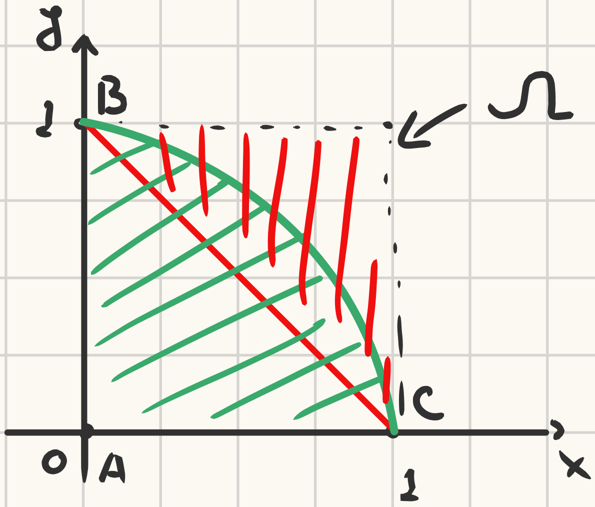
1) x, y

$$\begin{cases} x+y>1 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$$

$y > 1 - x$



$\mu(\Omega) = 1$

$\mu(ABC) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mu(\equiv) = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \pi/4$

$\mu(ABC \cap \equiv) = \pi/4 - 1/2 \approx 0.2853$ Ответ $\frac{\pi - 2}{4}$

---

2) Самолёт уцелел = попаданий $\leq \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

B $p(B) = p(0 \text{ попад}) + p(1 \text{ попад})$

$p(0 \text{ попад}) = (0{,}995)^{200}$

$p(1 \text{ попад}) = (0.05) \ (0{,}995)^{199}$

$p(B) = (0{,}995)^{200} + (0.05) \ (0{,}995)^{199} = 0{,}7358$

Ответ: 0,7358

---

3)

60	10

A - вытащили испорченные и свежие

B - вытащили только свежие

C - вытащили только испорченные

$p(A) = 1 - (p(B) + p(C))$ $p(B) = \frac{C_{60}^4}{C_{70}^4}$ $p(C) = \frac{C_{10}^4}{C_{70}^4}$

$p(A) = 1 - \frac{1}{C_{70}^4}\left(C_{60}^4 + C_{10}^4\right) = 1 - \frac{487635 + 210}{916895} \approx 0{,}4679$

Ответ: 0,4679

---

4) A - работает прибор A_i - работает i-й элемент

$p(A_1) = 0.9$ $p(A_2) = 0{,}8$ $p(A_3) = 0{,}7$ $p(A_4) = 0{,}6$

$p(\overline{A_1}) = 0{,}1$ $p(\overline{A_2}) = 0{,}2$ $p(\overline{A_3}) = 0{,}3$ $p(\overline{A_4}) = 0{,}4$

$p(A) = 1 - p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}9976$

Ответ: 0,9976

5) $p(A) = \frac{m}{n}$

выбор плотника

$n = C_9^5$ $m = C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1$ $p(A) = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2}{126} = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857$

выбор маляра выбор штукатура

Ответ: 0,2857

---

6) A - Выпало 11 очков

H_1 - выбрали первый H_2 - выбрали второй

5 и 6
6 и 5
$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot 2$

$p(H_1) = \frac{1}{2}$ $p(H_2) = \frac{1}{2}$

$p(A) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$ $p(H_1 | A) = \frac{1/18 \cdot 1/2}{5/18} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Ответ: 0,1

---

7) $p = 3/4$ $q = 1/4$ $n = 300$ $m_1 = 216$ $m_2 = 237$

$P(216 \le x \le 237) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1{,}4) - \Phi(-1{,}2) = \Phi(1{,}4) + \Phi(1{,}2) = 0{,}8301$

$x_1 = \frac{216 - 300 \cdot 3/4}{\sqrt{300 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} = -\frac{6}{5}$

$x_2 = \frac{237 - 300 \cdot 3/4}{\sqrt{300 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{8}{5}$

Ответ: 0,8301

---

8) $p(A) = \frac{m}{n}$ $n: 9^6$ $m: C_6^3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 20 \cdot 8^3 = 64160$

$p(A) = \frac{64160}{9^6} \approx 0{,}01926$ Ответ: 0,0193

---

9) $p = 0{,}85$ $q = 0{,}15$ $n = 100$ $k = 90$ $p(A) = C_{100}^{90} \cdot (0{,}85)^{90} \cdot (0{,}15)^{10} = 0{,}0443$

