Задача 1

Пусть (X, Y) равномерно распределены на квадрате $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mu(\Omega) = 1$. Требуется найти вероятность попадания в область

$$\{x^2 + y^2 \le 1, \;\; x + y \ge 1\}.$$

Это часть четверти единичного круга в первой четверти, лежащая *над* прямой $x + y = 1$.

Площадь четверти круга:

$$\mu\big(x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\big) = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Площадь треугольника ABC с вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$:

$$\mu(ABC) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Искомая площадь (и вероятность) равна разности:

$$\mathsf{P} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}2853.$$

Ответ: $\dfrac{\pi - 2}{4}$.

Задача 2

Событие B: самолёт уцелеет, то есть будет не более одного попадания. Пусть $n = 200$ независимых выстрелов, вероятность попадания одним выстрелом $p = 0{,}005$, $q = 1 - p = 0{,}995$. Тогда

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) = q^{200} + \binom{200}{1} p\, q^{199}.$$

То есть

$$\mathsf{P}(B) = (0{,}995)^{200} + 200 \cdot 0{,}005 \cdot (0{,}995)^{199} \approx 0{,}7358.$$

Ответ: 0,7358.

Задача 3

Есть 70 изделий, из них 60 свежих и 10 испорченных. Выбирают 4 изделия. Событие A: среди выбранных есть и свежие, и испорченные.

Дополнение A^c состоит из двух случаев:

$$B: \text{ взяли только свежие}, \qquad C: \text{ взяли только испорченные}.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(C) = 1 - \frac{\binom{60}{4}}{\binom{70}{4}} - \frac{\binom{10}{4}}{\binom{70}{4}} = 1 - \frac{\binom{60}{4} + \binom{10}{4}}{\binom{70}{4}}.$$

Численно:

$$\mathsf{P}(A) = 1 - \frac{487635 + 210}{916895} \approx 0{,}4679.$$

Ответ: 0,4679.

Задача 4

Прибор работает, если работает хотя бы один из 4 элементов (параллельное соединение).

$$\mathsf{P}(A_1) = 0{,}9, \quad \mathsf{P}(A_2) = 0{,}8, \quad \mathsf{P}(A_3) = 0{,}7, \quad \mathsf{P}(A_4) = 0{,}6.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = 1 - (0{,}1)(0{,}2)(0{,}3)(0{,}4) = 0{,}9976.$$

Ответ: 0,9976.

Задача 5

Всего способов выбрать 5 объектов из 9:

$$n = \binom{9}{5}.$$

Благоприятные исходы: выбрать 2 из 3, 2 из 4 и 1 из 2:

$$m = \binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{9}{5}} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2}{126} = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857.$$

Ответ: 0,2857.

Задача 6

Событие A: выпало 21 очко. Гипотезы: H_1 — выбран первый, H_2 — выбран второй.

$$\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_1) = \frac{1}{18}, \qquad \mathsf{P}(A \mid H_2) = \frac{1}{2}.$$

По формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \mid H_1)\,\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(A \mid H_2)\,\mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

По формуле Байеса:

$$\mathsf{P}(H_1 \mid A) = \frac{\mathsf{P}(A \mid H_1)\,\mathsf{P}(H_1)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

Задача 7

$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, где $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$, $n = 300$. Нужно найти $\mathsf{P}(216 \le X \le 237)$ (по нормальному приближению).

$$\mu = np = 300 \cdot \frac{3}{4} = 225, \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5.$$

Стандартизация:

$$z_1 = \frac{216 - 225}{7{,}5} = -\frac{6}{5} = -1{,}2, \qquad z_2 = \frac{237 - 225}{7{,}5} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(216 \le X \le 237) \approx \Phi(1{,}6) - \Phi(-1{,}2) \approx 0{,}8301.$$

Ответ: 0,8301.

