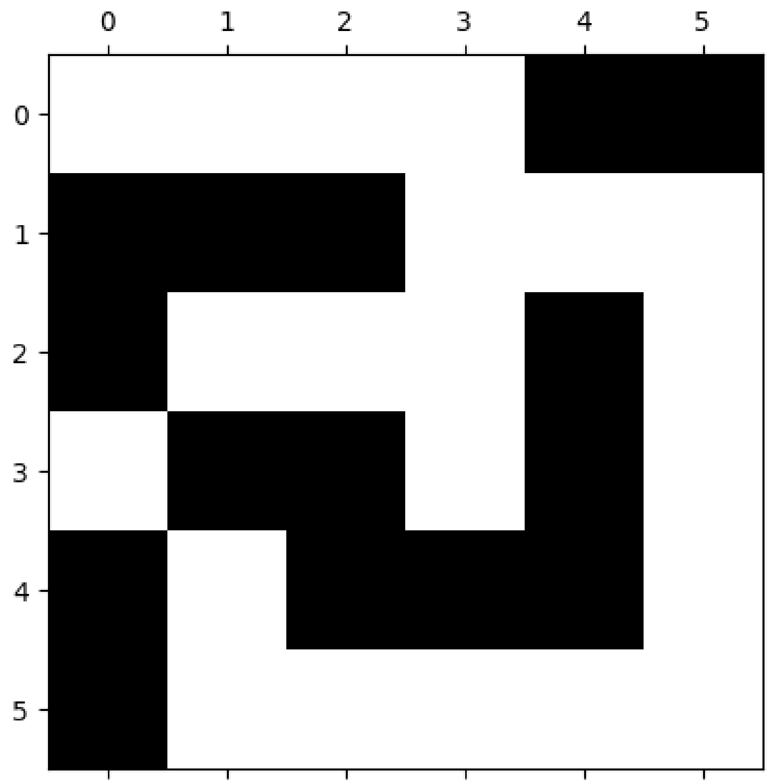


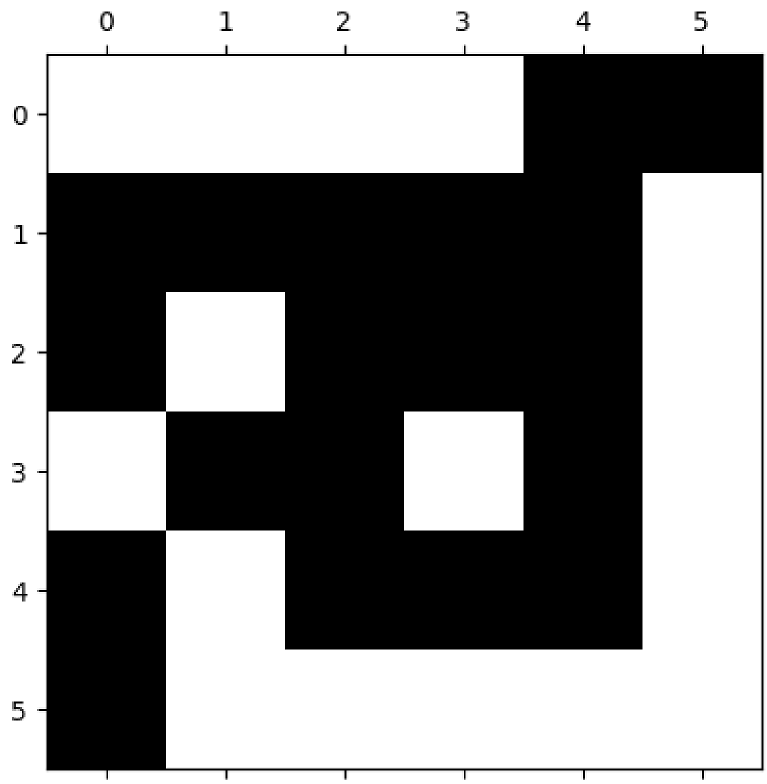
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5


0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5

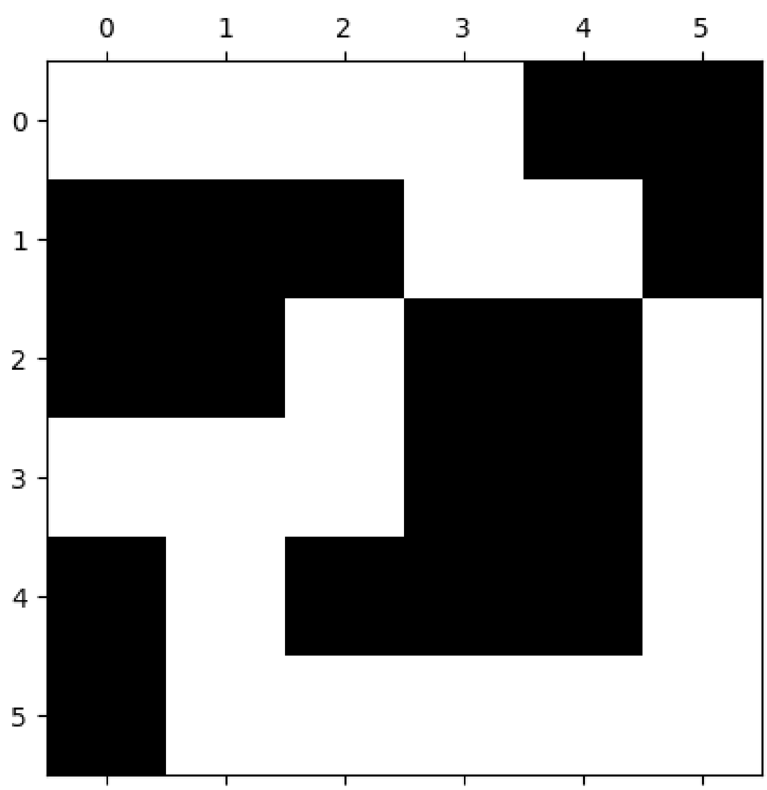

0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5


0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

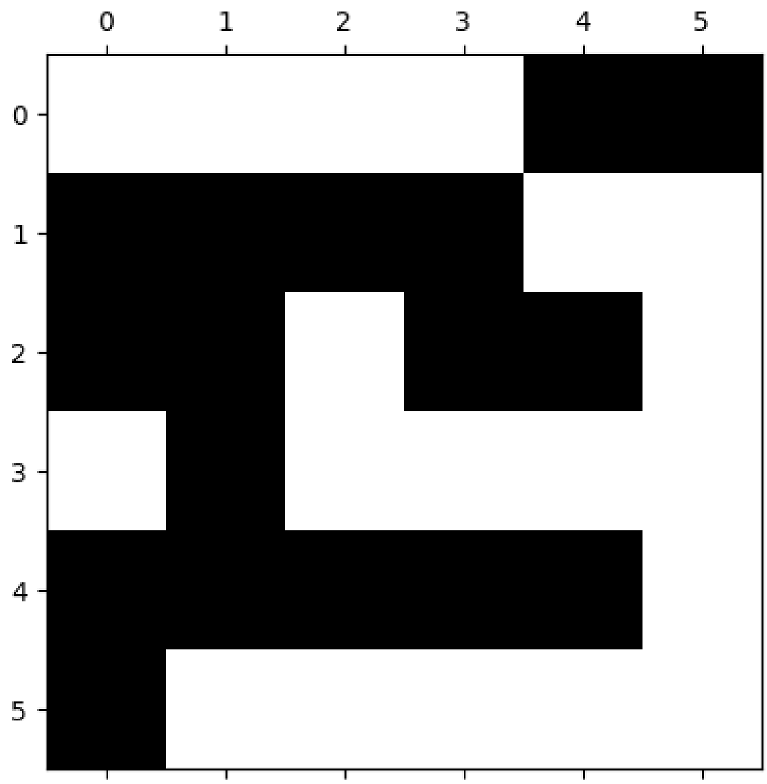

0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5



0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5



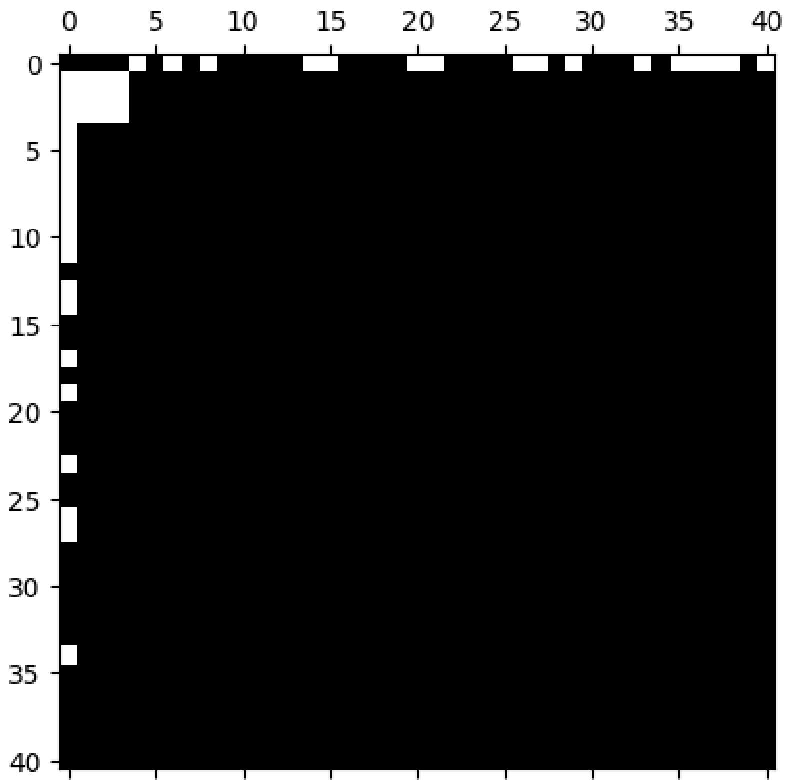
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5

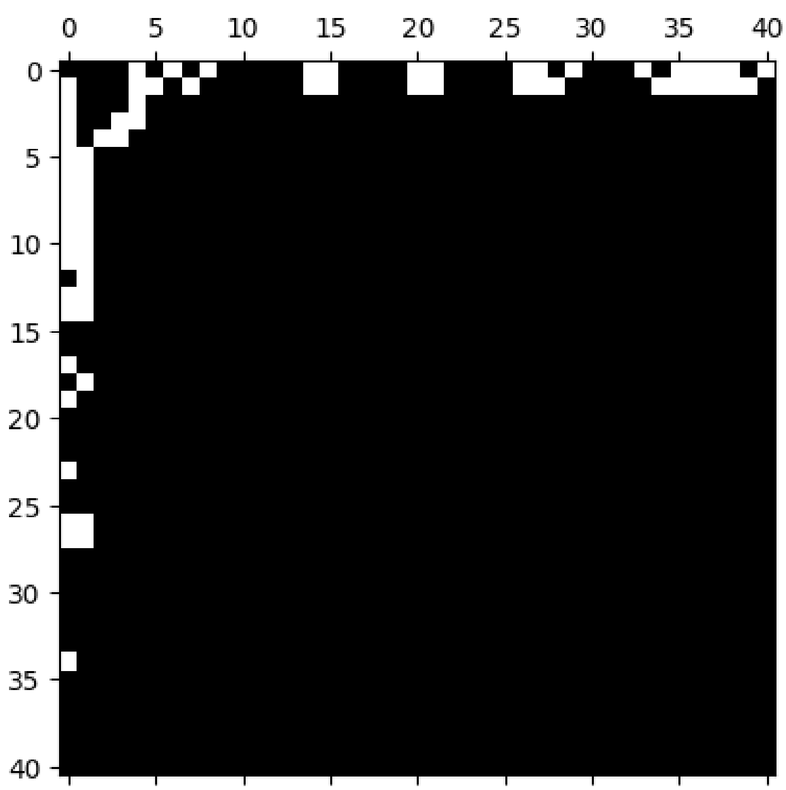


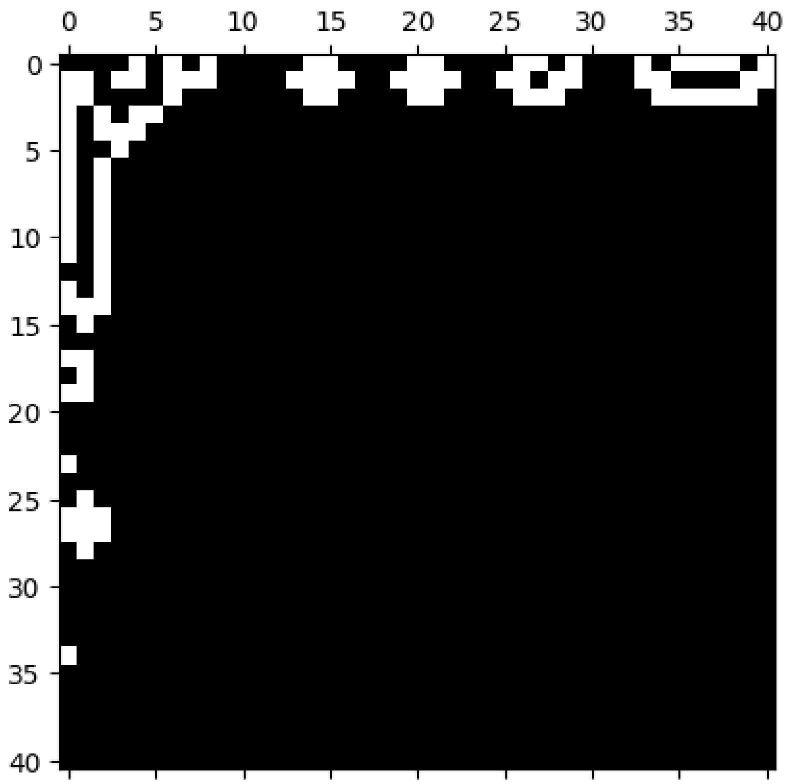
[31]:
```
N = 40
table = [[Symbol('c'+str(i)+','+str(j)) for j in range(N+1)] for i in␣
↪range(N+1)]
M = 49
trace= [ST('ST'+str(i)) for i in range(M)]
generate_trace(trace, M, init, N, table)
bmc_always(init, trans,prop1,M,N,trace, table)
bmc_eventually(init, trans,prop2 ,M,N,trace, table)
for i in range(M):
    animate_trace(trace, i, N, table)
```

