

張志煥截線

$\mathcal{Li}4 + \mathfrak{S}$

April 2, 2021

1 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

Proposition 1. 給定 $\triangle ABC$ ，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 \mathcal{C} 。令 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 $\triangle ABC$ 的 \mathcal{C} -西瓦三角形。對於 \mathcal{C} 上一點 X ，令

$$X_{P,A} = XP_A \cap BC, \quad X_{P,B} = XP_B \cap CA, \quad X_{P,C} = XP_C \cap AB,$$

則 $P, X_{P,A}, X_{P,B}, X_{P,C}$ 共線。

Proof. 考慮 \mathcal{C} 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AX_PBB ，由帕斯卡定理即可得 $P, X_{P,A}, X_{P,B}, X_{P,C}$ 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_{P,A}X_{P,B}X_{P,C}$ 為 X 關於 $(\triangle ABC, \mathcal{C})$ 的張志煥 P -截線，記為 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$ 。定義相當的簡單，我們顯然有

Proposition 2. 給定 $\triangle ABC$ ，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 \mathcal{C} 。我們有

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow TP$$

為保交比變換。

Proof. 注意到

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} = [X_{P,A} \mapsto PX_{P,A}] \circ [X \mapsto X_{P,A}]. \quad \blacksquare$$

Proposition 3. 給定 $\triangle ABC$ ，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 \mathcal{C} 。設 \mathcal{D} 為 $\triangle ABC \cup P$ 的外接圓錐曲線， T 為 \mathcal{C} 與 \mathcal{D} 的第四個交點，則對於 \mathcal{C} 上一點 X ， $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D} \in TX$ 。

Proof. 令 $D = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}$ ，由於 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}$ 為保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A, B; C, X) &= (A, B; C, X)_{\mathcal{C}} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(A, B; C, X) \\ &= (AP, BP; CP, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)) = (A, B; C, D)_{\mathcal{D}} = T(A, B; C, D), \end{aligned}$$

故 T, X, D 共線。 ■

Proposition 4. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 \mathcal{C} 。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$ ，

- (i) $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \in (ABCPQ)$,
- (ii) 若 T 為 \mathcal{C} 與 $(ABCPQ)$ 的第四個交點，則 $T, X, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$ 共線。

Proof. (i) 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$, $Z = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$ ，我們有

$$\begin{aligned} P(A, Z; B, C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B, C) \stackrel{P_A}{=} (A, X; B, C)_{\mathcal{C}} \\ &\stackrel{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B, C) = Q(A, Z; B, C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得 $Z \in (ABCPQ)$ 。

(ii) 由 (i) 及 (3)，

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap (ABCPQ) \in TX. \quad \blacksquare$$

這邊給一些未來會用到的記號。給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 \mathcal{C} 及一點 X 。

(i) 對於任意兩點 P, Q ，我們記

$$\mathcal{D}_{P,Q} = (ABCPQ).$$

(ii) 對於任意兩點 P, Q ，我們記

$$\mathcal{L}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}_{P,Q} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{P,Q})X.$$

(iii) 對於任意外接圓錐曲線 T ，我們記

$$\mathcal{L}_T^{\mathcal{C}}(X) = T \cap (\mathcal{C} \cap T)X.$$

因此， $\mathcal{L}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_{P,Q}}^{\mathcal{C}}(X)$ 。

Proposition 5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 \mathcal{C} 及 \mathcal{C} 上一點 X 。令 \mathcal{D} 為 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \mathcal{D} \rightarrow T\mathfrak{L}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X)$$

為一保交比變換。

Proof. 因為 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)P$ 。 ■

Proposition 6. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 \mathcal{C} 及 \mathcal{C} 上一點 X 。令 ℓ 為任意直線，則

$$\{\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \mid P \in \ell\}$$

的包絡線為 $\triangle ABC$ 的內切圓錐曲線，記為 $\mathcal{B}_{\ell}^{\mathcal{C}}(X)$ ，且

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \ell \rightarrow T\mathcal{B}_{\ell}^{\mathcal{C}}(X)$$

