張志煥截線

$\mathcal{L}i4 + \mathfrak{S}$

March 31, 2021

1 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

Proposition 1. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形。對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令

$$X_{P,A} = XP_A \cap BC,\ X_{P,B} = XP_B \cap CA,\ X_{P,C} = XP_C \cap AB,$$

則 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。

Proof. 考慮 $\mathcal{C}$ 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB，由帕斯卡定理即可得 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_{P,A}X_{P,B}X_{P,C}$ 爲 X 關於 $(\triangle ABC, \mathcal{C})$ 的張志煥 P-截線，記爲 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$。定義相當的簡單，我們顯然有

Proposition 2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。我們有

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to TP$$

爲保交比變換。

Proof. 注意到

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} = [X_{P,A} \mapsto PX_{P,A}] \circ [X \mapsto X_{P,A}].$$ ■

Proposition 3. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。設 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC \cup P$ 的外接圓錐曲線，T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 的第四個交點，則對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D} \in TX$。

Proof. 令 $D = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}$，由於 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}$ 爲保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A,B;C,X) &= (A,B;C,X)_{\mathcal{C}} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(A,B;C,X) \\ &= (AP,BP;CP,\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)) = (A,B;C,D)_{\mathcal{D}} = T(A,B;C,D), \end{aligned}$$

故 T, X, D 共線。 ■

Proposition 4. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$，

(i) $\mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) := \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \in \mathcal{D}_{P,Q} := (ABCPQ)$,

(ii) 若 T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 的第四個交點，則 T, X, $\mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X)$ 共線。

Proof. (i) 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$, $Z = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$，我們有

$$\begin{aligned} P(A,Z;B,C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B,C) \overset{P_A}{=} (A,X;B,C)_{\mathcal{C}} \\ &\overset{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B,C) = Q(A,Z;B,C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得 $Z \in (ABCPQ)$。

(ii) 由 (i) 及 (3)，

$$\mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D} \in TX.$$ ■

這邊給一些未來會用到的記號。給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及一點 X。

(i) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathcal{D}_{P,Q} = (ABCPQ).$$

(ii) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}_{P,Q} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{P,Q})X.$$

(iii) 對於任意外接圓錐曲線 T，我們記

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D})X.$$

因此，$\mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{Z}_{\mathcal{D}_{P,Q}}^{\mathcal{C}}(X)$。

Proposition 5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{\bullet}(X) : \mathcal{D} \to T\mathfrak{Z}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. trivial ■

Proposition 6. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 ℓ 爲任意直線，則

$$\{\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{P}(X) \mid P \in \ell\}$$

的包絡線爲 $\triangle ABC$ 的內切圓錐曲線，記爲 $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}_{\ell}(X)$，且

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{\bullet}(X) : \ell \to T\mathcal{B}^{\mathcal{C}}_{\ell}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. trivial ■

對於任意不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們知道 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應，即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$。以下簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 爲 $\mathcal{L}^{\varphi}$ ，特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\infty}$, φ 爲等角共軛變換 $(\cdot)^*$，$\mathcal{L}^*_{\infty}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω。

Proposition 7. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，且 $X \in \mathcal{L}^{\varphi}$。對於任意點 P，設 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{P,\varphi(P)}(X)$，則

$$P\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(\mathfrak{Z})}(X).$$

Proof. 設 $D = P\varphi(P) \cap BC$，則

$$\begin{aligned} X(B, C; D, P\mathfrak{Z} \cap BC) &= P(B, C; \varphi(P), \mathfrak{Z}) \\ &= A(B, C; \varphi(P), \mathfrak{Z}) \\ &\overset{\varphi}{=} A(C, B; P, \varphi(\mathfrak{Z})) \\ &= A(B, C; \varphi(\mathfrak{Z}), P) \end{aligned}$$

因此 XD 和 $A\varphi(\mathfrak{Z})$ 交於 $\mathcal{L}^{\varphi}$，即 $P\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(\mathfrak{Z})}(X)$。 ■

Proposition 8. 令 φ, ψ 爲 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 爲 $\mathcal{L}^{\varphi}$ 和 $\mathcal{L}^{\psi}$ 的第四個交點，P 爲任意一點，則

