# 一個用到很多引理的好題目

ꕥ

August 30, 2021

某天邱昱翔問我一題毒 $G$，做一做發現比我想像中的有趣許多，也用到了很多好引理所以就打算放上來了，先來看題目。

**Problem.** 設 $O, H$ 爲 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，$O$ 關於 $O$ 對 $\triangle ABC$ 的正交截線的垂足爲 $P$，$P^*$ 爲 $P$ 的等角共軛點。
證明：$P^*H$, $X_{125}O$ 交在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。

## 1 記號和常用引理

**Definition 1.** 我們記 $\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X)$ 爲 $X$ 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線。

**Definition 2.** 設 $\mathcal{C}$ 爲一圓錐曲線，$P, \ell$ 爲任意點和任意直線，則 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(P), \mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\ell)$ 分別爲 $P, \ell$ 關於 $\mathcal{C}$ 的極線和極點。

**Definition 3.** 給定 $\triangle ABC$，我們記 $(\triangle ABC, X_n)$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的 $X_n$

**Lemma 1** (well-known)**.** 給定 $\triangle ABC$，$X$ 爲任意點，設 $(X)$ 是以 $X$ 爲圓心的圓，$H^{\mathfrak{p}}$ 爲 $\mathfrak{p}_{(X)}(\triangle ABC)$ 的垂心，則

$$\mathfrak{p}_{(X)}(H^{\mathfrak{p}}) = \mathcal{O}_{\triangle ABC}(X)$$

**Lemma 2.** 給定 $\triangle ABC$ 和任意點 $X$，設 $\mathcal{H}$ 爲過 $A, B, C, X$ 的等軸雙曲線，$T_X(\mathcal{H})$ 爲 $X$ 在 $\mathcal{H}$ 上的切線，則

$$\mathcal{O}_{\triangle ABC}(X) \perp T_X(\mathcal{H})$$

**Lemma 3.** 給定三角形 $\triangle ABC$ 和任意點 $X$，設 $\triangle DEF$ 爲 $X$ 關於 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，$P, P^*$ 爲關於 $\triangle DEF$ 的一對等角共軛點，設 $\mathcal{H}$ 爲過 $A, B, C, P$ 的等軸雙曲線，則我們有 $P, P^*$ 關於 $\mathcal{H}$ 共軛，即

$$P^* \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P), P \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(P^*)$$

**Definition 4.** 給定 $\triangle ABC$ 則我們說 $X, X'$ 爲關於 $\triangle ABC$ 的一對 antigonal conjugate 若 $A, B, C, X, X'$ 共等軸雙曲線且 $X, X'$ 爲一對對徑點。

**Lemma 4.** 給定三角形 $\triangle ABC$，設 $(\cdot)^*$ 爲等角共軛變換，$\varphi$ 爲關於外接圓的反演變換，則

$$(\varphi(X^*))^* \text{ 爲} X \text{的 antigonal conjugate}$$

**Lemma 5.** 三角形 $\triangle ABC$，$O, H$ 分別爲外心、垂心，$X$ 爲外接圓上一點，設 $\mathcal{S}_X$ 爲 $X$ 關於 $\triangle ABC$ 的斯坦那線，則

$$\measuredangle HXO = \measuredangle(\mathcal{S}_X, \mathcal{O}_{\triangle ABC}(X))$$

在接下來的段落中 $\triangle ABC$ 爲一個三角形，$I, O, H, Fe, T$ 爲內心、外心、垂心、費爾巴哈點、$X_{65}$，$\triangle DEF$ 爲切點三角形，$\triangle H_DH_EH_F$ 爲 $\triangle DEF$ 的垂足三角形，$\mathcal{H}_{(Fe)}$ 爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線。