為一保交比變換。

Proof. trivial ■

對於任意不過頂點的直線 \mathcal{L} ，我們知道 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應，即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$ 。以下簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 為 \mathcal{L}^{φ} ，特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\infty}$ ， φ 為等角共軛變換 $(\cdot)^*$ ， \mathcal{L}_{∞}^* 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω 。

Proposition 7. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換， \mathcal{D} 為 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。則對於任意 $X \in \mathcal{L}^{\varphi}$ ，

$$\mathcal{D}^{\varphi} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)^{\varphi}}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X).$$

Proof. 令 $D = \mathcal{D}^{\varphi} \cap BC$ ， $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)$ ，則

$$\begin{aligned} X(B, C; D, A(XD \cap \mathcal{L}^{\varphi}) \cap BC) &= T(B, C; X, A) = (B, C; \mathfrak{L}, A)_D \\ &= A(C, B; \mathfrak{L}^{\varphi}, D) = (B, C; D, A\mathfrak{L}^{\varphi} \cap BC), \end{aligned}$$

因此 $A\mathfrak{L}^{\varphi}$ ， XD ， \mathcal{L}^{φ} 共點，故 $\mathcal{D}^{\varphi} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)^{\varphi}}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X)$ 。 ■

Corollary 1. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，且 $X \in \mathcal{L}^{\varphi}$ 。對於任意點 P ，設 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{P, \varphi(P)}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X)$ ，則

$$P\varphi(P) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)^{\varphi}}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X).$$

Proof. 在 (7) 中取 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P, \varphi(P)}$ 。 ■

Theorem 1 (張志煥截線基本定理). 令 φ, ψ 為 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 為 \mathcal{L}^φ 和 \mathcal{L}^ψ 的第四個交點, P 為任意一點, 則

(i) $X, A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^\varphi, A\psi(P) \cap \mathcal{L}^\psi$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{\psi(P)}^{\mathcal{L}^\psi}(X)$ 。

Proof. (i) 設 $A\varphi(P), A\psi(P)$ 分別交 $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$ 於 $\varphi(P)_A, \psi(P)_A$ 。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) &= A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\varphi} \stackrel{\varphi}{=} A(\infty_{BC}, P; B, C) \\ &\stackrel{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\psi} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 X_A , 我們有

$$X_A\varphi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{\psi(P)}^{\mathcal{L}^\psi}(X) = X_A\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{\psi(P)}^{\mathcal{L}^\psi}(X). \quad \blacksquare$$

Example 1 (等共軛對合). 令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換, 則對於任意兩點 P, Q , 設 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R, PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$, 則 $\varphi(R) = S$ 。

Proof. 定義一等共軛變換 ψ 將 $P \mapsto Q$, 考慮 $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$ 的交點 X , 則由 (1) 的 (ii)。

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{L}^\psi}(X) = P\varphi(Q) = \mathfrak{S}_{\varphi(Q)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X),$$

$$\mathfrak{S}_Q^{\mathcal{L}^\psi}(X) = \varphi(P)Q = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X).$$

注意到 $\mathfrak{L}_{P,Q}^{\mathcal{L}^\psi}(X) = R = \mathfrak{L}_{\varphi(P), \varphi(Q)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$, 因此由 (1),

$$\varphi(R) \in PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S. \quad \blacksquare$$

Proposition 8. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換, \mathcal{D} 為 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線, T 為 \mathcal{D} 與 \mathcal{L}^φ 的第四個交點。則對於任意 $P \in \mathcal{D}$, $TP \cap \mathcal{L}^\varphi, XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi, \mathfrak{L}_\mathcal{D}^C(X)^\varphi$ 共線。

Proof. 令 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_\mathcal{D}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$, $Q = TP \cap \mathcal{L}^\varphi$, $R = XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi$, 我們知道 $Q \mapsto R$ 為保交比變換, 因此我們只需證明 $Q \mapsto R$ 為對合變換且對合中心為 $\mathfrak{L}_\mathcal{D}^C(X)^\varphi$ 。取 $P = A$, 我們有 $Q = A, R = X(\mathcal{D}^\varphi \cap BC) \cap \mathcal{L}^\varphi$ 。由 (7), 我們知道 $\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$, 因此 QR 過 \mathfrak{L}^φ 。這在 $P = B, C$ 時也是對的, 因此 $Q \mapsto R$ 為對合變換且對合中心為 $\mathfrak{L}_\mathcal{D}^C(X)^\varphi$ 。 ■

