正交截線

ஃ

August 12, 2021

在看這篇之前最好是要先知道一些完全四線形的性質，配極變換，交比，要是會錐線的話當然就更好，在最一開始我先給出它的定義。

Definition 0.1. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P 做過 P 垂直 PA 的直線交 BC 於 D。類似定義 E, F 則 D, E, F 共線，並稱該直線爲 P 對 $\triangle ABC$ 的正交截線 (Orthotransversal)，文中將用 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 表示，至於剛剛那裏的 D, E, F 爲甚麼會共線底下我會用不同的觀點給出幾個證明。

1 完全四線形

完全四線形版本的證明: 設 EF 交 BC 於 D'，那其實我們就是要證明 PD' 垂直 PA。考慮完全四線形 $\triangle ABC \cup EF$，注意到完全四線形的性質三個直徑圓共軸，這樣一來 PD' 垂直 PA 就顯然成立了。 □

透過這個證明我們可以馬上得到一個性質

Proposition 1.1. 考慮 $\triangle ABC$ 截 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 形成的完全四線形，則 PH 爲垂心線，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

Proposition 1.2. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 過 $\triangle ABC$ 外心。

Proof. 設 B, C 關於外接圓的對徑點爲 B', C'，對 $(C'PB'BAC)$ 用帕斯卡定理，得到

$$(C'P \cap BA),\ (PB' \cap AC),\ (B'B \cap C'C) \text{ 三點共線}$$

即 EF 過 $\triangle ABC$ 外心。 □

其實上面這個可以推廣

Proposition 1.3. 假設一點 P 對 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形爲 A', B', C'，Q 是外接圓上一點，設 QA' 交 BC 於 D，同理定義 E, F，則 D, E, F 共線且過 P。

Proof. 對 $(C'PB'BAC)$ 用帕斯卡定理，則 EF 過 P 所以證畢。 □

Proposition 1.4. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交三邊於 D, E, F，且 $(AD)(BE)(CF)$ 共軸在 P, X，則 X 在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。
可以開封藤二號或是算冪所以這裡就不證了。

2 配極

配極版本的證明: 設 D 在 BC 上滿足 PA 垂直 PD，類似定義 E, F，我們選一個以 P 爲圓心的圓配極，考慮 A, B, C 的極線，則由 PA 垂直 PD，得到 D 的極線平行 PA 且 D 的極線過 BC 的極點，所以 D 配極完後就會變成 A, B, C 的極線所形成的三角形的高，三個高顯然會共點，故 D, E, F 共線。 □

這證明可以得到一個滿強的結論。

Corollary 2.1. 設以 P 爲圓心的配極變換 $\mathfrak{p}_{(P)}$ 把 $\triangle$ 變換成 $\mathfrak{p}_{(P)}(\triangle')$，$\triangle$ 的垂心爲 $H_\triangle$，則

$$\mathfrak{p}_P(H_\triangle) = \mathcal{O}_P(\triangle')$$

Proposition 2.1. 給定三角形 $\triangle ABC$，設 P, Q 爲等角共軛點對，Q_A, Q_B, Q_C 是 Q 對 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，H 是 $Q_AQ_BQ_C$ 的垂心，則 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 垂直 QH。

Proof. 我們選一個以 P 爲圓心的圓對 $\triangle ABC$ 和 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 配極，假設 $\triangle ABC$ 配極後爲 $B'C', C'A', A'B'$ 則由上個性質 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 被變換至 $A'B'C'$ 的垂心，假設他叫 H'，且我們由等角共軛點的性質，AP 垂直 Q_BQ_C，又由配極變換知道，AP 垂直 $B'C'$ 故 $A'B'C'$ 和 $Q_AQ_BQ_C$ 相似，且 Q, P 分別爲 $Q_AQ_BQ_C, A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的正交中心，故 P, Q 也是位似的，所以 $PH' \parallel QH$，又 $PH' \perp \mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，所以原命題得證。 □

Proposition 2.2. 給定五點 $PABCD$，則 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC), \mathcal{O}_P(\triangle ABD), \mathcal{O}_P(\triangle ACD), \mathcal{O}_P(\triangle BCD)$ 共點。

Proof. 和剛剛這個證明一樣配極，這次我們要證明的是四個配極後的垂心共線，不過我們熟知完全四線形的四個垂心共線，故命題證畢。 □

Proposition 2.3. 給定兩個透視的三角形 ABC, DEF 和透視中心 P，設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 對 $\triangle ABC$ 的三線性極點爲 Q,$\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$ 對 DEF 的三線性極點爲 R，則 P, Q, R 共線。

