張志煥截線

$\mathcal{Li4} + \mathfrak{S}$

March 31, 2021

1 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

Proposition 1. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形。對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令

$$X_{P,A} = XP_A \cap BC,\ X_{P,B} = XP_B \cap CA,\ X_{P,C} = XP_C \cap AB,$$

則 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。

Proof. 考慮 $\mathcal{C}$ 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB，由帕斯卡定理即可得 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_{P,A}X_{P,B}X_{P,C}$ 爲 X 關於 $(\triangle ABC, \mathcal{C})$ 的張志煥 P-截線，記爲 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X)$。定義相當的簡單，我們顯然有

Proposition 2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。我們有

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P : \mathcal{C} \to TP$$

爲保交比變換。

Proof. 注意到

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P = [X_{P,A} \mapsto PX_{P,A}] \circ [X \mapsto X_{P,A}].$$ ■

Proposition 3. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。設 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC \cup P$ 的外接圓錐曲線，T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 的第四個交點，則對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathcal{D} \in TX$。

Proof. 令 $D = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathcal{D}$，由於 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P$ 爲保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A,B;C,X) &= (A,B;C,X)_{\mathcal{C}} = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(A,B;C,X) \\ &= (AP,BP;CP,\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X)) = (A,B;C,D)_{\mathcal{D}} = T(A,B;C,D), \end{aligned}$$

故 T, X, D 共線。 ■

Proposition 4. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$，

(i) $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X) \in (ABCPQ)$,

(ii) 若 T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $(ABCPQ)$ 的第四個交點，則 T, X, $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X)$ 共線。

Proof. (i) 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$, $Z = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X)$，我們有

$$\begin{aligned} P(A,Z;B,C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B,C) \overset{P_A}{=} (A,X;B,C)_{\mathcal{C}} \\ &\overset{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B,C) = Q(A,Z;B,C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得 $Z \in (ABCPQ)$。

(ii) 由 (i) 及 (3)，

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap (ABCPQ) \in TX.$$ ■

這邊給一些未來會用到的記號。給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及一點 X。

(i) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathcal{D}_{P,Q} = (ABCPQ).$$

(ii) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathfrak{Li}^{\mathcal{C}}_{P,Q}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X) \cap \mathcal{D}_{P,Q} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{P,Q})X.$$

(iii) 對於任意外接圓錐曲線 T，我們記

$$\mathfrak{Li}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D})X.$$

因此，$\mathfrak{Li}^{\mathcal{C}}_{P,Q}(X) = \mathfrak{Li}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_{P,Q}}(X)$。

Proposition 5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \mathcal{D} \to T\mathfrak{Li}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. trivial ■

Proposition 6. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 ℓ 爲任意直線，則

$$\{\mathfrak{S}_{P}^{\mathcal{C}}(X) \mid P \in \ell\}$$

的包絡線爲 $\triangle ABC$ 的內切圓錐曲線，記爲 $\mathcal{B}_{\ell}^{\mathcal{C}}(X)$，且

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \ell \to T\mathcal{B}_{\ell}^{\mathcal{C}}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. trivial ■

對於任意不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們知道 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應，即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$。以下簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 爲 $\mathcal{L}^{\varphi}$ ，特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\infty}$, φ 爲等角共軛變換 $(\cdot)^*$，$\mathcal{L}_{\infty}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω。

Proposition 7. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，且 $X \in \mathcal{L}^{\varphi}$。對於任意點 P，設 $\mathfrak{Li} = \mathfrak{Li}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X)$，則

$$P\varphi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(\mathfrak{Li})}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X).$$

Proof. 設 $D = P\varphi(P) \cap BC$，則

$$\begin{aligned} X(B, C; D, P\mathfrak{Li} \cap BC) &= P(B, C; \varphi(P), \mathfrak{Li}) \\ &= A(B, C; \varphi(P), \mathfrak{Li}) \\ &\overset{\varphi}{=} A(C, B; P, \varphi(\mathfrak{Li})) \\ &= A(B, C; \varphi(\mathfrak{Li}), P) \end{aligned}$$

