

# 張志煥截線

*Li4 + 8*

April 13, 2021

## 1 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

**Proposition 1.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P$  與  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$ 。令  $\triangle P_AP_BP_C$  為  $\triangle ABC$  的  $\mathcal{C}$ -西瓦三角形。對於  $\mathcal{C}$  上一點  $X$ ，令

$$X_{P,A} = XP_A \cap BC, \quad X_{P,B} = XP_B \cap CA, \quad X_{P,C} = XP_C \cap AB,$$

則  $P, X_{P,A}, X_{P,B}, X_{P,C}$  共線。

*Proof.* 考慮  $\mathcal{C}$  上的六折線們  $BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB$ ，由帕斯卡定理即可得  $P, X_{P,A}, X_{P,B}, X_{P,C}$  共線。 ■

我們稱上述所共的直線  $PX_{P,A}X_{P,B}X_{P,C}$  為  $X$  關於  $(\triangle ABC, \mathcal{C})$  的張志煥  $P$ -截線，記為  $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$ 。定義相當的簡單，我們顯然有

**Proposition 2.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P$  與  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$ 。我們有

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow TP$$

為保交比變換。

*Proof.* 注意到

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} = [X_{P,A} \mapsto PX_{P,A}] \circ [X \mapsto X_{P,A}]. \quad \blacksquare$$

**Proposition 3.** 給定  $\triangle ABC$ ，一點  $P$  與  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$ 。設  $\mathcal{D}$  為  $\triangle ABC \cup P$  的外接圓錐曲線， $T$  為  $\mathcal{C}$  與  $\mathcal{D}$  的第四個交點，則對於  $\mathcal{C}$  上一點  $X$ ， $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D} \in TX$ 。

*Proof.* 令  $D = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}$ ，由於  $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}$  為保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A, B; C, X) &= (A, B; C, X)_{\mathcal{C}} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(A, B; C, X) \\ &= (AP, BP; CP, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)) = (A, B; C, D)_{\mathcal{D}} = T(A, B; C, D), \end{aligned}$$

故  $T, X, D$  共線。 ■

**Proposition 4.** 給定  $\triangle ABC$  與其外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$ 。對於任意兩點  $P, Q$  與任意一點  $X \in \mathcal{C}$ ，

- (i)  $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \in (ABCPQ)$ ,
- (ii) 若  $T$  為  $\mathcal{C}$  與  $(ABCPQ)$  的第四個交點，則  $T, X, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$  共線。

*Proof.* (i) 令  $P_A = AP \cap \mathcal{C}$ ,  $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$ ,  $Z = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$ ，我們有

$$\begin{aligned} P(A, Z; B, C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B, C) \stackrel{P_A}{=} (A, X; B, C)_{\mathcal{C}} \\ &\stackrel{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B, C) = Q(A, Z; B, C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得  $Z \in (ABCPQ)$ 。

(ii) 由 (i) 及 (3)，

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap (ABCPQ) \in TX. \quad \blacksquare$$

這邊給一些未來會用到的記號。給定  $\triangle ABC$  與其外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$  及一點  $X$ 。

(i) 對於任意兩點  $P, Q$ ，我們記

$$\mathcal{D}_{P,Q} = (ABCPQ).$$

(ii) 對於任意兩點  $P, Q$ ，我們記

$$\mathcal{L}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}_{P,Q} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{P,Q})X.$$

(iii) 對於任意外接圓錐曲線  $T$ ，我們記

$$\mathcal{L}_T^{\mathcal{C}}(X) = T \cap (\mathcal{C} \cap T)X.$$

因此， $\mathcal{L}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_{P,Q}}^{\mathcal{C}}(X)$ 。

**Proposition 5.** 給定三角形  $\triangle ABC$  與其外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$  及  $\mathcal{C}$  上一點  $X$ 。令  $\mathcal{D}$  為  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線，則

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \mathcal{D} \rightarrow T\mathfrak{L}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X)$$

為一保交比變換。

*Proof.* 因為  $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)P$ 。 ■

**Proposition 6.** 給定三角形  $\triangle ABC$  與其外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$  及  $\mathcal{C}$  上一點  $X$ 。令  $\ell$  為任意直線，則

$$\{\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \mid P \in \ell\}$$

的包絡線為  $\triangle ABC$  的內切圓錐曲線，記為  $\mathcal{B}_{\ell}^{\mathcal{C}}(X)$ ，且

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \ell \rightarrow T\mathcal{B}_{\ell}^{\mathcal{C}}(X)$$

為一保交比變換。

*Proof.* trivial ■

對於任意不過頂點的直線  $\mathcal{L}$ ，我們知道  $\triangle ABC$  上的等共軛變換與  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線有個一一對應，即  $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$ 。以下簡記  $\varphi(\mathcal{L})$  為  $\mathcal{L}^{\varphi}$ ，特別地，當  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\infty}$ ， $\varphi$  為等角共軛變換  $(\cdot)^*$ ， $\mathcal{L}_{\infty}^*$  為  $\triangle ABC$  的外接圓  $\Omega$ 。