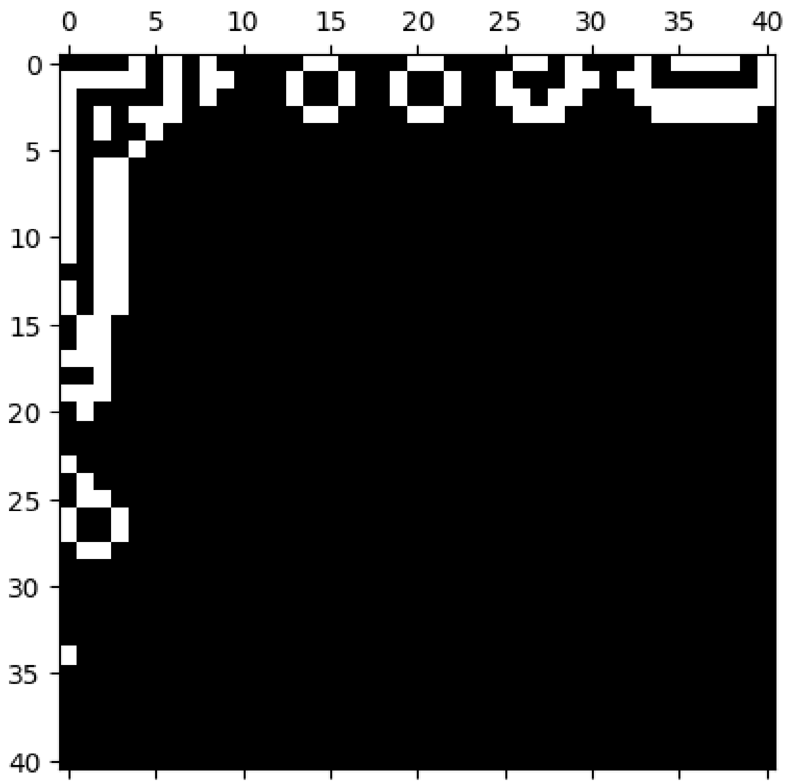
```
> A propriedade é invariante para traço de tamanho 49.
> A propriedade verifica-se para traço de tamanho 49.
```

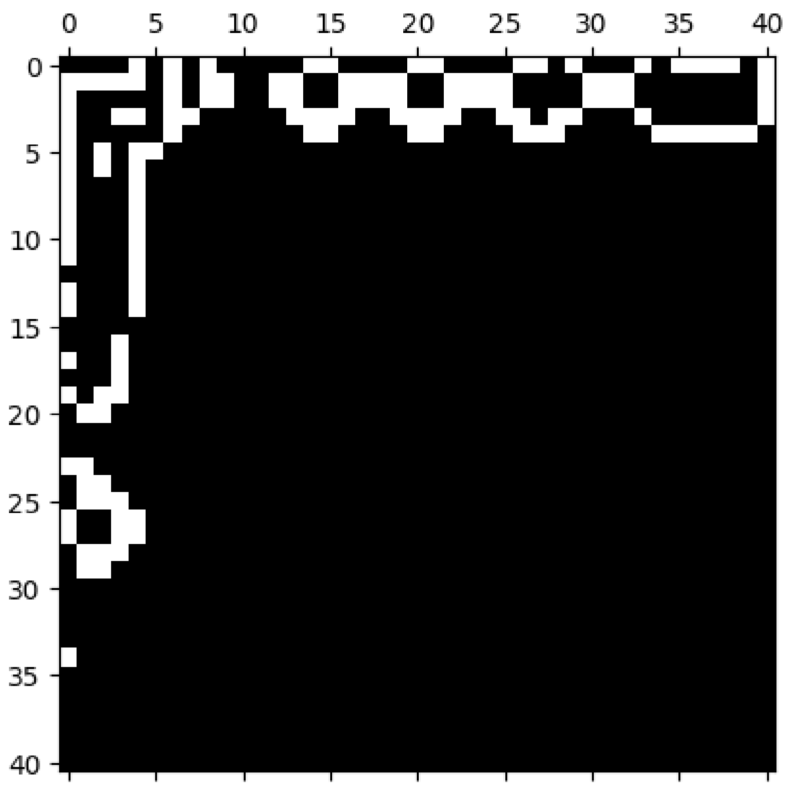
```
/tmp/ipykernel_14463/1621384587.py:12: RuntimeWarning: More than 20 figures have
been opened. Figures created through the pyplot interface
(`matplotlib.pyplot.figure`) are retained until explicitly closed and may
consume too much memory. (To control this warning, see the rcParam
`figure.max_open_warning`). Consider using `matplotlib.pyplot.close()`.
  plt.matshow(living , cmap='gray')
```

