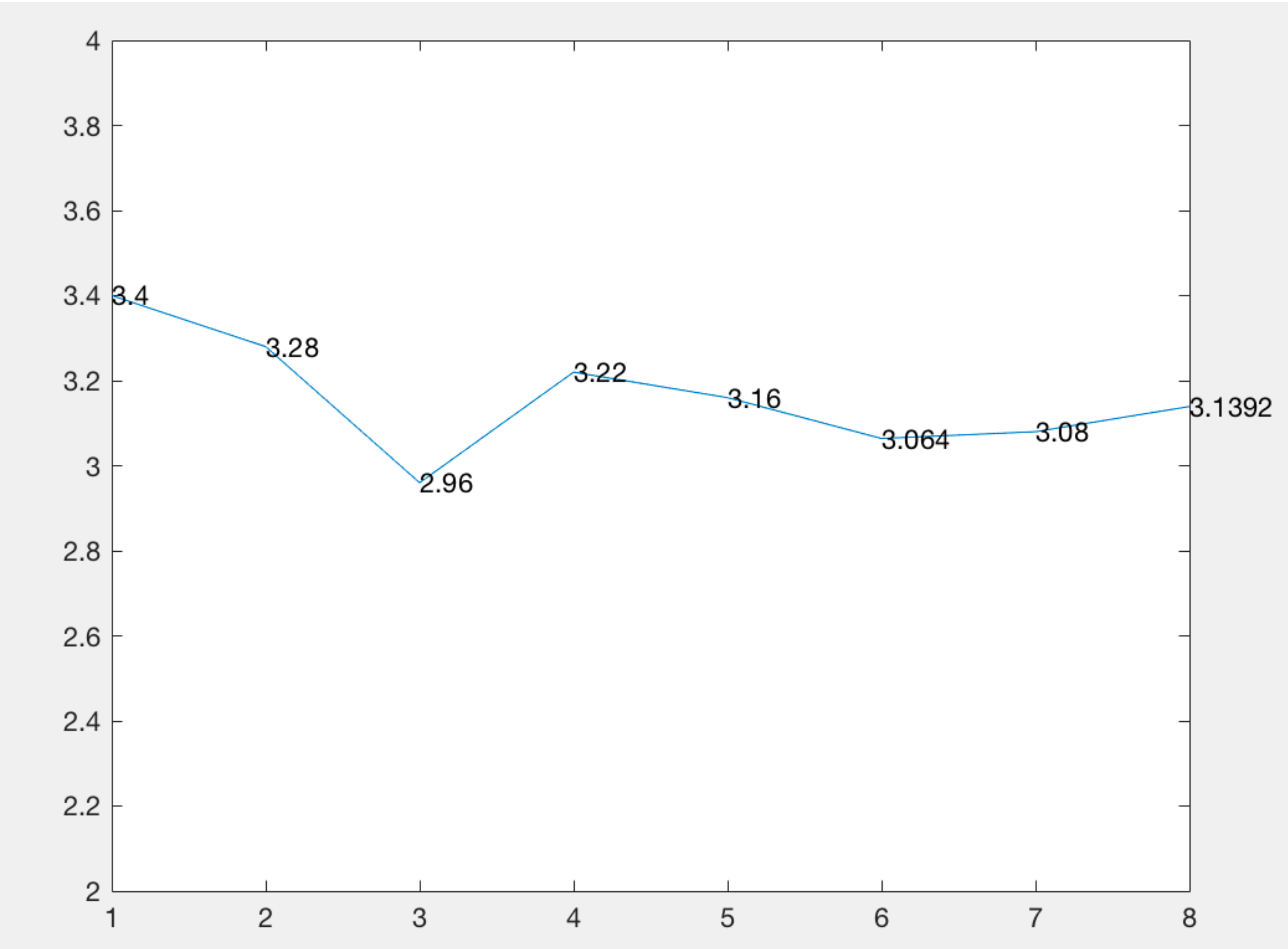
HW1

王晶 16340217

Exercise 1

首先使用均匀分布产生随机数，产生 *x* 轴上位于 **[0, 1]** 区间，*y* 轴上位于 **[0, 1]** 区间的点。



上图从左到右分别是采样次数N = 20, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 5000时，所计算得到的pi值。

当每个采样点次数重复20次后，得到的均值方差如下：

采样点数	20	50	100	200	300	500	1000	5000
均值	3.02	3.124	3.226	3.145	3.202	3.108	3.157	3.142
方差	0.31559	0.16292	0.19443	0.09206	0.079697	0.068656	0.0508	0.022077