**Proposition 7.** 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的一個等共軛變換， $\mathcal{D}$  為  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線。則對於任意  $X \in \mathcal{L}^{\varphi}$ ，

$$\mathcal{D}^{\varphi} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)^{\varphi}}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X).$$

*Proof.* 令  $D = \mathcal{D}^{\varphi} \cap BC$ ， $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)$ ，則

$$\begin{aligned} X(B, C; D, A(XD \cap \mathcal{L}^{\varphi}) \cap BC) &= T(B, C; X, A) = (B, C; \mathfrak{L}, A)_D \\ &= A(C, B; \mathfrak{L}^{\varphi}, D) = (B, C; D, A\mathfrak{L}^{\varphi} \cap BC), \end{aligned}$$

因此  $A\mathfrak{L}^{\varphi}$ ， $XD$ ， $\mathcal{L}^{\varphi}$  共點，故  $\mathcal{D}^{\varphi} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)^{\varphi}}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X)$ 。 ■

**Corollary 1.** 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的一個等共軛變換，且  $X \in \mathcal{L}^{\varphi}$ 。對於任意點  $P$ ，設  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{P, \varphi(P)}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X)$ ，則

$$P\varphi(P) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}_D^{\mathcal{C}}(X)^{\varphi}}^{\mathcal{L}^{\varphi}}(X).$$

*Proof.* 在 (7) 中取  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P, \varphi(P)}$ 。 ■

**Theorem 1** (張志煥截線基本定理). 令  $\varphi, \psi$  為  $\triangle ABC$  上的兩個等共軛變換。設  $X$  為  $\mathcal{L}^\varphi$  和  $\mathcal{L}^\psi$  的第四個交點,  $P$  為任意一點, 則

(i)  $X, A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^\varphi, A\psi(P) \cap \mathcal{L}^\psi$  共線。

(ii)  $\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{\psi(P)}^{\mathcal{L}^\psi}(X)$ 。

*Proof.* (i) 設  $A\varphi(P), A\psi(P)$  分別交  $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$  於  $\varphi(P)_A, \psi(P)_A$ 。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) &= A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\varphi} \stackrel{\varphi}{=} A(\infty_{BC}, P; B, C) \\ &\stackrel{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\psi} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設  $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$  交  $BC$  於  $X_{P,A}$ , 我們有

$$X_{P,A}\varphi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{\psi(P)}^{\mathcal{L}^\psi}(X) = X_{P,A}\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{\psi(P)}^{\mathcal{L}^\psi}(X). \quad \blacksquare$$

**Example 1** (等共軛對合). 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的一等共軛變換, 則對於任意兩點  $P, Q$ , 設  $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R, PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$ , 則  $\varphi(R) = S$ 。

*Proof.* 定義一等共軛變換  $\psi$  將  $P \mapsto Q$ , 考慮  $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$  的交點  $X$ , 則由 (1) 的 (ii)。

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{L}^\psi}(X) = P\varphi(Q) = \mathfrak{S}_{\varphi(Q)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X),$$

$$\mathfrak{S}_Q^{\mathcal{L}^\psi}(X) = \varphi(P)Q = \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X).$$

注意到  $\mathfrak{L}_{P,Q}^{\mathcal{L}^\psi}(X) = R = \mathfrak{L}_{\varphi(P), \varphi(Q)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$ , 因此由 (1),

$$\varphi(R) \in PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S. \quad \blacksquare$$

**Example 2** (正交共軛小性質). 設  $P$  在三角形  $\triangle ABC$  的歐拉線上, 設  $P^*, P^\circ$  為  $P$  的等角共軛點、正交共軛點, 則  $H, P^*, P^\circ$  三點共線。

*Proof.* 令  $\mathcal{L}$  為三角形  $\triangle ABC$  的歐拉線, 則注意到  $H \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}^\circ$ , 因此  $H, AP^* \cap \mathcal{L}^*, AP^\circ \cap \mathcal{L}^\circ$  三點共線。 ■

**Proposition 8.** 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的等共軛變換， $\mathcal{D}$  為  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線， $T$  為  $\mathcal{D}$  與  $\mathcal{L}^\varphi$  的第四個交點。則對於任意  $P \in \mathcal{D}$ ， $TP \cap \mathcal{L}^\varphi$ ， $XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi$ ， $\mathcal{L}_\mathcal{D}^C(X)^\varphi$  共線。

