
基礎幾何預備知識



March 12, 2021

這篇講義會盡可能的把你所需要會的基礎幾何知識補足。

1 你會算角嗎

首先我們從算角度說起。

Definition 1.1. 記直線 l_a, l_b 之間所夾的逆時針夾角為 $\angle(l_a, l_b)$

Definition 1.2. 給定任三點 ABC 則 AB, BC 之間所夾的逆時針夾角為 $\angle ABC$

這裡提醒一下各位，通常我們都會把有向角模 180 度

Proposition 1.1. 對於四點 A, B, C, P 我們有以下性質

1. $\angle APA = 0^\circ$
2. $\angle ABC = -\angle CBA$
3. $\angle PBA = \angle PBC \iff A, B, C$ 三點共線
4. $PA \perp PB \iff \angle APB = \angle BPA = 90^\circ$
5. $\angle ABP + \angle PBC = \angle ABC$
6. $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0^\circ$
7. $AB = AC \iff \angle ABC = \angle BCA$

所以我們就可以好好地定出共圓的充要條件了。

Proposition 1.2. $ABCD$ 共圓若且惟若 $\angle ABC = \angle ADC$

Example 1.1 (Russian Olympiad 1996). 已知凸四邊形 $ABCD$ ，點 E, F 是邊 BC 是上的點 (E 比 F 靠近 B) 已知 $\angle BAE = \angle CDF$ 且 $\angle EAF = \angle EDF$ ，證明 $\angle FAC = \angle EDB$

Proof. 首先我們有 $\angle EAF = \angle EDF$ ，即 E, A, D, F 四點共圓，因此注意到

$$\angle FAC = \angle EDB \iff \angle BAC = \angle BDC \iff A, B, C, D \text{ 共圓}$$

接著算角度

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle BAF + \angle AFB \\ &= \angle EDC + \angle ADE = \angle ADC \implies A, B, C, D \text{ 四點共圓}\end{aligned}$$

□

我們來看一些經典的例子。

Theorem 1.1 (西姆松定理). 對於三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P ，做 P 在 BC, CA, AB 的垂足 D, E, F ，則 D, E, F 共線若且惟若 A, B, C, P 四點共圓。

Proof. 注意到 P, D, E, C 四點共圓， P, F, B, D 四點共圓，因此

$$\begin{aligned} D, E, F \text{ 三點共線} &\iff 0^\circ = \angle FDP + \angle PDE = \angle FBP + \angle PCE \\ &= \angle ABP + \angle PCA = 0^\circ \iff A, B, C, P \text{ 四點共圓} \quad \square \end{aligned}$$

Example 1.2. 設三角形 ABC 的切點三角形為 $\triangle DEF$ ，且 ID 交 EF 於 T ，證明： AT 平分 \overline{BC}

Proof. 考慮過 T 平行 BC 的直線交 AC, AB 於 X, Y ，顯然有 E, T, F 共線，因此由西姆松定理 I 在 $\odot(AXY)$ 外接圓上，且由 $\angle YAI = \angle IAX$ ，可以得到 I 為 XY 弧中點，因此 T 為 \overline{XY} 中點，故由 $XY \parallel BC$ ， AT 平分 \overline{BC} 。 \square

Theorem 1.2 (三角形的密克定理). 對於三角形 ABC 和 BC, CA, AB 上三點 D, E, F ，則 $(AEF), (BDF), (CDE)$ 共點。

Proof. 考慮 $\odot(AEF), \odot(BDF)$ 的交點 P ，則我們有

$$\begin{aligned} \angle DPE &= \angle DPF + \angle FPE \\ &= \angle DBF + \angle FAE \\ &= \angle CBA + \angle BAC \\ &= \angle BCA = \angle DAE \end{aligned} \quad \square$$

Example 1.3. 設 A, B, C, D 四點共圓，做 $AB \cap CD = E, BC \cap AD = F$ ，則

$$\overline{EF}^2 = \overline{EA} \times \overline{EB} + \overline{FA} \times \overline{FD}$$

2 等角共軛點

Proposition 2.1 (定差幂線定理). 給定平面上任意四點 A, B, C, D ，則

$$AB \perp CD \iff \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{DA}^2 - \overline{DB}^2$$