因此 XD 和 $A\varphi(\mathfrak{Li})$ 交於 $\mathcal{L}^{\varphi}$，即 $P\varphi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(\mathfrak{Li})}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X)$。 ■

Proposition 8. 令 φ, ψ 爲 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 爲 $\mathcal{L}^{\varphi}$ 和 $\mathcal{L}^{\psi}$ 的第四個交點，P 爲任意一點，則

(i) $X, A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^{\varphi}, A\psi(P) \cap \mathcal{L}^{\psi}$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X)$。

Proof. (i) 設 $A\varphi(P), A\psi(P)$ 分別交 $\mathcal{L}^{\varphi}, \mathcal{L}^{\psi}$ 於 $\varphi(P)_A, \psi(P)_A$。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) &= A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^{\varphi}} \overset{\varphi}{=} A(\infty_{BC}, P; B, C) \\ &\overset{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^{\psi}} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 X_A，我們有

$$X_A\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X) = X_A\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X). \qquad \blacksquare$$

Example 1 (等共軛對合). 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換，則對於任意兩點 P, Q，設 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R$, $PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$，則 $\varphi(R) = S$。

Proof. 定義一等共軛變換 ψ 將 $P \mapsto Q$，考慮 $\mathcal{L}^{\varphi}, \mathcal{L}^{\psi}$ 的交點 X，則由 (8) 的 (ii)。

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{P}(X) &= P\varphi(Q) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(Q)}(X), \\ \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{Q}(X) &= \varphi(P)Q = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X). \end{aligned}$$

注意到 $\mathfrak{L}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{P,Q}(X) = R = \mathfrak{L}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P),\varphi(Q)}(X)$，因此由 (7)，

$$\varphi(R) \in PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S. \qquad \blacksquare$$

現在假設 $\mathcal{C}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega = \odot(ABC)$，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

Example 2. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}^{\Omega}_{O}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$。

Example 3. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}^{\Omega}_{H}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_X$。

Example 4. 令 K 爲 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}_K^{\Omega}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

我們簡記 $\mathfrak{S}_P^{\Omega}(X)$ 爲 $\mathfrak{S}_P(X)$，爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的 P-張志煥截線。事實上，我們對於 $\mathfrak{S}_P(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 9. 設 P, P^* 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，X 爲外接圓 Ω 上任意點，則

$$\measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), BC) = \measuredangle AXP^*$$

Proof. 令 $P_A = AP \cap \Omega,\ P_A^* = AP^* \cap \Omega,\ D = AP \cap BC,\ X_{P,A} = XP_A \cap BC$。由 $P_AP_A^* \parallel BC$，我們易得 $\triangle X_{P,A}P_AD \overset{-}{\sim} \triangle AP_A^*X$。在 $P_AX_{P,A}$ 上取點 E 使得 $DE \parallel PX_{P,A} = \mathfrak{S}_P(X)$，由常見的等角共軛比例 Lemma，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_{P,A}E}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_AED \overset{-}{\sim} \triangle AP^*X$，最後由算角度可得

$$\measuredangle AXP^* = \measuredangle EDX_{P,A} = \measuredangle(PX_{P,A}, BC) = \measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), BC). \qquad \blacksquare$$

以下假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 無窮遠線。我們來看看幾何王子是怎麼計算共圓的吧！

Theorem 1 (a)**.** 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 T 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $(ABCP\varphi(P))$ 的第四個交點，P^*, $\varphi(P)^*$ 分別爲 P, $\varphi(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。則 TX, $P\varphi(P)^*$, $P^*\varphi(P)$, $\odot(P\varphi(P)X)$, $(ABCP\varphi(P))$ 共於一點 $\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$。

Proof. 由 (4) 及 (8) 的 (ii)，我們有

$$TX \cap (ABCP\varphi(P)) = \mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = P\varphi(P)^* \cap P^*\varphi(P).$$