*Proof.* 令  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathcal{D}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$ ， $Q = TP \cap \mathcal{L}^\varphi$ ， $R = XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi$ ，我們知道  $Q \mapsto R$  為保交比變換，因此我們只需證明  $Q \mapsto R$  為對合變換且對合中心為  $\mathcal{L}_\mathcal{D}^C(X)^\varphi$ 。取  $P = A$ ，我們有  $Q = A$ ， $R = X(\mathcal{D}^\varphi \cap BC) \cap \mathcal{L}^\varphi$ 。由 (7)，我們知道  $\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{S}_{\mathcal{L}^\varphi}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$ ，因此  $QR$  過  $\mathcal{L}^\varphi$ 。這在  $P = B, C$  時也是對的，因此  $Q \mapsto R$  為對合變換且對合中心為  $\mathcal{L}_\mathcal{D}^C(X)^\varphi$ 。 ■

現在假設  $\mathcal{C}$  為  $\triangle ABC$  的外接圓  $\Omega = \odot(ABC)$ ，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

**Example 3.** 令  $O$  為  $\triangle ABC$  的外心，則對於任意一點  $X \in \Omega$ ， $\mathfrak{S}_O^\Omega(X)$  為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線  $\mathcal{O}(X)$ 。

**Example 4.** 令  $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心，則對於任意一點  $X \in \Omega$ ， $\mathfrak{S}_H^\Omega(X)$  為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的施坦納線  $\mathcal{S}_X$ 。

**Example 5.** 令  $K$  為  $\triangle ABC$  的共軛重心，則對於任意一點  $X \in \Omega$ ， $\mathfrak{S}_K^\Omega(X)$  為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線  $\mathbf{t}_X$ 。

我們簡記  $\mathfrak{S}_P^\Omega(X)$  為  $\mathfrak{S}_P(X)$ ， $\mathcal{L}_\mathcal{D}^\Omega(X)$  為  $\mathcal{L}_\mathcal{D}(X)$ ，為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的  $P$ -張志煥截線。事實上，我們對於  $\mathfrak{S}_P(X)$  的角度有一些刻畫。

**Proposition 9.** 設  $X$  為  $\triangle ABC$  的外接圓  $\Omega$  上任意點，則對於任意兩點  $P, Q$ ，

$$\angle(\mathfrak{S}_P(X), \mathfrak{S}_Q(X)) + \angle P^* X Q^* = 0^\circ,$$

其中  $P^*, Q^*$  分別為  $P, Q$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。特別地，取  $Q \in BC$  我們有

$$\angle(\mathfrak{S}_P(X), BC) = \angle AXP^*.$$

*Proof.* 令  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,Q}$ ， $\ell = \mathcal{D}^\varphi$ ，由 (5)，

$$[\mathfrak{S}_P(X) \mapsto XP^*] = [P^* \mapsto XP^*] \circ [P \mapsto P^*] \circ [\mathfrak{S}_P(X) \mapsto P]$$

為保交比變換。因此由對稱性我們只需證明

$$\angle B\mathcal{L}C + \angle \ell_b X \ell_c = 0^\circ,$$

其中  $\ell = \ell_D(X)$ ,  $\ell_b = \ell \cap CA$ ,  $\ell_c = \ell \cap AB$ 。由 (8)，我們可以得到  $\ell_B^* = X\ell_b \cap B\ell^*$ ,  $\ell_C^* = X\ell_c \cap C\ell \in \Omega$ ，因此

$$\angle B\ell C = \angle AB\ell^* + \angle \ell^*CA = \angle A\ell_C^*\ell_B^* + \angle \ell_C^*\ell_B^*A = \angle \ell_C^*A\ell_B^* = \angle \ell_cX\ell_b. \quad \blacksquare$$

**Remark.** 關於特例的敘述有以下的純幾證明，而事實上也可由此推得廣義的情形：

令  $P_A = AP \cap \Omega$ ,  $P_A^* = AP^* \cap \Omega$ ,  $D = AP \cap BC$ ,  $X_{P,A} = XP_A \cap BC$ 。由  $P_AP_A^* \parallel BC$ ，我們易得  $\triangle X_{P,A}P_AD \sim \triangle AP_A^*X$ 。在  $P_AX_{P,A}$  上取點  $E$  使得  $DE \parallel PX_{P,A} = \mathfrak{S}_P(X)$ ，由常見的等角共軛比例 Lemma，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_{P,A}E}{EP_A}.$$

因此我們有  $\triangle X_{P,A}ED \sim \triangle AP^*X$ ，最後由算角度可得

$$\angle AXP^* = \angle EDX_{P,A} = \angle(PX_{P,A}, BC) = \angle(\mathfrak{S}_P(X), BC). \quad \blacksquare$$

以下假設  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$  無窮遠線。我們來看看幾何王子是怎麼計算共圓的吧！