分析

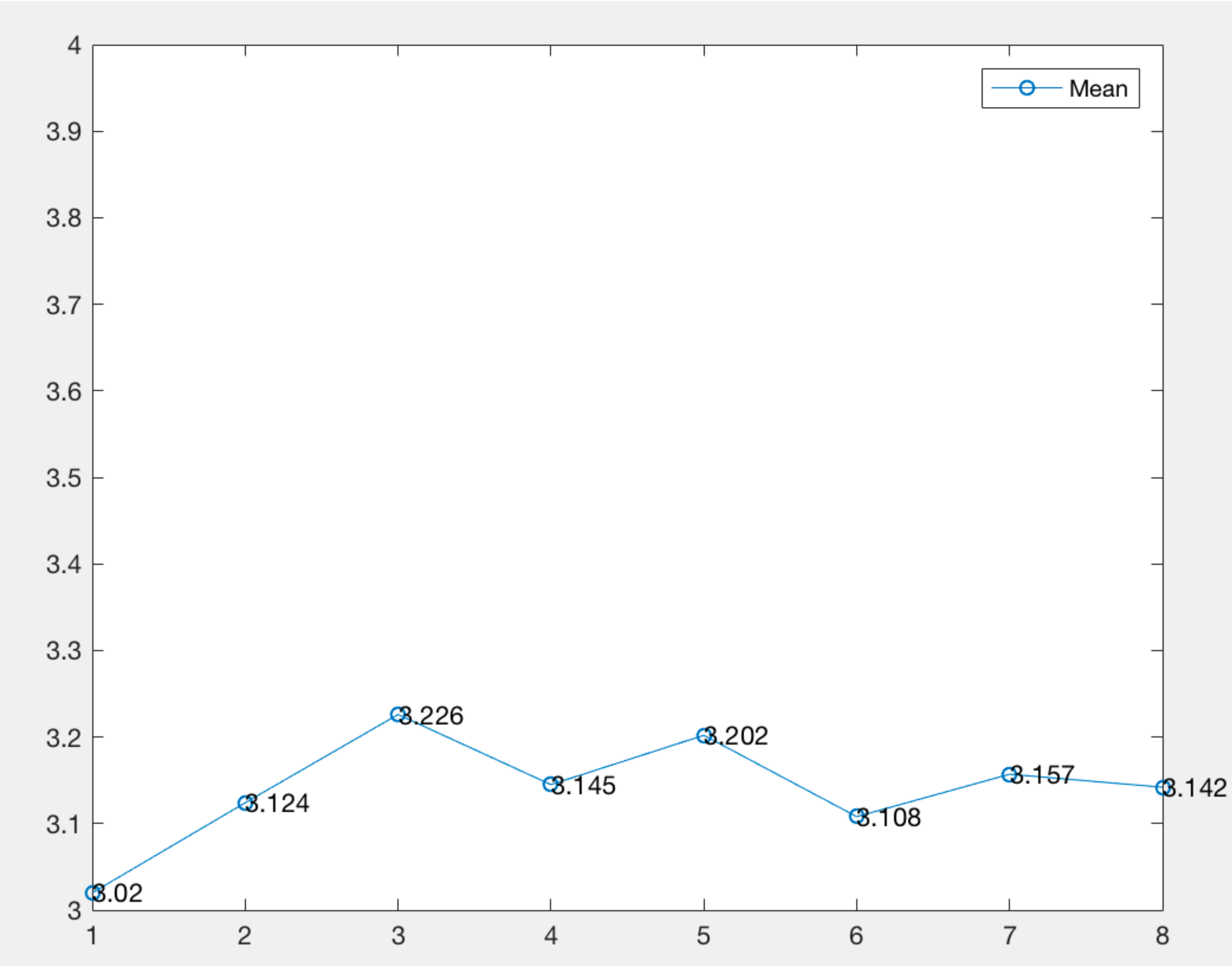
可以看出，均值随着采样点的增加，逐渐地趋于平稳，而方差则随着采样点地增加而减小。