現在假設 \mathcal{C} 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega = \odot(ABC)$ ，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

Example 2. 令 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X \in \Omega$ ， $\mathfrak{S}_O^\Omega(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$ 。

Example 3. 令 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X \in \Omega$ ， $\mathfrak{S}_H^\Omega(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 \mathcal{S}_X 。

Example 4. 令 K 為 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X \in \Omega$ ， $\mathfrak{S}_K^\Omega(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 \mathfrak{t}_X 。

我們簡記 $\mathfrak{S}_P^\Omega(X)$ 為 $\mathfrak{S}_P(X)$ ， $\mathfrak{L}_D^\Omega(X)$ 為 $\mathfrak{L}_D(X)$ ，為 X 關於 $\triangle ABC$ 的 P -張志煥截線。事實上，我們對於 $\mathfrak{S}_P(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 9. 設 X 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω 上任意點，則對於任意兩點 P, Q ，

$$\angle(\mathfrak{S}_P(X), \mathfrak{S}_Q(X)) + \angle P^* X Q^* = 0^\circ,$$

其中 P^*, Q^* 分別為 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。特別地，取 $Q \in BC$ 我們有

$$\angle(\mathfrak{S}_P(X), BC) = \angle AXP^*.$$

Proof. 令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,Q}$ ， $\ell = \mathcal{D}^\varphi$ ，由 (5)，

$$[\mathfrak{S}_P(X) \mapsto XP^*] = [P^* \mapsto XP^*] \circ [P \mapsto P^*] \circ [\mathfrak{S}_P(X) \mapsto P]$$

為保交比變換。因此由對稱性我們只需證明

$$\angle B\mathfrak{L}C + \angle \ell_b X \ell_c = 0^\circ,$$

其中 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_D(X)$ ， $\ell_b = \ell \cap CA$ ， $\ell_c = \ell \cap AB$ 。由 (8)，我們可以得到 $\mathfrak{L}_B^* = X\ell_b \cap B\mathfrak{L}^*$ ， $\mathfrak{L}_C^* = X\ell_c \cap C\mathfrak{L} \in \Omega$ ，因此

$$\angle B\mathfrak{L}C = \angle AB\mathfrak{L}^* + \angle \mathfrak{L}^*CA = \angle A\mathfrak{L}_C^*\mathfrak{L}_B^* + \angle \mathfrak{L}_C^*\mathfrak{L}_B^*A = \angle \mathfrak{L}_C^*A\mathfrak{L}_B^* = \angle \ell_c X \ell_b. \quad \blacksquare$$

Remark. 關於特例的敘述有以下的純幾證明，而事實上也可由此推得廣義的情形：

令 $P_A = AP \cap \Omega$ ， $P_A^* = AP^* \cap \Omega$ ， $D = AP \cap BC$ ， $X_{P,A} = XP_A \cap BC$ 。由 $P_A P_A^* \parallel BC$ ，我們易得 $\triangle X_{P,A} P_A D \sim \triangle AP_A^* X$ 。在 $P_A X_{P,A}$ 上取點 E 使得

$DE \parallel PX_{P,A} = \mathfrak{S}_P(X)$ ，由常見的等角共軛比例 Lemma，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_{P,A}E}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_AED \sim \triangle AP^*X$ ，最後由算角度可得

$$\angle AXP^* = \angle EDX_{P,A} = \angle(PX_{P,A}, BC) = \angle(\mathfrak{S}_P(X), BC). \quad \blacksquare$$

以下假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 無窮遠線。我們來看看幾何王子是怎麼計算共圓的吧！

Theorem 2 (a). 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ ，設 X 為 \mathcal{L}^φ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P ，設 T 為 \mathcal{L}^φ 與 $(ABCP_\varphi(P))$ 的第四個交點， $P^*, \varphi(P)^*$ 分別為 $P, \varphi(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。則 $TX, P\varphi(P)^*, P^*\varphi(P), \odot(P\varphi(P)X), (ABCP_\varphi(P))$ 共於一點 $\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$ 。