**Theorem 2 (a).** 令  $\Omega = \mathcal{L}^*$  為  $\triangle ABC$  的外接圓。對於任意等共軛變換  $\varphi$ ，設  $X$  為  $\mathcal{L}^\varphi$  與  $\Omega$  的第四個交點。對於任意點  $P$ ，設  $T$  為  $\mathcal{L}^\varphi$  與  $(ABCP\varphi(P))$  的第四個交點， $P^*$ ,  $\varphi(P)^*$  分別為  $P$ ,  $\varphi(P)$  關於  $\triangle ABC$  的等角共軛點。則  $TX$ ,  $P\varphi(P)^*$ ,  $P^*\varphi(P)$ ,  $\odot(P\varphi(P)X)$ ,  $(ABCP\varphi(P))$  共於一點  $\ell_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$ 。

*Proof.* 由 (4) 及 (1) 的 (ii)，我們有

$$TX \cap (ABCP\varphi(P)) = \ell_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = P\varphi(P)^* \cap P^*\varphi(P).$$

因此由 (1) 的 (ii) 及 (9)，

$$\begin{aligned} \angle P\ell_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}\varphi(P) &= \angle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) = \angle(\mathfrak{S}_{\varphi(P)^*}(X), \mathfrak{S}_{P^*}(X)) \\ &= \angle AX\varphi(P) + \angle PXA = \angle PX\varphi(P), \end{aligned}$$

即  $P$ ,  $\varphi(P)$ ,  $X$ ,  $\ell_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$  共圓。 \blacksquare

上面這個定理我們常用的是以下的敘述。

**Theorem 2 (b).** 令  $\Omega = \mathcal{L}^*$  為  $\triangle ABC$  的外接圓。對於任意等共軛變換  $\varphi$ ，設  $X$  為  $\mathcal{L}^\varphi$  與  $\Omega$  的第四個交點。對於任意點  $P$ ，設  $\ell = P^*\varphi(P) \cap P\varphi(P)^*$ ，其中  $(\cdot)^*$  為等角共軛變換。則  $P$ ,  $\varphi(P)$ ,  $X$ ,  $\ell$  四點共圓。

因此我們有以下推論

**Corollary 2.** 令  $\Omega = \mathcal{L}^*$  為  $\triangle ABC$  的外接圓。對於任意等角共軛點  $P, P^*$ ，以及外接圓上一點  $X$ ，設  $(ABCP P^*)$  和  $\odot(ABC)$  的第四個交點為  $T$ ， $XT$  和  $(ABCP P^*)$  交於一點  $\mathfrak{L}$ 。則  $P, P^*, X, \mathfrak{L}$  四點共圓。

事實上，(5) 有如下的推廣：

**Proposition 10.** 若  $X$  位於  $\triangle ABC$  的外接圓錐曲線  $\mathcal{C}$  上， $P$  為  $\triangle ABC$  與  $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC)$  的透視中心，則  $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$  為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線  $t_X$ 。

*Proof.* 令  $\triangle P_A P_B P_C$  為  $P$  關於  $\triangle ABC$  的  $\mathcal{C}$ -西瓦三角形，則  $ABP_A C$  為  $\mathcal{C}$  上的調和四邊形，因此

$$(B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap BC) \stackrel{X}{=} (B, C; A, P_A)_C = -1.$$

同理有

$$(C, A; BX \cap CA, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap CA) = (A, B; CX \cap AB, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap AB) = -1,$$

故  $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) = t_X$ 。 ■

**Example 6.** 令  $St$  為三角形  $\triangle ABC$  的施坦納外接橢圓，則重心  $G$  為透視中心，因此  $\mathfrak{S}_G^{St}(X)$  為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線  $t_X$ 。

**Example 7.** 設  $\mathcal{L}^\circ$  為  $\mathcal{L}_\infty$  的正交共軛軌跡，則垂心  $H$  為透視中心，因此  $\mathfrak{S}_H^{\mathcal{L}^\circ}(X)$  為  $X$  關於  $\triangle ABC$  的三線性極線  $t_X$ 。

## 2 配極

接著我們可以來討論和配極有關的一些性質，以下假設  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$

**Theorem 3.** 令  $\Omega = \mathcal{L}^*$  為  $\triangle ABC$  的外接圓，則對於任意等角共軛點  $P, P^*$ ，和一點  $X \in \Omega$ ，設  $\Gamma$  為以  $X$  為圓心的圓，設  $A^p = p_\Gamma(BC), B^p = p_\Gamma(CA), C^p = p_\Gamma(AB)$ ，則

$$(i) X \in \odot(A^p B^p C^p)$$

$$(ii) \triangle ABC \cup P \cup P^* \sim \triangle A^p B^p C^p \cup p_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X)) \cup p_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$$

*Proof.* (i) 由算角度我們顯然有

$$\angle B^p X C^p = \angle(AC, AB) = \angle CAB = \angle C X B = \angle(A^p B^p, A^p C^p) = \angle B^p A^p C^p$$

(ii) 首先注意到

$$\angle BAC + \angle B^p A^p C^p = 0$$

因此我們顯然有  $\triangle ABC \sim \triangle A^p B^p C^p$

設  $p_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X)), p_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X))$  為  $Q, Q^*$ ，則

$$\angle Q A^p B^p = \angle(\mathfrak{S}_P(X) \cap BC) X C = \angle P A C = -\angle P^* A B$$