Proof. 和剛剛這個證明一樣配極，注意到 Q 配極後會變成 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的極點對 A, B, C 的極線所形成的三角形的三線性極線，所以現在我們要證明的是兩個三線性極線平行，不過有趣的是兩個透視三角形配極後會位似，所以兩個位似三角形的垂心的三線性極線就顯然平行了，配極回來就是 P, Q, R 共線。 □

接下來要進入有錐線 (有趣) 的部分了，有感到身體不適者可以先跳過這個章節。

3 錐線上的推廣

Proposition 3.1. 給定等軸雙曲線上五點 $PQABC$，做過 P 垂直 AQ 的線交 BC 於 D 同理定義 E, F 則，D, E, F 共線且垂直 PQ。

Proof. 設 BQ 交 PF 於 I，CQ 交 PE 於 J，考慮 $\triangle CQB$ 的垂心 H ，注意到等軸雙曲線的垂心性質和 $BH \parallel PI$，$CH \parallel PJ$，因此我們可以得到

$$(F,P;I,\infty) = B(A,P;Q,H) = C(A,P;Q,H) = (E,P;J,\infty)$$

所以我們有 $EF \parallel IJ$，但是因爲 $IJPQ$ 爲垂心組，所以有 $IJ \perp PQ$，所以 $EF \perp PQ$，同理可得 $DF, DF \perp PQ$，故 D, E, F 共線且垂直 PQ。 □

然後我們可以立即得到一個性質

Corollary 3.1. $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 垂直 P 在 $(ABCP)$ 等軸雙曲線上的切線。

Corollary 3.2. $\mathcal{O}_G(\triangle ABC) \perp GK$

Corollary 3.3. $\mathcal{O}_I(\triangle ABC) \perp OI$

這時候我們可以用一個很通靈的方式做出這題。

Problem 3.1. 三角形 $\triangle ABC$，O, I 是外心和內心，令切點三角形爲 DEF，D 對 EF 鏡射爲 D', 證明 AD',OI,BC 共點。

Proof. 考慮 IB, IC 上的兩點 U, V 滿足 $AU \perp AC, AV \perp AB$ 則發現到 $UV = \mathcal{O}_A(\triangle BIC)$，因此 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線垂直 UV，注意到我們同時得到 AEF 和 IUV 正交，考慮 D 關於 EF 中點的對稱點爲 D''，則 AD', AD'' 爲等角線，由 AEF 和 IUV 正交我們知道 AD'' 垂直 UV，因此我們知道 AD'' 是 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線，故 AD' 過 BC 和 OI 的交點。 □

然後下面這個東西配合一點小性質可以秒掉某次模競的一題

Proposition 3.2. 設 P 在 $\triangle ABC$ 外接圓上，H 爲垂心，過 A 做平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的線交外接圓於 E，HP 交外接圓於 F，則 EF 平行 BC。

Proof. 假設過 A 平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的線交錐線 $(ABCPH)$ 於 T，考慮 ATP 的垂心，由等軸雙曲線知道 ATP 的垂心在過 P 垂直 AT 的直線上，但由上個性質可得，ATP 爲直角三角形，考慮 A 的對徑點 A'，即知 PT 過 A'，所以我們就可打個交比，

$$A(B,C;A',F) = P(B,C;A',F) = P(B,C;T,H) = A(B,C;E,H)$$

故 AE, AF 爲等角線，即 EF 平行 BC。 □

Problem 3.2. 設三角形 $\triangle ABC$，O, H 爲外心和垂心，EF 在外接圓上滿足 $BC \parallel EF$，D 爲 EH 中點，過 O 平行 AF 的直線交 AB 於 G。
證明:

$$DG \perp DC$$

其實我們可得到一些之後可能會用到的小性質。

Proposition 3.3. 三角形 $\triangle ABC$，P 在外接圓上，過 P 做垂直 AP, BP, CP 的直線交 $(ABCHP)$ 於 P_A, P_B, P_C 則 $AP_A, BP_B, CP_C, \mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 平行。

Proof. 直接考慮 APP_A 的垂心，因爲 $(ABCHP)$ 是等軸雙曲線，所以 AP_A 和 P 點的切線垂直，所以平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$。 $\square$