Proof. 由 (4) 及 (1) 的 (ii)，我們有

$$TX \cap (ABCP_\varphi(P)) = \mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = P\varphi(P)^* \cap P^*\varphi(P).$$

因此由 (1) 的 (ii) 及 (9)，

$$\begin{aligned} \angle P\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}\varphi(P) &= \angle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) = \angle(\mathfrak{S}_{\varphi(P)^*}(X), \mathfrak{S}_{P^*}(X)) \\ &= \angle AX\varphi(P) + \angle PXA = \angle PX\varphi(P), \end{aligned}$$

即 $P, \varphi(P), X, \mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$ 共圓。 \blacksquare

上面這個定理我們常用的是以下的敘述。

Theorem 2 (b). 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ ，設 X 為 \mathcal{L}^φ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P ，設 $\mathfrak{L} = P^*\varphi(P) \cap P\varphi(P)^*$ ，其中 $(\cdot)^*$ 為等角共軛變換。則 $P, \varphi(P), X, \mathfrak{L}$ 四點共圓。

因此我們有以下推論

Corollary 2. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等角共軛點 P, P^* ，以及外接圓上一點 X ，設 $(ABCP P^*)$ 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點為 T ， XT 和 $(ABCP P^*)$ 交於一點 \mathfrak{L} 。則 P, P^*, X, \mathfrak{L} 四點共圓。

事實上，(4) 有如下的推廣：

Proposition 10. 若 X 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 C 上， P 為 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_C(\triangle ABC)$ 的透視中心，則 $\mathfrak{S}_P^C(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 t_X 。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 C -西瓦三角形，則 ABP_AC 為 C 上的調和四邊形，因此

$$(B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}_P^C(X) \cap BC) \stackrel{X}{=} (B, C; A, P_A)_C = -1.$$

同理有

$$(C, A; BX \cap CA, \mathfrak{S}_P^C(X) \cap CA) = (A, B; CX \cap AB, \mathfrak{S}_P^C(X) \cap AB) = -1,$$

故 $\mathfrak{S}_P^C(X) = t_X$ 。 ■

Example 5. 令 St 為三角形 $\triangle ABC$ 的施坦納外接橢圓，則重心 G 為透視中心，因此 $\mathfrak{S}_G^{St}(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 t_X 。

Example 6. 設 \mathcal{L}° 為 \mathcal{L}_∞ 的正交共軛軌跡，則垂心 H 為透視中心，因此 $\mathfrak{S}_H^{\mathcal{L}^\circ}(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 t_X 。

2 配極

接著我們可以來討論和配極有關的一些性質。

Theorem 3. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓，則對於任意等角共軛點 P, P^* ，和一點 $X \in \Omega$ ，設 Γ 為以 X 為圓心的圓，設 $A^p = p_\Gamma(BC), B^p = p_\Gamma(CA), C^p = p_\Gamma(AB)$ ，則

$$(i) \ X \in \odot(A^p B^p C^p)$$

$$(ii) \ \triangle ABC \cup P \cup P^* \sim \triangle A^p B^p C^p \cup p_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X)) \cup p_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$$

Proof. (i) 由算角度我們顯然有

$$\angle B^p X C^p = \angle(AC, AB) = \angle CAB = \angle C X B = \angle(A^p B^p, A^p C^p) = \angle B^p A^p C^p$$

(ii) 首先注意到

$$\angle BAC + \angle B^p A^p C^p = 0$$

因此我們顯然有 $\triangle ABC \sim \triangle A^p B^p C^p$

設 $p_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X)), p_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X))$ 為 Q, Q^* ，則

$$\angle Q A^p B^p = \angle(\mathfrak{S}_P(X) \cap BC) X C = \angle P A C = -\angle P^* A B$$

故顯然有

$$\triangle ABC \cup P \cup P^* \sim \triangle A^p B^p C^p \cup Q^* \cup Q. \quad \blacksquare$$

