等軸雙曲線

May 1, 2021

在看這篇講義之前還是希望讀者對於等角共軛點以及簡單的交比有初步的認識。

1 預備知識

Definition 1.0.1 (交比). 對於複數平面上四點 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ 我們定義其交比

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Remark 1.1. 複平面上四點四點交比爲實數若且惟若四點共圓或共線。

Definition 1.0.2 (等角共軛點). 給定三角形 $\triangle ABC$，則對於任意點 P，存在唯一點 P^* 滿足

$$\measuredangle BAP + \measuredangle CAP^* = \measuredangle CBP + \measuredangle ABP^* = \measuredangle ACP + \measuredangle BCP^* = 0$$

Definition 1.0.3 (斯坦納線). 對於三角形 $\triangle ABC$ 外接圓上的一點 X，則 X 對 BC, CA, AB 的對稱點三點共線且過 $\triangle ABC$ 垂心，在這篇講義中我們用 $\mathcal{S}_X$ 來表示。

Proposition 1.0.1. 設 $\triangle ABC$ 外接圓上有一點 X，則 $\mathcal{S}_X$ 垂直 X 的等角共軛點方向。

Theorem 1.1 (圓錐曲線基本定理). 平面上六點 A, B, C, D, E, F 共圓錐曲線若且惟若

$$A(C, D; E, F) = B(C, D; E, F)$$

Proposition 1.0.2. 設 ℓ 爲平面上一直線，則 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡爲一外接錐線，反之一外接錐線 $\mathcal{C}$ 的等角共軛軌跡爲一直線。

Proposition 1.0.3 (平行弦定理)**.** 對於任意的錐線 $\mathcal{C}$，若 $P,Q,R,S \in \mathcal{C}$，且 $PQ \parallel RS$，則 $\overline{PQ}, \overline{RS}$ 中點連線過 $\mathcal{C}$ 的中心。

2 等軸雙曲線

在以下章節我們都假設 $\mathcal{H}$ 是一個等軸雙曲線，O 爲他的中心。

Proposition 2.0.1. 對於 $\mathcal{H}$ 上任三點 A,B,C 的垂心 H，我們都有 $H \in \mathcal{H}$

Proposition 2.0.2. 對於任意點 P_1, P_2，以及對鏡點 A_1, A_2，我們有以下的角度關係。

(i)

$$\measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) + \measuredangle P_1OP_2 = 0$$

(ii) 設 A_1 在 $\mathcal{H}$ 上的切線爲 $T_{A_1}(\mathcal{H})$，則對於任意點 $P \in \mathcal{H}$

$$\measuredangle A_1A_2P = \measuredangle(PA_1, T_{A_1}(\mathcal{H}))$$

(iii) 若 P_1, $P_2 \in \mathcal{H}$ 則我們有

$$\measuredangle P_1A_1P_2 + \measuredangle P_1A_2P_2 = 0$$

Proof. (i) 考慮 OP_i 上的無窮遠點 ∞_{P_i}，$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_2)$ 上的無窮遠點 V_1, V_2，以及 $\mathcal{H}$ 上的兩個無窮遠點 W_1, W_2，則由於 ∞_{P_i} 的極線過 V_i，因此我們有

$$-1 = (\infty_{P_i}, V_i; W_1, W_2) = O(P_i, V_i; W_1, W_2)$$

由 $OW_1 \perp OW_2$，我們有 P_iOV_i 的角平分線是 OW_1, OW_2，因此

$$\begin{aligned}\measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) &= \measuredangle V_1OV_2 = \measuredangle V_1OW_1 + \measuredangle W_1OW_2 + \measuredangle W_2OV_2 \\ &= \measuredangle W_1OP_1 + \measuredangle W_2OW_1 + \measuredangle P_2OW_2 = \measuredangle P_2OP_1\end{aligned}$$

(ii) 注意到 A_1A_2 的中垂線關於 $\triangle A_1PA_2$ 的等角共軛軌跡爲 $\mathcal{H}$，設 A_1A_2 中垂線和 PA_2 交於 S，則

$$\measuredangle A_1A_2P = \measuredangle SA_1A_2 = \measuredangle(PA_1, T_{A_1}(\mathcal{H}))$$