**Lemma 6.** $I, H$ 爲 $\triangle H_DH_EH_F$ 的一對等角共軛點。

**Corollary 1.** 設 $\mathcal{J}_I$ 爲 $\triangle DEF$ 的 Jerabek 雙曲線，則 $IH$ 和 $\mathcal{J}_I$ 相切。

**Corollary 2.** 我們有

$$IH = \mathcal{O}_{\triangle DEF}(Fe)$$

**Lemma 7.** 我們有

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{(Fe)}}(T) = IH$$

## 2 回到原題

首先我們由 **Lemma 1.** 知道 $P$ 就是 $\triangle ABC$ 的外切三角形的垂心關於外接圓反演的像，並且由 **Lemma 4.** 我們知道 $P^*$ 和外切三角形的垂心關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點互爲 antigonal conjugate，因此我們把原三角形換成切點三角形，得到以下等價命題。

**Problem.** 三角形 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 爲切點三角形，$I, O, H, Fe$ 爲 $\triangle ABC$ 內心、外心、垂心、費爾巴哈點，$T = (\triangle ABC, X_{65}), J = (\triangle DEF, X_{125})$，設 $H$ 關於 $\triangle DEF$ 的等角共軛點爲 $H^*$，$H^*$ 的 antigonal conjugate 爲 $H'$，則 $TH', IJ$ 交在 $\triangle DEF$ 的九點圓上。

Proof.

**Claim 1.** 我們有 $T, H, H^*$ 共線。

*Proof of Claim 1.* 注意到 $\triangle DEF$ 爲 $\mathcal{H}_{(Fe)}$ 的一自共軛三角形，故由 **Lemma 3.**

$$H^* \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{(Fe)}}(H)$$

另一方面由 **Lemma 7.** 我們有

$$T \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}_{(Fe)}}(H)$$

注意到 $H \in \mathcal{H}_{(Fe)}$，因此 $T, H, H^*$ 共線。 □

考慮過 $D, E, F, T, H^*$ 的等軸雙曲線 $\mathcal{H}$，則顯然有 $H' \in \mathcal{H}$，接著我們考慮 $Fe' = (\triangle DEF, X_{74})$，以及 $\mathcal{H}$ 和 $(DEF)$ 的第四個交點 $S$，也就是 $IH$ 方向無窮遠點關於 $\triangle DEF$ 的等角共軛點。

**Claim 2.** 我們有 $Fe, T, S$ 共線。

*Proof of Claim 2.* 注意到 $S, Fe'$ 關於 $\triangle DEF$ 的斯坦那線分別垂直於 $IH, IT$，而 $IH, IT$ 分別爲 $Fe$ 的正交截線、斯坦那線，故

$$\measuredangle SFeFe' = \measuredangle(IT, IH) = \measuredangle TFeI$$

由 $Fe, I, Fe'$ 共線，我們有 $Fe, T, S$ 共線。 $\square$

**Claim 3.** $I$ 關於 $\mathcal{H}$ 的極線爲 $TH^*$。

*Proof of Claim 3.* 由 **Claim 1.** 我們只須證明 $I \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(H), I \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(T)$，而前者由 **Lemma 3.** 和 **Lemma 6.** 得證，後者只須注意到 $Fe, T, S$ 共線，因此 $Fe$ 關於 $\mathcal{H}$ 的 Li4 點爲 $T$，故 $T$ 在 $\mathcal{H}$ 上的切線爲 $Fe$ 的斯坦那線，也就是 $IT$，故 $I \in \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(T)$。 $\square$

設 $\mathcal{H}$ 的中心爲 $U$，則我們有 $U$ 爲 $\overline{H^*H'}, \overline{ST}$ 中點，注意到 $Fe, T, S$ 共線，故取補點會知道 $S$ 的補點即爲 $IJ$ 和 $\triangle DEF$ 九點圓的交點，則顯然有此點爲 $\overline{FeS'}$ 的中點，其中 $S'$ 爲 $S$ 關於 $(DEF)$ 的對徑點，因此我們等價要證明 $S', T, H'$ 共線。

**Claim 4.** $S', T, H'$ 共線。

*Proof of Claim 4.* 注意到由平行弦定理我們有 $IU$ 過 $\overline{TH^*}$ 中點，故 $IU \parallel H^*S$，因此由 $H^*SH'T$ 爲平行四邊形，我們有 $IU \parallel H'T$，而另一方面，由 $I, U$ 分別是 $SS', ST$ 中點，我們有 $IU \parallel S'T$，因此原題得證。 $\square$