接下來這個等軸雙曲線的性質可以推出一個讓我們算角的東西。

Proposition 3.4. 設 P, Q 對等軸雙曲線上的極線爲 T_P, T_Q，O 爲錐線中心，則

$$\measuredangle(T_P, T_Q) = \measuredangle QOP$$

Proof. 設 M, N 爲該等軸雙曲線上兩個垂直方向的無窮遠點，對任一點 P，打交比在無窮遠線上知 $(OP, T_P; OM, ON) = -1$，又 OM, ON 垂直，由調和性質知，OM 是 OP, T_P 方向的角平分線，T_P 方向根本就是把 OP 方向對其中一條漸進線做對稱，故自然就有 $\measuredangle(T_P, T_Q) = \measuredangle QOP$ 了 (做了對稱故方向會反過來)。 $\square$

注意到若 P 在錐線上則 T_P 其實就是在該錐線在 P 的切線，於是就有等軸雙曲線上的切線是可算角的了!

Proposition 3.5. 設 P 在等軸雙曲線上的切線爲 T_P，O 爲錐線中心，P' 爲 P 對 O 的對徑點，X 爲錐線上任意一點，則 $\measuredangle(T_P, PX) = \measuredangle XP'P$。

錐線算角是有妙用的看看下面這個性質。

Proposition 3.6. 三角形 $\triangle ABC$，A' 是 A 在外接圓上的對徑點，則

$$(AB, AC; AA', \mathcal{O}_{A'}(\triangle ABC)) = -1$$

Proof. 假設過 A 平行 $\mathcal{O}'_A(\triangle ABC)$ 的直線和 $(ABCHA')$ 的交點爲 T，則我們等價要證 $H(B, C; A', T) = -1$，不過我們有 HA' 過 BC 中點，所以等於要證 HT 平行 BC 也就是要證 $ATA'H$ 共圓，假設 AT 交外接圓於 E，注意到 EA' 是切線，而且 H 是 A' 在錐線上的對徑點 (由九點錐線顯然)，所以

$$\measuredangle ATA' = \measuredangle EA'A = \measuredangle(EA', A'A) = \measuredangle AHA'$$

故 $ATA'H$ 共圓，證畢。 $\square$

4 對合與正交截線

我們都知道外接圓上一點 X 的正交截線會是 $\mathcal{O}$-張志煥線，但這樣似乎有點狹隘，因此我們給了他一個也許會有用的推廣，我們先用另一個觀點來看平常的正交截線。

Proposition 4.1. 設 X 爲任意點，設 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{H,X}$，假設垂直 X 關於 $\mathcal{D}$ 的切線方向的無窮遠點爲 $\infty_{\mathcal{D}_X}^{\perp}$，則 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_{\infty_{\mathcal{D}_X}^{\perp}}(X)$，特別的我們有 $\mathcal{O}_X$ 垂直 X 在 $\mathcal{D}$ 上的切線。

Proof. This is Trivial. $\square$

Proposition 4.2. 設 X 爲任意點，$\mathcal{D}$ 爲過 A, B, C, X 的任意外接錐線，則存在一點 P 使得，$\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_P(X)$，並且我們有 X 在 $\mathcal{D}$ 上的切線垂直 PX。

Proof. 考慮一個變換 $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，使得 $X\mathcal{F}(Y) \perp XY$，則這顯然是一個射影對合變換，故存在一對合中心 P 滿足對所有 Y 都有 $P, Y, f(Y)$ 共線，特別的取 $Y = A, B, C$ 可以注意到 $\mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_{P}(X) = \mathcal{O}_X$，且因爲 P 爲對合中心，故 $PX \perp XX$，即 X 在 $\mathcal{D}$ 上的切線垂直 PX。 □

Proposition 4.3. 設 X 爲任意點，則對於任何一點 $P \in \mathcal{O}_X$，存在一個過 A, B, C, X 的外接圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_{P}(X)$。

Proof. 設 AP 和過 X 垂直 AX 的直線交於點 P_A，考慮錐線 $\mathcal{D} = (ABCXP_A)$，則由 (4.2)，存在一點 P' 使得 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_{P'}(X)$，但這表示 $P' \in \mathcal{O}_X \cap AP_A$，即 $P = P'$。 □

Proposition 4.4. 對於 $\triangle ABC$ 外接圓 Ω 上的點 X，設等共軛 φ 滿足 $\varphi(X) \in \mathcal{L}_\infty$，則 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(H)}(X)$，特別的我們有 $\varphi(H) \in \mathcal{O}_X$。