Theorem 2.1 (正交). 對於兩三角形 $\triangle UVW, \triangle XYZ$ ，以下兩件事等價

1. U 對 YZ 的垂線、 V 對 ZX 的垂線、 W 對 XY 的垂線共點。
2. X 對 VW 的垂線、 Y 對 WU 的垂線、 Z 對 UV 的垂線共點。

Proof. 只需要注意到 1. 2. 都等價到下式即可。

$$UY^2 - UZ^2 + VZ^2 - VX^2 + WX^2 - WY^2 = 0 \quad \square$$

Proposition 2.2. 設 P 為平面上任意點，且有一點 Q 滿足 $\angle BAP = \angle QAC$ ，並設 P 對 AC, AB 的垂足為 P_B, P_C ，則

$$AQ \perp P_BP_C$$

Proof. 設 $T = P_BP_C \cap AQ$ ，則顯然有 $\triangle APP_C \stackrel{+}{\sim} \triangle AP_BT \implies AT \perp P_BP_C$ 。 \square

Theorem 2.2 (等角共軛點的存在性). 三角形 $\triangle ABC$ ，設 P 為不在三邊上的任意點，則存在一點 P^* 滿足

$$\angle BAP + \angle CAP^* = \angle CBP + \angle ABP^* = \angle ACP + \angle BCP^* = 0$$

Proof 1. 設 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，則 $\triangle ABC, \triangle P_AP_BP_C$ 正交，因此我們有 A 對 P_BP_C 的垂線， B 對 P_CP_A 的垂線， C 對 P_AP_B 的垂線，三線共點，設此點為 P^* ，則由 (2.2)。

$$\angle BAP + \angle CAP^* = \angle CBP + \angle ABP^* = \angle ACP + \angle BCP^* = 0 \quad \square$$

Proof 2. 考慮 PA, PB, PC 和 $\odot(ABC)$ 的交點， P_A, P_B, P_C ，並且令 $\triangle XYZ$ 為 P 對 $\triangle P_AP_BP_C$ 的垂足三角形，注意到

$$\begin{aligned} \angle YXZ &= \angle YXP + \angle PXZ \\ &= \angle YP_CP + \angle PP_BZ \\ &= \angle P_AP_CC + \angle BP_BP_A \\ &= \angle P_AAC + \angle BAP_A = \angle BAC \end{aligned}$$

因此我們有 $\triangle ABC \stackrel{+}{\sim} \triangle XYZ$ 。考慮一點 P^* 使得

$$\triangle ABC \cup \{P^*\} \stackrel{+}{\sim} \triangle XYZ \cup \{P\}$$

則

$$\angle BAP^* = \angle YXP = \angle YP_CP = \angle P_AP_CC = \angle PAC$$

同理可得 P^* 滿足

$$\angle BAP + \angle CAP^* = \angle CBP + \angle ABP^* = \angle ACP + \angle BCP^* = 0 \quad \square$$

3 內心

內心的常用代號是 I ，在 ETC 裡面的編號是 $X(1)$ ，接下來我們用純算角證明一些內心的常用性質。

Proposition 3.1. 我們有

$$\angle BIC = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \angle IAC.$$

Proof. 考慮切點三角形 $\triangle DEF$ ，注意到 AI, BI, CI 分別垂直 EF, FD, DE ，所以

$$\angle BIC = \angle FDE = \angle AFE = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \angle IAC. \quad \square$$

Proposition 3.2 (雞爪圓). 設 AI 交 $\odot(ABC)$ 於 $M \neq A$, 則 B, I, C, I_A 共圓且圓心為 M 。

Proof. 我們只須證明 $\overline{MI} = \overline{MB} = \overline{MC}$ 即可, 注意到

$$\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \angle BAI + \angle IBA = \angle BIM$$

因此 $\overline{MB} = \overline{MI}$, 同理 $\overline{MI} = \overline{MB} = \overline{MC}$ □

4 歐拉線

Proposition 4.1. 三角形 $\triangle ABC$ 中, 外心垂心互為等角共軛點。

Proof. 考慮 A 對外接圓的對鏡點 A' , 以及 A 對 BC 的垂足 H_A , 則

$$\triangle AH_A C \sim \triangle ABA' \implies \angle BAH = \angle OAC$$
 □

Proposition 4.2. 設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心, 則 H 對 BC, CA, AB 鏡射皆在 $\triangle ABC$ 外接圓上。