(i) X, $A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^{\varphi}$, $A\psi(P) \cap \mathcal{L}^{\psi}$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X)$。

Proof. (i) 設 $A\varphi(P)$, $A\psi(P)$ 分別交 $\mathcal{L}^{\varphi}$, $\mathcal{L}^{\psi}$ 於 $\varphi(P)_A$, $\psi(P)_A$。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) = A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^{\varphi}} &\overset{\varphi}{=} A(\infty_{BC}, P; B, C) \\ &\overset{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^{\psi}} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 X_A，我們有

$$X_A\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X) = X_A\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X).$$ ■

Example 1 (等共軛對合)**.** 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換，則對於任意兩點 P, Q，設 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R$, $PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$，則 $\varphi(R) = S$。

Proof. 定義一等共軛變換將 $\psi : P \mapsto Q$，考慮 $\mathcal{L}^{\varphi}$, $\mathcal{L}^{\psi}$ 的交點 X，則由 (8) 的 (ii)。

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{P}(X) = P\varphi(Q) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(Q)}(X)$$
$$\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{Q}(X) = \varphi(P)Q = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X)$$

注意到 $\mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{P,Q}(X) = R = \mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P),\varphi(Q)}(X)$，因此由 (7)

$$\varphi(R) \in PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$$ ■

現在假設 $\mathcal{C}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega = \odot(ABC)$，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

Example 2. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}^{\Omega}_{O}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$。

Example 3. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}^{\Omega}_{H}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_X$。

Example 4. 令 K 爲 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}_K^{\Omega}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

我們簡記 $\mathfrak{S}_P^{\Omega}(X)$ 爲 $\mathfrak{S}_P(X)$，爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的 P-張志煥截線。事實上，我們對於 $\mathfrak{S}_P(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 9. 設 P, P^* 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，X 爲外接圓 Ω 上任意點，則

$$\measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), BC) = \measuredangle AXP^*$$

Proof. 令 $P_A = AP \cap \Omega$, $P_A^* = AP^* \cap \Omega$, $D = AP \cap BC$, $X_{P,A} = XP_A \cap BC$。由 $P_AP_A^* \parallel BC$，我們易得 $\triangle X_{P,A}P_AD \mathrel{\overset{-}{\sim}} \triangle AP_A^*X$。在 $P_AX_{P,A}$ 上取點 E 使得 $DE \parallel PX_{P,A} = \mathfrak{S}_P(X)$，由常見的等角共軛比例 Lemma，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_{P,A}E}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_AED \mathrel{\overset{-}{\sim}} \triangle AP^*X$，最後由算角度可得

$$\measuredangle AXP^* = \measuredangle EDX_{P,A} = \measuredangle(PX_{P,A}, BC) = \measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), BC).$$ ■

以下假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 無窮遠線。我們來看看幾何王子是怎麼計算共圓的吧！

Theorem 1 (a)**.** 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 T 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $(ABCP\varphi(P))$ 的第四個交點，P^*, $\varphi(P)^*$ 分別爲 P, $\varphi(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。則 TX, $P\varphi(P)^*$, $P^*\varphi(P)$, $\odot(P\varphi(P)X)$, $(ABCP\varphi(P))$ 共於一點 $\mathfrak{Z}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$。

Proof. 由 (4) 及 (8) 的 (ii)，我們有

$$TX \cap (ABCP\varphi(P)) = \mathfrak{Z}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = P\varphi(P)^* \cap P^*\varphi(P).$$

因此由 (8) 的 (ii) 及 (9)，

$$\begin{aligned}\measuredangle P\mathfrak{Z}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}\varphi(P) &= \measuredangle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{\varphi(P)^*}(X), \mathfrak{S}_{P^*}(X)) \\ &= \measuredangle AX\varphi(P) + \measuredangle PXA = \measuredangle PX\varphi(P),\end{aligned}$$

即 P, $\varphi(P)$, X, $\mathfrak{Z}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$ 共圓。 ■

上面這個定理我們常用的是以下的敘述。

Theorem 1 (b)**.** 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 $\mathfrak{Z} = P^*\varphi(P) \cap P\varphi(P)^*$，其中 $(\cdot)^*$ 爲等角共軛變換。則 $P, \varphi(P), X, \mathfrak{Z}$ 四點共圓。