Proof. 考慮張志煥截線基本定理則我們有

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(H)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^*}_{H^*}(X) = \mathfrak{S}_O(X) = \mathcal{O}_X$$

□

那我們也可以用對合給出一個 (3.1) 的證明。

Proposition 4.5. 給定等軸雙曲線上五點 $PQABC$，做過 P 垂直 AQ 的線交 BC 於 D 同理定義 E, F 則 D, E, F 共線且垂直 PQ。

Proof. 考慮錐線 $\mathcal{C} = (ABCPQH)$，以及垂直 PQ 方向的無窮遠點 $\infty^{\perp}_{PQ}$，則

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{\infty^{\perp}_{PQ}}(P) = DEF$$

□

5 一些綜合性質和應用

Proposition 5.1. 給定三角形 $\triangle ABC$，設 P 在 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 上的垂足爲 Q，則 $\triangle APQ$, $\triangle BPQ$, $\triangle CPQ$ 垂心共線。

Proof. 設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 爲 L，考慮以 P 爲圓心 PQ 爲半徑的圓，假設 A, B, C 對他配極變成 L_A, L_B, L_C，P 配極後變成無窮遠線 L_∞，所以我們等價要證明

$$\mathcal{O}_P(\triangle L_A L L_\infty),\ \mathcal{O}_P(\triangle L_B L L_\infty),\ \mathcal{O}_P(\triangle L_C L L_\infty)\text{三線共點}$$

假設 PQ 交 L_A, L_B, L_C 於 A', B', C'，PA, PB, PC 交 L 於 P_A, P_B, P_C，注意到因爲 PA' 垂直 L，PP_A 垂直 L_A，所以 $P_A A' = \mathcal{O}_P(\triangle L_A L L_\infty)$，所以現在只需要證明 $P_A A'$, $P_B B'$, $P_C C'$ 共點也就是要證明

$$P(P_A, P_B; P_C, Q) = (A', B'; C', Q)$$

假設 L_A, L_B, L_C 圍出的三角形爲 $\triangle XYZ$，則我們有 $XQ \perp L_A$，而注意到 PP_A 也垂直 L_A，所以

$$P(P_A, P_B; P_C, Q) = Q(X, Y; Z, P)$$

設 $QX \cap YZ = T$，則

$$Q(X, Y; Z, P) = (T, Y; Z, A') = (A', Z; Y, T) = X(A', B'; C', Q)$$

這就證明了 L_A, L_B, L_C 共點，配極回來就是垂心共線。 □

Proposition 5.2. 設 P 對 $\triangle ABC$ 的反希瓦三角形爲 $\triangle DEF$，P 對 $\triangle ABC$ 的佩多三角形爲 $\triangle XYZ$ 則，P 對 $\odot(XYZ)$ 的極線是 $\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$。

Proof. 設過 P 垂直 PD 的線交 EF, AC, AB 於 T, M, N，我們要證明的就是 T 在 P 對 (XYZ) 的極線上，首先有 $YZMN$，$AYZP$ 分別四點共圓，且 PT 和 $(AYZP)$ 相切。設 YZ 交 MN 於 J，則我們可以得到

$$JM \times JN = JY \times JZ = JP^2$$

再加上完全四線形的調和性質，

$$A(B, C; P, E) = (N, M; P, T)$$

故 J 爲 $\overline{PT}$ 中點，故 PT 直徑圓和 $\odot(XYZ)$ 正交，即 $T \in \mathfrak{p}_{\odot(XYZ)}(P)$ □

上面這個看起來沒用的東東可以證出下面這兩個很強的結論。

Proposition 5.3. 設 $\triangle DEF$ 是 P 對 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，Q 是 P 對 $\triangle DEF$ 的等角共軛點，則 PQ 和過 $ABCP$ 的等軸雙曲線相切。

Proof. 考慮 P 對 $\triangle DEF$ 的佩多圓，注意到 PQ 過佩多圓的圓心，故 P 對佩多圓的極線會垂直 PQ 但是我們由 (5.2) 知道那條極線就是 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，也就是說 PQ 垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，但是我們又知道 P 在錐線上的切線垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，故 PQ 就是切線。 □

Proposition 5.4. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P，則 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，$P$ 對 $\triangle ABC$ 的三線性極線，P 對 P 對 $\triangle ABC$ 的配多圓的極線共點。

