張志煥截線

$\mathcal{L}i4 + \mathfrak{S}$

March 29, 2021

1 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

Proposition 1. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形。對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令 $X_A = XP_A \cap BC$, $X_B = XP_B \cap CA$, $X_C = XP_C \cap AB$，則 P, X_A, X_B, X_C 共線。

Proof. 考慮 $\mathcal{C}$ 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB，由帕斯卡定理即可得 P, X_A, X_B, X_C 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_AX_BX_C$ 爲 X 關於 $(\triangle ABC, \mathcal{C})$ 的張志煥 P-截線，記爲 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$。定義相當的簡單，我們顯然有

Proposition 2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。我們有

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to TP$$

爲保交比變換。

Proof. 注意到

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} = [X_A \mapsto PX_A] \circ [X \mapsto X_A].$$ ■

Proposition 3. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。設 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC \cup P$ 的外接圓錐曲線，T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 的第四個交點，則對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D} \in TX$。

Proof. 令 $D = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}$，由於 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}$ 爲保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A, B; C, X) &= (A, B; C, X)_{\mathcal{C}} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(A, B; C, X) \\ &= (AP, BP; CP, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)) = (A, B; C, D)_{\mathcal{D}} = T(A, B; C, D), \end{aligned}$$

故 T, X, D 共線。 ■

Proposition 4. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$，

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \in (ABCPQ).$$

Proof. 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$, $Z = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$，我們有

$$\begin{aligned} P(A, Z; B, C) = (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B, C) &\overset{P_A}{=} (A, X; B, C)_{\mathcal{C}} \\ &\overset{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B, C) = Q(A, Z; B, C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得 $Z \in (ABCPQ)$。 ■

我們記 $\mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$。

Proposition 5. 延續上述性質的標號，令 T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $(ABCPQ)$ 的第四個交點，則 T, X, $\mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X)$ 共線。

Proof. 令 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X)$。由上述性質的證明及結論，我們有

$$T(A, \mathfrak{Z}; B, C) = P(A, \mathfrak{Z}; B, C) = (A, X; B, C) = T(A, X; B, C),$$

即 T, X, $\mathfrak{Z}$ 共線。 ■

Proposition 6. 給定三角形 $\triangle ABC$，設 P 爲直線 ℓ 或 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上一動點，X 爲任意點，且 $\mathcal{C}'$ 爲 $\triangle ABC \cup X$ 的外接圓錐曲線，則

$$[P \mapsto \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}'}(X)]$$

爲一保交比變換。

對於任意不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們知道 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應 (見 (??))，即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$。以下簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 爲 $\mathcal{L}^{\varphi}$ (見 (??))，特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$, φ 爲等角共軛變換 $(\cdot)^*$，$\mathcal{L}_\infty^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω。

Proposition 7. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，且 $X \in \mathcal{L}^{\varphi}$。對於任意點 P，設 $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{P,\varphi(P)}(X)$，則

$$P\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(\mathfrak{z})}(X).$$

Proof. 設 $D = P\varphi(P) \cap BC$，則

$$\begin{aligned} X(B,C;D,P\mathfrak{z} \cap BC) &= P(B,C;\varphi(P),\mathfrak{z}) \\ &= A(B,C;\varphi(P),\mathfrak{z}) \\ &\overset{\varphi}{=} A(C,B;P,\varphi(\mathfrak{z})) \\ &= A(B,C;\varphi(\mathfrak{z}),P) \end{aligned}$$

因此 XD 和 $A\varphi(\mathfrak{z})$ 交於 $\mathcal{L}^{\varphi}$，即 $P\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(\mathfrak{z})}(X)$。 ■

Proposition 8. 令 φ, ψ 爲 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 爲 $\mathcal{L}^{\varphi}$ 和 $\mathcal{L}^{\psi}$ 的第四個交點，P 爲任意一點，則

(i) X, $A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^{\varphi}$, $A\psi(P) \cap \mathcal{L}^{\psi}$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X)$。

Proof. (i) 設 $A\varphi(P)$, $A\psi(P)$ 分別交 $\mathcal{L}^{\varphi}$, $\mathcal{L}^{\psi}$ 於 $\varphi(P)_A$, $\psi(P)_A$。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A,\varphi(P)_A;B,C) = A(A,\varphi(P)_A;B,C)_{\mathcal{L}^{\varphi}} &\overset{\varphi}{=} A(\infty_{BC},P;B,C) \\ &\overset{\psi}{=} A(A,\psi(P)_A;B,C)_{\mathcal{L}^{\psi}} = X(A,\psi(P)_A;B,C). \end{aligned}$$