因此我們有以下推論

Corollary 1. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等角共軛點 P, P^*，以及外接圓上一點 X，設 $(ABCPP^*)$ 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點爲 T，XT 和 $(ABCPP^*)$ 交於一點 $\mathfrak{Z}$。則 $P, P^*, X, \mathfrak{Z}$ 四點共圓。

事實上，(4) 有如下的推廣：

Proposition 10. 若 X 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上，P 爲 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_\mathcal{C}(\triangle ABC)$ 的透視中心，則 $\mathfrak{S}^\mathcal{C}_P(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形，則 ABP_AC 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形，因此

$$(B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}^\mathcal{C}_P(X) \cap BC) \overset{X}{=} (B, C; A, P_A)_\mathcal{C} = -1.$$

同理有

$$(C, A; BX \cap CA, \mathfrak{S}^\mathcal{C}_P(X) \cap CA) = (A, B; CX \cap AB, \mathfrak{S}^\mathcal{C}_P(X) \cap AB) = -1,$$

故 $\mathfrak{S}^\mathcal{C}_P(X) = \mathfrak{t}_X$。 ■

Example 5. 令 $\mathcal{S}\boldsymbol{t}$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的施坦納外接橢圓，則重心 G 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}_G(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Example 6. 設 $\mathcal{L}^\circ$ 爲 $\mathcal{L}_\infty$ 的正交共軛軌跡，則垂心 H 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\circ}_H(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

接著我們可以來討論和配極有關的一些性質。

Theorem 2. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓，則對於任意等角共軛點 P, P^*，和一點 $X \in \Omega$，設 Γ 爲以 X 爲圓心的圓，設 $A^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Gamma(BC)$,$B^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Gamma(CA)$, $C^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Gamma(AB)$，則

(i) $X \in \odot(A^\mathfrak{p}B^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p})$

(ii) $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$, $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X))$ 爲 $\triangle A^\mathfrak{p}B^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p}$ 的一對等角共軛點。

(iii)

$$\triangle ABC \cup \{P, P^*\} \bar{\sim} \triangle A^\mathfrak{p}B^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p} \cup \{\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X)), \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))\}$$

事實上配極某種程度上也可以保共斯坦納外接橢圓。

Proposition 11. 設 $\mathcal{St}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於 $\mathcal{St}$ 上一點 X，設 (X) 爲以 X 爲中心的圓錐曲線，設 $A^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則 X 在 $\triangle A^\mathfrak{p}B^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p}$ 的斯坦納外接橢圓上。

Proof. 設 $\mathcal{St}^\mathfrak{p}$ 爲 $\triangle A^\mathfrak{p}B^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p}$ 的斯坦納外接橢圓，則

$$\begin{aligned} A(A, B; C, X)_{\mathcal{St}} &= (\infty_{BC}, B; C, AX \cap BC) \\ &\overset{\mathfrak{p}_{(X)}}{=} (A^\mathfrak{p}X, A^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p}; A^\mathfrak{p}B^\mathfrak{p}, A^\mathfrak{p}\infty_{B^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p}}) \\ &= A^\mathfrak{p}(A^\mathfrak{p}, B^\mathfrak{p}; C^\mathfrak{p}, X)_{\mathcal{St}^\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

同理可得

$$B(A, B; C, X)_{\mathcal{St}} = B^\mathfrak{p}(A^\mathfrak{p}, B^\mathfrak{p}; C^\mathfrak{p}, X)_{\mathcal{St}^\mathfrak{p}},\ C(A, B; C, X)_{\mathcal{St}} = C^\mathfrak{p}(A^\mathfrak{p}, B^\mathfrak{p}; C^\mathfrak{p}, X)_{\mathcal{St}^\mathfrak{p}}$$

因此 $X \in \mathcal{St}^\mathfrak{p}$ ■

Proposition 12. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等截共軛變換，$\mathcal{St} = \mathcal{L}^\varphi$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於任意點 P，和一點 $X \in \mathcal{St}$，設 (X) 爲以 X 爲中心的任意錐線，設 $A^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則

$$\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{St}}(X)), \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{St}}(X))$$