核心代码：

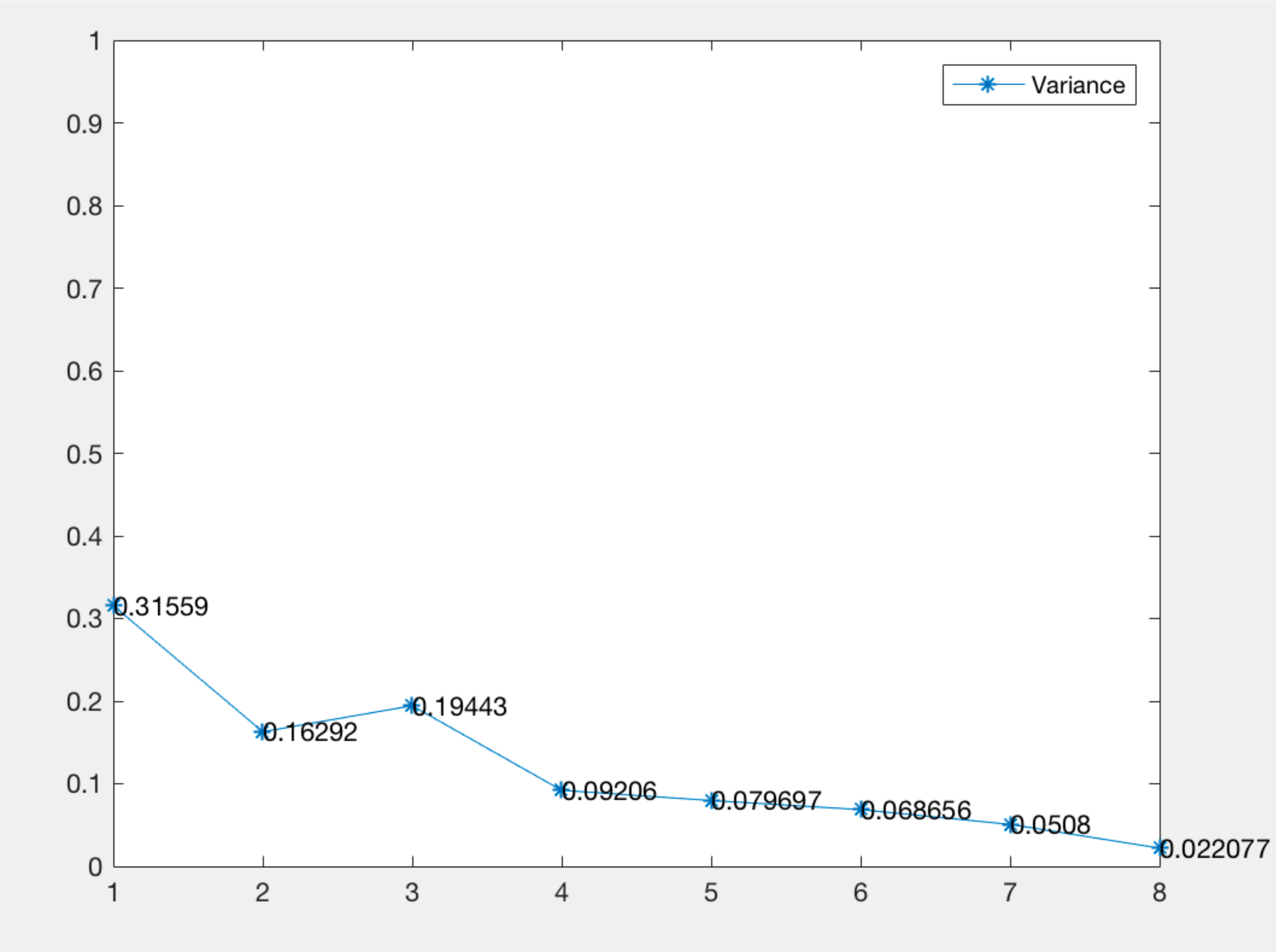
```
my_pi = zeros(8,22);
N = [20, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 5000];
t = [1,2,3,4,5,6,7,8];

for i=1:8
    for j=1:20
        rng('shuffle');%初始化随机发生器
        x = rand(1,N(i));%二维样本的x坐标, x: [-1,1]
        rng('shuffle');%再次初始化随机发生器，与上次不同，将产生独立的随机数
        y = rand(1,N(i));%二维样本的y坐标, y:[-1:1]
        s = sum(x.^2+y.^2 <= 1); %计算落在单位圆内的点数
        my_pi(i,j) = s/N(i)*4; %计算pi值
    end

end

for i=1:8
    my_pi(i,21) = mean(my_pi(i,1:20)); %均值
    my_pi(i,22) = sqrt(sum((my_pi(i,1:20)-my_pi(i,21)).^2)/20); %方差
end
```