(ii) 設 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 X_A，我們有

$$X_A\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X) = X_A\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{\psi(P)}(X).$$ ■

Example 1 (等共軛對合)**.** 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換，則對於任意兩點 P, Q，設 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R$, $PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$，則 $\varphi(R) = S$。

Proof. 定義一等共軛變換將 $\psi : P \mapsto Q$，考慮 $\mathcal{L}^{\varphi}$, $\mathcal{L}^{\psi}$ 的交點 X，則由 (8) 的 (ii)。

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{P}(X) = P\varphi(Q) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(Q)}(X)$$
$$\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\psi}}_{Q}(X) = \varphi(P)Q = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X)$$

注意到 $\mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^\psi}_{P,Q}(X)=R=\mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P),\varphi(Q)}(X)$，因此由 (7)

$$\varphi(R)\in PQ\cap\varphi(P)\varphi(Q)=S \qquad \blacksquare$$

現在假設 $\mathcal{C}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega=\odot(ABC)$，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

Example 2. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X\in\Omega$，$\mathfrak{S}^{\Omega}_{O}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$。

Example 3. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X\in\Omega$，$\mathfrak{S}^{\Omega}_{H}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_X$。

Example 4. 令 K 爲 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X\in\Omega$，$\mathfrak{S}^{\Omega}_{K}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

我們簡記 $\mathfrak{S}^{\Omega}_{P}(X)$ 爲 $\mathfrak{S}_{P}(X)$，爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的 P-張志煥截線。事實上，我們對於 $\mathfrak{S}_{P}(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 9. 設 P, P^* 爲 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點，X 爲外接圓 Ω 上任意點，則

$$\measuredangle(\mathfrak{S}_P(X),BC)=\measuredangle AXP^*$$

Proof. 令 $P_A=AP\cap\Omega$, $P^*_A=AP^*\cap\Omega$, $D=AP\cap BC$, $X_A=XP_A\cap BC$。由 $P_AP^*_A\parallel BC$，我們易得 $\triangle X_AP_AD\overset{-}{\sim}\triangle AYX$。在 P_AX_A 上取點 E 使得 $DE\parallel PX_A=\mathfrak{S}_P(X)$，由??節的習題??，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P^*_A}=\frac{PD}{DP_A}=\frac{X_AE}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_AED\overset{-}{\sim}\triangle AP^*X$，最後由算角度可得

$$\measuredangle AXP^*=\measuredangle EDX_A=\measuredangle(PX_A,BC)=\measuredangle(\mathfrak{S}_P(X),BC). \qquad \blacksquare$$

以下假設 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_\infty$ 無窮遠線。我們來看看幾何王子是怎麼計算共圓的吧！

Theorem 1. 令 $\Omega=\mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 T 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $(ABCP\varphi(P))$ 的第四個交點，P^*, $\varphi(P)^*$ 分別爲 P, $\varphi(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。則 TX, $P\varphi(P)^*$, $P^*\varphi(P)$, $\odot(P\varphi(P)X)$, $(ABCP\varphi(P))$ 共於一點 $\mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^\varphi}_{P,\varphi(P)}$。

Proof. 由 (5) 及 (8) 的 (ii)，我們有

$$TX \cap (ABCP\varphi(P)) = \mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{P,\varphi(P)} = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{P}(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\varphi}}_{\varphi(P)}(X) = P\varphi(P)^* \cap P^*\varphi(P).$$

因此由 (8) 的 (ii) 及 (9)，

$$\begin{aligned}\measuredangle P\mathfrak{Z}_{\mathcal{L}^{\varphi},P,\varphi(P)}\varphi(P) &= \measuredangle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{\varphi(P)^*}(X), \mathfrak{S}_{P^*}(X)) \\ &= \measuredangle AX\varphi(P) + \measuredangle PXA = \measuredangle PX\varphi(P),\end{aligned}$$

即 $P, \varphi(P), X, Z$ 共圓。 ■

我們可以把這個定理稍作改良。

Theorem 2. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^{\varphi}$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 $Z = P^*\varphi(P) \cap P\varphi(P)^*$，其中 $(\cdot)^*$ 爲等角共軛變換。則 $P, \varphi(P), X, Z$ 四點共圓。

事實上，(4) 有如下的推廣：

Proposition 10. 若 X 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上，P 爲 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC)$ 的透視中心，則 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{P}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形，則 ABP_AC 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形，因此

$$(B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{P}(X) \cap BC) \overset{X}{=} (B, C; A, P_A)_{\mathcal{C}} = -1.$$