因此由 (8) 的 (ii) 及 (9)，

$$\begin{aligned}\measuredangle P\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}\varphi(P) &= \measuredangle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{\varphi(P)^*}(X), \mathfrak{S}_{P^*}(X)) \\ &= \measuredangle AX\varphi(P) + \measuredangle PXA = \measuredangle PX\varphi(P),\end{aligned}$$

即 P, $\varphi(P)$, X, $\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$ 共圓。 $\blacksquare$

上面這個定理我們常用的是以下的敘述。

Theorem 1 (b). 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 $\mathfrak{L} = P^*\varphi(P) \cap P\varphi(P)^*$，其中 $(\cdot)^*$ 爲等角共軛變換。則 $P, \varphi(P), X, \mathfrak{L}$ 四點共圓。

因此我們有以下推論

Corollary 1. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等角共軛點 P, P^*，以及外接圓上一點 X，設 $(ABCPP^*)$ 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點爲 T，XT 和 $(ABCPP^*)$ 交於一點 $\mathfrak{L}$。則 $P, P^*, X, \mathfrak{L}$ 四點共圓。

事實上，(4) 有如下的推廣：

Proposition 10. 若 X 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上，P 爲 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC)$ 的透視中心，則 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形，則 ABP_AC 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形，因此

$$(B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap BC) \stackrel{X}{=} (B, C; A, P_A)_{\mathcal{C}} = -1.$$

同理有

$$(C, A; BX \cap CA, \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap CA) = (A, B; CX \cap AB, \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap AB) = -1,$$

故 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) = \mathfrak{t}_X$。 ■

Example 5. 令 $\mathcal{S}\boldsymbol{t}$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的施坦納外接橢圓，則重心 G 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}_G(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Example 6. 設 $\mathcal{L}^\circ$ 爲 $\mathcal{L}_\infty$ 的正交共軛軌跡，則垂心 H 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\circ}_H(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

2 配極

接著我們可以來討論和配極有關的一些性質。

Theorem 2. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓，則對於任意等角共軛點 P, P^*，和一點 $X \in \Omega$，設 Γ 爲以 X 爲圓心的圓，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(AB)$，則

(i) $X \in \odot(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}})$

(ii)

$$\triangle ABC \cup P \cup P^* \stackrel{-}{\sim} \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} \cup \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X)) \cup \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$$

Proof. (i) 由算角度我們顯然有

$$\measuredangle B^{\mathfrak{p}}XC^{\mathfrak{p}} = \measuredangle(AC, AB) = \measuredangle CAB = \measuredangle CXB = \measuredangle(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}, A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}) = \measuredangle B^{\mathfrak{p}}A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$$

(ii) 首先注意到

$$\measuredangle BAC + \measuredangle B^{\mathfrak{p}}A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} = 0$$

因此我們顯然有 $\triangle ABC \stackrel{-}{\sim} \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$

設 $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$, $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X))$ 爲 Q, Q^*，則

$$\measuredangle QA^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}} = \measuredangle(\mathfrak{S}_P(X) \cap BC)XC = \measuredangle PAC = -\measuredangle P^*AB$$

故顯然有

$$\triangle ABC \cup P \cup P^* \stackrel{-}{\sim} \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} \cup Q^* \cup Q$$

■

事實上配極某種程度上也可以保共斯坦納外接橢圓。

Proposition 11. 設 $\mathcal{St}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於 $\mathcal{St}$ 上一點 X，設 (X) 爲以 X 爲中心的圓錐曲線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則 X 在 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓上。

Proof. 設 $\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}$ 爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓，則

$$\begin{aligned} A(A, B; C, X)_{\mathcal{St}} &= (\infty_{BC}, B; C, AX \cap BC) \\ &\stackrel{\mathfrak{p}_{(X)}}{=} (A^{\mathfrak{p}}X, A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}; A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}, A^{\mathfrak{p}}\infty_{B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}) \\ &= A^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}, B^{\mathfrak{p}}; C^{\mathfrak{p}}, X)_{\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