当每个采样点次数重复20次后，得到的均值方差如下图：

均值：

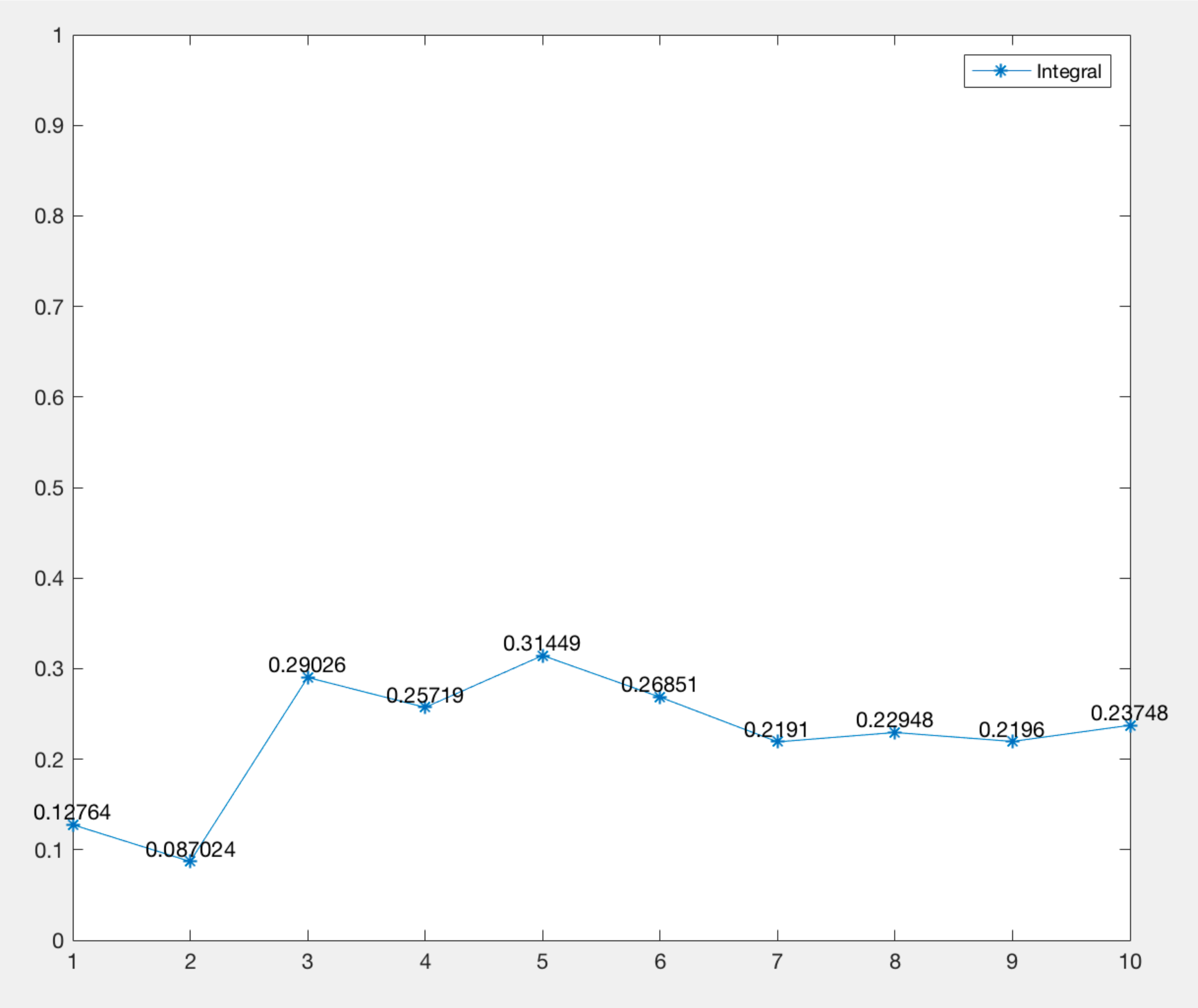


方差：



Exercise 2

我认为应该采用**均匀分布**的随机采样来获取 x 的值



上图从左到右分别是采样次数N = 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100时，所计算得到的积分结果，**可以看出积分结果在采样点非常少的时候，很不理想，误差非常大，但随着采样点数量增加，效果有所好转**