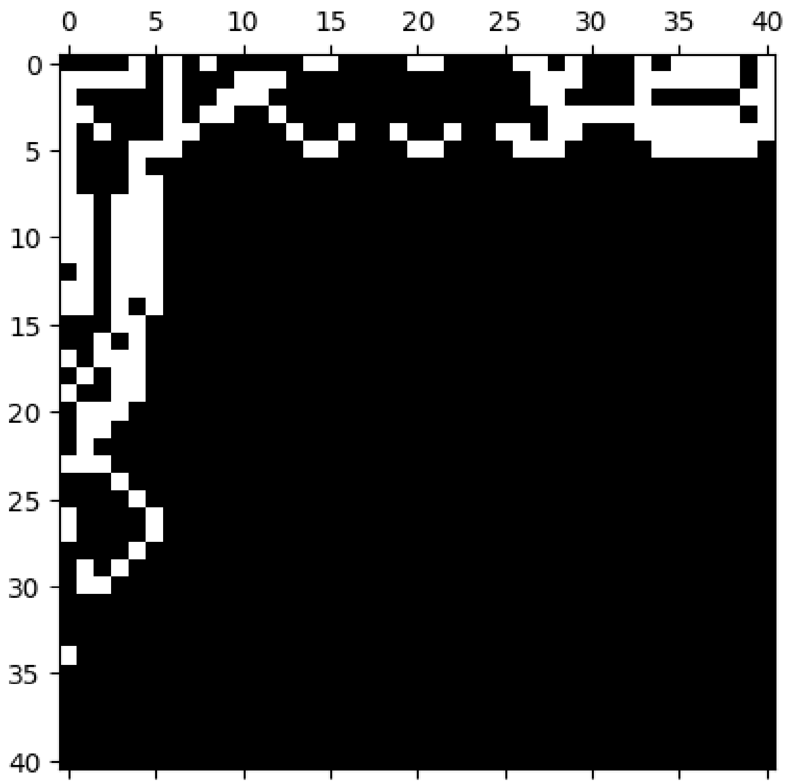

0
5
10
15
20
25
30
35
40

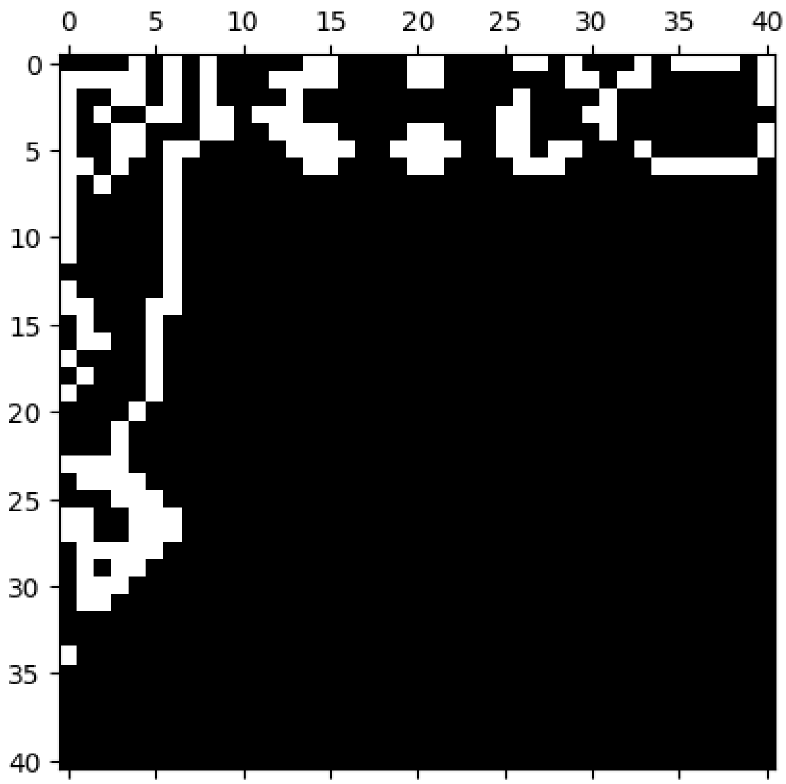

0
5
10
15
20
25
30
35
40

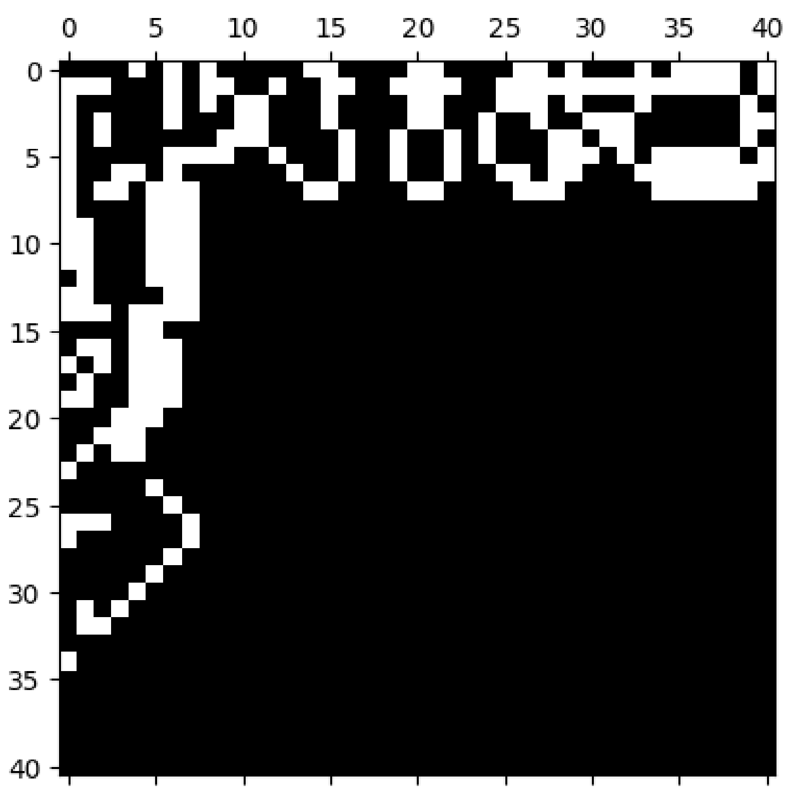

0
5
10
15
20
25
30
35
40

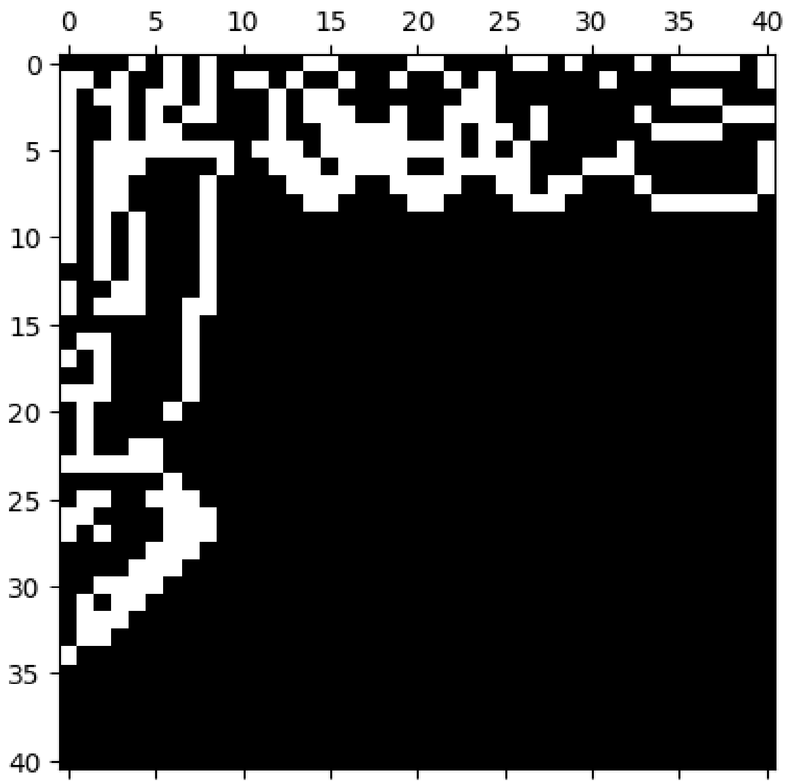


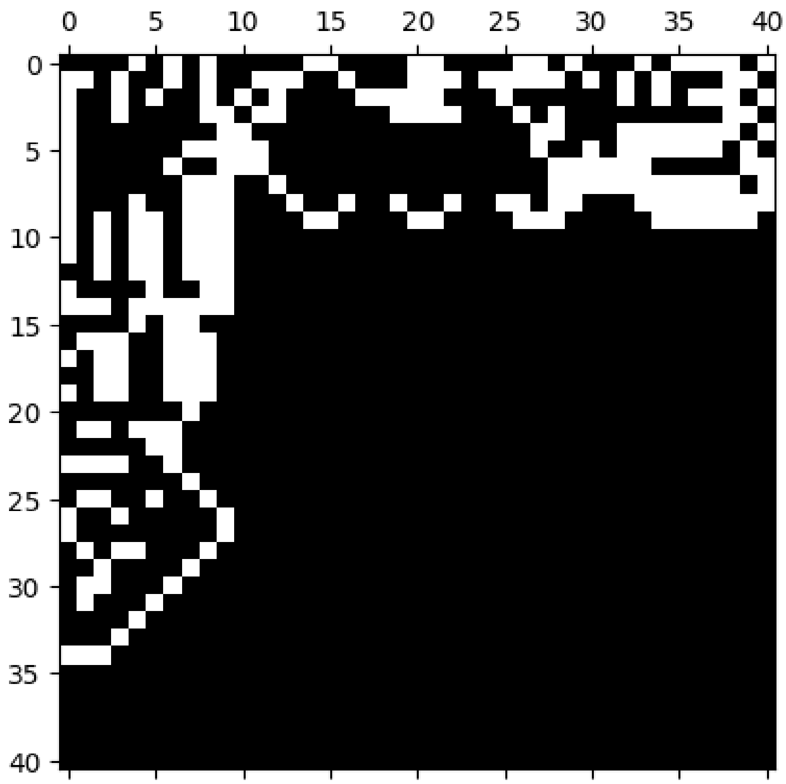



0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40

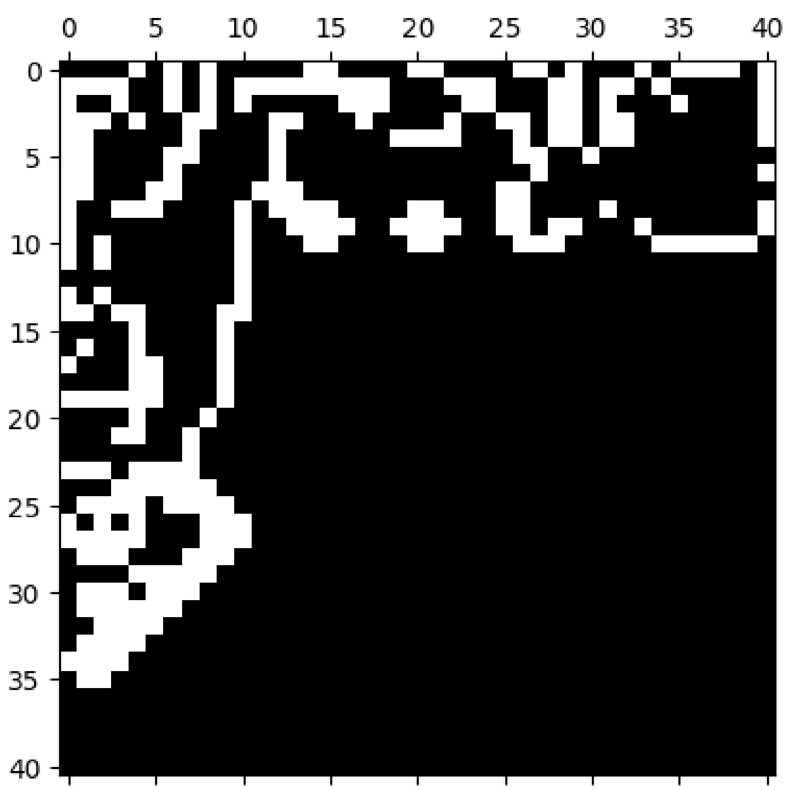




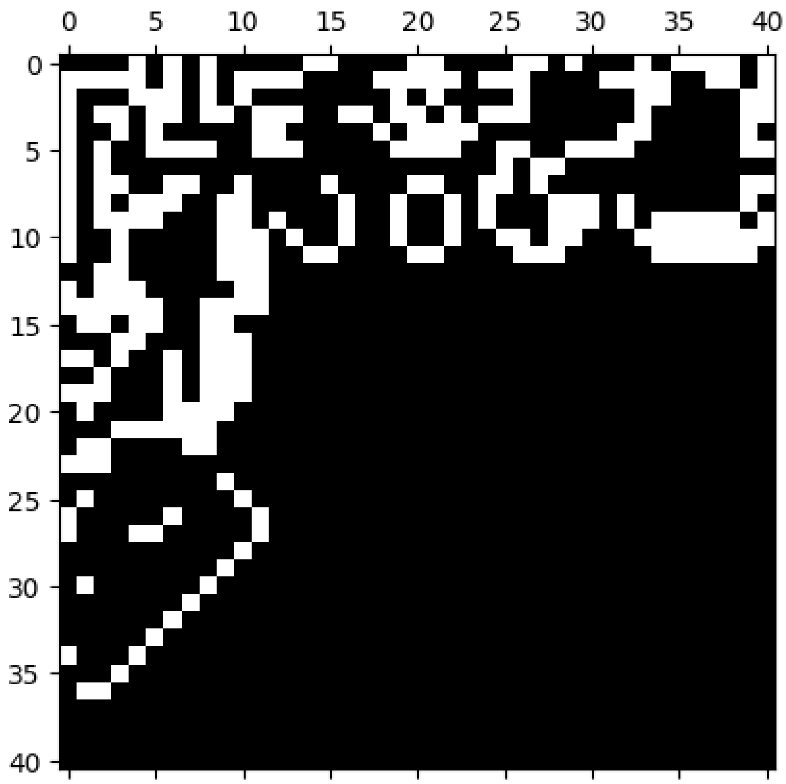

0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40

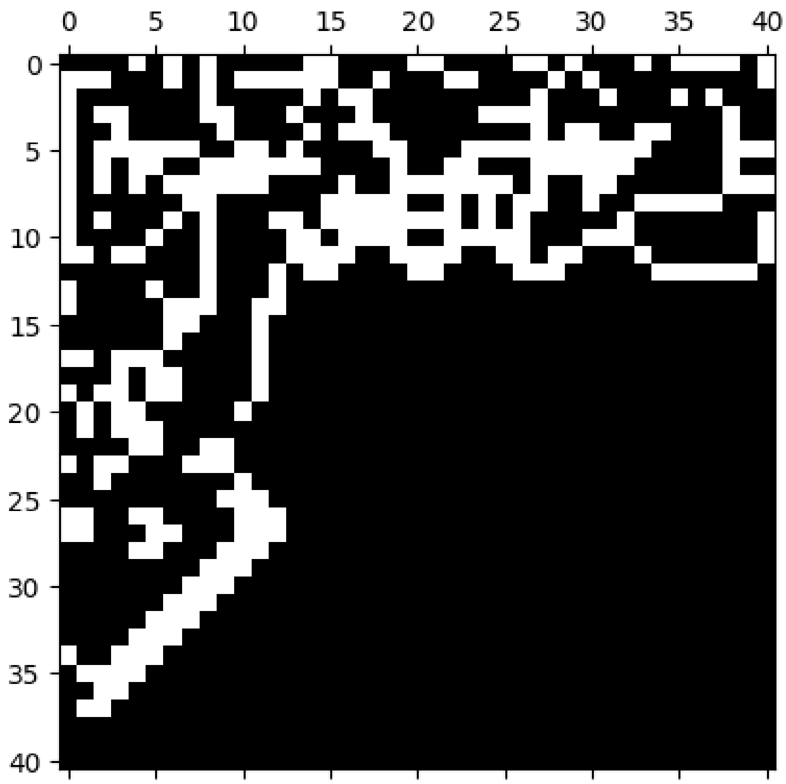


0
5
10
15
20
25
30
35
40