同理可得

$$B(A,B;C,X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}} = B^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};C^{\mathfrak{p}},X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}},\ C(A,B;C,X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}} = C^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};C^{\mathfrak{p}},X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}}$$

因此 $X \in \boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}$ ∎

Proposition 12. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等截共軛變換，$\boldsymbol{\mathcal{S}t} = \mathcal{L}^{\varphi}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於任意點 P，和一點 $X \in \boldsymbol{\mathcal{S}t}$，設 (X) 爲以 X 爲中心的任意錐線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則

$$\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)), \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$$

爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的一對等截共軛點。

Proof. 令 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$，則我們等價要證明

$$A^{\mathfrak{p}}(B^{\mathfrak{p}},C^{\mathfrak{p}};A^{\mathfrak{p}},Q)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}} = A^{\mathfrak{p}}(C^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};A^{\mathfrak{p}},R)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}}$$

然而這等價於要證明

$$(C,B;AX \cap BC, \mathfrak{S}_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X) \cap BC) = (B,C;AX \cap BC, \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X) \cap BC)$$

但這是顯然的。 ∎

Theorem 3. 延續 (12) 的標號，設 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$，設 $\mathcal{Li}_{P,\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X) = \mathcal{Li}$, $\mathcal{Li}_{Q,R}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}}(X) = \mathcal{Li}^{\mathfrak{p}}$，設 $\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}}$ 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}'}$，則

$$\frac{P\varphi(\mathcal{Li})}{\varphi(P)\varphi(\mathcal{Li})} = \frac{R\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}'}}$$

Proof. 設 $\infty_{P\varphi(P)}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle ABC}$，∞_{QR} 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}$，則

$$\frac{P\varphi(\mathcal{Li})}{\varphi(P)\varphi(\mathcal{Li})} = (P,\varphi(P);\varphi(\mathcal{Li}),\infty_{P\varphi(P)}) = A(\varphi(P),P;\mathcal{Li},T_{\triangle ABC})_{(ABCP\varphi(P))}$$

$$\frac{R\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}'}} = (R,Q;\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}'},\infty_{RQ}) = A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}})_{(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}QR)}$$

注意到我們有

$$Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)),\ R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$$

$$\mathcal{Li}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(\mathcal{Li})}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)),\ T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$$

則我們有

$$
\begin{aligned}
\frac{R\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'}}{Q\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'}} = A^{\mathfrak{p}}(Q, R; \boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}}, T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}) &= (\boldsymbol{\mathfrak{S}}_{P}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X), \boldsymbol{\mathfrak{S}}_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X); \boldsymbol{\mathfrak{S}}_{\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X), \boldsymbol{\mathfrak{S}}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)) \\
&= A(P, \varphi(P); \varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i}), \infty_{P\varphi(P)}) \qquad (5) \\
&= A(\varphi(P), P; \boldsymbol{\mathcal{L}i}, \infty_{AT_{\triangle ABC}}) \\
&= A(\varphi(P), P; \boldsymbol{\mathcal{L}i}, T_{\triangle ABC}) = \frac{P\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})}{\varphi(P)\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Problem 1. $\triangle ABC$ 三角形，$\triangle D'E'F'$ 爲三個旁切圓切點，A' 爲 A 關於外接圓的對鏡點，AI 交 $\odot(ABC)$ 於 $M \neq A$，MA' 交 BC 於 X。
證明：$XI \parallel E'F'$。

3 心世界

Problem 2 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P2)**.** X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到 X_{99} 的三線姓極線為 X_2X_6，且我們知道 X_{69} 為 X_6 的反補點且在 $(ABCOH)$ 上，因此 $X_{69} = \mathfrak{L}^{\mathcal{L}^*}_{X_3,X_4}(X_{99})$，故由 (1)，$X_3$, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓。 ■

Problem 3 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P5)**.** $X_{69}X_{99}$ 交歐拉線在 X_2 對 X_3 對稱點。