当每个采样点次数重复100次后，得到的均值方差如下：

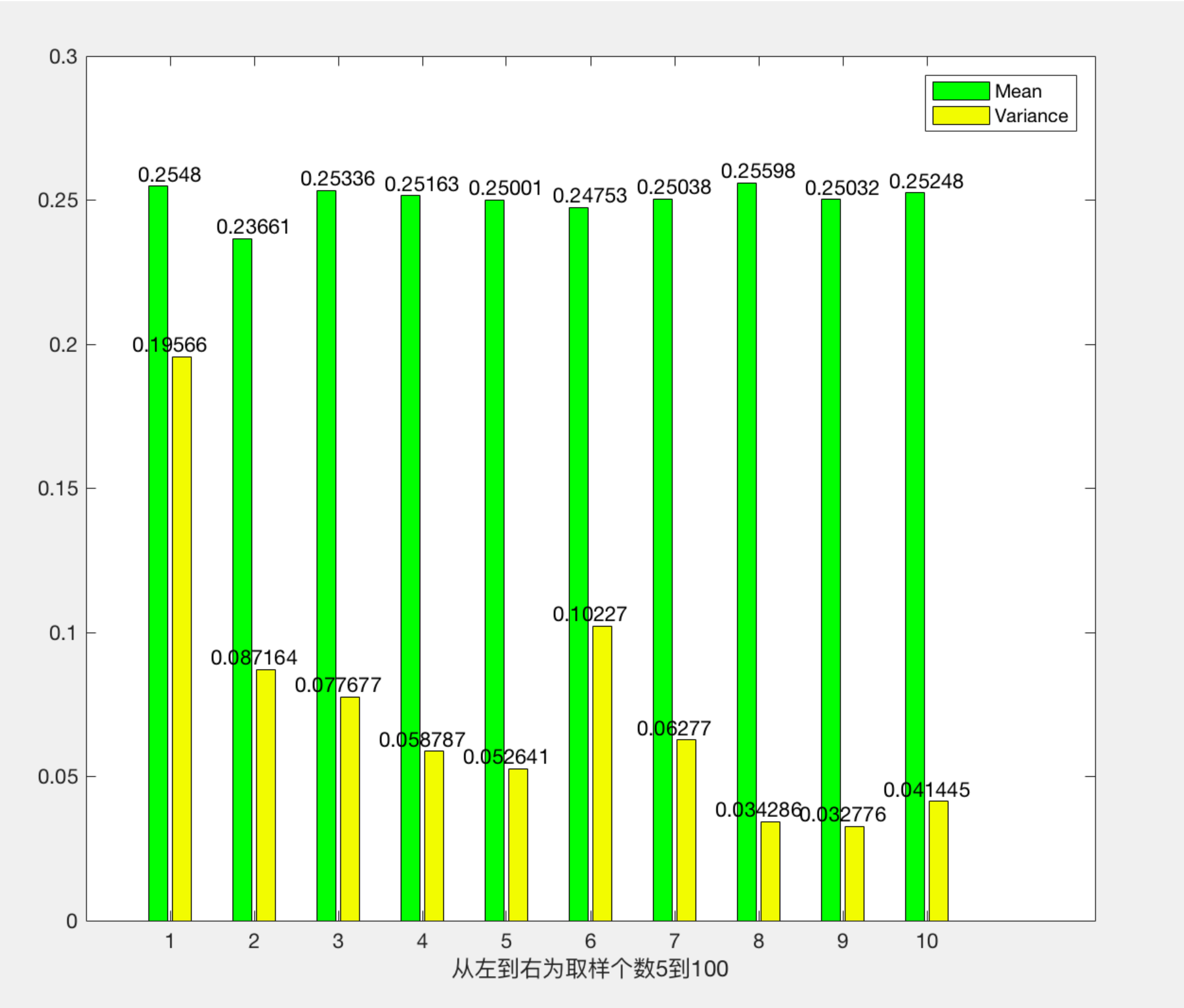
采样点数	5	10	20	30	40	50	60	70	80	100
均值	0.2548	0.23661	0.25336	0.25163	0.25001	0.24753	0.25038	0.25598	0.25032	0.25248
方差	0.19566	0.087164	0.077677	0.058787	0.052641	0.10227	0.06277	0.034286	0.032776	0.041445

核心代码：

```
a = 0;
b = 1;
N = [5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100];
xAxis = 1:10;
ans = zeros(10,102);


for i=1:10
for k=1:100
t = rand(1,N(i));
x = a+(b-a)*t;
s = sum(monte_carlo_f(x));
ans(i,k) = s*(b-a)/N(i);
end

ans(i,101) = mean(ans(i,1:100));
ans(i,102) = sqrt(sum((ans(i,1:100)-ans(i,21)).^2)/100);

end
```