故顯然有

$$\triangle ABC \cup P \cup P^* \sim \triangle A^p B^p C^p \cup Q^* \cup Q. \quad \blacksquare$$

事實上配極某種程度上也可以保共斯坦納外接橢圓。

**Proposition 11.** 設  $St$  為  $\triangle ABC$  的斯坦納外接橢圓，則對於  $St$  上一點  $X$ ，設  $(X)$  為以  $X$  為中心的圓錐曲線，設  $A^p = p_{(X)}(BC), B^p = p_{(X)}(CA), C^p = p_{(X)}(AB)$ ，則  $X$  在  $\triangle A^p B^p C^p$  的斯坦納外接橢圓上。

*Proof.* 設  $St^p$  為  $\triangle A^p B^p C^p$  的斯坦納外接橢圓，則

$$\begin{aligned} A(A, B; C, X)_{St} &= (\infty_{BC}, B; C, AX \cap BC) \\ &\stackrel{p_{(X)}}{=} (A^p X, A^p C^p; A^p B^p, A^p \infty_{B^p C^p}) \\ &= A^p(A^p, B^p; C^p, X)_{St^p} \end{aligned}$$



同理可得

$$B(A, B; C, X)_{St} = B^p(A^p, B^p; C^p, X)_{St^p}, C(A, B; C, X)_{St} = C^p(A^p, B^p; C^p, X)_{St^p}$$

因此  $X \in St^p$ 。 ■

**Proposition 12.** 令  $\varphi$  為  $\triangle ABC$  上的等截共軛變換， $St = \mathcal{L}^\varphi$  為  $\triangle ABC$  的斯坦納外接橢圓，則對於任意點  $P$ ，和一點  $X \in St$ ，設  $(X)$  為以  $X$  為中心的任意錐線，設  $A^p = p_{(X)}(BC)$ ,  $B^p = p_{(X)}(CA)$ ,  $C^p = p_{(X)}(AB)$ ，則

$$p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X)), p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X))$$

為  $\triangle A^p B^p C^p$  的一對等截共軛點。

*Proof.* 令  $Q = p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X))$ ,  $R = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X))$ ，則我們等價要證明

$$A^p(B^p, C^p; A^p, Q)_{St^p} = A^p(C^p, B^p; A^p, R)_{St^p}$$

然而這等價於要證明

$$(C, B; AX \cap BC, \mathfrak{S}_P^{St}(X) \cap BC) = (B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X) \cap BC)$$

但這是顯然的。 ■

**Theorem 4.** 延續 (12) 的標號，設  $Q = p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X))$ ,  $R = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X))$ ，設  $\mathfrak{L}_{P, \varphi(P)}^{St}(X) = \mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{L}_{Q, R}^{St^p}(X) = \mathfrak{L}^p$ ，設  $\mathfrak{L}^p$  關於  $\triangle A^p B^p C^p$  的等截共軛點為  $\mathfrak{L}^{p'}$ ，則

$$\frac{P\varphi(\mathfrak{L})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{L})} = \frac{R\mathfrak{L}^{p'}}{Q\mathfrak{L}^{p'}}$$

*Proof.* 設  $\infty_{P\varphi(P)}$  關於  $\triangle ABC$  的等截共軛點為  $T_{\triangle ABC}$ ， $\infty_{QR}$  關於  $\triangle A^p B^p C^p$  的等截共軛點為  $T_{\triangle A^p B^p C^p}$ ，則

$$\begin{aligned} \frac{P\varphi(\mathfrak{L})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{L})} &= (P, \varphi(P); \varphi(\mathfrak{L}), \infty_{P\varphi(P)}) = A(\varphi(P), P; \mathfrak{L}, T_{\triangle ABC})_{(ABCP\varphi(P))} \\ \frac{R\mathfrak{L}^{p'}}{Q\mathfrak{L}^{p'}} &= (R, Q; \mathfrak{L}^{p'}, \infty_{QR}) = A^p(Q, R; \mathfrak{L}^p, T_{\triangle A^p B^p C^p})_{(A^p B^p C^p QR)} \end{aligned}$$

注意到我們有

$$\begin{aligned} Q &= p_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{St}(X)), R = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X)) \\ \mathfrak{L}^p &= p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(\mathfrak{L})}^{St}(X)), T_{\triangle A^p B^p C^p} = p_{(X)}(\mathfrak{S}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{St}(X)) \end{aligned}$$