Proof. 注意到我們有 $X_{69} = \mathfrak{L}^{\mathcal{L}^*}_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}(X_{99})$，因此我們算角

$$
\begin{aligned}
\measuredangle GX_{99}X_{69} &= \measuredangle AX_{99}X_{74} + \measuredangle GX_{99}A \\
&= \measuredangle(OH, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}^{\Omega}_{K}(X_{99})) \\
&= \measuredangle(OG, BC) + \measuredangle(BC, GX_{69}) = \measuredangle(OG, GX_{69})
\end{aligned}
$$

即 $\odot(GX_{69}X_{99})$ 和歐拉線相切於 G。設 $X_{69}X_{99}$ 交 OH 於 T，則由上一題我們知道 X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓，故 T 滿足

$$
\overline{TG}^2 = \overline{TO} \times \overline{TH} \implies T\text{為 } X_2 \text{ 對 } X_3 \text{ 的對稱點}
$$

■

Problem 4 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P12)**.** 三角形 $\triangle ABC$，I 為內心，O 為外心，Ge 為格爾鋼點，設 X_{104} 為 OI 上無窮遠點的等角共軛點，X_{999} 為 I, X_{57} 中點，則 Ge, $X(104)$, $X(999)$ 三點共線。

Proof. 設 $X_{104}Ge$ 交 $\odot(ABC)$ 於 X，則我們有 $Ge = \mathfrak{L}^{\Omega}_{\mathcal{H}_{Fe}}(X)$，因此由我們有

$$
\begin{aligned}
\measuredangle GeXI &= \measuredangle AXGe + \measuredangle AXI \\
&= \measuredangle(OI, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_I(X)) = \measuredangle(OI, IGe)
\end{aligned}
$$

即 OI 和 $\odot(XGeI)$ 相切。

另一方面，我們有 X_{56}, Ge, X_{21} 共線，因此

$$
\begin{aligned}
\measuredangle X_{65}X_{56}Ge &= \measuredangle(OI, \mathfrak{S}_{21}(X)) \\
&= \measuredangle(OI, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_{X_{21}}(X)) \\
&= \measuredangle AXGe + \measuredangle X_{65}XA = \measuredangle X_{65}XGe
\end{aligned}
$$

因此 X_{56}, Ge, X_{21}, X 四點共圓，且注意到我們有

$$-1=(I,X_{57};X_{65},X_{56}) \implies \overline{X_{999}I}^2=\overline{X_{999}X_{57}}^2=\overline{X_{999}X_{56}}\times\overline{X_{999}X_{65}}$$

故 X_{999} 在 $\odot(X_{56}GeX_{21}X)$ 和 $\odot(XGeI)$ 的根軸上，即 $X_{999}\in XGe=GeX_{104}$ ■

Problem 5 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P13)**.** X_7, X_8, X_{21}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到我們有 $X_{99}\in\mathcal{L}^*\cap\mathcal{L}^\varphi$，其中 φ 爲等截共軛變換，現在取 $P=X_7$，因此由 (1)，我們有

$$X_7, X_8, \mathfrak{L}^{\mathcal{L}^\varphi}_{X_7,X_8}(X_{99}), X_{99}, \text{四點共圓}$$

且我們注意到 $X_{21}=X_7X_{56}\cap X_8X_{55}=\mathfrak{L}^{\mathcal{L}^\varphi}_{X_7,X_8}(X_{99})$，故得證。 ■

Problem 6. X_{21}, X_{55}, X_{56}, X_{110} 四點共圓。

Proof. 設 φ 爲等截共軛變換，則考慮等共軛 $\psi:(\cdot)^*\circ\varphi\circ(\cdot)^*$，則我們有

$$\psi: X_{55}\mapsto X_{56}$$

設 X 爲 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，則我們有 $X_{55}X_8\cap X_{56}X_7=X_{21}$ 因此由 (1)，