Задача 8

Всего исходов $n = 9^6$. Благоприятные: выбрать 3 позиции под фиксированный символ и заполнить остальные 3 позиции любыми из 8 остальных символов:

$$m = \binom{6}{3} \cdot 8^3.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{6}{3} \cdot 8^3}{9^6} = \frac{20 \cdot 512}{531441} \approx 0{,}01926 \approx 0{,}0193.$$

Ответ: 0,0193.

Задача 9

$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, где $p = 0{,}85$, $q = 0{,}15$, $n = 100$.

$$\mathsf{P}(X = 90) = \binom{100}{90}(0{,}85)^{90}(0{,}15)^{10} \approx 0{,}0443.$$

Ответ: 0,0443.

Задача 10

Деталь выбирают из партии: 10 деталей фирмы A, 5 — фирмы B, 5 — фирмы C (всего 20).

$$\mathsf{P}(K \mid A) = 0{,}99, \qquad \mathsf{P}(K \mid B) = 0{,}98, \qquad \mathsf{P}(K \mid C) = 0{,}96.$$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{10}{20}, \qquad \mathsf{P}(B) = \frac{5}{20}, \qquad \mathsf{P}(C) = \frac{5}{20}.$$

По формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}(K) = \frac{10}{20} \cdot 0{,}99 + \frac{5}{20} \cdot 0{,}98 + \frac{5}{20} \cdot 0{,}96 = 0{,}98.$$

Ответ: 0,98.

Задача 11

Дано: $\mathbb{E}\xi = 3$, $\mathrm{Var}(\xi) = 3$, $\mathbb{E}\eta = -2$, $\mathrm{Var}(\eta) = 1$, ξ и η независимы. Пусть $\delta = 2\xi - 3\eta$.

$$\mathbb{E}\delta = \mathbb{E}(2\xi) - \mathbb{E}(3\eta) = 2\mathbb{E}\xi - 3\mathbb{E}\eta = 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) = 12.$$

Так как независимы, ковариация равна нулю:

$$\mathrm{Var}(\delta) = \mathrm{Var}(2\xi - 3\eta) = 4\,\mathrm{Var}(\xi) + 9\,\mathrm{Var}(\eta) = 4 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 21.$$

$$\mathbb{E}\delta + \mathrm{Var}(\delta) = 12 + 21 = 33.$$

Ответ: 33.

Задача 12

Для биномиального распределения:

$$\mathbb{E}X = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Дано:

$$np = 72, \qquad np(1-p) = 32{,}4.$$

Подставим $np = 72$ во второе:

$$72(1-p) = 32{,}4 \;\Rightarrow\; 1 - p = 0{,}45 \;\Rightarrow\; p = 0{,}55.$$

Ответ: 0,55.

Задача 13

Экспоненциальное распределение: $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}e^{-x/4}, & x \geq 0, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x/4}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathsf{P}(2 < \xi < 10) = F(10) - F(2) = (1 - e^{-10/4}) - (1 - e^{-2/4}) = e^{-1/2} - e^{-5/2} \approx 0{,}5244.$$

Ответ: 0,5244.

Задача 14

Задано распределение:

$$\xi: \quad -4,\ -2,\ 0,\ 3,\ 5, \qquad p: \quad 0{,}1,\ 0{,}3,\ 0{,}3,\ 0{,}2,\ 0{,}1.$$

Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\xi = (-4) \cdot 0{,}1 + (-2) \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}1.$$

Второй момент:

$$\mathbb{E}\xi^2 = 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}1 = 7{,}1.$$

Дисперсия:

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 7{,}1 - 0{,}01 = 7{,}09.$$

$$\mathbb{E}\xi + \mathrm{Var}(\xi) = 0{,}1 + 7{,}09 = 7{,}19.$$

Ответ: 7,19.