則我們有

$$\begin{aligned}
 \frac{R\mathfrak{L}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{L}^{\mathfrak{p}'}} &= A^{\mathfrak{p}}(Q, R; \mathfrak{L}^{\mathfrak{p}}, T_{\triangle A^{\mathfrak{p}} B^{\mathfrak{p}} C^{\mathfrak{p}}}) = (\mathfrak{S}_P^{St}(X), \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{St}(X); \mathfrak{S}_{\varphi(\mathfrak{L})}^{St}(X), \mathfrak{S}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{St}(X)) \\
 &= A(P, \varphi(P); \varphi(\mathfrak{L}), \infty_{P\varphi(P)}) \\
 &= A(\varphi(P), P; \mathfrak{L}, \infty_{AT_{\triangle ABC}}) \\
 &= A(\varphi(P), P; \mathfrak{L}, T_{\triangle ABC}) = \frac{P\varphi(\mathfrak{L})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{L})}. \quad \blacksquare
 \end{aligned} \tag{5}$$

**Problem 1.**  $\triangle ABC$  三角形， $\triangle D'E'F'$  為三個旁切圓切點， $A'$  為  $A$  關於外接圓的對鏡點， $AI$  交  $\odot(ABC)$  於  $M \neq A$ ， $MA'$  交  $BC$  於  $X$ 。

證明： $XI \parallel E'F'$ 。

### 3 正交截線

我們都知道外接圓上一點  $X$  的正交截線會是  $O$ -張志煥線，但這樣似乎有點狹隘，因此我們給了他一個也許會有用的推廣，我們先用另一個觀點來看平常的正交截線。

**Proposition 13.** 設  $X$  為任意點，設  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{H,X}$ ，假設垂直  $X$  關於  $\mathcal{D}$  的切線方向的無窮遠點為  $\infty_{\mathcal{D}_X}^\perp$ ，則  $X$  關於  $\triangle ABC$  的正交截線  $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_{\infty_{\mathcal{D}_X}^\perp}^{\mathcal{D}}(X)$ ，特別的我們有  $\mathcal{O}(X)$  垂直  $X$  在  $\mathcal{D}$  上的切線

*Proof.* This is Trivial. ■

**Proposition 14.** 設  $X$  為任意點， $\mathcal{D}$  為過  $A, B, C, X$  的任意外接錐線，則存在一點  $P$  使得， $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X)$ ，並且我們有  $X$  在  $\mathcal{D}$  上的切線垂直  $PX$ 。

*Proof.* 考慮一個變換  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ，使得  $X\mathcal{F}(Y) \perp XY$ ，則這顯然是一個射影對合變換，故存在一對合中心  $P$  滿足對所有  $Y$  都有  $P, Y, f(Y)$  共線，特別的取  $Y = A, B, C$  可以注意到  $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{O}(X)$ ，且因為  $P$  為對合中心，故  $PX \perp XX$ ，即  $X$  在  $\mathcal{D}$  上的切線垂直  $PX$ 。 ■

**Proposition 15.** 設  $X$  為任意點，則對於任何一點  $P \in \mathcal{O}(X)$ ，存在一個過  $A, B, C, X$  的外接圓錐曲線  $\mathcal{D}$  使得  $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X)$ 。

*Proof.* 設  $AP$  和過  $X$  垂直  $AX$  的直線交於點  $P_A$ ，考慮錐線  $\mathcal{D} = (ABCXP_A)$ ，則由 (14)，存在一點  $P'$  使得  $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_{P'}^{\mathcal{D}}(X)$ ，但這表示  $P' \in \mathcal{O}(X) \cap AP_A$ ，即  $P = P'$ 。 ■

**Proposition 16.** 對於  $\triangle ABC$  外接圓  $\Omega$  上的點  $X$ ，設等共軛  $\varphi$  滿足  $\varphi(X) \in \mathcal{L}_\infty$ ，則  $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}_{\varphi(H)}^{\mathcal{L}_\varphi}(X)$ ，特別的我們有  $\varphi(H) \in \mathcal{O}(X)$ 。

*Proof.* 考慮張志煥截線基本定理則我們有

$$\mathfrak{S}_{\varphi(H)}^{\mathcal{L}_\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{H^*}^{\mathcal{L}^*}(X) = \mathfrak{S}_O(X) = \mathcal{O}(X) \quad \blacksquare$$

**Proposition 17.** 給定等軸雙曲線上五點  $PQABC$ ，做過  $P$  垂直  $AQ$  的線交  $BC$  於  $D$  同理定義  $E, F$  則  $D, E, F$  共線且垂直  $PQ$ 。

## 4 心世界

**Problem 2** (幾何毒書會  $X_n$  馬拉松 P15). 設  $Sc = X_{21}$  為三角形  $\triangle ABC$  的歐拉線和費爾巴哈雙曲線除了  $H$  以外的交點，則  $Sc$  的等角共軛點為  $X_{65}$  即切點三角形的垂心。

*Proof.* 首先注意到  $X_{65} = X_{55}X_{56} \cap NaGe$  (屬於後者可以用  $I, H$  的極點是  $X_{65}$  看出來)，接著考慮  $X_{110}$ ，則我們顯然有

$$\ell_{\mathcal{H}_{Fe}}(X_{110}) = Sc, \text{ 因此, } \mathfrak{S}_{Ge}(X_{110}) = GeSc, \mathfrak{S}_{Na}(X_{110}) = NaSc$$