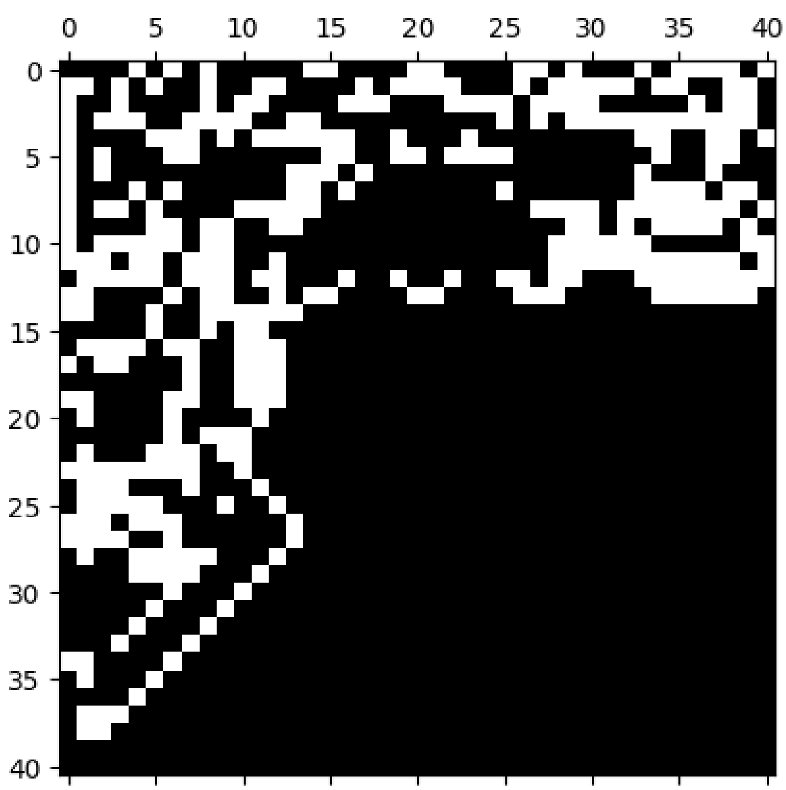


0
5
10
15
20
25
30
35
40

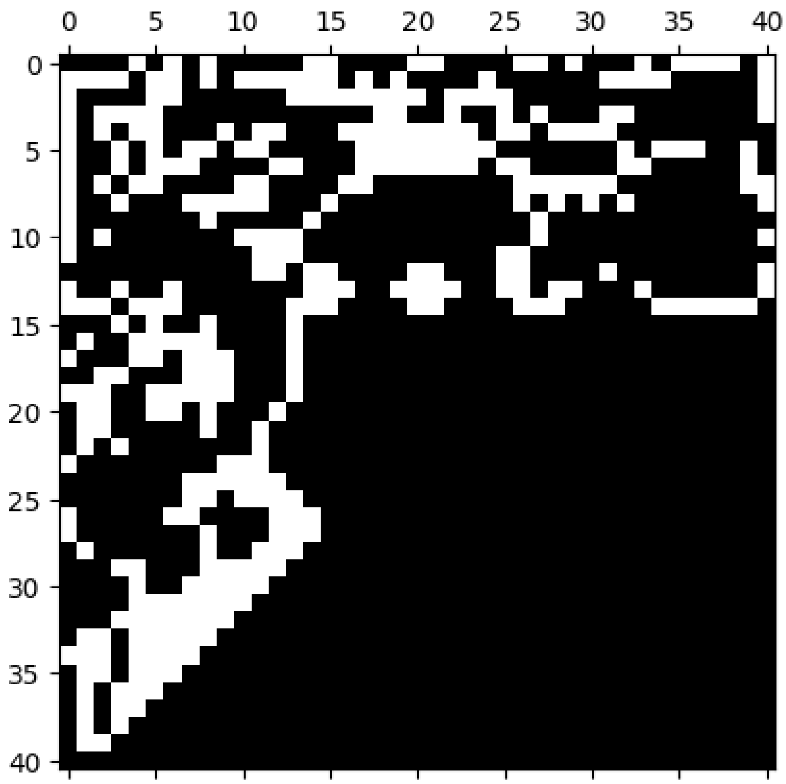


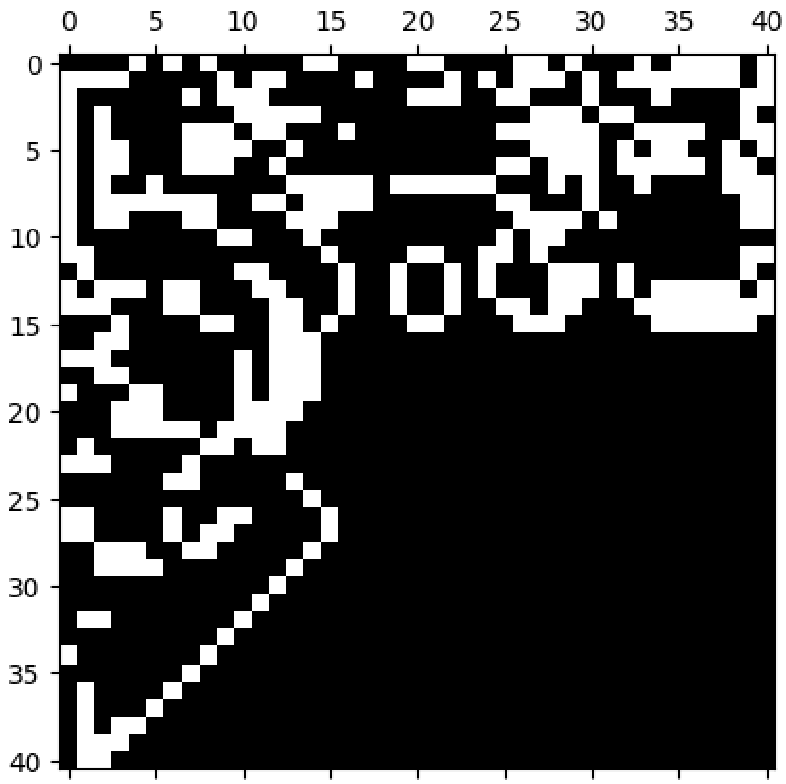


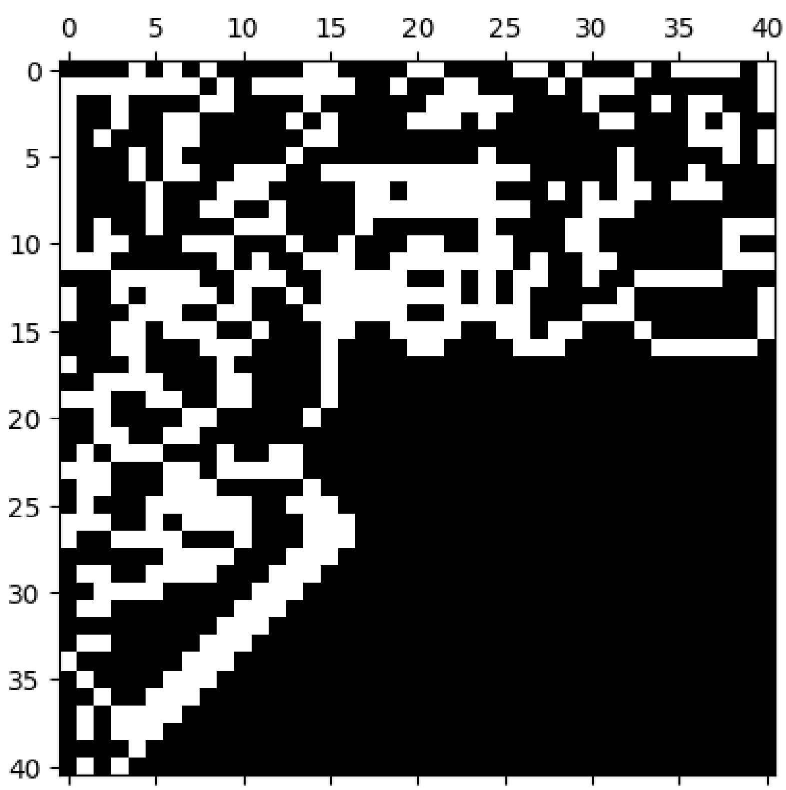
0
5
10
15
20
25
30
35
40

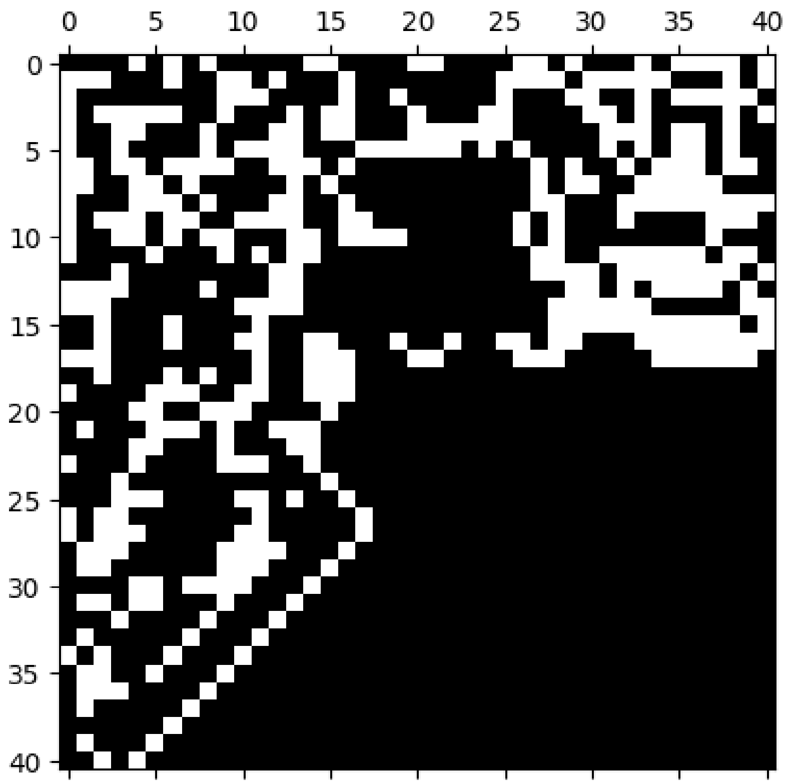


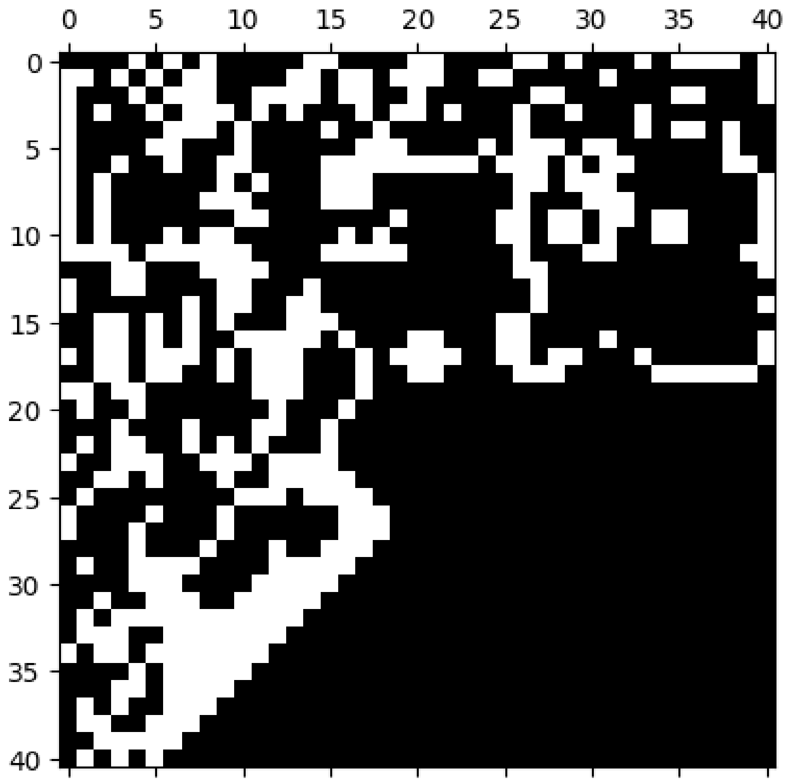
0
5
10
15
20
25
30
35
40

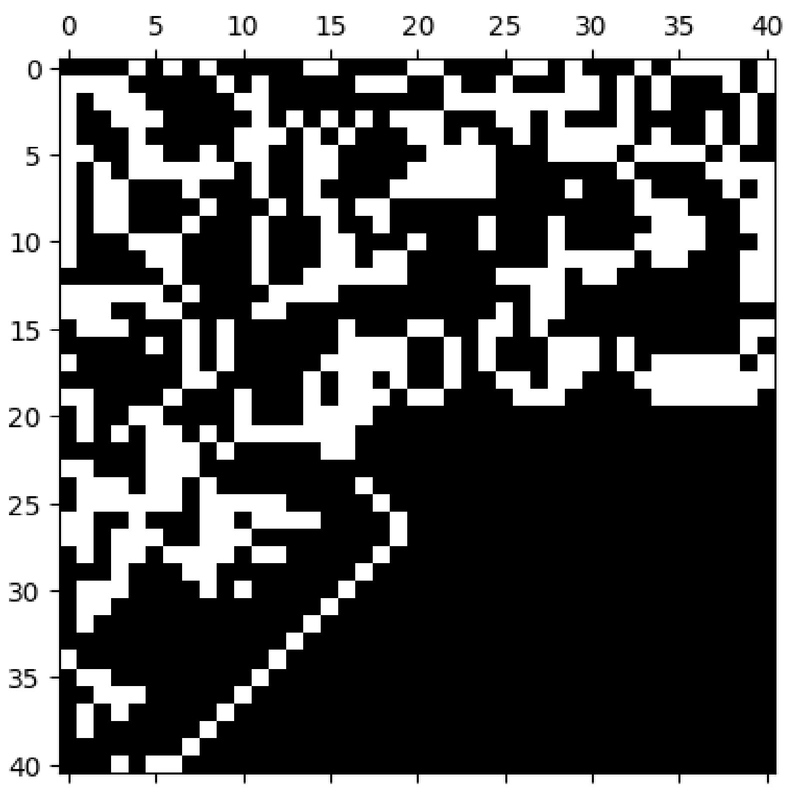


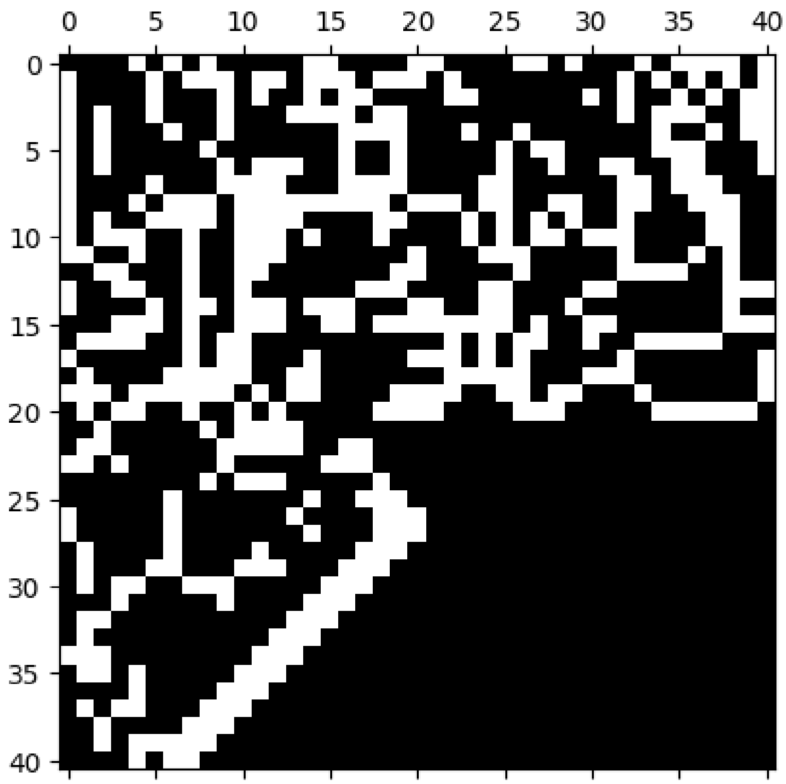

0
5
10
15
20
25
30
35
40

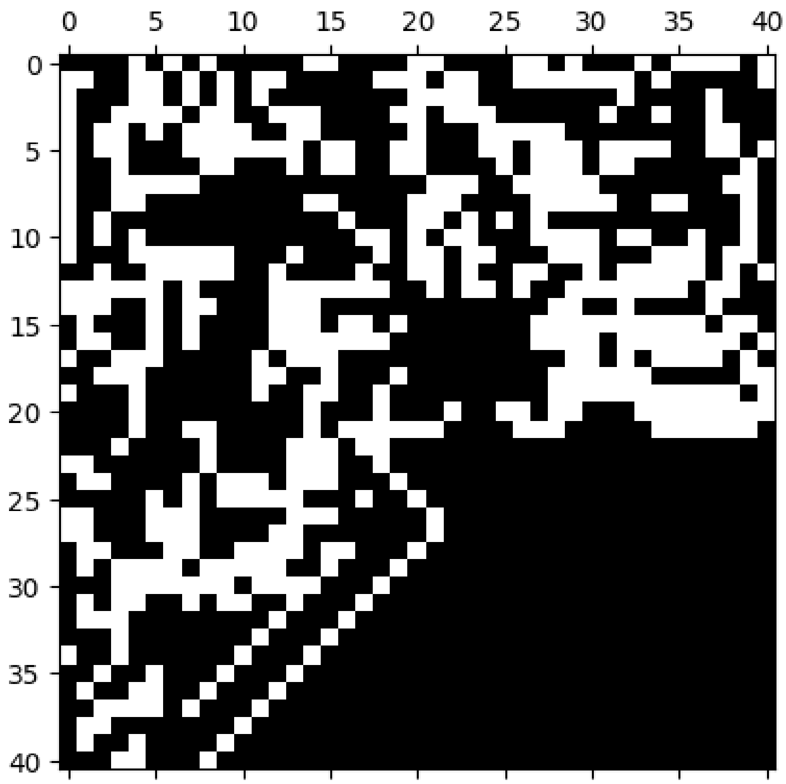

0
5
10
15
20
25
30
35
40

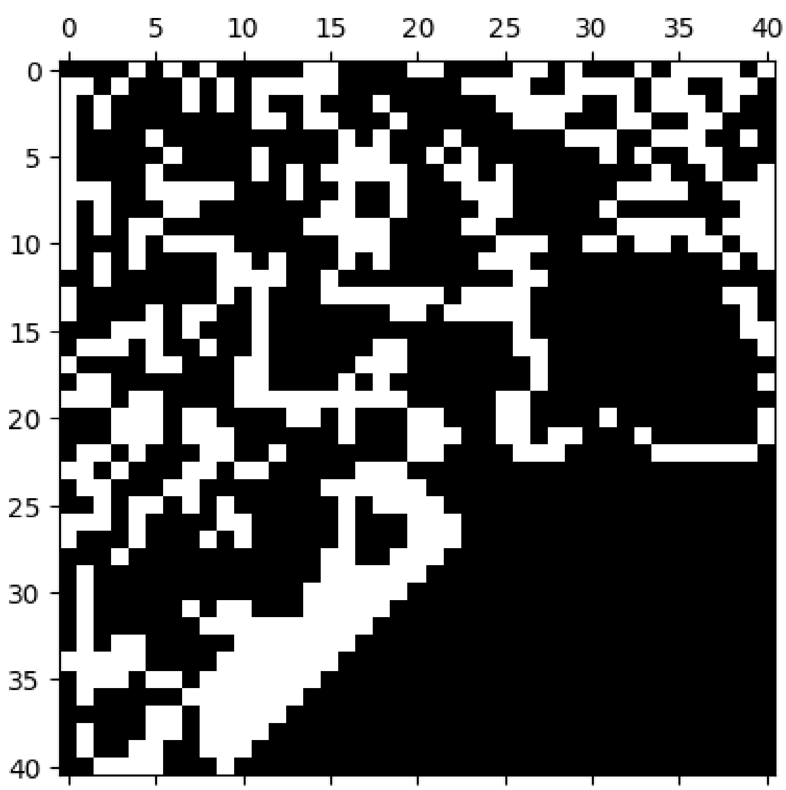

0
5
10
15
20
25
30
35
40