(iii) 由 (ii) 我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle P_1A_1P_2 &= \measuredangle(P_1A_1, T_{A_1}(\mathcal{H})) + \measuredangle(T_{A_1}(\mathcal{H}), P_2A_1)\\ &= \measuredangle A_1A_2P_1 + \measuredangle P_2A_2A_1 = \measuredangle P_2A_2P_1\end{aligned}$$

□

Proposition 2.0.3. 設 $\triangle DEF$ 爲 $\mathcal{H}$ 上的一個自共軛三角形，則 $O \in \odot(DEF)$

Proof. 由 (2.0.2)，我們有

$$\measuredangle EOF = \measuredangle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(F), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(E)) = \measuredangle(DE, DF) = \measuredangle EDF$$

□

3 龐色列點

Definition 3.0.1. 對於平面上的一完全四點形 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，設過 P_1, P_2, P_3, P_4，的外接圓錐曲線爲 $\mathcal{H}$，則我們定義 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的龐色列點爲 $\mathcal{H}$ 的中心。

Theorem 3.1. 令 T 爲 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的龐色列點，則我們有 T 在下列的圓上。

(i) $\triangle P_iP_{i+1}P_{i+2}$ 的九點圓。

(ii) P_i 對 $\triangle P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}$

(iii) $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的西瓦圓。

Proof. (i),(iii) 由 (2.0.2) 即可得到，以下證明 (ii)

設 P_4 關於 $\triangle P_1P_2P_3$ 的佩多三角形爲 $\triangle Q_1Q_2Q_3$，並且設 M_{ij} 爲 $\overline{P_iP_j}$ 的中點，則由 $T \in \odot(M_{14}Q_2M_{31})$ 和 $T \in \odot(M_{14}Q_3M_{12})$ 我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle Q_2TQ_3 &= \measuredangle Q_2TM_{14} + \measuredangle M_{14}TQ_3 = \measuredangle Q_2M_{31}M_{14} + \measuredangle M_{14}M_{12}Q_3 \\ &= \measuredangle Q_2P_3P_4 + \measuredangle P_4P_2Q_3 = \measuredangle Q_2Q_1Q_4 + \measuredangle P_4Q_1Q_3 = \measuredangle Q_2Q_1Q_3 \qquad \square\end{aligned}$$

Theorem 3.2. 令 T 爲 $\mathcal{Q} = (A, B, C, P)$ 的龐色列點，P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則 OP^* 爲 T 關於 $\triangle ABC$ 的中點三角形的斯坦那線。

Proof. 我們對 G 做 -2 倍位似，設 T^c 滿足 $GT^c = 2TG$，則我們等價要證明 T^c 對 $\triangle ABC$ 的斯坦納線平行 OP^*，注意到 T^c 關於外接圓的對鏡點是 OP^* 上無窮遠點的等角共軛點，故得證。 □

接下來這個算角定理十分的毒瘤，所以我不會在上課講，自己回家看就好了。

Theorem 3.3. 給定任意 $\triangle ABC$ 及一點 P，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓在 $\mathcal{Q} = (A, B, C, P)$ 的龐色列點的夾角爲

$$90^\circ + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP)$$

Proof. 設 $\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$\triangle M_aM_bM_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形，則 T 在 $\triangle PBA$ 和 $\triangle PCA$ 的九點圓上。設 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 爲 T 在 $\odot(P_aP_bP_c)$, $\odot(M_aM_bM_c)$ 上的切線，則我們可以算角

$$\begin{aligned}\measuredangle(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) &= \measuredangle(\mathcal{T}_1, TP_c) + \measuredangle P_cTM_c + \measuredangle(M_cT, \mathcal{T}_2) \\ &= \measuredangle TP_bP_c + \measuredangle M_cM_bT + \measuredangle P_cTM_c \\ &= \measuredangle(M_bM_c, P_bP_c) + \measuredangle(P_bP_c, M_bT) + \measuredangle(TP_b, P_bP_c) + \measuredangle P_cTM_c \\ &= \measuredangle(BC, P_bP_c) + \measuredangle P_bTM_b + \measuredangle P_cTM_c \\ &= \measuredangle(BC, P_bP_c) + (\measuredangle ACP + \measuredangle CAP) + (\measuredangle BAP + \measuredangle ABP) \\ &= (\measuredangle AP_bP_c + \measuredangle BAP) + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP) \\ &= 90^\circ + \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP)\end{aligned}$$