爲 $\triangle A^\mathfrak{p}B^\mathfrak{p}C^\mathfrak{p}$ 的一對等截共軛點。

Proof. 令 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{St}}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{St}}(X))$，則我們等價要證明

$$A^\mathfrak{p}(B^\mathfrak{p}, C^\mathfrak{p}; A^\mathfrak{p}, Q)_{\mathcal{St}^\mathfrak{p}} = A^\mathfrak{p}(C^\mathfrak{p}, B^\mathfrak{p}; A^\mathfrak{p}, R)_{\mathcal{St}^\mathfrak{p}}$$

然而這等價於要證明

$$(C, B; AX \cap BC, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{St}}(X) \cap BC) = (B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{St}}(X) \cap BC)$$

但這是顯然的。 ■

Theorem 3. 延續 (12) 的標號，設 $Q=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{P}(X))$, $R=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(P)}(X))$，設 $\mathfrak{z}^{\mathcal{S}t}_{P,\varphi(P)}(X)=\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}^{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}}_{Q,R}(X)=\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}}$，設 $\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}}$ 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'}$，則

$$\frac{P\varphi(\mathfrak{z})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{z})}=\frac{R\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'}}$$

Proof. 設 $\infty_{P\varphi(P)}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle ABC}$，∞_{QR} 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}$，則

$$\begin{aligned}\frac{P\varphi(\mathfrak{z})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{z})}&=(P,\varphi(P);\varphi(\mathfrak{z}),\infty_{P\varphi(P)})=A(\varphi(P),P;\mathfrak{z},T_{\triangle ABC})_{(ABCP\varphi(P))}\\ \frac{R\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'}}&=(R,Q;\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'},\infty_{RQ})=A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}})_{(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}QR)}\end{aligned}$$

注意到我們有

$$\begin{aligned}&Q=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{P}(X)),\ R=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(P)}(X))\\ &\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(\mathfrak{z})}(X)),\ T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\infty_{P\varphi(P)}}(X))\end{aligned}$$

則我們有

$$\begin{aligned}\frac{R\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}'}}=A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\mathfrak{z}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}})&=(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{P}(X),\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(P)}(X);\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(\mathfrak{z})}(X),\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\infty_{P\varphi(P)}}(X))\\ &=A(P,\varphi(P);\varphi(\mathfrak{z}),\infty_{P\varphi(P)}) \qquad (5)\\ &=A(\varphi(P),P;\mathfrak{z},\infty_{AT_{\triangle ABC}})\\ &=A(\varphi(P),P;\mathfrak{z},T_{\triangle ABC})=\frac{P\varphi(\mathfrak{z})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{z})}.\end{aligned}$$

■

Problem 1. $\triangle ABC$ 三角形，$\triangle D'E'F'$ 爲三個旁切圓切點，A' 爲 A 關於外接圓的對鏡點，AI 交 $\odot(ABC)$ 於 $M\neq A$，MA' 交 BC 於 X。
證明：$XI\parallel E'F'$。

2 心世界

Problem 2. X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到 X_{99} 的三線姓極線爲 X_2X_6，且我們知道 X_{69} 爲 X_6 的反補點且在 $(ABCOH)$ 上，因此 $X_{69} = \mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^*}_{X_3,X_4}(X_{99})$，故由 (1)，

$$X_3, X_4, X_{69}, X_{99}, \text{ 四點共圓} \qquad \blacksquare$$

Problem 3 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P12)**.** 三角形 $\triangle ABC$，I 爲內心，O 爲外心，Ge 爲格爾鋼點，設 X_{104} 爲 OI 上無窮遠點的等角共軛點，X_{999} 爲 I, X_{57} 中點，則 Ge, $X(104)$, $X(999)$ 三點共線。

Proof. 設 $X_{104}Ge$ 交 $\odot(ABC)$ 於 X，則我們有 $Ge = \mathfrak{Z}^{\odot(ABC)}_{I,I}(X)$，因此由我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle GeXI &= \measuredangle AXGe + \measuredangle AXI \\ &= \measuredangle(OI, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_I(X)) = \measuredangle(OI, IGe)\end{aligned}$$