接著考慮等共軛變換  $\psi = (\cdot)^* \circ \varphi \circ (\cdot)^*$ ，其中  $(\cdot)^*, \varphi$  分別為等角和等截共軛變換。則不難發現  $\psi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$ ，故我們可以使用張志煥截線基本定理，

$$Sc \in \mathfrak{S}_{Ge}(X_{110}) = \mathfrak{S}_{X_{56}}^{\mathcal{L}^\psi}(X_{110}) = GeX_{56}, Sc \in \mathfrak{S}_{Na}(X_{110}) = \mathfrak{S}_{X_{55}}^{\mathcal{L}^\psi}(X_{110}) = NaX_{55}$$

因此由迪沙格對合定理  $Sc^* = X_{65}$ 。 ■

**Problem 3** (幾何毒書會  $X_n$  馬拉松 P2).  $X_3, X_4, X_{69}, X_{99}$  四點共圓

*Proof.* 注意到  $X_{99}$  的三線性極線為  $X_2X_6$ ，且我們知道  $X_{69}$  為  $X_6$  的反補點且在  $(ABCOH)$  上，因此  $X_{69} = \ell_{X_3, X_4}^{\mathcal{L}^*}(X_{99})$ ，故由 (2)， $X_3, X_4, X_{69}, X_{99}$  四點共圓。 ■

**Problem 4** (幾何毒書會  $X_n$  馬拉松 P5).  $X_{69}X_{99}$  交歐拉線在  $X_2$  對  $X_3$  對稱點。

*Proof.* 注意到我們有  $X_{69} = \ell_{\mathcal{H}_J}^{\mathcal{L}^*}(X_{99})$ ，因此我們算角

$$\begin{aligned} \angle GX_{99}X_{69} &= \angle AX_{99}X_{74} + \angle GX_{99}A \\ &= \angle(OH, BC) + \angle(BC, \mathfrak{S}_K^\Omega(X_{99})) \\ &= \angle(OG, BC) + \angle(BC, GX_{69}) = \angle(OG, GX_{69}) \end{aligned}$$

即  $\odot(GX_{69}X_{99})$  和歐拉線相切於  $G$ 。設  $X_{69}X_{99}$  交  $OH$  於  $T$ ，則由上一題我們知道  $X_3, X_4, X_{69}, X_{99}$  四點共圓，故  $T$  滿足

$$\overline{TG}^2 = \overline{TO} \times \overline{TH} \implies T \text{ 為 } X_2 \text{ 對 } X_3 \text{ 的對稱點} \quad \blacksquare$$

**Problem 5** (幾何毒書會  $X_n$  馬拉松 P12). 三角形  $\triangle ABC$ ， $I$  為內心， $O$  為外心， $Ge$  為格爾鋼點，設  $X_{104}$  為  $OI$  上無窮遠點的等角共軛點， $X_{999}$  為  $I, X_{57}$  中點，則  $Ge, X(104), X(999)$  三點共線。

*Proof.* 設  $X_{104}Ge$  交  $\odot(ABC)$  於  $X$ ，則我們有  $Ge = \mathcal{L}_{\mathcal{H}_{Fe}}^\Omega(X)$ ，因此由我們有

$$\begin{aligned}\angle GeXI &= \angle AXGe + \angle AXI \\ &= \angle(OI, BC) + \angle(BC, \mathfrak{S}_I(X)) = \angle(OI, IGe)\end{aligned}$$

即  $OI$  和  $\odot(XGeI)$  相切。

另一方面，我們有  $X_{56}, Ge, X_{21}$  共線，因此

$$\begin{aligned}\angle X_{65}X_{56}Ge &= \angle(OI, \mathfrak{S}_{21}(X)) \\ &= \angle(OI, BC) + \angle(BC, \mathfrak{S}_{X_{21}}(X)) \\ &= \angle AXGe + \angle X_{65}XA = \angle X_{65}XGe\end{aligned}$$

因此  $X_{56}, Ge, X_{21}, X$  四點共圓，且注意到我們有

$$-1 = (I, X_{57}; X_{65}, X_{56}) \implies \overline{X_{999}I}^2 = \overline{X_{999}X_{57}}^2 = \overline{X_{999}X_{56}} \times \overline{X_{999}X_{65}}$$

故  $X_{999}$  在  $\odot(X_{56}GeX_{21}X)$  和  $\odot(XGeI)$  的根軸上，即  $X_{999} \in XGe = GeX_{104}$  ■

**Problem 6** (幾何毒書會  $X_n$  馬拉松 P13).  $X_7, X_8, X_{21}, X_{99}$  四點共圓

*Proof.* 注意到我們有  $X_{99} \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}^\varphi$ ，其中  $\varphi$  為等截共軛變換，現在取  $P = X_7$ ，因此由 (2)，我們有

$$X_7, X_8, \mathcal{L}_{X_7, X_8}^{\mathcal{L}^\varphi}(X_{99}), X_{99}, \text{ 四點共圓}$$