这是通过平均值法实现的，除此之外还可以使用随机点法来实现

通过直方图显示：



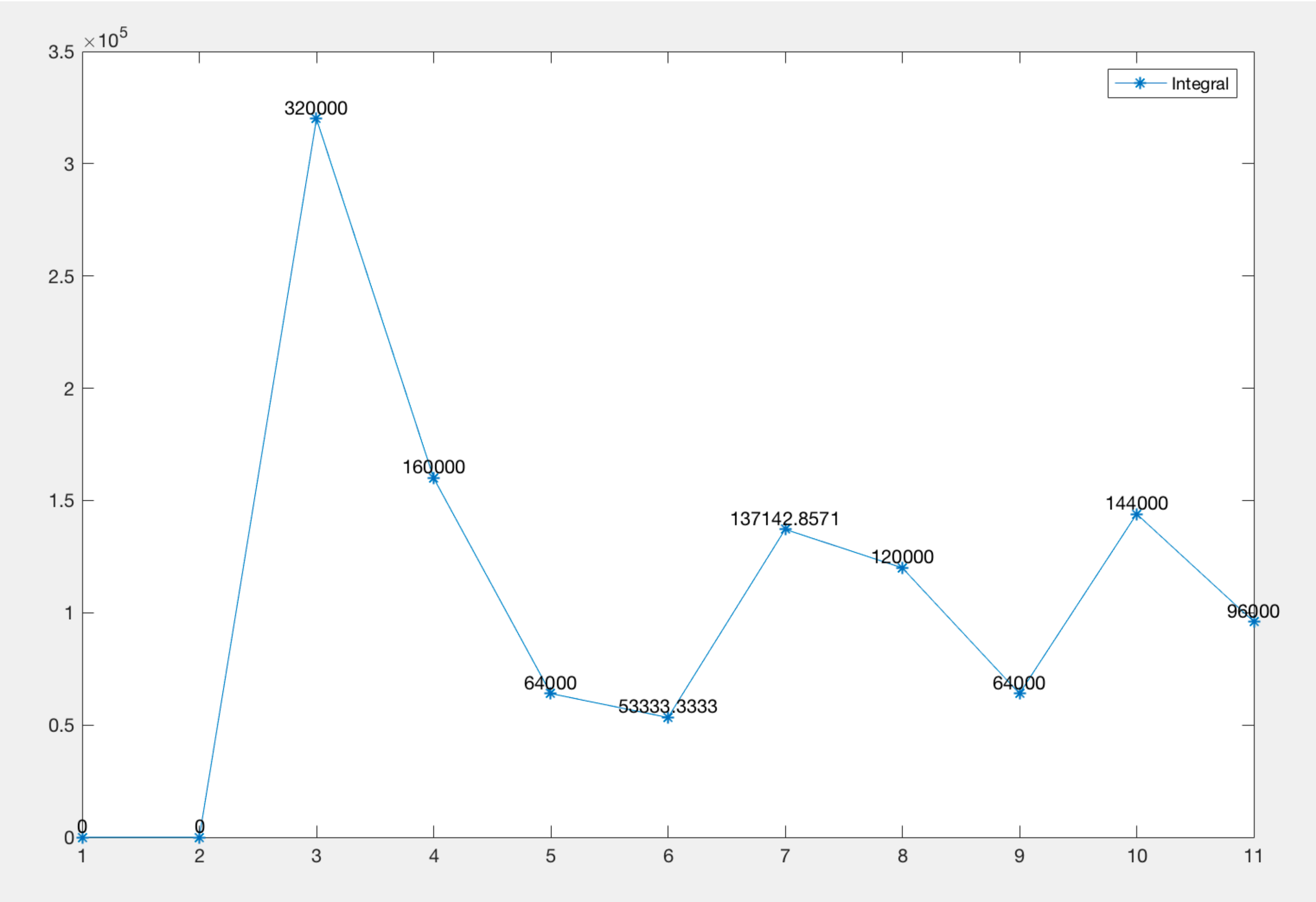
Exercise 3

对于积分：

$$\int_{x=2}^{4}\int_{y=-1}^{1} f(x,y) = \frac{y^2 * e^{-y^2} + x^4 * e^{-x^2}}{x * e^{-x^2}}$$

首先，我认为**无法通过公式直接求解积分*，并且我认为可以使用**均匀分布**随机采样来获取点 *(x, y)*

下图从左到右分别是采样次数N = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 200, 500时，所计算得到的积分。



可以发现当取样点非常小的时候，例如只有10个或者20个的时候，会造成非常大的误差，而图中显示当取样点为10或20个的时候，甚至出现的积分为0的情况，因此，少量样本的情况下，**积分结果并不理想**。

具体原因可以看下面的图和分析。

对每个采样点次数重复100次后，得到的均值方差如下：

采样点数	10	20	30	40	50	60	70	80	100	200	500
均值	118400	104000	117333	130400	124800	105600	108342	113200	102720	119520	11302[illegible]
方差	245796.6639	160798.0099	229767.0318	142884.5688	92079.9652	70754.6622	90394.1483	61838.4993	101848.515	84102.7942	24770.56[illegible]