Задача 15

$\xi \sim \mathcal{N}(1, 16)$, то есть $\mu = 1$, $\sigma = 4$. Найти $\mathsf{P}(|\xi| > 2)$:

$$\mathsf{P}(|\xi| > 2) = 1 - \mathsf{P}(-2 \le \xi \le 2).$$

Стандартизируем $Z = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$:

$$\mathsf{P}(-2 \le \xi \le 2) = \mathsf{P}\left(\frac{-2-1}{4} \le Z \le \frac{2-1}{4}\right) = \mathsf{P}(-0{,}75 \le Z \le 0{,}25).$$

В терминах функции Лапласа $\Phi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$:

$$\mathsf{P}(-a \le Z \le b) = \Phi_L(a) + \Phi_L(b).$$

Тогда

$$\mathsf{P}(-0{,}75 \le Z \le 0{,}25) = \Phi_L(0{,}75) + \Phi_L(0{,}25) \approx 0{,}2734 + 0{,}0987 = 0{,}3721,$$
$$\mathsf{P}(|\xi| > 2) = 1 - 0{,}3721 = 0{,}6279.$$

Ответ: 0,6279.

Задача 16

$\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, дано $\mathsf{P}(|\xi - a| > 1{,}02) = 0{,}61$. Тогда

$$\mathsf{P}(|\xi - a| \le 1{,}02) = 1 - 0{,}61 = 0{,}39.$$

Стандартизируем $Z = \frac{\xi - a}{\sigma}$:

$$\mathsf{P}\left(|Z| \le \frac{1{,}02}{\sigma}\right) = 0{,}39.$$

В терминах функции Лапласа:

$$\mathsf{P}(|Z| \le u) = 2\Phi_L(u) \ \Rightarrow\ 2\Phi_L\left(\frac{1{,}02}{\sigma}\right) = 0{,}39 \Rightarrow \Phi_L\left(\frac{1{,}02}{\sigma}\right) = 0{,}195.$$

По таблице $\Phi_L(0{,}51) \approx 0{,}195$, значит

$$\frac{1{,}02}{\sigma} = 0{,}51 \ \Rightarrow\ \sigma = 2.$$

Ответ: $\sigma = 2$ (то есть $\sigma^2 = 4$).

Задача 17

Плотность:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax, & 0 \le x < 1, \\ A(4 - x^2), & 1 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 Ax\,dx + \int_1^2 A(4-x^2)\,dx = 1.$$

Считаем интегралы:

$$\int_0^1 Ax\,dx = \frac{A}{2}, \qquad \int_1^2 A(4-x^2)\,dx = A\Big(4x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_1^2 = A\left(\frac{16}{3} - \frac{11}{3}\right) = \frac{5A}{3}.$$

Итого:

$$\frac{A}{2} + \frac{5A}{3} = 1 \;\Rightarrow\; A\left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6}\right) = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{6}{13} \approx 0{,}4615.$$

Ответ: $A = \dfrac{6}{13} \approx 0{,}4615$.

Задача 18

ξ принимает значения $1, 2, 3, 4, 5$ с вероятностями $p_i = \frac{1}{5}$.

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3.$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{55}{5} = 11.$$

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 11 - 9 = 2.$$

$$\mathbb{E}\xi + \mathrm{Var}(\xi) = 3 + 2 = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 19

Двухточечное распределение: $\mathsf{P}(\xi = x_1) = 0{,}3$, $\mathsf{P}(\xi = x_2) = 0{,}7$, $x_1 < x_2$. Дано: $\mathbb{E}\xi = 4{,}3$, $\mathrm{Var}(\xi) = 0{,}21$.

Система:

$$0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 4{,}3,$$

$$0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 - (4{,}3)^2 = 0{,}21.$$

Решения системы:

$$(x_1, x_2) = (5, 4) \quad \text{и} \quad (x_1, x_2) = \left(\frac{18}{5}, \frac{23}{5}\right).$$

С учётом условия $x_1 < x_2$ берём

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{18}{5}, \frac{23}{5}\right).$$

Тогда

$$x_1 + x_2 = \frac{18}{5} + \frac{23}{5} = \frac{41}{5} = 8{,}2.$$

Ответ: 8,2.