Proof. 我們先把極線換掉，設 P 對 $\triangle ABC$ 的反希瓦三角形爲 $\triangle DEF$，注意到 P 對 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的三線性極線重合，則變成要證明 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$,$\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$,$P$ 對 $\triangle DEF$ 的三線性極線共點。設 AC, DF 交於 T_B，AB, DE 交於 T_C，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交 AB, AC 於 O_C, O_B，$\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$ 交 DF, DE 於 O_E, O_F，變成要證明 T_BT_C, O_BO_C, O_EO_F 共點，不過 T_BO_B, T_CO_C 交於 A，T_BO_E, T_CO_F 交於 D，O_BO_E, O_CO_F 交於 P，所以由迪沙格定理證畢。 □

Corollary 5.1. I 的三線性極線平行 $\mathcal{O}_I(\triangle ABC)$

Corollary 5.2. I 的三線性極線垂直 OI。

Proposition 5.5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和外接圓上一點 P，則 P 對 $\triangle ABC$ 的三線性極線，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，$P$ 對 $\triangle ABC$ 的斯坦那線共點在 Jerabek 雙曲線上。

Proof. 共點由上個性質可以立即推論，所以我們只要證，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，$P$ 對 $\triangle ABC$ 的斯坦那線共點在 Jerabek 雙曲線上，假設這個點叫 X，我們等於要證 $(ABCOHX)$ 共錐線，很自然地會想要對 $(AHXOCB)$ 開帕斯卡，假設 AH 交 OC 於 T，HX 交 BC 於 S，XO 交 AB 於 U，C 的對徑點爲 C'，且 AH 交外接圓於 D，要證明的是 T, S, U 共線，考慮對外接圓上六點 $(BADPC'C)$ 用帕斯卡，則 BA 交 PC' 於 U，AD 交 $C'C$ 於 T，DP 交 BC 於 S，所以 T, S, U 共線，由帕斯卡定理 $(AHXOCB)$ 共錐線。 □

眼尖的朋友可以發現到當 P 在外接圓上跑的時候 X 會和 P 保交比喔，所以這其實根本就可以用大保交比來證，而且這可以再推廣。

Proposition 5.6. 設 X, Y 對 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形爲 $\triangle X_AX_BX_C$, $\triangle Y_AY_BY_C$，P 在外接圓上，令 PX_A 交 BC 於 X'_A 同理有 $X'_BX'_C$，由性質 3 我們知道 $X'_AX'_BX'_C$ 共線，假設他叫 L_X，同理定義 L_Y，若 L_X, L_Y 共點在 Z，則 $(ABCXYZ)$ 共錐線。證明一樣用帕斯卡所以毒者可以自己動手做

你還可以再推論一件事

Proposition 5.7. 和上面標號一樣，設 PZ 交外接圓於 Q，則 Q 爲 $(ABCXYZ)$ 和外接圓的第四個交點。證明可以用大堡礁比所以這裡也留給毒者。

這裡提供一個等等會用到的性質。

Proposition 5.8. 給定五點 A, B, C, D, E，則 E 對 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ 的佩多圓共點。

Proof. 設 E 在 AB, BC, CD, DA, AC, BD 的垂足爲 P, Q, R, S, U, V 設 E 對 $\triangle ABD, \triangle ABC$ 的佩多圓交於 T，則我們要證明的是 $\measuredangle(TV, TQ) = \measuredangle(RV, RQ)$ 由算角度我們有

$$\begin{aligned}
\measuredangle(TV, TQ) &= \measuredangle(TV, TP) + \measuredangle(TP, TQ) = \measuredangle(SV, SP) + \measuredangle(UP, UQ) \\
&= \measuredangle(SV, SE) + \measuredangle(SE, SP) + \measuredangle(UP, UE) + \measuredangle(UE, UQ) \\
&= \measuredangle(RV, RE) + \measuredangle(SE, SP) + \measuredangle(UP, UE) + \measuredangle(RE, RQ) \\
&= \measuredangle(RV, RE) + \measuredangle(RE, RQ) + \measuredangle(SE, SP) + \measuredangle(UP, UE) = \measuredangle(RV, RQ)
\end{aligned}$$