事實上配極某種程度上也可以保共斯坦納外接橢圓。

Proposition 11. 設 St 為 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於 St 上一點 X ，設 (X) 為以 X 為中心的圓錐曲線，設 $A^p = p_{(X)}(BC), B^p = p_{(X)}(CA), C^p = p_{(X)}(AB)$ ，則 X 在 $\triangle A^p B^p C^p$ 的斯坦納外接橢圓上。

Proof. 設 St^p 為 $\triangle A^p B^p C^p$ 的斯坦納外接橢圓，則

$$\begin{aligned} A(A, B; C, X)_{St} &= (\infty_{BC}, B; C, AX \cap BC) \\ &\stackrel{p_{(X)}}{=} (A^p X, A^p C^p; A^p B^p, A^p \infty_{B^p C^p}) \\ &= A^p(A^p, B^p; C^p, X)_{St^p} \end{aligned}$$

同理可得

$$B(A, B; C, X)_{St} = B^p(A^p, B^p; C^p, X)_{St^p}, C(A, B; C, X)_{St} = C^p(A^p, B^p; C^p, X)_{St^p}$$

因此 $X \in St^p$ 。 ■

Proposition 12. 令 φ 為 $\triangle ABC$ 上的等截共軛變換， $St = \mathcal{L}^\varphi$ 為 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於任意點 P ，和一點 $X \in St$ ，設 (X) 為以 X 為中心的任意錐線，設 $A^p = p_{(X)}(BC)$, $B^p = p_{(X)}(CA)$, $C^p = p_{(X)}(AB)$ ，則

$$p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X)), p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X))$$

為 $\triangle A^p B^p C^p$ 的一對等截共軛點。

Proof. 令 $Q = p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X))$, $R = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X))$ ，則我們等價要證明

$$A^p(B^p, C^p; A^p, Q)_{St^p} = A^p(C^p, B^p; A^p, R)_{St^p}$$

然而這等價於要證明

$$(C, B; AX \cap BC, \mathfrak{S}_P^{St}(X) \cap BC) = (B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X) \cap BC)$$

但這是顯然的。 ■

Theorem 4. 延續 (12) 的標號，設 $Q = p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X))$, $R = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X))$ ，設 $\mathfrak{L}_{P, \varphi(P)}^{St}(X) = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_{Q, R}^{St^p}(X) = \mathfrak{L}^p$ ，設 \mathfrak{L}^p 關於 $\triangle A^p B^p C^p$ 的等截共軛點為 $\mathfrak{L}^{p'}$ ，則

$$\frac{P\varphi(\mathfrak{L})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{L})} = \frac{R\mathfrak{L}^{p'}}{Q\mathfrak{L}^{p'}}$$

Proof. 設 $\infty_{P\varphi(P)}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點為 $T_{\triangle ABC}$ ， ∞_{QR} 關於 $\triangle A^p B^p C^p$ 的等截共軛點為 $T_{\triangle A^p B^p C^p}$ ，則

$$\begin{aligned} \frac{P\varphi(\mathfrak{L})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{L})} &= (P, \varphi(P); \varphi(\mathfrak{L}), \infty_{P\varphi(P)}) = A(\varphi(P), P; \mathfrak{L}, T_{\triangle ABC})_{(ABCP\varphi(P))} \\ \frac{R\mathfrak{L}^{p'}}{Q\mathfrak{L}^{p'}} &= (R, Q; \mathfrak{L}^{p'}, \infty_{QR}) = A^p(Q, R; \mathfrak{L}^p, T_{\triangle A^p B^p C^p})_{(A^p B^p C^p QR)} \end{aligned}$$

注意到我們有

$$\begin{aligned} Q &= p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X)), R = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X)) \\ \mathfrak{L}^p &= p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(\mathfrak{L})}^{St}(X)), T_{\triangle A^p B^p C^p} = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{St}(X)) \end{aligned}$$