核心代码：

```
a=2;
b=4;
c=-1;
d=1;
N = [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 200, 500];
ans = zeros(11,102);
zMax = 800000;
xAxis = 1:11;


for i=1:11 %11种取样次数

for k=1:100 %重复100次
rng('shuffle');
xff = a+(b-a).*rand(1,N(i));
rng('shuffle');
yff = c+(d-c).*rand(1,N(i));
rng('shuffle');
zff = zMax.*rand(1,N(i));

for j=1:N(i)
    s(j) = monte_carlo_f2(xff(j),yff(j));
end
ratio = sum( zff <= s) / N(i);
ans(i,k) = ratio*2*2*800000;

end
end

for i=1:11
    ans(i,101) = mean(ans(i,1:100));%计算均值
    ans(i,102) = sqrt(sum((ans(i,1:100)-ans(i,21)).^2)/100);%计算方差
end
```

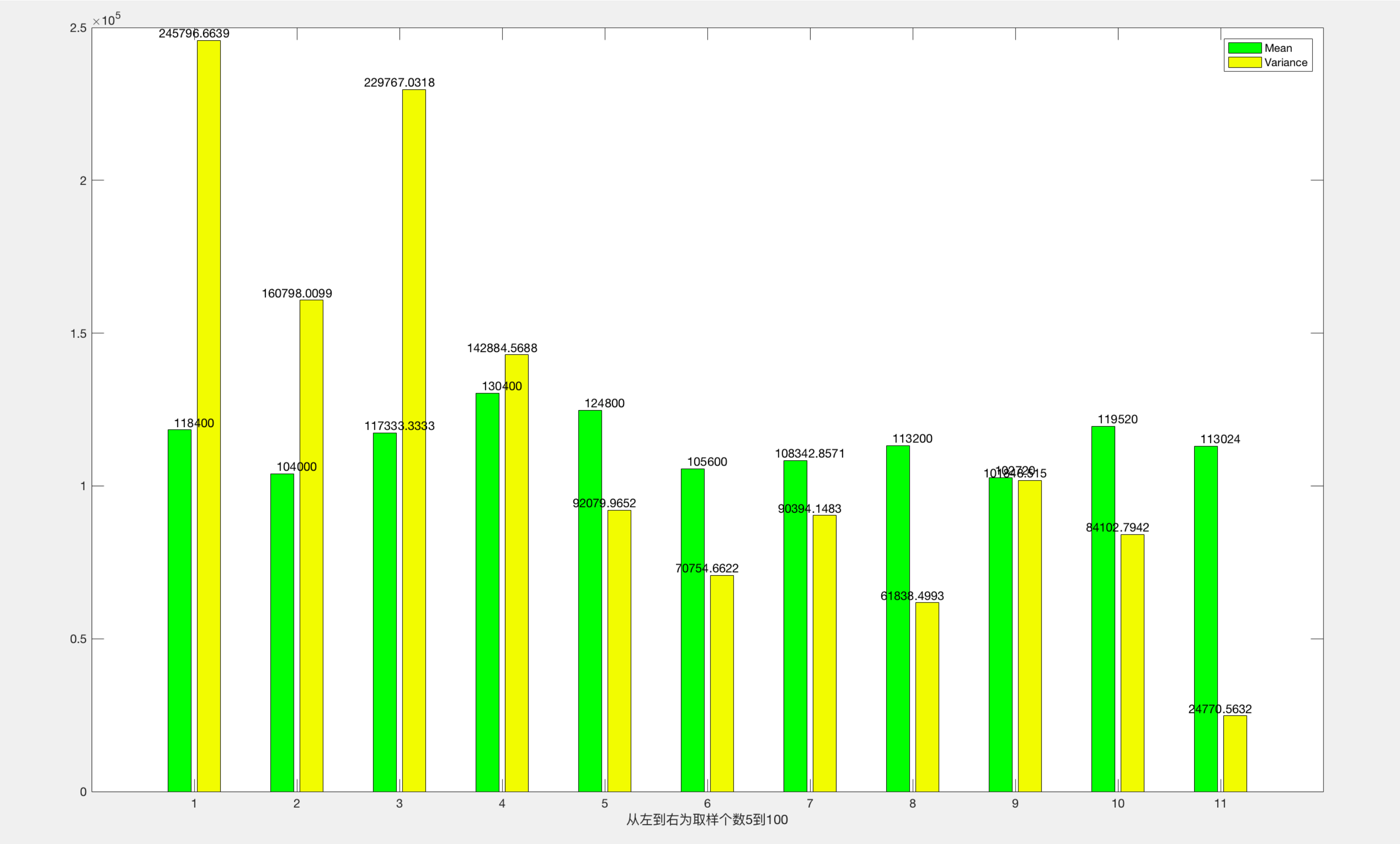
然后通过 `Matlab` 的 `integral2()` 函数来计算真实的积分结果:

```
>> fun = @(x,y) ( (y.^2).*(exp(-y.^2))+(x.^4).*(exp(-x.^2)) )./ ( x.*(exp(-x.^2)) );
>> integral2(fun, 2, 4, -1, 1)

ans =

          112958.615426945
```