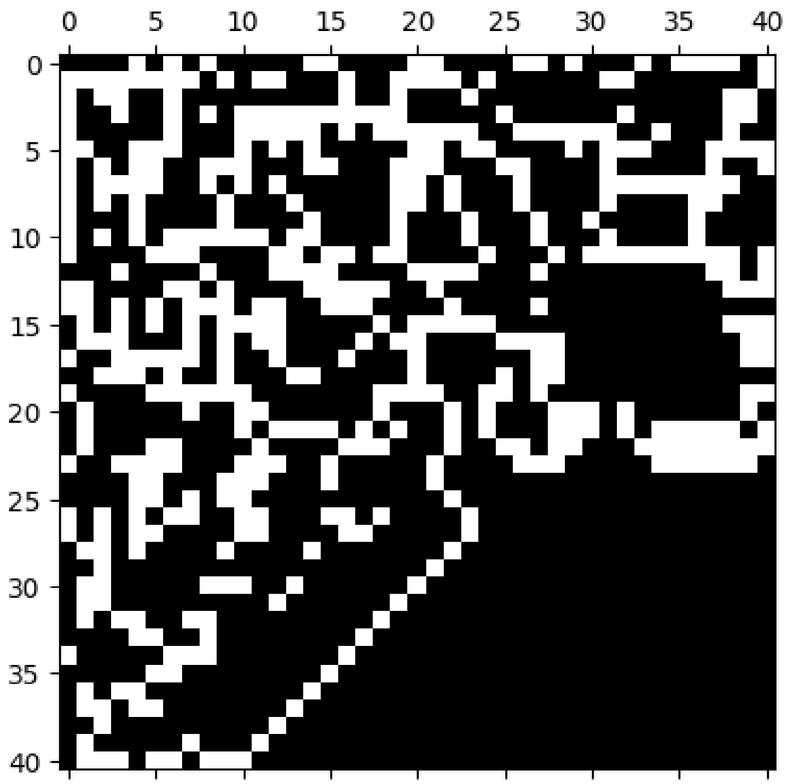

0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40

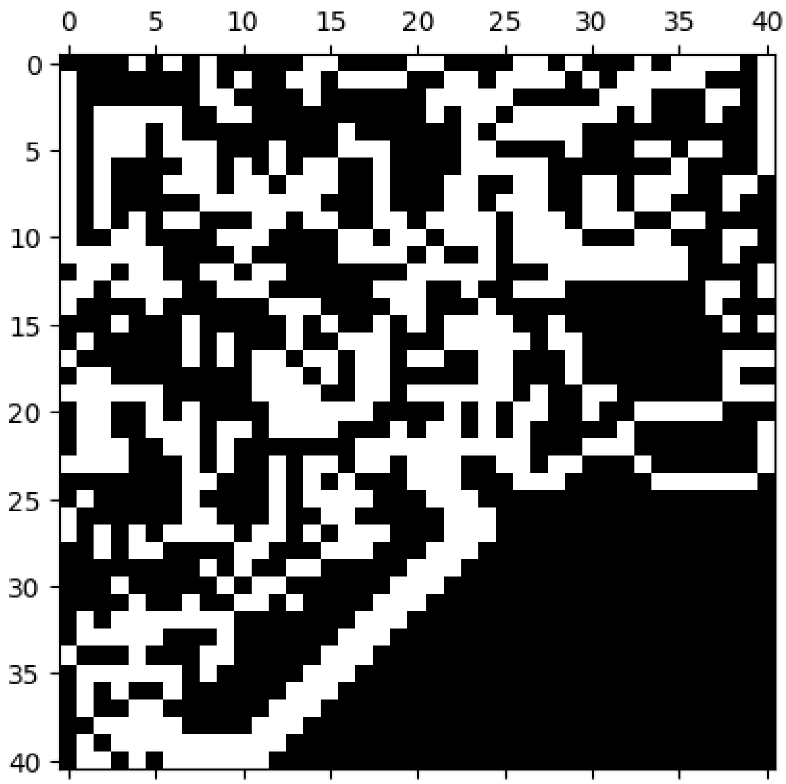

0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40


0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40

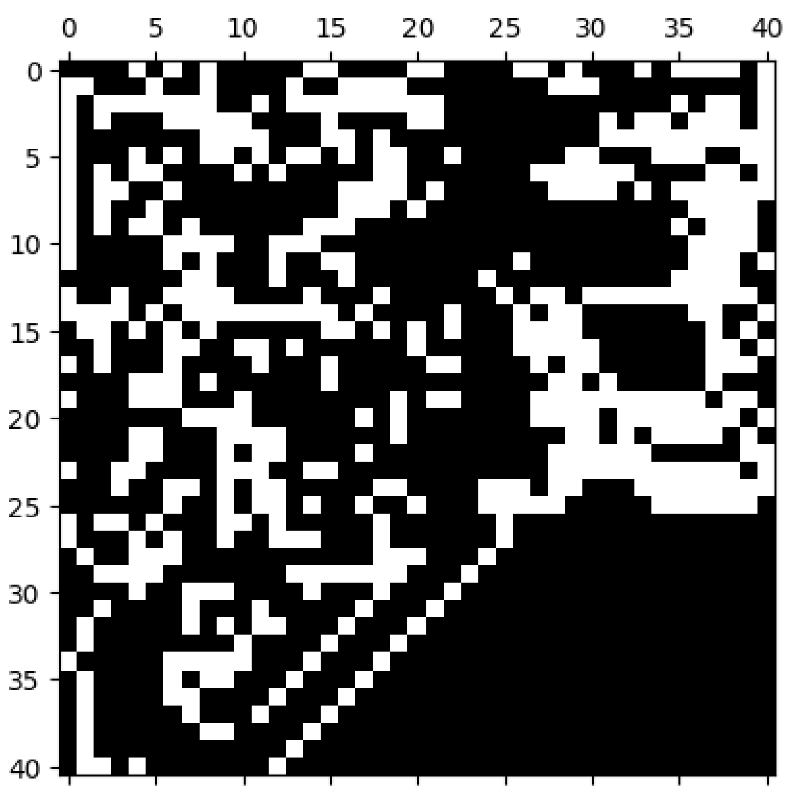

0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40


0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40

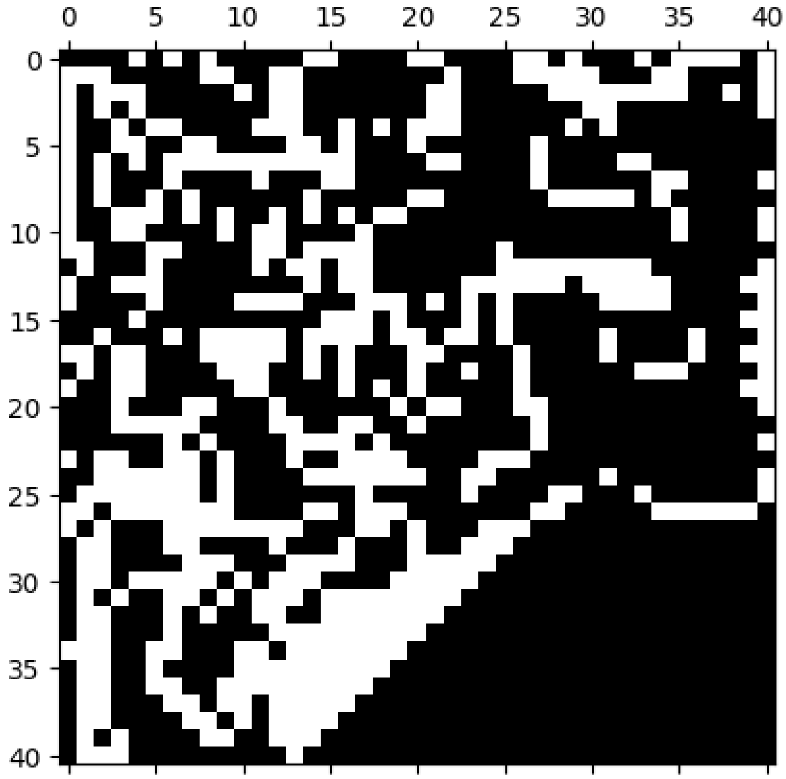

0
5
10
15
20
25
30
35
40

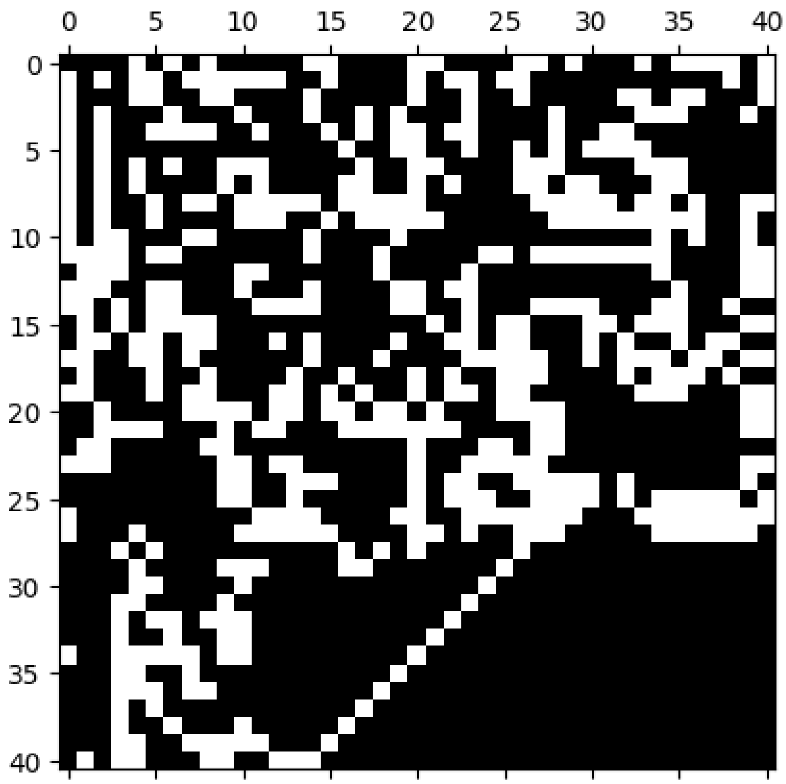


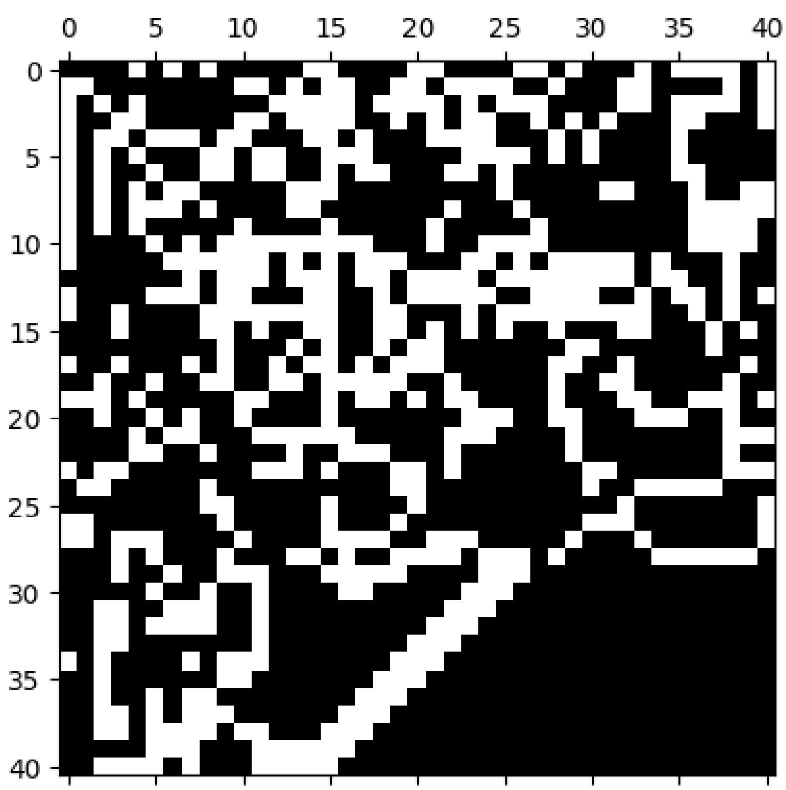
0
5
10
15
20
25