則我們有

$$\begin{aligned}
 \frac{R\mathfrak{L}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{L}^{\mathfrak{p}'}} &= A^{\mathfrak{p}}(Q, R; \mathfrak{L}^{\mathfrak{p}}, T_{\triangle A^{\mathfrak{p}} B^{\mathfrak{p}} C^{\mathfrak{p}}}) = (\mathfrak{S}_P^{St}(X), \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X); \mathfrak{S}_{\varphi(\mathfrak{L})}^{St}(X), \mathfrak{S}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{St}(X)) \\
 &= A(P, \varphi(P); \varphi(\mathfrak{L}), \infty_{P\varphi(P)}) \\
 &= A(\varphi(P), P; \mathfrak{L}, \infty_{AT_{\triangle ABC}}) \\
 &= A(\varphi(P), P; \mathfrak{L}, T_{\triangle ABC}) = \frac{P\varphi(\mathfrak{L})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{L})}. \quad \blacksquare
 \end{aligned} \tag{5}$$

Problem 1. $\triangle ABC$ 三角形， $\triangle D'E'F'$ 為三個旁切圓切點， A' 為 A 關於外接圓的對鏡點， AI 交 $\odot(ABC)$ 於 $M \neq A$ ， MA' 交 BC 於 X 。

證明： $XI \parallel E'F'$ 。

3 正交截線

我們都知道外接圓上一點 X 的正交截線會是 O -張志煥線，但這樣似乎有點狹隘，因此我們給了他一個也許會有用的推廣，我們先用另一個觀點來看平常的正交截線。

Proposition 13. 設 X 為任意點，設 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{H,X}$ ，假設垂直 X 關於 \mathcal{D} 的切線方向的無窮遠點為 $\infty_{\mathcal{D}_X}^\perp$ ，則 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_{\infty_{\mathcal{D}_X}^\perp}^{\mathcal{D}}(X)$ ，特別的我們有 $\mathcal{O}(X)$ 垂直 X 在 \mathcal{D} 上的切線

Proof. This is Trivial. ■

Proposition 14. 設 X 為任意點， \mathcal{D} 為過 A, B, C, X 的任意外接錐線，則存在一點 P 使得， $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X)$ ，並且我們有 X 在 \mathcal{D} 上的切線垂直 PX 。

Proof. 考慮一個變換 $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ，使得 $Xf(Y) \perp XY$ ，則這顯然是一個射影對合變換，故存在一對合中心 P 滿足對所有 Y 都有 $P, Y, f(Y)$ 共線，特別的取 $Y = A, B, C$ 可以注意到 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{O}(X)$ ，且因為 P 為對合中心，故 $PX \perp XX$ ，即 X 在 \mathcal{D} 上的切線垂直 PX 。 ■

Proposition 15. 設 X 為任意點，則對於任何一點 $P \in \mathcal{O}(X)$ ，存在一個過 A, B, C, X 的外接圓錐曲線 \mathcal{D} 使得 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X)$ 。

Proof. 設 AP 和過 X 垂直 AX 的直線交於點 P_A ，考慮錐線 $\mathcal{D} = (ABCXP_A)$ ，則由 (14)，存在一點 P' 使得 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_{P'}^{\mathcal{D}}(X)$ ，但這表示 $P' \in \mathcal{O}(X) \cap AP_A$ ，即 $P = P'$ 。 ■

Proposition 16. 對於 $\triangle ABC$ 外接圓 Ω 上的點 X ，設等共軛 φ 滿足 $\varphi(X) \in \mathcal{L}_\infty$ ，則 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_{\varphi(H)}^{\mathcal{L}_\varphi}(X)$ ，特別的我們有 $\varphi(H) \in \mathcal{O}(X)$ 。

Proof. 考慮張志煥截線基本定理則我們有

$$\mathfrak{S}_{\varphi(H)}^{\mathcal{L}_\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{H^*}^{\mathcal{L}^*}(X) = \mathfrak{S}_O(X) = \mathcal{O}(X)$$

4 心世界

Problem 2 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P2). X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到 X_{99} 的三線性極線為 X_2X_6 ，且我們知道 X_{69} 為 X_6 的反補點且在 $(ABCOH)$ 上，因此 $X_{69} = \mathcal{L}_{X_3, X_4}^*(X_{99})$ ，故由 (2)， X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓。 ■