Ответ: 0,0443

---

10) A B C K - деталь годная

H_i - выбор i-й фирмы

A: 10 дет, $p(A) = 0{,}99$

B: 10 дет, $p(A) = 0{,}98$

C: 10 дет, $p(A) = 0{,}96$

1 - A
2 - B
3 - C

$\sum p(H_i | A) \cdot p(A) = p(K) = \frac{10}{20} \cdot 0{,}99 + \frac{5}{20} \cdot 0{,}98 + \frac{5}{20} \cdot 0{,}96 = 0{,}98$

Ответ: 0,98

11 $E\xi=3 \quad D\xi=3 \quad E\eta=-2 \quad D\xi=2 \qquad \gamma = 2\xi-3\eta$

$$E\gamma = E(2\xi-3\eta) = E(2\xi) - E(3\eta) = 2E\xi - 3E\eta = 6+6=12$$
$$D\gamma = D(2\xi-3\eta) = D(2\xi)+D(3\eta) = 4D\xi + 9D\eta = 21$$

т.к. независимы $cov(2\xi, 3\eta)=0$

$E\gamma + D\gamma = 21+12=33$ Ответ: 33

---

12 $E\xi = 72;\ D\xi = 32,4$

$$\begin{cases} np = 72 \\ np(1-p) = 32.4 \end{cases} \qquad 72\cdot(1-p) = 32.4 \qquad p = 0.55$$

Ответ: 0,55

---

13 $E_\alpha \qquad E\xi = \frac{1}{\alpha} = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, & x\geq 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\frac{1}{4}x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

$$P(2<\xi<10) = F(10)-F(2) = \left(1-e^{-\frac{5}{2}}\right) - \left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right) \approx 0,5244$$

Ответ: 0,5244

14

ξ	-4	-2	0	3	5
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

$E\xi + D\xi$ - ?

$$E\xi = (-4)\cdot 0.1 + (-2)\cdot 0.3 + 0\cdot 0.3 + 3\cdot 0.2 + 5\cdot 0.1 = 0.1$$
$$E(\xi)^2 = 16\cdot 0.1 + 4\cdot 0.3 + 0\cdot 0.3 + 9\cdot 0.2 + 25\cdot 0.1 = 7.1$$
$$D\xi = E(\xi)^2 - (E\xi)^2 = 7.1 - 0.01 = 7.09$$

$E\xi + D\xi = 0,1 + 7,09 = 7,19$ Ответ: 7,19

---

15 $\xi \in N(1,16) \quad a=1;\ \sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4$

$$p(|\xi|>2) = 1-p(|\xi|\leq 2) = 1-p(-2\leq\xi\leq 2) = 1-\left(\Phi\left(\frac{2-1}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-2-1}{4}\right)\right) =$$
$$= 1-\left(\Phi\left(\frac{1}{4}\right) + \Phi\left(\frac{3}{4}\right)\right) \approx 1-(0,0987+0,2734) \approx 0,6279$$

Ответ: 0,6279

16| $\xi \in N(a, \sigma^2)$ $\quad \sigma - ?$

$P(|\xi - a| > 1.02) = 0{,}61$

$1 - P(|\xi - a| \le 1{,}02) = 0{,}61 \Rightarrow P(|\xi - a| \le 1{,}02) = 0{,}39 = 2\Phi\left(\frac{1{,}02}{\sigma}\right)$

$\Phi\left(\frac{1{,}02}{\sigma}\right) = 0{,}195 \qquad \frac{1{,}02}{\sigma} = 0{,}51 \Rightarrow \sigma = 2$ Ответ: 2

17|

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ax, & 0 \le x < 1 \\ A(4 - x^2), & 1 \le x < 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}$$

Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{0} + \int\limits_{0}^{1} Ax\,dx + \int\limits_{1}^{2} A(4 - x^2) + \underbrace{\int\limits_{2}^{+\infty} 0\,dx}_{0} = \frac{Ax^2}{2}\Bigg|_0^1 + A\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{A}{2} + A\left(\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{A}{2} + \frac{5A}{3} = 1 \Rightarrow A = \frac{6}{13} \approx 0{,}4615$$

Ответ: 0,4615

18|

ξ	1	2	3	4	5
P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

$p_i = \frac{1}{5} \qquad E\xi + D\xi - ?$

$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot 1/5 = 3 \qquad D\xi = 11 - 9 = 2$

$E\xi^2 = 1 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \frac{1}{5} + 16 \cdot \frac{1}{5} + 25 \cdot \frac{1}{5} = 11 \qquad E\xi + D\xi = 2 + 3 = 5$