Задача 20

Плотность:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x < 0{,}5, \\ -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x, & 0{,}5 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^{0.5} 2x^2\,dx + \int_{0.5}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right) x\,dx.$$

$$\int_0^{0.5} 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{12}, \qquad \int_{0.5}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right) dx = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{5}{6}.$$

Второй момент:

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{0.5} 2x^3\,dx + \int_{0.5}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right) x^2\,dx.$$

$$\int_0^{0.5} 2x^3\,dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{32}, \qquad \int_{0.5}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3\right) dx = \frac{27}{32}.$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{32} + \frac{27}{32} = \frac{7}{8}.$$

Дисперсия:

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{7}{8} - \frac{25}{36} = \frac{13}{72}.$$

$$\mathbb{E}\xi + \mathrm{Var}(\xi) = \frac{5}{6} + \frac{13}{72} = \frac{73}{72} \approx 1{,}0138.$$

Ответ: 1,0138.

Задача 21

Случайная точка равномерно распределена в эллипсе

$$D: \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} \le 1.$$

Здесь полуоси: $a = 5$, $b = 2$. Площадь эллипса:

$$S = \pi ab = 10\pi, \qquad f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{S} = \frac{1}{10\pi} \text{ внутри } D.$$

По симметрии:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0.$$

Переход к “эллиптическим полярным” координатам:

$$x = 5r\cos\varphi, \quad y = 2r\sin\varphi, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$dx\,dy = ab\,r\,dr\,d\varphi = 10r\,dr\,d\varphi.$$

Тогда

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{10\pi}\iint_D x^2\,dx\,dy = \frac{1}{10\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (25r^2\cos^2\varphi)\cdot 10r\,dr\,d\varphi = \frac{25}{4}.$$

Аналогично

$$\mathrm{Var}(\eta) = \mathbb{E}\eta^2 = \frac{1}{10\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r^2\sin^2\varphi)\cdot 10r\,dr\,d\varphi = 1.$$

Условное ожидание (по симметрии относительно оси Oy):

$$\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 0{,}6) = 0.$$

Ковариация:

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}(\xi\eta) = \frac{1}{10\pi}\iint_D xy\,dx\,dy = 0 \quad \text{(интеграл нечётный по симметрии).}$$

Коэффициент корреляции:

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)\,\mathrm{Var}(\eta)}} = 0.$$

Ответ: $\mathbb{E}\xi = 0,\ \mathrm{Var}(\xi) = \frac{25}{4},\ \mathbb{E}\eta = 0,\ \mathrm{Var}(\eta) = 1,\ \mathbb{E}(\xi \mid \eta = 0{,}6) = 0,\ r_{\xi,\eta} = 0.$

Задача 22

Пусть плотность

$$f_\xi(x) = a\sin^2(\pi x), \quad x \in [0,1], \qquad f_\xi(x) = 0 \text{ иначе.}$$

Нормировка:

$$1 = \int_0^1 a\sin^2(\pi x)\,dx = a\int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\,dx = a\cdot\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ a = 2.$$

Характеристическая функция:

$$\psi(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi}) = \int_0^1 e^{itx}\,2\sin^2(\pi x)\,dx.$$

Используем $2\sin^2(\pi x) = 1 - \cos(2\pi x)$:

$$\psi(t) = \int_0^1 e^{itx}\,dx - \int_0^1 e^{itx}\cos(2\pi x)\,dx.$$

В итоге получается

$$\psi(t) = \frac{4i\pi^2\big(e^{it}-1\big)}{t^3 - 4\pi^2 t}.$$

Тогда при $t = \pi$:

$$\psi(\pi) = \frac{4i\pi^2(e^{i\pi}-1)}{\pi^3 - 4\pi^3} = \frac{4i\pi^2(-2)}{-3\pi^3} = \frac{8i}{3\pi},$$
$$\big(\psi(\pi)\big)^2 = \left(\frac{8i}{3\pi}\right)^2 = -\frac{64}{9\pi^2} \approx -0{,}7205.$$

Ответ: $-0{,}7205$.