Problem 3 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P5). $X_{69}X_{99}$ 交歐拉線在 X_2 對 X_3 對稱點。

Proof. 注意到我們有 $X_{69} = \mathcal{L}_{\mathcal{H}_J}^*(X_{99})$ ，因此我們算角

$$\begin{aligned}\angle GX_{99}X_{69} &= \angle AX_{99}X_{74} + \angle GX_{99}A \\ &= \angle(OH, BC) + \angle(BC, \mathfrak{S}_K^\Omega(X_{99})) \\ &= \angle(OG, BC) + \angle(BC, GX_{69}) = \angle(OG, GX_{69})\end{aligned}$$

即 $\odot(GX_{69}X_{99})$ 和歐拉線相切於 G 。設 $X_{69}X_{99}$ 交 OH 於 T ，則由上一題我們知道 X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓，故 T 滿足

$$\overline{TG}^2 = \overline{TO} \times \overline{TH} \implies T \text{ 為 } X_2 \text{ 對 } X_3 \text{ 的對稱點} \quad \blacksquare$$

Problem 4 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P12). 三角形 $\triangle ABC$ ， I 為內心， O 為外心， Ge 為格爾鋼點，設 X_{104} 為 OI 上無窮遠點的等角共軛點， X_{999} 為 I, X_{57} 中點，則 $Ge, X(104), X(999)$ 三點共線。

Proof. 設 $X_{104}Ge$ 交 $\odot(ABC)$ 於 X ，則我們有 $Ge = \mathcal{L}_{\mathcal{H}_{Fe}}^\Omega(X)$ ，因此由我們有

$$\begin{aligned}\angle GeXI &= \angle AXGe + \angle AXI \\ &= \angle(OI, BC) + \angle(BC, \mathfrak{S}_I(X)) = \angle(OI, IGe)\end{aligned}$$

即 OI 和 $\odot(XGeI)$ 相切。

另一方面，我們有 X_{56}, Ge, X_{21} 共線，因此

$$\begin{aligned}\angle X_{65}X_{56}Ge &= \angle(OI, \mathfrak{S}_{21}(X)) \\ &= \angle(OI, BC) + \angle(BC, \mathfrak{S}_{X_{21}}(X)) \\ &= \angle AXGe + \angle X_{65}XA = \angle X_{65}XGe\end{aligned}$$

因此 X_{56}, Ge, X_{21}, X 四點共圓，且注意到我們有

$$-1 = (I, X_{57}; X_{65}, X_{56}) \implies \overline{X_{999}I}^2 = \overline{X_{999}X_{57}}^2 = \overline{X_{999}X_{56}} \times \overline{X_{999}X_{65}}$$

故 X_{999} 在 $\odot(X_{56}GeX_{21}X)$ 和 $\odot(XGeI)$ 的根軸上，即 $X_{999} \in XGe = GeX_{104}$ ■

Problem 5 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P13). X_7, X_8, X_{21}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到我們有 $X_{99} \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}^\varphi$ ，其中 φ 為等截共軛變換，現在取 $P = X_7$ ，因此由 (2)，我們有

$$X_7, X_8, \mathcal{L}_{X_7, X_8}^{\mathcal{L}^\varphi}(X_{99}), X_{99}, \text{ 四點共圓}$$

且我們注意到 $X_{21} = X_7X_{56} \cap X_8X_{55} = \mathcal{L}_{X_7, X_8}^{\mathcal{L}^\varphi}(X_{99})$ ，故得證。 ■

Problem 6. $X_{21}, X_{55}, X_{56}, X_{110}$ 四點共圓。

Proof. 設 φ 為等截共軛變換，則考慮等共軛 $\psi: (\cdot)^* \circ \varphi \circ (\cdot)^*$ ，則我們有

$$\psi: X_{55} \mapsto X_{56}$$

設 X 為 \mathcal{L}^* 和 \mathcal{L}^ψ 的第四個交點，則我們有 $X_{55}X_8 \cap X_{56}X_7 = X_{21}$ 因此由 (2)，

$$X_{55}, X_{56}, X_{21}, X \text{ 四點共圓}$$

接著我們證明 $X = X_{110}$ 。

這等價要證明 $\psi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$ 但注意到

$$\psi: [x : y : z] \mapsto \left[\frac{a^4}{x} : \frac{b^4}{y} : \frac{c^4}{z} \right]$$