□

4 封騰三定理

Theorem 4.1 (封騰一號)**.** 令 $\triangle M_aM_bM_c$ 爲 $\triangle ABC$ 的中點三角形。對於任意一對等角共軛點對 (P, P^*)，令 T 爲 $\mathcal{Q} = (A, B, C, P^*)$ 的龐色列點，$\triangle P_aP_bP_c$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，$R_a = P_bP_c \cap M_bM_c$，則 $T \in P_aR_a$。

Proof. 考慮 P_a, T 對 M_bM_c 的對稱點 P'_a, T'，則我們等價要證明 $T' \in R_aP'_a$ 即可注意到 T' 是完全四線形 $\mathcal{Q}(AM_c, M_bM_c, P_cP_b, PbA)$ 的密克點，因此

$$\measuredangle R_aT'P_c = \measuredangle R_aM_cP_c = \measuredangle P'_aAP_c = \measuredangle P'_aT'P_c \implies T' \in R_aP'_a$$

□

Theorem 4.2 (封騰二號)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，ℓ 爲一個通過 $\triangle ABC$ 的外心的直線，P 爲 ℓ 上一動點，則 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓過一定點且該定點位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上 (該定點即爲 $\mathcal{Q}(A, B, C, P^*)$ 的龐色列點，其中 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點)。

Proof. 考慮 P 的等角共軛點 P^*，則我們知道 P^* 的軌跡是一個固定的等軸雙曲線 $\mathcal{H}$，因此中心也是固定的，則由 P, P^* 的佩多圓是同一個，我們有 P 的佩多圓過 $\mathcal{H}$ 的中心。 □

Theorem 4.3 (封騰三號)**.** 給定任意 $\triangle ABC$，(P, P^*) 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，則 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切若且唯若 PP^* 通過 $\triangle ABC$ 的外心。

Proof. 令 O, H, N 分別爲 $\triangle ABC$ 的外心、垂心、九點圓圓心，T_1 爲 (A, B, C, P) 的龐色列點，T_2 爲 (A, B, C, P^*) 的龐色列點。
$(\Rightarrow)$ 若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切，則我們有 $T_1 = T_2$，因此 A, B, C, P, P^* 共等軸雙曲線，因此 PP^* 通過 $\triangle ABC$ 的外心。
$(\Leftarrow)$ 若 PP^* 通過 $\triangle ABC$ 的外心，則我們有 $T_1 = T_2 = T$，因此若我們可以證明 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心過 T，也就證明了相切，故我們現在的目標是證明 T, M, N 共線，其中 M 爲 $\overline{PP^*}$ 中點。

令 $\mathcal{H}$ 爲通過 A, B, C, P, P^* 的圓錐曲線，則我們有 H 對 T 的對稱點 $T' \in \mathcal{H}$，令 T' 關於 $\triangle ABC$ 外接圓的對鏡點爲 T^*，則我們有 $\mathcal{S}_{T^*} \parallel PP^*$ 故

$$T'(A, B; C, O) = (A, B; C, T^*) = (\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B; \mathcal{S}_C, \mathcal{S}_{T^*}) = H(A, B; C, \infty_{PP^*})$$

因此由圓錐曲線基本定理我們有 $D := T'O \cap H\infty_{PP^*} \in \mathcal{H}$，故由平行弦定理，$HD$ 中點 $\in TM$，故將 OT' 對 H 位似 $1/2$ 倍即得到 $N \in TM$。 □

最後這個推論可以說是十分的強大且重要。

Corollary 4.1. 對於 $\triangle ABC$ 和任意點 P，我們有以下幾件事等價

(i)
$$90^\circ = \measuredangle(BC, AP) + \measuredangle(CA, BP) + \measuredangle(AB, CP)$$

(ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切

(iii) PP^* 過 $\triangle ABC$ 的外心。

那我們也可以直接推論費爾巴哈定理

Theorem 4.4 (費爾巴哈定理)**.** 給定 $\triangle ABC$ 則，$\triangle ABC$ 的九點圓和內切圓、旁切圓相切。

5 常見的等軸雙曲線

接著我們可以來看一些在競賽上比較常出現 (吧?) 的錐線，他們都是等軸的所以都可以看成是某條過 O 直線的等角共軛軌跡。

5.1 費爾巴哈雙曲線

Definition 5.1.1 (費爾巴哈雙曲線)**.** 設 I, H 爲 $\triangle ABC$ 的內心、垂心，則我們稱 $\mathcal{H}_{Fe} := (ABCIH)$ 爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線。