30
35
40

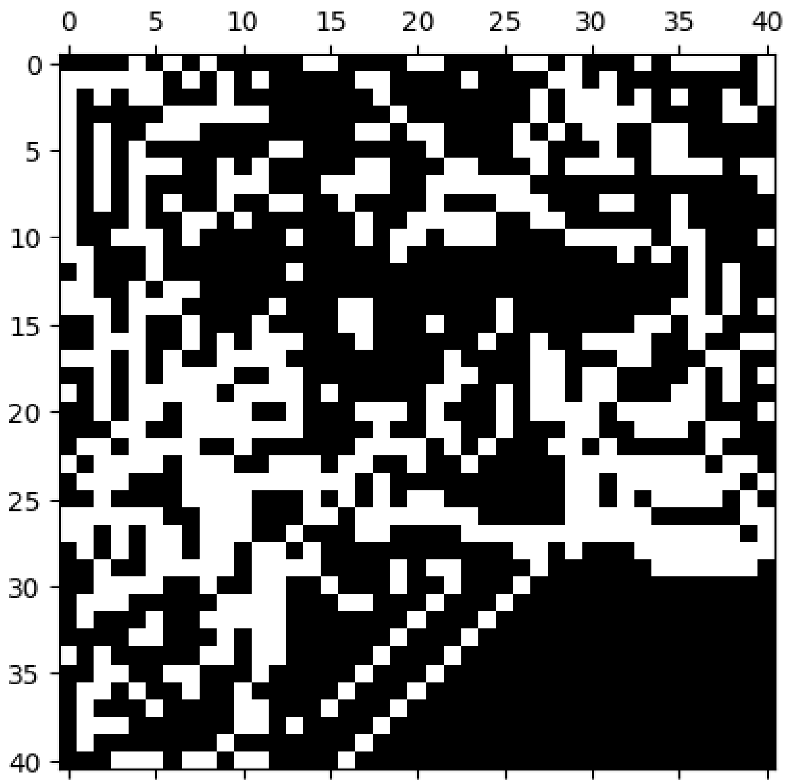


0
5
10
15
20
25
30
35
40

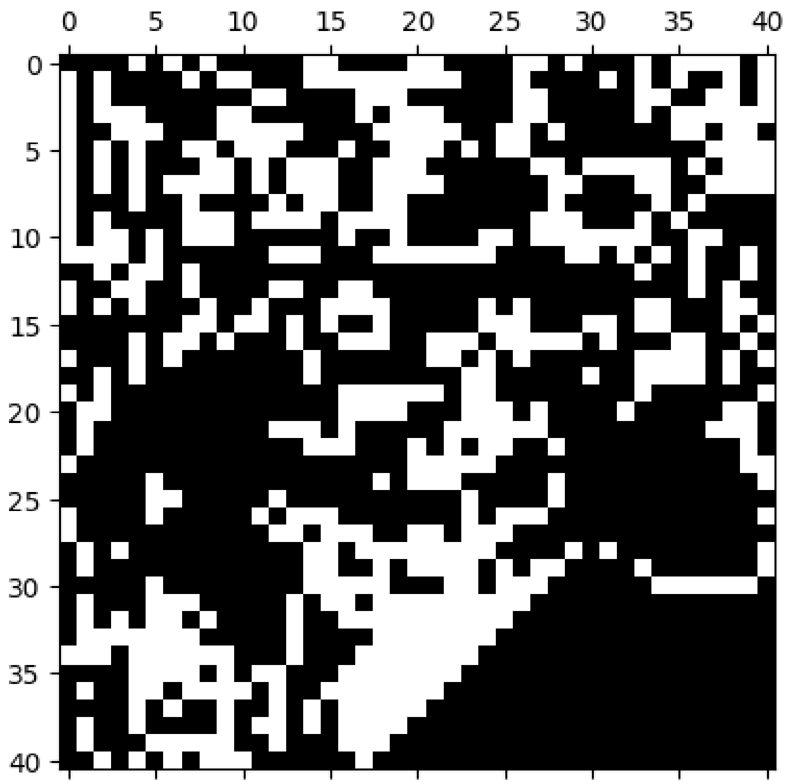

0
5
10
15
20
25
30
35
40

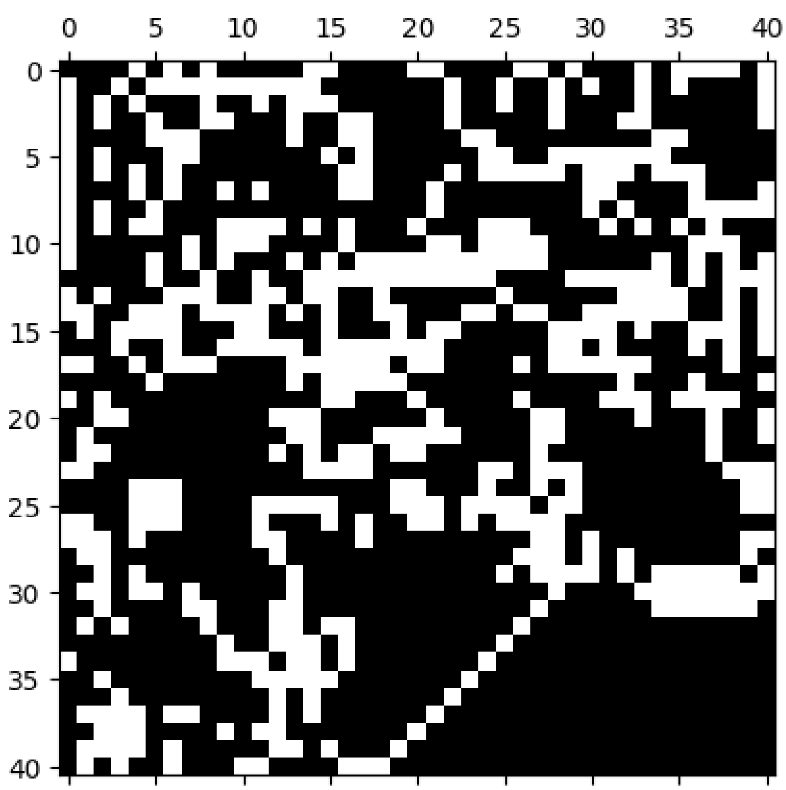

0
5
10
15
20
25
30
35
40

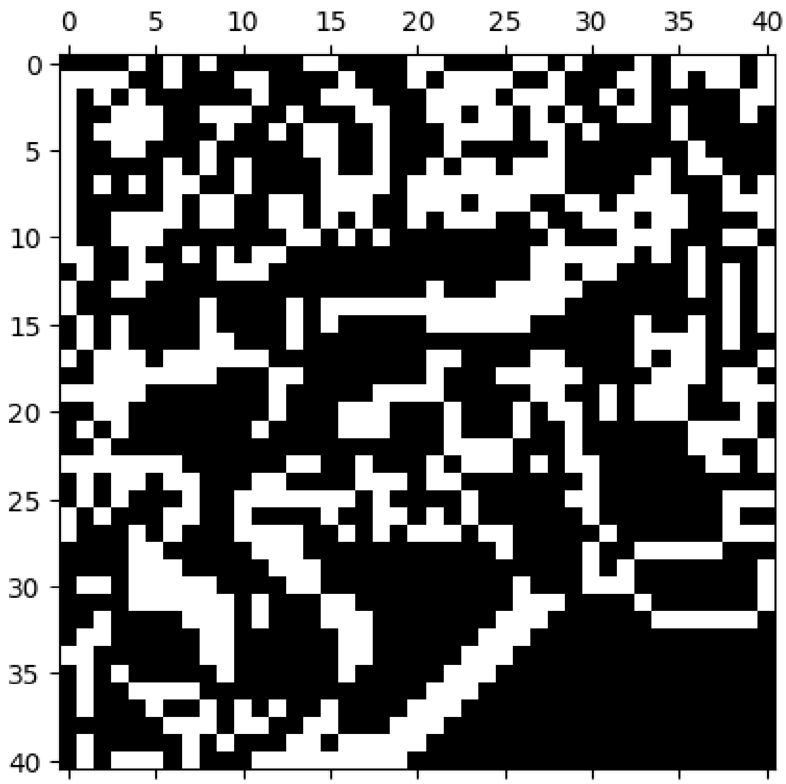

0
5
10
15
20
25
30
35
40



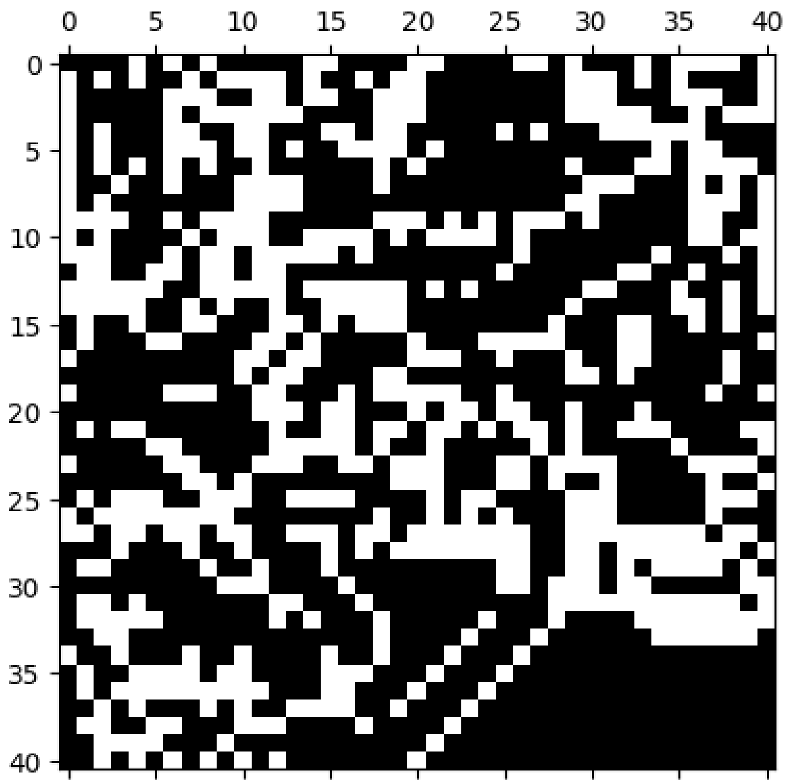
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40


0
5
10
15
20
25
30
35
40

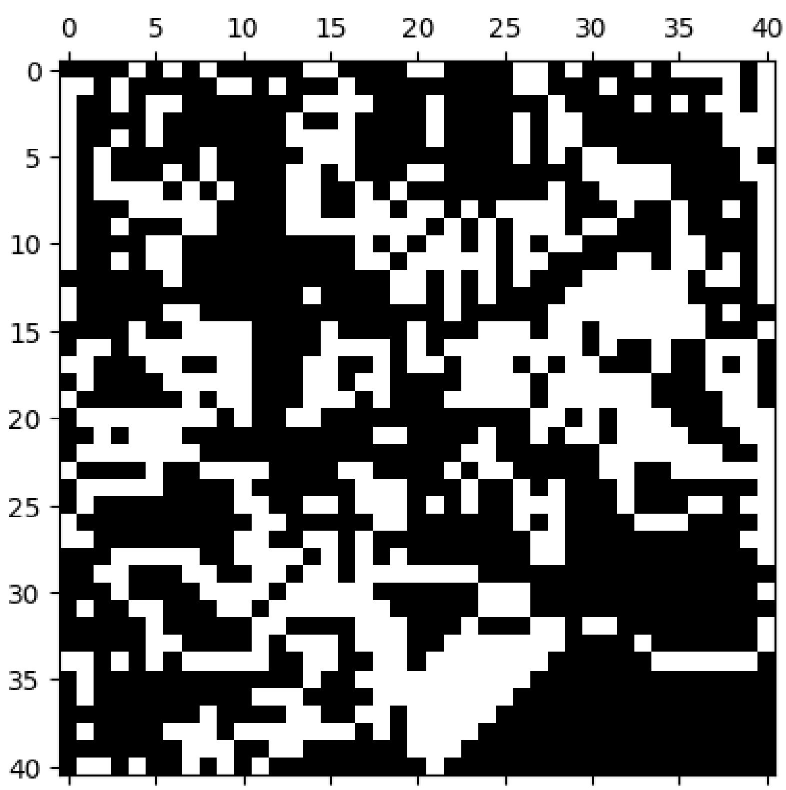

0
5
10
15
20
25
30
35
40



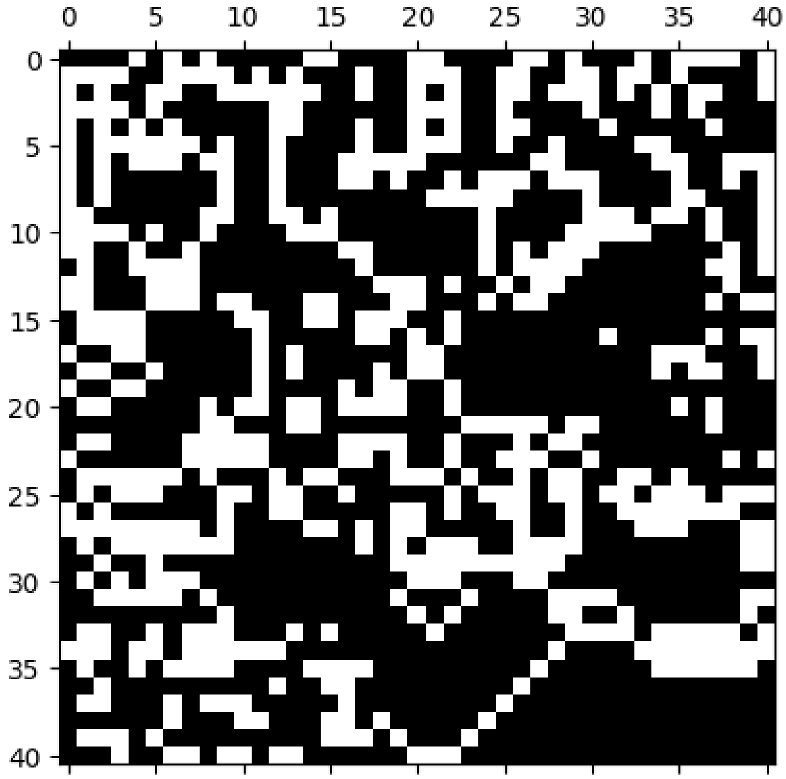
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40