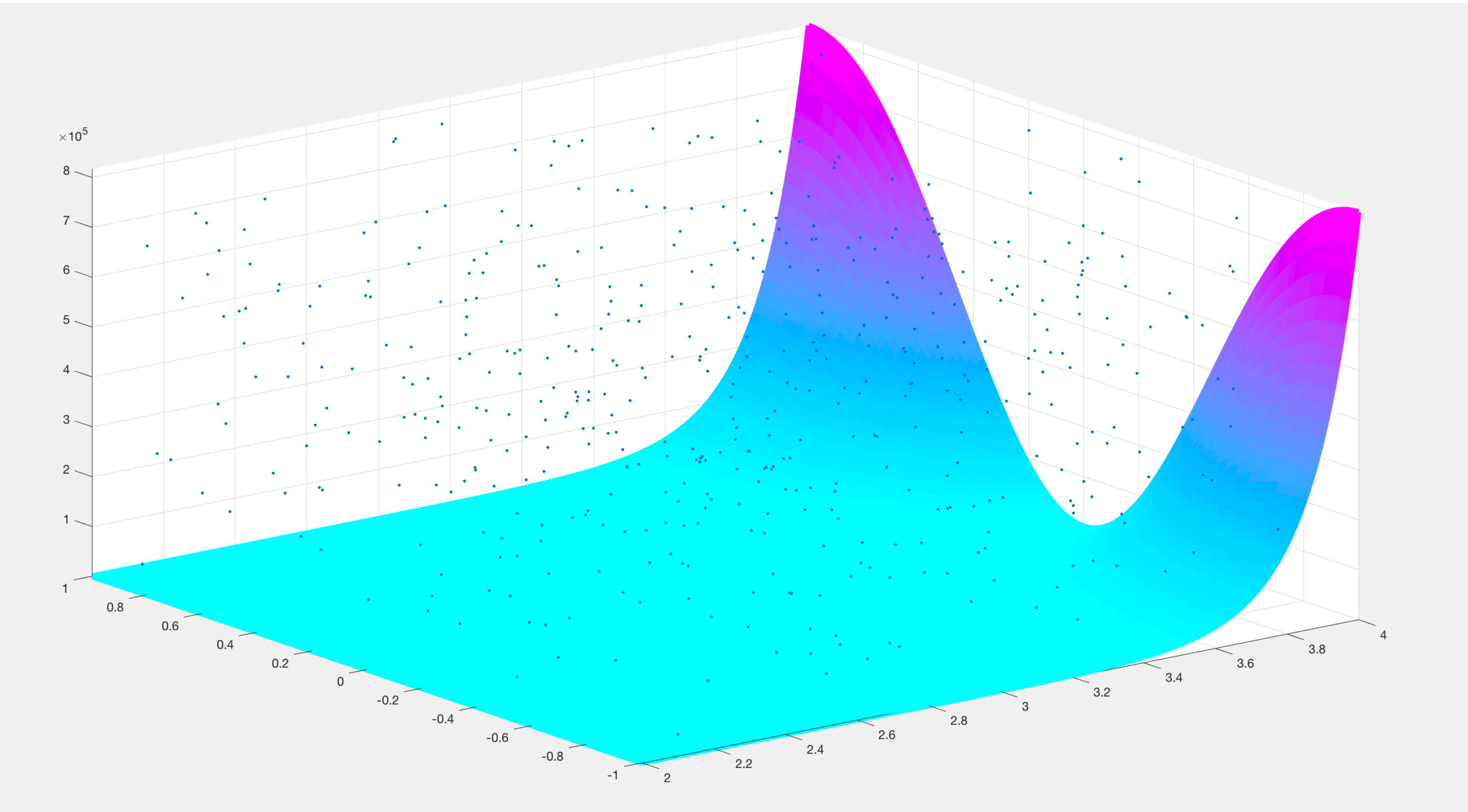
分析

可以发现所求出的均值大多在110000左右，与通过内置函数计算出的正确结果相近，而方差也随着采样点的增加而有逐渐减小的趋势

均值和方差的柱状图



下图是单次取样500个点进行蒙特卡洛法求积分的结果，可以看到函数 *f(x, y)* 所表示的曲面



可以发现当 *x* 在区间**[2, 4]**上，*y* 在区间**[-1, 1]**上的时候，*z*的取值在大部分情况下都非常小，因此造成了采样点极少的时候，会出现结果等于0的情况了。

这是我使用随机点法的做法，其实还可以使用平均值法来实现