Proposition 5.1.1. $\mathcal{H}_{Fe}$ 爲 OI 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡。

Proposition 5.1.2. $Na, Ge \in \mathcal{H}_{Fe}$。

Proposition 5.1.3. OI 和 $\mathcal{H}_{Fe}$ 相切。

Proposition 5.1.4. $\mathcal{H}_{Fe}$ 的中心是費爾巴哈點 Fe。

Theorem 5.1 (Kariya 定理). 設 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 的切點三角形，對於任意實數 t，設 $D_t \in ID$ 滿足 $tID = ID_t$，類似定義 E_t, F_t，則我們有 AD_t, BE_t, CF_t 共點且

$$\left\{P_t := AD_t \cap BE_t \cap CF_t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\right\} = \mathcal{H}_{Fe}$$

Problem 5.1 (2016 ISL G7). 設 I_a, I_b, I_c 爲 $\triangle ABC$ 的旁心，I_a 對 BC 的對稱點爲 I'_a，類似定義 I'_b, I'_c。
證明：AI'_a, BI'_b, CI'_c 共點且該點的等角共軛點在 OI 上。

Proposition 5.1.5. 設 L 爲 H 關於 O 的對稱點，則 I, Ge, L 三點共線。

Proposition 5.1.6. 設 AI 直徑圓和 $\triangle ABC$ 外接圓交於 S，$\triangle BIC$ 垂心爲 H_a，則 S 關於 $\triangle ABC$ 的斯坦納線爲 HH_a。

Proposition 5.1.7 (Schiffler point X_{21}). $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$, $\triangle ABC$ 的歐拉線共點且在 $\mathcal{H}_{Fe}$ 上。

Proposition 5.1.8. 切點三角形的垂心 (X_{65}) 和 X_{21} 互爲等角共軛點。

Proposition 5.1.9. 設 $X_{80} = P_{-2}$，則 O, N, X_{65}, X_{80} 四點共圓。

Proposition 5.1.10. 設 $\triangle DEF$ 爲 $\triangle ABC$ 的切點三角形，D 關於 EF 的對稱點爲 D'。
證明：AD', OI, BC 三線共點。

Problem 5.2 (2020 2J P6). 設 I, O, ω, Ω 爲 $\triangle ABC$ 的內心、外心、內切圓以及外接圓。內切圓 ω 和 BC 邊切於 D。設 S 在外接圓 Ω 上使得 AS, OI, BC 共點。設 H_a 爲 $\triangle BIC$ 的垂心。點 T 在 Ω 上使得 $\measuredangle ATI = 90°$。
證明：D, T, H, S 四點共圓。

5.2 Jerabek 雙曲線

這個人的性質絕對不比費爾巴哈少，但都比較進階所以我沒辦法放太多 QQ

Definition 5.2.1 (Jerabek 雙曲線)**.** 設 O, H 爲 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，則我們稱 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}} := (ABCOH)$ 爲 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線。

Proposition 5.2.1. $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 爲 OH 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡。

Definition 5.2.2. 我們稱九點圓圓心的等角共軛點爲 Kosnita 點 X_{54}。

Definition 5.2.3. 我們稱歐拉線上無窮遠點的等角共軛點爲 X_{74}。

Definition 5.2.4. 我們稱歐拉線的反斯坦納線爲歐拉反射點 X_{110}。

Corollary 5.1. X_{74} 關於 $\triangle ABC$ 外接圓的對鏡點爲 X_{110}

Definition 5.2.5. 我們稱 $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$ 的中心爲 Jerabek center X_{125}。

Proposition 5.2.2. G, X_{110}, X_{125} 三點共線。

Theorem 5.2. 設 X 爲 $\triangle ABC$ 外接圓上任意點，則 X 的斯坦納線、正交截線、三線姓極線、三線共點且在 Jerabek 雙曲線上。

Problem 5.3. 設 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，B, C 對 $\odot(ABC)$ 的切線交於 T，$D \in \odot(ABC)$ 滿足 AD 和 $\triangle ABC$ 的歐拉線垂直，TD 交 $\odot(ABC)$ 於 $E \neq D$，R 爲 T 對 BC 的對稱點。
證明：A, R, E 三點共線。

Proposition 5.2.3. 令 P 位於 $\triangle ABC$ 的歐拉線上，H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，若 P^* 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點，證明：HP^* 與經過 A, B, C, H, P 的圓錐曲線相切。