Proof. 設 H' 為 H 對 BC 邊的對稱點, 則

$$\angle BH'C = \angle CHB = \angle BAC \implies A, B, C, H' \text{ 四點共圓}$$
 □

Proposition 4.3. 設 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心, 則 H 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的中點鏡射皆在 $\triangle ABC$ 外接圓上。

Proof. 設 H' 為 H 對 \overline{BC} 中點的對稱點, 則

$$\angle BH'C = \angle CHB = \angle BAC \implies A, B, C, H' \text{ 四點共圓}$$
 □

Theorem 4.1 (九點圓). 三角形 $\triangle ABC$ 中的三邊垂足、三邊中點, 和三頂點到垂心的中點, 九點共圓且圓心為垂心和外心的中點。

Proof. 注意到以垂心為中心將這九個點往外推一倍都在外接圓上, 故得證。 □

Definition 4.1 (九點圓圓心). 我們稱上面的定理中的圓為九點圓, 其圓心為九點圓圓心。

Proposition 4.4. 三角形 $\triangle ABC$ 中, 設 O, N 為外心、九點圓圓心, 設 O_A 為 BOC 外心。則 AN, AO_A 為等角線。

Proof. 考慮 \overline{AB} 中垂線和 AC 的交點 D , 考慮 \overline{AC} 中垂線和 AB 的交點 E , 設 O' 為 O 關於 BC 的對稱點, 則注意到

$$\triangle ABC \cup \{O'\} \sim \triangle ADF \cup \{O_A\} \implies AO', AO_A \text{ 為等角線}$$

且由 $AHO'O$ 為平行四邊形, 我們有 AO' 過 \overline{OH} 中點, 故結論得證。 □

Theorem 4.2. 重心、外心、垂心、九點圓圓心，四點共線，我們稱此線為該三角形的歐拉線。

Theorem 4.3 (斯坦納定理). 對於三角形 $\triangle ABC$ 和外接圓上一點 P ，做 P 對 BC, CA, AB 的對稱點 P_A, P_B, P_C ，則 P_A, P_B, P_C 共線且過 $\triangle ABC$ 垂心。

Proof. 我們只要證明 P_A, H, P_B 三點共線即可，考慮 PP_A, PP_B 和 $\triangle ABC$ 的外接圓的交點 P'_A, P'_B ，則注意到 $AHP_AP'_A$ 為平行四邊形。因此我們只需要證明 $AP'_A \parallel BP'_B$ 即可，注意到 $PP'_A \perp BC, PP'_B \perp BA$ 故

$$\angle P'_A AP'_B = \angle P'_A PP_B = \angle CBA = \angle CP'_B A \implies AP'_A \parallel BP'_B \quad \square$$

5 完全四線形和圓冪

Theorem 5.1 (四邊形的密克定理). 考慮四點 $ABCD$ ，設 AB 交 CD 於 E ， AD 交 BC 於 F ，則 $\odot(AED), \odot(ABF), \odot(BCE), \odot(CDF)$ 共點。

Proof. 考慮 $\odot(AED), \odot(ABF)$ 的交點 M ，則由西姆松定理 M 對 AB, BC, CD, DA 的垂足四點共線，再則由西姆松定理， $M \in \odot(BCE), M \in \odot(CDF)$ 。 \square

Definition 5.1. 上面的 M 稱為 $Q\{AB, BC, CD, DA\}$ 完全四線形的密克點。

Theorem 5.2 (垂心線). 考慮四點 $ABCD$ ，設 AB 交 CD 於 E ， AD 交 BC 於 F ，則 $\triangle AED, \triangle ABF, \triangle BCE, \triangle CDF$ 垂心共線。

Proof. 由斯坦那定理顯然。 \square

Definition 5.2. $\triangle AED, \triangle ABF, \triangle BCE, \triangle CDF$ 的垂心所共的線稱為完全四線形 $\{AB, BC, CD, DA\}$ 的垂心線。

Definition 5.3. 設有兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$ ，則稱到這兩圓的圓冪一樣的點的軌跡為 O_1, O_2 的根軸。

Proposition 5.1. 根軸垂直連心線

Proposition 5.2. 對於任意三個圓，兩兩根軸三線共點或平行。

Theorem 5.3 (牛頓線). 完全四線形 $Q\{AB, BC, CD, DA\}$ 的三條對角線中點共線。且垂直垂心線。

Proof. 考慮 $\triangle EBC$ 的垂心 H ，並考慮 H 對 BC, CE, EB 的垂足 X, Y, Z ，則

$$HE \times HX = HB \times HY = HC \times HZ$$

因此我們有 H 在 (AC) 直徑圓、 (BD) 直徑圓、 EF 直徑圓的跟軸上，同理我們有 $\triangle ABF, \triangle CDF$ 的垂心在此根軸上，故三直徑圓共軸，即圓心共線。 \square