Ответ: 5

19|

ξ	x_1	x_2
p	0,3	p_2

$x_1 + x_2 - ?$

$x_1 < x_2$

$p_2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$$\begin{cases} E\xi = 4{,}3 \\ D\xi = 0{,}21 \end{cases} \qquad \begin{cases} E\xi = x_1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}7 = 4{,}3 \\ D\xi = x_1^2 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}7 - (4{,}3)^2 = 0{,}21 \end{cases}$$

Решения системы: (x_1, x_2): $(5, 4)$ и $\left(\frac{18}{5}, \frac{23}{5}\right)$ т.к. $x_1 < x_2$:

$\left(\frac{18}{5}, \frac{23}{5}\right) \qquad x_1 + x_2 = \frac{18}{5} + \frac{23}{5} = 8{,}2$

Ответ: 8,2

20|
$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x, & 0\le x<0.5\\ -\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}, & 0.5\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

$E\xi + D\xi$ -?

$E\xi=\int\limits_{\mathbb{R}} x f(x)dx \quad D\xi=\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx-\left(\int\limits_{\mathbb{R}} x f(x)dx\right)^2$

$$E\xi=\int_0^{0.5} 2x^2dx+\int_{0.5}^{2}\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^{1/2}+\left(-2x^3+\frac{2}{3}x^2\right)\Big|_{1/2}^{2}=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=\frac{5}{6}$$

$$E\xi^2=\int_0^{1/2}2x^3dx+\int_{1/2}^{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^3dx=\frac{x^4}{2}\Big|_0^{1/2}+\left(-\frac{x^4}{6}+\frac{4}{9}x^3\right)\Big|_{1/2}^{2}=\frac{1}{32}+\frac{27}{32}=\frac{7}{8}$$

$D\xi=\frac{7}{8}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{13}{72} \qquad E\xi+D\xi=\frac{5}{6}+\frac{13}{72}\approx 1{,}0138$ Ответ: 1,0138

21| $D: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}\le 1$ (ξ,η) - координаты точки

$E\xi, D\xi, E\eta, D\eta, E(\xi|\eta=0.6), r(\xi,\eta)$ -?

В силу симметрии $E\xi=E\eta=0$

Перейдём в полярные координаты $x=r\cdot b\cdot\cos\varphi \quad y=r\cdot a\cdot\sin\varphi$

$S=2\int_{-2}^{2}5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx=2\cdot 5\pi=10\pi \qquad dxdy=ab\,r\,dr\,d\varphi=10r\,dr\,d\varphi$

$$\rho_{\xi,\eta}=\frac{1}{S}=\frac{1}{10\pi} \quad D\xi=\frac{1}{10\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}4r^2\cos^2\varphi\cdot 10r\,dr\,d\varphi=\frac{4}{\pi}\int_0\int_0 r^3\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^1 r^3dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi=1$$

$$D\eta=\frac{1}{10\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}25r^2\sin^2\varphi\cdot 10r\,dr\,d\varphi=\frac{25}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{1}r^3dr=\frac{25}{\pi}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$$

$E(\xi|\eta=0.6)=0$ | $\mathrm{cor}(\xi,\eta)=E\xi\eta-0\cdot0=\frac{1}{10\pi}\iint\limits_D xy\,dx\,dy\underset{\text{симметрия}}{=}0$

22| $f_\xi(x)=a\sin^2\pi x$

Условие нормировки $\int_0^1 a\sin^2\pi x\,dx=a\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\pi x)}{2}\right)dx=$

$$=a\left(\int_0^1\frac{1}{2}dx-\underbrace{\int_0^1\frac{\cos 2\pi x}{2}dx}_{0}\right)=a\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin 2\pi x}{4\pi}\Big|_0^1=\frac{\sin(2\pi)}{4\pi}-\frac{\sin(0)}{4\pi}=0$$

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{itx} \cdot 2\sin^2 \pi x \, dx = \frac{4i(\pi^2)e^{it} - 4i\pi^2}{t^3 - 4\pi^2 t}$$

$$(\varphi(\pi))^2 = \left(\frac{4i\pi^2 e^{i\pi} - 4i\pi^2}{\pi^3 - 4\pi^3}\right)^2 = \left(\frac{-4i\pi^2 - 4i\pi^2}{-3\pi^3}\right)^2 = \left(\frac{-8i\pi^2}{-3\pi^3}\right) = \frac{-64}{9\pi^2} \approx -0{,}7205$$

Ответ: $-0{,}7205$