Proposition 5.2.4 (這個可能很難)**.** N, Ko, X_{110} 三點共線。

5.3 Kiepert 雙曲線

Definition 5.3.1 (Kiepert 雙曲線)**.** 設 G, H 爲 $\triangle ABC$ 的重心、垂心，則我們稱 $\mathcal{K} := (ABCGH)$ 爲 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線。

Proposition 5.3.1. $\mathcal{K}$ 爲 OK 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡，其中 K 爲 G 的等角共軛點。

不知道大家有沒有看過那種對三邊向外做等腰三角形的題目，那 Kiepert 雙曲線其實跟他很有關係。

Theorem 5.3. 對於任意角度 θ，取 $A_\theta, B_\theta, C_\theta$ 滿足

$$\measuredangle A_\theta BC = \measuredangle BCA_\theta = \measuredangle B_\theta CA = \measuredangle CAB_\theta = \measuredangle C_\theta AB = \measuredangle ABC_\theta = \theta$$

則 $AA_\theta, BB_\theta, CC_\theta$ 三線共點，設這個點爲 K_θ，則我們有

$$\left\{ K_\theta \middle| \theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} = \mathcal{K}$$

我們先來看一個常見的例子

Definition 5.3.2. $K_{60^\circ}, K_{-60^\circ}$ 稱爲第一和第二等角點，常用 F_1, F_2 來表示。

Proposition 5.3.2. F_1, F_2 互爲 $\mathcal{K}$ 上的對徑點。

Definition 5.3.3. 我們稱 F_1^*, F_2^* 爲第一、第二等力點，常用 S_1, S_2 來表示。

那關於這個 K_θ 我們有一些很棒的性質。

Proposition 5.3.3. 對於任意的 θ 我們有 $(K_\theta, K_\theta; H, G)_{\mathcal{K}} = -1$

Corollary 5.2. $(F_1, F_2; H, G)_{\mathcal{K}} = -1$

Corollary 5.3. S_1, S_2 爲 OK 直徑圓的反演相互對。

Theorem 5.4. 對於三個任意角度 α, β, γ

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \iff K_\alpha, K_\beta, K_\gamma^* \text{ 三點共線}$$

5.4 某條常見的等軸雙曲線

大家應該有看過一種題目是考慮某個點 P 滿足 $\measuredangle ABP+\measuredangle ACP=0$ 之類的，那這個點的軌跡無疑是一條等軸雙曲線，因爲他是 BC 中垂線的等角共軛軌跡。

Proposition 5.4.1. 這個雙曲線的中心爲 $\overline{BC}$ 中點。

Problem 5.4. 給定 $\triangle ABC$，$D,E\in BC$ 使得 $BD=CE$ 且 $D\in\overline{BE}$，假設存在一點 P 滿足 $PD\parallel AE$ 且 $\measuredangle PAB=\measuredangle EAC$。
證明：$\measuredangle PBA=\measuredangle ACP$

Problem 5.5. 設 A 對外接圓的切線交 BC 於 X，A 關於 X 的對稱點爲 Y。
證明：$\measuredangle YBA=\measuredangle ACY$

Problem 5.6 (2012 ISL G2). 設 $ABCD$ 爲圓內接四邊形，其中 AC,BD 交於 E，AD,BC 交於 F，G 爲平面上一點滿足 $ECGD$ 爲平行四邊形，設 H 爲 E 關於 AD 的對稱點。
證明：D,H,F,C 四點共圓。

6 習題

Problem 6.1 (2021 2J 模競 P3). 設 O,H 爲 $\triangle ABC$ 的外心、垂心。P 點滿足 $\measuredangle AHP=\measuredangle POA$。$M$ 爲 $\overline{OP}$ 中點。設 BM,CM 交 $\triangle ABC$ 外接圓於 X 和 Y。
證明：XY 過 $\triangle APO$ 外心。

Problem 6.2. 給定 $\triangle ABC$ 和內心 I 外心 O，設 H_A 爲 $\triangle BIC$ 垂心。且設 $\triangle DEF$ 爲切點三角形。設 $\odot(AEF)$ 和 $\odot(AIO)$ 分別交 $\odot(ABC)$ 於 S 和 T。
證明：T,H_A,I,S 共圓。

參考資料

[1] 鄭容濤 + 李雙言. 對合與大保交比

[2] $\mathcal{L}i4$. 圓錐曲線. https://lii4.github.io/Conic.pdf