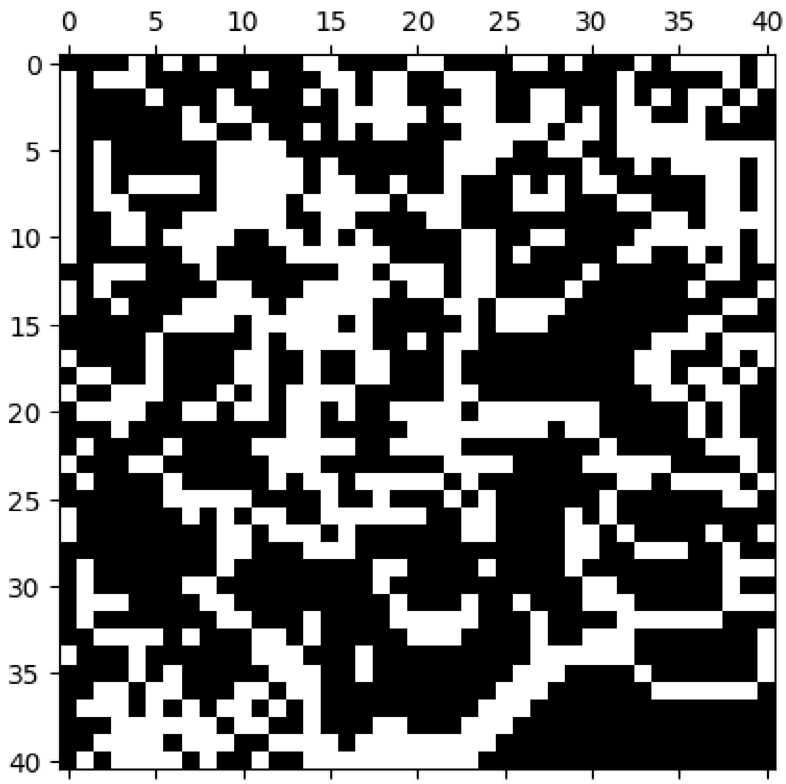


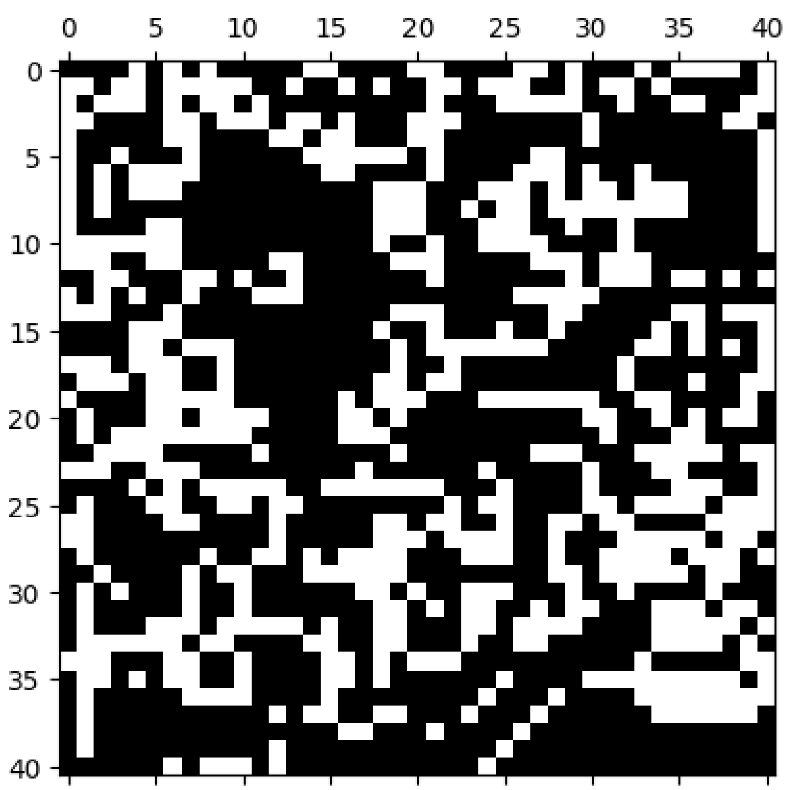
0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40

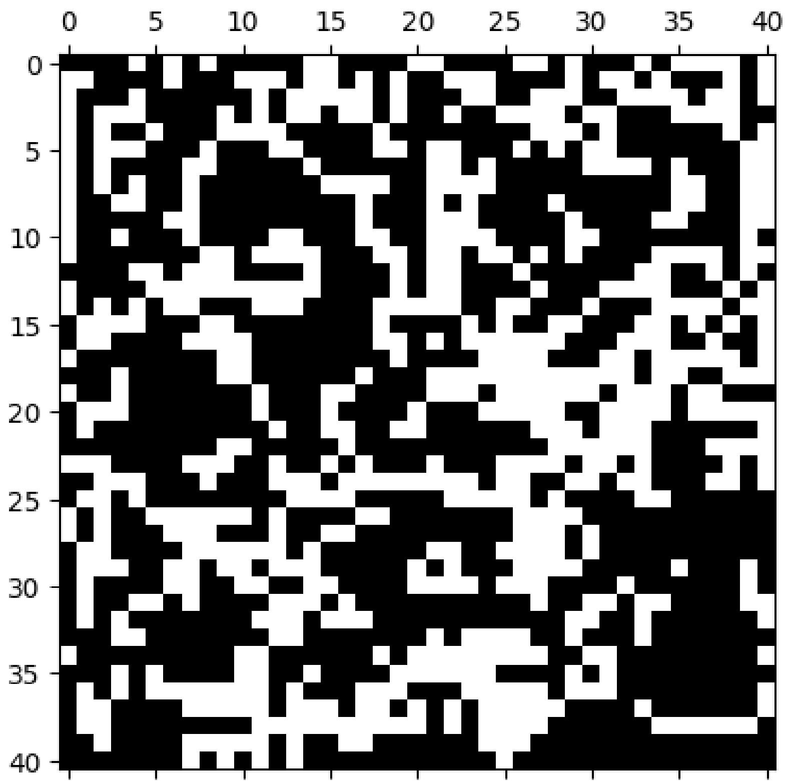


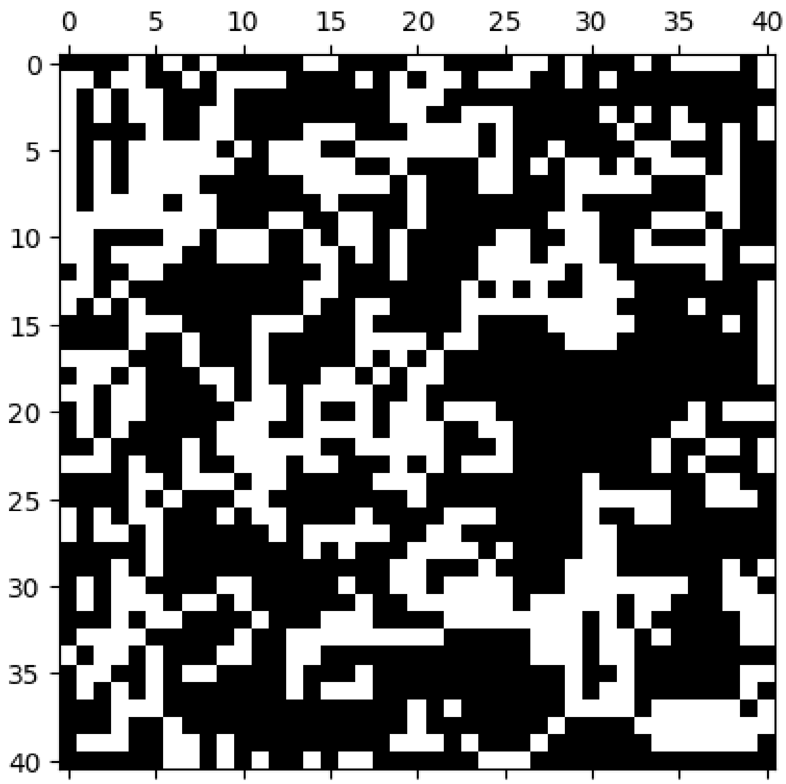
0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40