Problem 5.1. 設 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，設 EF, FD 交 BC, CA 於 M, N 則 MN 垂直歐拉線。

Proof. 注意到 B, C, E, F 四點共圓，因此我們有

$$MB \times MC = ME \times MF$$

因此 M 在外接圓和九點圓的根軸上，同理有 N 在外接圓和九點圓的根軸上，且我們知道外心和九點圓連線為歐拉線，因此 MN 為根軸故垂直歐拉線。 \square

Problem 5.2. 設 H 為 ABC 的垂心， M, N 為 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 邊上的中點，射線 MH, NH 交外接圓於 P, Q ，則 PQ, MN, A 在外接圓上的切線共點。

Proof. 設 M', N' 為 H 對 M, N 的對稱點 (熟知其在外接圓上)，則

$$HM \times HP = \frac{1}{2}HM' \times HP = \frac{1}{2}HN' \times HQ = HN \times HQ \implies P, Q, M, N \text{ 四點共圓}$$

考慮三圓 $\odot(AMN), \odot(MNPQ), \odot(APQ)$ ，則由根心的存在性知道則 PQ, MN, A 在外接圓上的切線共點。 \square

6 習題

Problem 6.1. 三角形 ABC ，設 $\triangle DEF$ 為頂點對各邊的垂足 (以後叫他垂足三角形)，設 EF 交外接圓於 P ，做 BP 交 DE 於 Q ，試證 $AP = AQ$ 。

Problem 6.2. 三角形 ABC ， A, B, C 在 BC, CA, AB 上的垂足為 D, E, F ， H 為垂心。試證： H 是 $\triangle DEF$ 內心。

Problem 6.3. 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形， I_1, I_2 為 $\triangle ABC, \triangle DBC$ 的內心。試證： B, C, I_1, I_2 共圓。

Problem 6.4. 三角形 ABC 中 BC 為最短邊， D, E 在線段 AB, AC 上滿足 $BD = BC = CE$ ，試證：內外心連線垂直 DE

Problem 6.5. 三角形 $\triangle ABC$ ， O 為其外心， O_A 為 $\triangle BOC$ 外心，設 B', C' 為 B, C 關於 AC, AB 的對稱點，證明： $AO_A \perp B'C'$

Problem 6.6. 三角形 ABC ， DEF 為垂足三角形， M 為 BC 中點，證明 ME, MF 為 M 對 $\odot(AEF)$ 的切線。

Problem 6.7. (2017 APMOC P5) $ABCD$ 為圓內接四邊形， AB, DC 交於 P ， AD, BC 交於 Q ， M 是 PQ 中點， MC 交 $\odot(ABCD)$ 於 G ，證明 $AGPQ$ 共圓。

Problem 6.8. 三角形 ABC 其中 H 為垂心， P 為外接圓上任意點，做 PH 中垂線交 AB, AC 於 Q, R ，試證 $APQR$ 共圓。

Problem 6.9. (2013 IMO P4) 設 ABC 為銳角三角形， H 為垂心， W 為 BC 上一點，設 M, N 為 B, C 在 AC, AB 上的垂足， WX 上在 $\odot(BWN)$ 上的直徑， WY 是 $\odot(CWM)$ 上的直徑，證明 H, X, Y 共線。

Problem 6.10. 點 A, B 在圓 $\odot(O)$ 上 M 為劣弧 AB 上的弧中點， C 在圓外且 CS, CT 為圓 $\odot(O)$ 的切線， MS, MT 分別交 AB 於 E, F 兩點。過 E, F 做垂直 AB 的直線，分別交 OS, OT 於 X, Y ，過 C 做任意一條直線交 (O) 於 P, Q ，設 MP 和 AB 的交點為 R 。證明： $\triangle PQR$ 的外心在 XY 上。

Problem 6.11 (正交截線). 三角形 $\triangle ABC$ ， P 為任意一點，過 P 做垂直 AP, BP, CP 的直線交 BC, CA, AB 於 D, E, F ，試證 D, E, F 共線。