$$X_{55}, X_{56}, X_{21}, X\ \text{四點共圓}$$

接著我們證明 $X=X_{110}$。

這等價要證明 $\psi(X_{110})\in\mathcal{L}_\infty$ 但注意到

$$\psi:[x:y:z]\mapsto\left[\frac{a^4}{x}:\frac{b^4}{y}:\frac{c^4}{z}\right]$$

且我們有 $X_{110}=\left[\dfrac{a^2}{b^2-c^2}:\dfrac{b^2}{c^2-a^2}:\dfrac{c^2}{a^2-b^2}\right]$，因此

$$\psi(X_{110})=\left[a^2(b^2-c^2):b^2(c^2-a^2):c^2(a^2-b^2)\right]$$

顯然滿足無窮遠線的方程式 $x+y+z=0$，因此 $X=X_{110}$，故得證。 ■

Problem 7. 設 K_θ 爲 Kiepert 雙曲線上角度爲 θ 的點，則對於任意的 θ，我們都有 G, K^*_θ, $K^*_{-\theta}$, X_{110} 四點共圓。特別的我們有 G, X_{15}, X_{16}, X_{110} 四點共圓。

Proof. (純幾) 首先我們知道 X_{110} 的斯坦納線爲 HG，因此由 $\mathfrak{S}_H(X_{110})=HG$ 我們知道 $\mathfrak{L}^\Omega_{\mathcal{H}_k}(X_{110})=G$，並且注意到對於任意的 α，我們都有 K, K_α, $K_{-\alpha}$ 共線和 G, K^*_α, $K_{-\alpha}$ 共線，即

$$\mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110})=GK^*_{-\theta}, \mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110})=GK^*_\theta$$

因此由算角引理

$$\measuredangle K_\theta^* G K_{-\theta}^* = \measuredangle(GK_\theta^*, GK_{-\theta}^*) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}), \mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110})) = \measuredangle K_\theta^* X_{110} K_{-\theta}^* \qquad \blacksquare$$

Proof. (重心坐標) 我們只要證明 X_{110} 會被把 $K_\theta^* \mapsto K_{-\theta}^*$ 的等共軛變換 φ 打到無窮遠即可，注意到對於所有的 K_θ 我們有重心坐標

$$\begin{aligned}
&K_\theta = \left[\frac{a}{\sin(A+\theta)} : \frac{b}{\sin(B+\theta)} : \frac{c}{\sin(C+\theta)}\right] \\
&\implies K_\theta^* = [a\sin(A+\theta) : b\sin(B+\theta) : c\sin(C+\theta)] \\
&\implies \varphi([x:y:z]) \\
&= \left[\frac{a^2\sin(A+\theta)\sin(A-\theta)}{x} : \frac{b^2\sin(B+\theta)\sin(B-\theta)}{y} : \frac{c^2\sin(C+\theta)\sin(C-\theta)}{z}\right] \\
&= \left[\frac{a^2(\sin^2 A - \sin^2\theta)}{x} : \frac{b^2(\sin^2 B - \sin^2\theta)}{y} : \frac{c^2(\sin^2 C - \sin^2\theta)}{z}\right]
\end{aligned}$$

代入 X_{110} 則我們有 $\sum\limits_{\text{cyc}}(\sin^2 A - \sin^2\theta)(b^2 - c^2) = 0$ 故得證 $\blacksquare$

Problem 8. 九點圓圓心 N 在 $\mathcal{D}_{N,H}$ 上的切線平行 OKo。

Problem 9. N, Ko, X_{110} 三點共線。

Proof. 注意到 $\mathfrak{I}^{\Omega}_{\mathcal{D}_{N,H}}(X_{110}) = N$, $\mathfrak{I}^{\Omega}_{\mathcal{H}_{\mathcal{J}}}(X_{110}) = O$，並且我們有 N 的正交截線垂直 OKo，因此我們有 OKo 平行 N 在 $\mathcal{D}_{N,H}$ 上的切線，即 $OKo \parallel \mathfrak{S}_N(X_{110})$，故

$$\measuredangle AX_{110}N = \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_{Ko}(X_{110})) = \measuredangle(BC, OKo) = \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_N(X_{110})) = \measuredangle AX_{110}Ko$$

$\blacksquare$