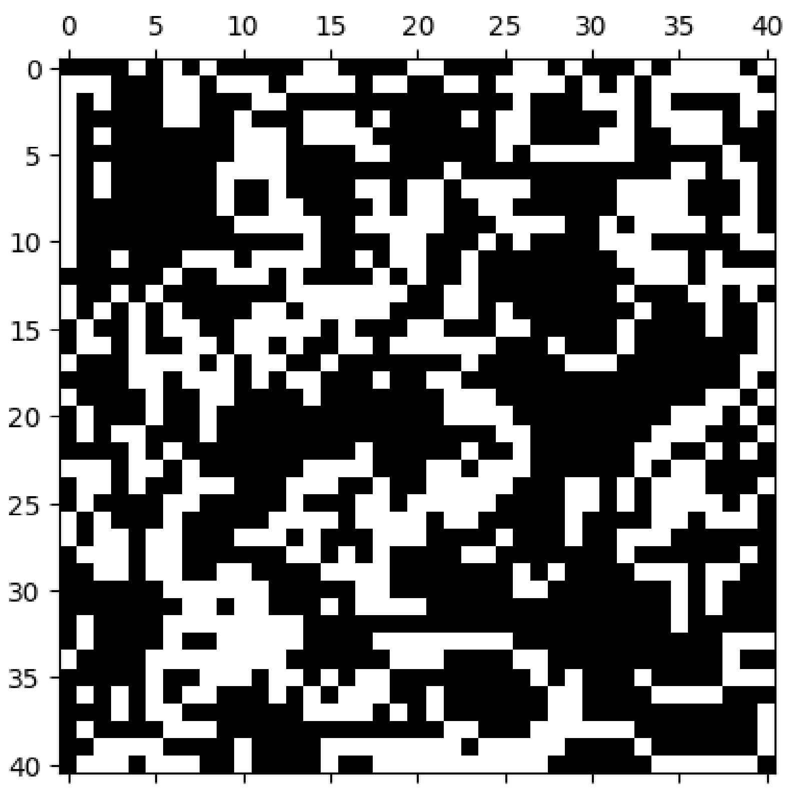

0
5
10
15
20
25
30
35
40

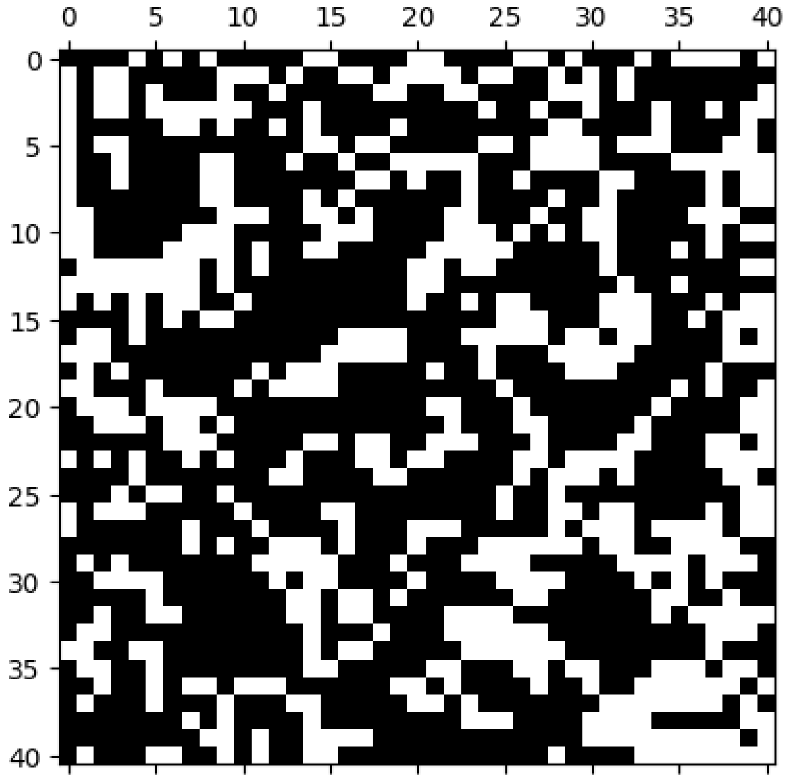

0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40


0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40

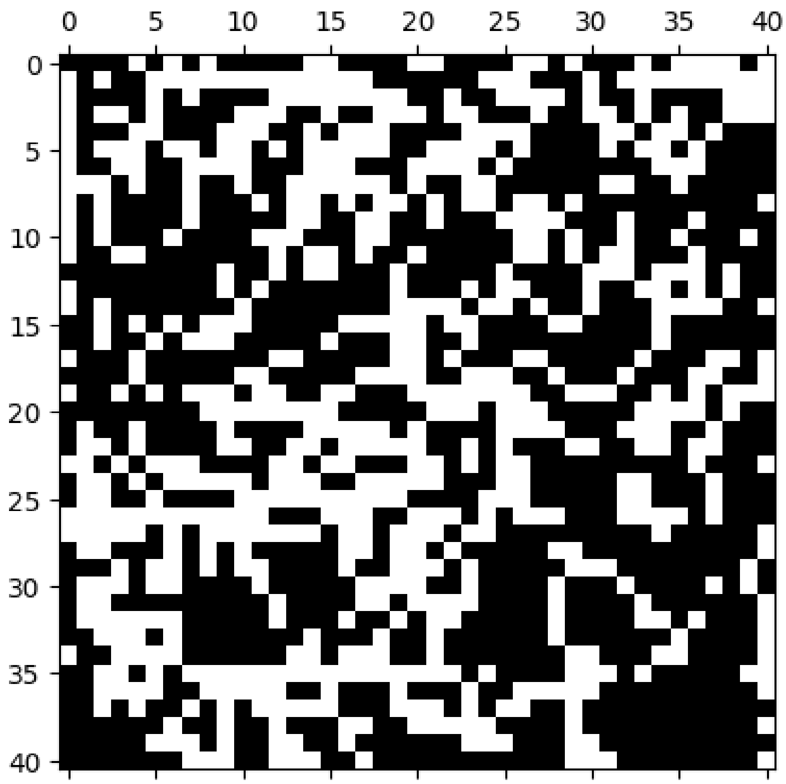

0
5
10
15
20
25
30
35
40

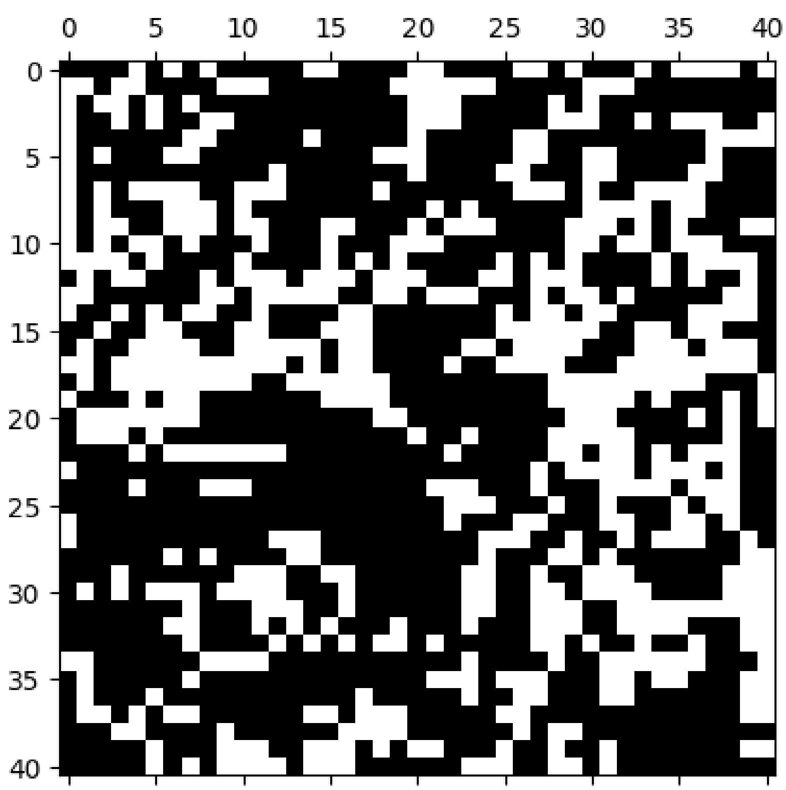

0
5
10
15
20
25
30
35
40

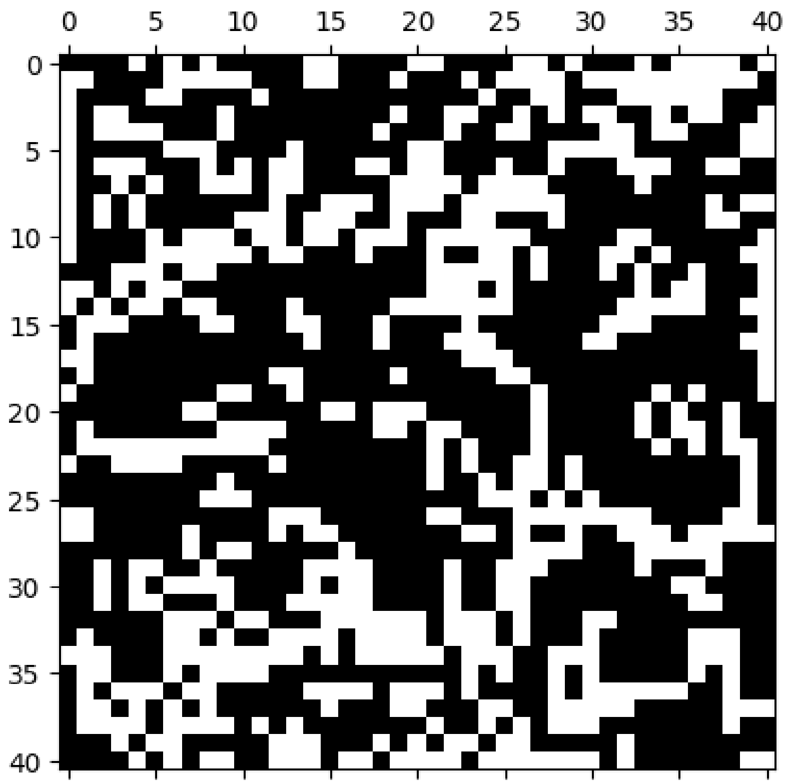

0
5
10
15
20
25
30
35
40

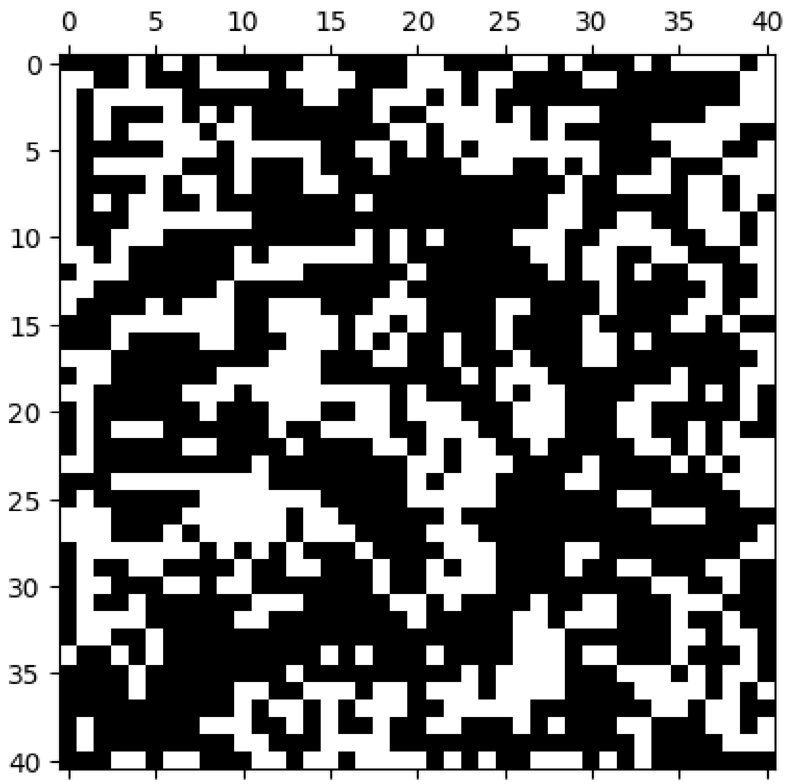


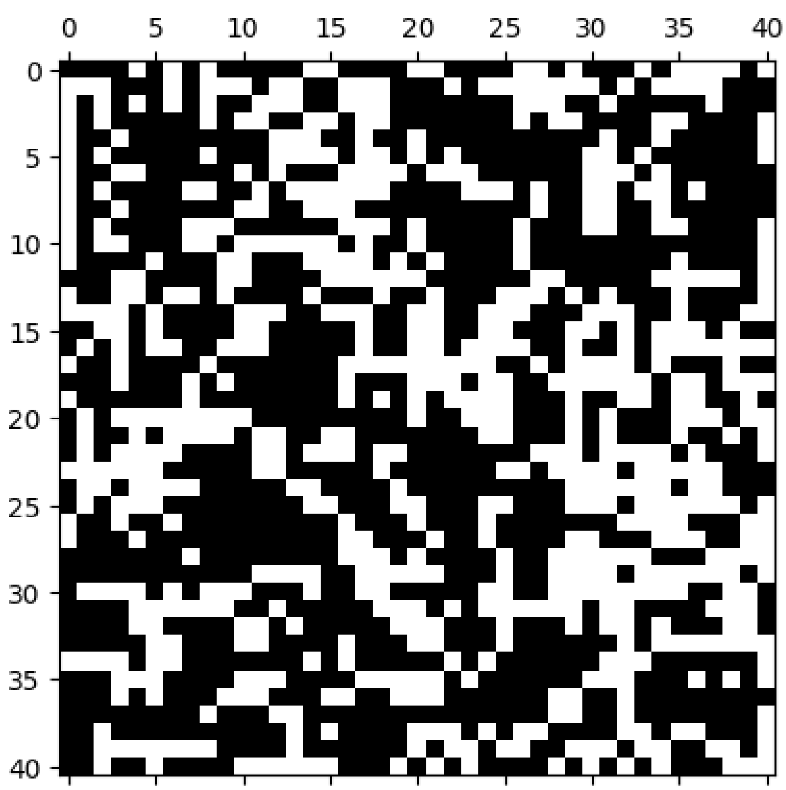
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40

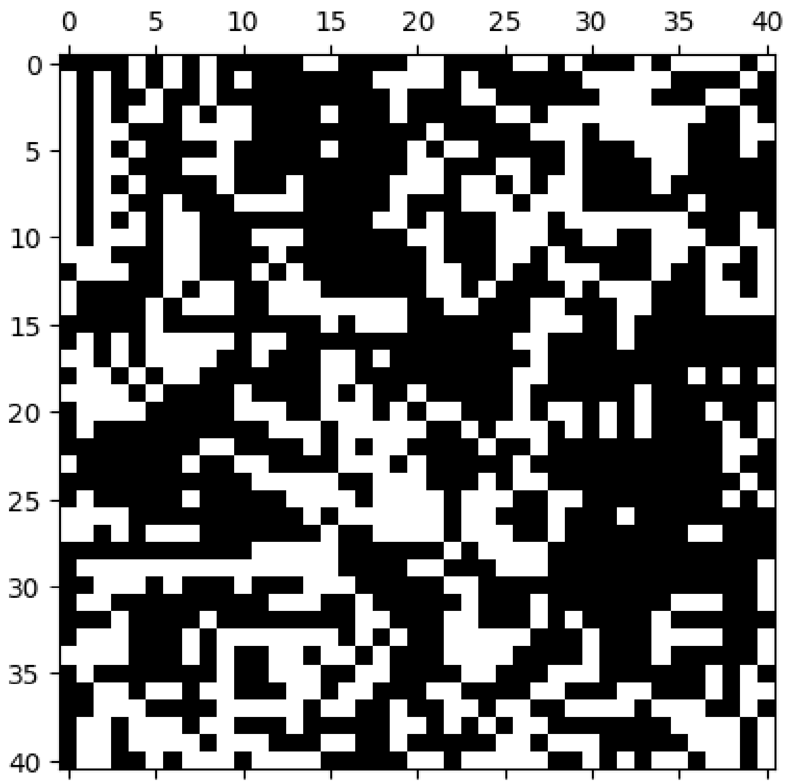

0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40

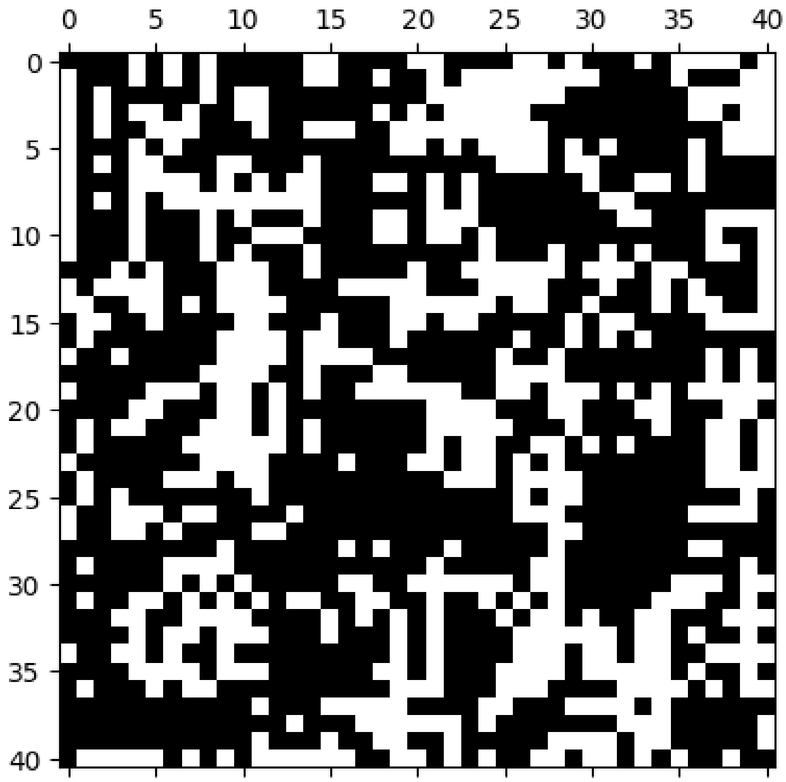

0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40


0
5
10
15
20
25
30
35
40


0
5
10
15
20
25
30
35
40


0
5
10
15
20
25
30
35
40


0 5 10 15 20 25 30 35 40
0 5 10 15 20 25 30 35 40


0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
5
10
15
20
25
30
35
40