□

然後下面這個太毒了我不會證。

Proposition 5.9. 給定五點 $ABCDE$，定義 E_1 爲 $\mathcal{O}_E(\triangle ABC)$,$\mathcal{O}_E(\triangle ABD)$,$\mathcal{O}_E(\triangle ACD)$,$\mathcal{O}_E(\triangle BCD)$ 的交點，同理定義 A_1, B_1, C_1, D_1，然後假設 E 對 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ 的佩多圓共點在 E_2，類似定義 A_2, B_2, C_2, D_2，則 $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$，且錐線 $(ABCDE)(A_1B_1C_1D_1E_1)(A_2B_2C_2D_2E_2)$ 的中心是同一個而且這個中心同時也是 $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$ 的位似中心

6 正交共軛

我們先看某次公奕在張修展別吃我 po 的題目

Problem 6.1. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是平面上任一點，過 H 對 PA, PB, PC 做垂線依序交 BC, CA, AB 在 D, E, F，證明 D, E, F 共線。

Proof. 設 $\mathfrak{p}_H$ 爲以 H 爲中心，固定住 $\triangle ABC$ 的反演變換，則顯然

$$D, E, F \in \mathfrak{p}_H(P)$$

□

有了上面的性質後，下面這題就變得不堪一擊了!!

Problem 6.2. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是 (ABC) 上任一點，令 M 爲 HP 中點，在 BC 上做一點 D 使得 $DH \parallel AP$，類似定義 E, F 證明 D, E, F, M 共線。

Definition 6.1. 設 $\mathfrak{p}_H(P)$ 的三線性極點爲 P°，則我們定義 $P \mapsto P^\circ$ 的變換爲正交共軛 (Orthogonal conjugate)。

下面這個主要是想說正交共軛是射影對合變換，然後標號 P° 沿用。

Proposition 6.1. 設 P 的正交共軛點是 P°，則 P° 的正交共軛點是 P，且 $P \mapsto P^\circ$ 是保交比對合變換。

Proof. 我們要證 P 的三線性極線是 $\mathcal{H}_{P^\circ}(\triangle ABC)$，設 AP, AP° 交 BC 於 U, V，P, P° 的三線性極線交 BC 於 U', V'，AH 交 BC 於 D，不過

$$DA \times DH = DU \times DV' = DU' \times DV$$

即 $U'H \perp AV$，故 $(P^o)^o = P$。 □

Corollary 6.1. 以下都是可以立即得到的推論

(1) 標號同上，$P^\circ H$ 垂直 P 的三線性極線。

(2) G, H 互爲正交共軛點。

(3) 直線的正交共軛軌跡爲三角形的外接錐線。

(4) 歐拉線的正交共軛軌跡爲三角形的 Kiepert 雙曲線。

Proposition 6.2. 設 P 在歐拉線上，Q 爲 P 的等角共軛點，則 H, Q, P° 共線。

而由今年的一階可以得到下面這個推論。

Corollary 6.2. 外接圓上一點 P，P 的補點在 $\mathfrak{p}_H(P)$ 上。

Proposition 6.3. 過 $\triangle ABC$ 重心 G 的直線與 $\triangle ABC$ 的外接等軸雙曲線交於 U, V, 則 HU 垂直於 V 的三線性極線，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

Proof. 考慮 U, V 的正交共軛點 U°, V°，則由 A, B, C, H, U, V 共錐線，我們知道 $G, U^\circ, V\circ$ 共線，因此由迪沙格對合定裡 $H = UV^\circ \cap VU^\circ$，故 HU 垂直 V 的三線性極線。 □

因此我們可以推論底下兩件事。

Corollary 6.3. H, I, Na° 共線。

Corollary 6.4. 三角形 $\triangle ABC$ 的奈格爾點 Na 的三線性極線垂直 HI。

Proposition 6.4. K° 是 O 的等截共軛點。

Proof. 注意到 K 的三線性極線和 A 在外接圓上的切線交在 BC 上，設此點爲 X，我們只須證明 XH 垂直 AO' 其中 O' 爲 O 的等截共軛點，設 D 是 $A-$ 垂足，設 AO, AO' 交 BC 於 V, V'，注意到 $DA^2 = DX \times DV$，故

$$DA \times DH = DV' \times DX \implies \text{故 } H \text{ 是 } \triangle XAV' \text{ 的垂心} \implies XH \perp AO'$$ □