且我們注意到  $X_{21} = X_7X_{56} \cap X_8X_{55} = \mathcal{L}_{X_7, X_8}^{\mathcal{L}^\varphi}(X_{99})$ ，故得證。 ■

**Problem 7.**  $X_{21}, X_{55}, X_{56}, X_{110}$  四點共圓。

*Proof.* 設  $\varphi$  為等截共軛變換，則考慮等共軛  $\psi : (\cdot)^* \circ \varphi \circ (\cdot)^*$ ，則我們有

$$\psi : X_{55} \mapsto X_{56}$$

設  $X$  為  $\mathcal{L}^*$  和  $\mathcal{L}^\psi$  的第四個交點，則我們有  $X_{55}X_8 \cap X_{56}X_7 = X_{21}$  因此由 (2)，

$$X_{55}, X_{56}, X_{21}, X \text{ 四點共圓}$$

接著我們證明  $X = X_{110}$ 。

這等價要證明  $\psi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$  但注意到

$$\psi : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{a^4}{x} : \frac{b^4}{y} : \frac{c^4}{z} \right]$$

且我們有  $X_{110} = \left[ \frac{a^2}{b^2 - c^2} : \frac{b^2}{c^2 - a^2} : \frac{c^2}{a^2 - b^2} \right]$ ，因此

$$\psi(X_{110}) = [a^2(b^2 - c^2) : b^2(c^2 - a^2) : c^2(a^2 - b^2)]$$

顯然滿足無窮遠線的方程式  $x + y + z = 0$ ，因此  $X = X_{110}$ ，故得證。 ■

特別地，我們有  $G, X_{15}, X_{16}, X_{110}$  四點共圓。

**Problem 8.** 設  $K_\theta$  為 Kiepert 雙曲線上角度為  $\theta$  的點，則對於任意的  $\theta$ ，我們都有  $G, K_\theta^*, K_{-\theta}^*, X_{110}$  四點共圓。

*Proof.* (純幾) 首先我們知道  $X_{110}$  的斯坦納線為  $HG$ ，因此由  $\mathfrak{S}_H(X_{110}) = HG$  我們知道  $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_k}^\Omega(X_{110}) = G$ ，並且注意到對於任意的  $\alpha$ ，我們都有  $K, K_\alpha, K_{-\alpha}$  共線和  $G, K_\alpha^*, K_{-\alpha}^*$  共線，即

$$\mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110}) = GK_{-\theta}^*, \mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}) = GK_\theta^*$$

因此由算角引理

$$\angle K_\theta^* GK_{-\theta}^* = \angle(GK_\theta^*, GK_{-\theta}^*) = \angle(\mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}), \mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110})) = \angle K_\theta^* X_{110} K_{-\theta}^*. \quad \blacksquare$$

*Proof.* (重心坐標) 我們只要證明  $X_{110}$  會被把  $K_\theta^* \mapsto K_{-\theta}^*$  的等共軛變換  $\varphi$  打到無窮遠即可，注意到對於所有的  $K_\theta$  我們有重心坐標

$$\begin{aligned} K_\theta &= \left[ \frac{a}{\sin(A + \theta)} : - : - \right] \implies K_\theta^* = [a \sin(A + \theta) : - : -] \\ \implies \varphi([x : y : z]) &= \left[ \frac{a^2 \sin(A + \theta) \sin(A - \theta)}{x} : - : - \right] = \left[ \frac{a^2(\sin^2 A - \sin^2 \theta)}{x} : - : - \right] \end{aligned}$$

代入  $X_{110}$  則我們有  $\sum_{\text{cyc}} (\sin^2 A - \sin^2 \theta)(b^2 - c^2) = 0$  故得證 ■

**Problem 9.**  $N, Ko, X_{110}$  三點共線。

*Proof.* 注意到  $\mathfrak{L}_{\mathcal{D}_{N,H}}(X_{110}) = N, \mathfrak{L}_{\mathcal{H}_J}(X_{110}) = O$ ，並且我們有  $N$  的正交截線垂直  $OKo$ ，因此我們有  $OKo$  平行  $N$  在  $\mathcal{D}_{N,H}$  上的切線，即  $OKo \parallel \mathfrak{S}_N(X_{110})$ ，故

$$\angle AX_{110}N = \angle(BC, \mathfrak{S}_{Ko}(X_{110})) = \angle(BC, OKo) = \angle(BC, \mathfrak{S}_N(X_{110})) = \angle AX_{110}Ko \quad \blacksquare$$

**Problem 10.** 設  $K$  為共軛重心， $G_H$  為垂足三角形的重心。

證明： $KG_H$  和  $\odot(KX_{69}X_{110})$  相切