且我們有 $X_{110} = \left[\frac{a^2}{b^2 - c^2} : \frac{b^2}{c^2 - a^2} : \frac{c^2}{a^2 - b^2} \right]$ ，因此

$$\psi(X_{110}) = [a^2(b^2 - c^2) : b^2(c^2 - a^2) : c^2(a^2 - b^2)]$$

顯然滿足無窮遠線的方程式 $x + y + z = 0$ ，因此 $X = X_{110}$ ，故得證。 ■

Problem 7. 設 K_θ 為 Kiepert 雙曲線上角度為 θ 的點，則對於任意的 θ ，我們都有 $G, K_\theta^*, K_{-\theta}^*, X_{110}$ 四點共圓。特別地，我們有 $G, X_{15}, X_{16}, X_{110}$ 四點共圓。

Proof. (純幾) 首先我們知道 X_{110} 的斯坦納線為 HG ，因此由 $\mathfrak{S}_H(X_{110}) = HG$ 我們知道 $\mathcal{L}_{H_k}^\Omega(X_{110}) = G$ ，並且注意到對於任意的 α ，我們都有 $K, K_\alpha, K_{-\alpha}$ 共線和 $G, K_\alpha^*, K_{-\alpha}^*$ 共線，即

$$\mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110}) = GK_{-\theta}^*, \mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}) = GK_\theta^*$$

因此由算角引理

$$\angle K_\theta^* G K_{-\theta}^* = \angle(G K_\theta^*, G K_{-\theta}^*) = \angle(\mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}), \mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110})) = \angle K_\theta^* X_{110} K_{-\theta}^*. \quad \blacksquare$$

Proof. (重心坐標) 我們只要證明 X_{110} 會被把 $K_\theta^* \mapsto K_{-\theta}^*$ 的等共軛變換 φ 打到無窮遠即可，注意到對於所有的 K_θ 我們有重心坐標

$$\begin{aligned} K_\theta &= \left[\frac{a}{\sin(A+\theta)} : \frac{b}{\sin(B+\theta)} : \frac{c}{\sin(C+\theta)} \right] \\ \implies K_\theta^* &= [a \sin(A+\theta) : b \sin(B+\theta) : c \sin(C+\theta)] \\ \implies \varphi([x : y : z]) &= \left[\frac{a^2 \sin(A+\theta) \sin(A-\theta)}{x} : \frac{b^2 \sin(B+\theta) \sin(B-\theta)}{y} : \frac{c^2 \sin(C+\theta) \sin(C-\theta)}{z} \right] \\ &= \left[\frac{a^2(\sin^2 A - \sin^2 \theta)}{x} : \frac{b^2(\sin^2 B - \sin^2 \theta)}{y} : \frac{c^2(\sin^2 C - \sin^2 \theta)}{z} \right] \end{aligned}$$

代入 X_{110} 則我們有 $\sum_{\text{cyc}} (\sin^2 A - \sin^2 \theta)(b^2 - c^2) = 0$ 故得證 \blacksquare

Problem 8. 九點圓圓心 N 在 $\mathcal{D}_{N,H}$ 上的切線平行 OKo 。

Problem 9. N, Ko, X_{110} 三點共線。

Proof. 注意到 $\mathfrak{L}_{\mathcal{D}_{N,H}}(X_{110}) = N$, $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_J}(X_{110}) = O$ ，並且我們有 N 的正交截線垂直 OKo ，因此我們有 OKo 平行 N 在 $\mathcal{D}_{N,H}$ 上的切線，即 $OKo \parallel \mathfrak{S}_N(X_{110})$ ，故

$$\angle AX_{110}N = \angle(BC, \mathfrak{S}_{Ko}(X_{110})) = \angle(BC, OKo) = \angle(BC, \mathfrak{S}_N(X_{110})) = \angle AX_{110}Ko \quad \blacksquare$$

$\mathfrak{L}ABCDEFGHI$