Corollary 6.5. 設 H' 是 H 的等截共軛點，則 H'°, H, K 共線。

Proof. 考慮 H, G, O 的等截共軛的正交共軛共線故得證 □

Proposition 6.5. 設 X 爲 Kiepert 雙曲線上一點，則 X 的等截共軛點的三線性極線垂直 HX。

Proof. 設 G, H 爲 $\triangle ABC$ 的重心、垂心，X' 爲 X 的等截共軛點，GX' 交 BC 於 X_A，類似定義 X_B, X_C，設 τ 爲 X 的等截共軛點的三線性極線，則

$$H(X, A; B, C) = A(X, A; B, C) = (X', X_A; X_B, X_C) = (\ell, BC; CA, AB)$$

$$\implies \ell \perp HX$$

□

Proposition 6.6. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線上，τ 爲 P 的三線性極線，則 $\mathcal{Q} = \{AB, BC, CA, \tau\}$ 的垂心線爲 PH。

Proof. 設 P 的等截共軛點爲 P'，則 P' 的三線性極線垂直 HP，且注意到 τ 爲 P' 的三線性極線的等截共軛線，故 HP 垂直 $\mathcal{Q}$ 的牛頓線，因此爲垂心線。 □

Corollary 6.6. 對於 $\triangle ABC$ 歐拉線上一點 P，$\mathfrak{p}_H(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛線平行 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線。

於是我們可以用上面這些東西來得到 TS 在幾何毒書會裡面丟的關於 Kiepert 雙曲線的一個性質。

Problem 6.3. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與一垂直於 $\triangle ABC$ 尤拉線的直線 ℓ，則 $\mathcal{Q}\{BC, CA, AB, \ell\}$ 的垂心線過 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點。

7 題目

Problem 7.1. 設三角形 $\triangle ABC$，O, H 爲外心和垂心，S 爲外接圓上一點，做 P 在 BC 邊上滿足 $\measuredangle ASP = 90°$，SH 交 AP 直徑圓於另一點 X，OP 交 AC, AB 於 Q, R，Q, R 在 AB, AC 邊上的垂足爲 Y, Z。
試證：X, Y, Z 共線。

Proof. 首先注意到 $OP = \mathcal{O}_S(\triangle ABC)$，故 $\measuredangle BSQ = \measuredangle CSR = 90°$，並且由 HS 爲 $\{BC, CA, AB, OP\}$ 的垂心線，我們有 X 在 $(AP), (BQ), (CR)$ 直徑圓上，故

$$\measuredangle SXZ + \measuredangle YXS = \measuredangle SCA + \measuredangle BYS = 0 \implies X, Y, Z \text{ 共線}$$

□

Problem 7.2. 設 I, O, H 爲 $\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心，$\triangle DEF$ 爲 I 的西瓦三角形，X 是 $\triangle DEF$ 的垂心，則 $IX \parallel OH$

Proof. 設 $\triangle UVW$ 爲 $\triangle ABC$ 的切點三角形，(I) 爲 $\triangle ABC$ 内切圓，則

Claim 1. $\mathfrak{p}_{(I)}(\triangle DEF)$ 爲 $\triangle UVW$ 的反補三角形 $\triangle U'V'W'$。

proof of Claim 1. 注意到 A, I, D 共線和 $D \in BC$ 共線，因此

$$VW = \mathfrak{p}_{(I)}(A) \parallel \mathfrak{p}_{(I)}(D),\ U = \mathfrak{p}_{(I)}(BC) \in \mathfrak{p}_{(I)}(D)$$

故 $\mathfrak{p}_{(I)}(\triangle DEF) = \triangle U'V'W'$ □

因此 I 爲 $\mathfrak{p}_{(I)}(\triangle DEF)$ 的九點圓圓心，注意到 $\mathfrak{p}_{(I)}(X) = \mathcal{O}_I(\triangle U'V'W')$，因此我們只要證明 $OH \perp \mathcal{O}_I(\triangle U'V'W')$，注意到 $\triangle U'V'W'$ 的外切三角形會和 $\triangle ABC$ 位似，因此我們只需要證明 $\triangle U'V'W'$ 的外切三角形的歐拉線和 I 對 $\triangle U'V'W'$ 的正交截線垂直即可，而這等價於以下命題。

Claim 2. 給定三角形 $\triangle ABC$，N 爲九點圓圓心，則 N 對 $\triangle ABC$ 的正交截線垂直 $\triangle ABC$ 的外切三角形的歐拉線。

proof of Claim 2. 注意到 $\triangle ABC$ 的外切三角形和 $\triangle ABC$ 的垂足三角形位似，因此我們只要證明 N 對 $\triangle ABC$ 的正交截線和垂足三角形的歐拉線垂直即可，考慮等軸雙曲線 $\mathcal{H} = (ABCNH)$，則我們有 N 在 $\mathcal{H}$ 上的切線 $T_N(\mathcal{H})$ 會垂直 N 對 $\triangle ABC$ 的正交截線，接著我們證明 $T_N(\mathcal{H})$ 就是垂足三角形的歐拉線。注意到 N 對 $\triangle ABC$ 垂足三角形的等角共軛點就是垂足三角形的垂心 H_H，因此 NH_H 即爲垂足三角形的歐拉線，且由等共軛變換知道 $NH_H = T_N(\mathcal{H})$，因此得證。 □