即 OI 和 $\odot(XGeI)$ 相切。
另一方面，我們有 X_{56}, Ge, X_{21} 共線，因此

$$\begin{aligned}\measuredangle X_{65}X_{56}Ge &= \measuredangle(OI, \mathfrak{S}_{21}(X)) \\ &= \measuredangle(OI, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_{X_{21}}(X)) \\ &= \measuredangle AXGe + \measuredangle X_{65}XA = \measuredangle X_{65}XGe\end{aligned}$$

因此 X_{56}, Ge, X_{21}, X 四點共圓，且注意到我們有

$$-1 = (I, X_{57}; X_{65}, X_{56}) \implies \overline{X_{999}I}^2 = \overline{X_{999}X_{57}}^2 = \overline{X_{999}X_{56}} \times \overline{X_{999}X_{65}}$$

故 X_{999} 在 $\odot(X_{56}GeX_{21}X)$ 和 $\odot(XGeI)$ 的根軸上，即 $X_{999} \in XGe = GeX_{104}$ $\blacksquare$

Problem 4 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P13)**.** X_7, X_8, X_{21}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到我們有 $X_{99} \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}^{\varphi}$，其中 φ 爲等截共軛變換，現在取 $P = X_7$，因此由 (1)，我們有

$$X_7, X_8, \mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{X_7,X_8}(X_{99}), X_{99}, \text{ 四點共圓}$$

且我們注意到 $X_{21} = X_7X_{56} \cap X_8X_{55} = \mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{X_7,X_8}(X_{99})$，故得證。 $\blacksquare$

Problem 5. $X_{21}, X_{55}, X_{56}, X_{110}$ 四點共圓。

Proof. 設 φ 爲等截共軛變換，則考慮等共軛 $\psi : (\cdot)^* \circ \varphi \circ (\cdot)^*$，則我們有

$$\psi : X_{55} \mapsto X_{56}$$

設 X 爲 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，則我們有 $X_{55}X_8 \cap X_{56}X_7 = X_{21}$ 因此由 (1)，

$$X_{55}, X_{56}, X_{21}, X \text{ 四點共圓}$$

接著我們證明 $X = X_{110}$。
這等價要證明 $\psi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$ 但注意到

$$\psi : [x : y : z] \mapsto \left[\frac{a^4}{x} : \frac{b^4}{y} : \frac{c^4}{z}\right]$$

且我們有 $X_{110} = \left[\frac{a^2}{b^2-c^2} : \frac{b^2}{c^2-a^2} : \frac{c^2}{a^2-b^2}\right]$，因此

$$\psi(X_{110}) = \left[a^2(b^2-c^2) : b^2(c^2-a^2) : c^2(a^2-b^2)\right]$$

顯然滿足無窮遠線的方程式 $x + y + z = 0$，因此 $X = X_{110}$，故得證。 ■

Problem 6. $X_2, X_{15}, X_{16}, X_{110}$ 四點共圓。

Proof. 注意到 $G = X_{15}X_{14} \cap X_{16}X_{13}$，因此和上一題一樣我們只要證明 X_{110} 會被把 $X_{15} \mapsto X_{16}$ 的等共軛變換 φ 打到無窮遠即可，注意到

$$\begin{aligned}
&X_{15} = \left[a\sin(A+\frac{\pi}{3}) : b\sin(B+\frac{\pi}{3}) : c\sin(C+\frac{\pi}{3})\right] \\
&X_{16} = \left[a\sin(A-\frac{\pi}{3}) : b\sin(B-\frac{\pi}{3}) : c\sin(C-\frac{\pi}{3})\right] \\
&\implies \varphi([x : y : z]) \\
&= \left[\frac{a^2\sin(A+\frac{\pi}{3})\sin(A-\frac{\pi}{3})}{x} : \frac{b^2\sin(B+\frac{\pi}{3})\sin(B-\frac{\pi}{3})}{y} : \frac{c^2\sin(C+\frac{\pi}{3})\sin(C-\frac{\pi}{3})}{z}\right] \\
&= \left[\frac{a^2(\sin^2 A-\frac{3}{4})}{x} : \frac{b^2(\sin^2 B-\frac{3}{4})}{y} : \frac{c^2(\sin^2 C-\frac{3}{4})}{z}\right]
\end{aligned}$$

代入 X_{110} 則我們有

$$\sum_{\text{cyc}}(\sin^2 A - \frac{3}{4})(b^2-c^2) = 0, \text{ 故得證}$$

■