Problem 7.3. 三角形 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心爲 N，Ko 爲 Kosnita 點，則

$$\mathcal{O}_N(\triangle ABC) \perp OKo$$

Proof. 設 $\mathcal{O}_N(\triangle ABC)$ 交 BC, CA, AB 於 N_A, N_B, N_C，A', O_A 爲 A, O 關於 BC 的對稱點，類似定義 B', O_B, C', O_C，則顯然我們有 A, A', O, O_A 共圓且圓心爲 N_A，記此圓爲 (N_A)，(N_A) 和 (ABC) 的交點爲 X，同理定義 Y, Z，則考慮以 A

爲中心的反演變換則 X 反演後的像爲 OA' 和 BC 的交點，再由 $AO_A, A'O$ 關於 BC 對稱，我們有 AN, AX 爲等角共軛線，故 A, X, Ko 共線，即 Ko 在 $(N_A), (ABC)$ 的根軸上，故 O, Ko 到 $(N_A), (N_B), (N_C)$ 等冪，即 OKo 爲三圓的根軸，故 $OKo \perp \mathcal{O}_N(\triangle ABC)$。 □

Problem 7.4. 三角形 $\triangle ABC$，設 $\triangle DEF$ 爲其切點三角形且 I, H 爲 $\triangle ABC$ 的內心、垂心。
證明: 三角形 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點 Fe 關於 $\triangle DEF$ 的正交截線爲 IH。

Problem 7.5 (TS 在幾何毒書會丟的題)**.** 設 G, H 爲三角形 $\triangle ABC$ 的重心、垂心，(P, Q) 爲 $\triangle ABC$ 的一對 antigonal conjugate 且 O_P, O_Q 爲 P, Q 的 orthocorrespondent，若 GH 分別與 PO_P, QO_Q 交於 U, V 證明 $(G, H; U, V) = -1$。

Proof. 設 $\mathcal{C}$ 爲 $(ABCPH)$，過 H 做垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的直線交 $\mathcal{C}$ 於 X，則

$$(X, H; P, Q)_{\mathcal{C}} = -1$$

因此我們只需要證明 PO_P, QO_Q, XG 三線交在 $\mathcal{C}$ 上即可，注意到 A, B, C, O_P, O_Q, G 共錐線，因此考慮錐線 $\mathcal{G} = (ABCGO_PO_Q)$，注意到 $\mathcal{C}, \mathcal{G}$ 有四個交點，令 Y 爲第四個交點，我們先證明 X, G, Y 共線，考慮 GX 和 $\mathcal{C}$ 的另一個交點 Y'，則 Y' 的三線性極線垂直 HX，因此有 $Y' \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}$ 故 $Y = Y' \implies X, G, Y$ 共線。接著我們證明 P, O_P, Y 共線，這等價要證明 $(P, A; B, C)_{\mathcal{C}} = (O_P, A; B, C)_{\mathcal{G}}$

Claim 1. $(P, A; B, C)_{\mathcal{C}} = (O_P, A; B, C)_{\mathcal{G}}$

proof of claim 1. 設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交 BC, CA, AB 於 A_1, B_1, C_1，注意到

$$(P, A; B, C)_{\mathcal{C}} = P(P, A; B, C) = (\infty_{\mathcal{O}_P(\triangle ABC)}, A_1; B_1, C_1)$$

而另一方面，設過 A 平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的直線交 BC 於 S 則

$$(O_P, A; B, C)_{\mathcal{G}} = (A_1, S; B, C) = A(\infty_{\mathcal{O}_P(\triangle ABC)}, A_1; B_1, C_1) = (P, A; B, C)_{\mathcal{C}} \quad \square$$

因此我們得到 P, O_P, Y 共線，由於 P, Q 對稱我們同時也得到 Q, O_Q, Y 共線。
故

$$(G, H; U, V) = Y(G, H; U, V) = Y(X, H; P, Q) = -1$$ □