同理有

$$(C, A; BX \cap CA, \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{P}(X) \cap CA) = (A, B; CX \cap AB, \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{P}(X) \cap AB) = -1,$$

故 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{P}(X) = \mathfrak{t}_X$。 ■

Example 5. 令 $\mathcal{S}t$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的施坦納外接橢圓，則重心 G 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{G}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Example 6. 設 $\mathcal{L}^{\circ}$ 爲 $\mathcal{L}_{\infty}$ 的正交共軛軌跡，則垂心 H 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^{\circ}}_{H}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

接著我們可以來討論和配極有關的一些性質。

Proposition 11. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓，則對於任意等角共軛點 P, P^*，和一點 $X \in \Omega$，設 Γ 爲以 X 爲圓心的圓，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(AB)$，則

(i) $X \in \odot(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}})$

(ii) $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X)), \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X))$ 爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的一對等角共軛點。

(iii)

$$\triangle ABC \cup \{P, P^*\} \overset{-}{\sim} \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} \cup \{\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X)), \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))\}$$

Proposition 12. 設 $\mathcal{St}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於 $\mathcal{St}$ 上一點 X，設 (X) 爲以 X 爲中心的圓錐曲線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則 X 在 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓上。

Proof. 設 $\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}$ 爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓，則

$$\begin{aligned} A(A, B; C, X)_{\mathcal{St}} &= (\infty_{BC}, B; C, AX \cap BC) \\ &\overset{\mathfrak{p}_{(X)}}{=} (A^{\mathfrak{p}}X, A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}; A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}, A^{\mathfrak{p}}\infty_{B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}) \\ &= A^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}, B^{\mathfrak{p}}; C^{\mathfrak{p}}, X)_{\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

同理可得

$$B(A, B; C, X)_{\mathcal{St}} = B^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}, B^{\mathfrak{p}}; C^{\mathfrak{p}}, X)_{\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}},\ C(A, B; C, X)_{\mathcal{St}} = C^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}, B^{\mathfrak{p}}; C^{\mathfrak{p}}, X)_{\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}}$$

因此 $X \in \mathcal{St}^{\mathfrak{p}}$ ■

Proposition 13. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等截共軛變換，$\mathcal{St} = \mathcal{L}^{\varphi}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於任意點 P，和一點 $X \in \mathcal{St}$，設 (X) 爲以 X 爲中心的任意錐線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則

$$\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{St}}(X)), \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{St}}(X))$$

爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的一對等截共軛點。

Proof. 令 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{St}}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{St}}(X))$，則我們等價要證明

$$A^{\mathfrak{p}}(B^{\mathfrak{p}}, C^{\mathfrak{p}}; A^{\mathfrak{p}}, Q)_{\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}} = A^{\mathfrak{p}}(C^{\mathfrak{p}}, B^{\mathfrak{p}}; A^{\mathfrak{p}}, R)_{\mathcal{St}^{\mathfrak{p}}}$$

然而這等價於要證明

$$(C,B;AX\cap BC,\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{P}(X)\cap BC)=(B,C;AX\cap BC,\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(P)}(X)\cap BC)$$

但這是顯然的。 ∎

Theorem 3. 延續 (13) 的標號，設 $Q=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{P}(X))$, $R=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(P)}(X))$，設 $\mathfrak{Z}^{\mathcal{S}t}_{P,\varphi(P)}(X)=\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}}_{Q,R}(X)=\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}}$，設 $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}}$ 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點為 $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'}$，則

$$\frac{P\varphi(\mathfrak{Z})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{Z})}=\frac{R\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'}}$$

Proof. 設 $\infty_{P\varphi(P)}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點為 $T_{\triangle ABC}$，∞_{QR} 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點為 $T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}$，則

$$\frac{P\varphi(\mathfrak{Z})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{Z})}=(P,\varphi(P);\varphi(\mathfrak{Z}),\infty_{P\varphi(P)})=A(\varphi(P),P;\mathfrak{Z},T_{\triangle ABC})_{(ABCP\varphi_P)}$$
$$\frac{R\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'}}=(R,Q;\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'},\infty_{RQ})=A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}})_{(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}QR)}$$

注意到我們有

$$Q=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{P}(X)),\ R=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(P)}(X))$$
$$\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(\mathfrak{Z})}(X)),\ T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}=\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\infty_{P\varphi(P)}}(X))$$

則我們有

$$\begin{aligned}\frac{R\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}'}}=A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\mathfrak{Z}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}})&=(\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{P}(X),\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(P)}(X);\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\varphi(\mathfrak{Z})}(X),\mathfrak{S}^{\mathcal{S}t}_{\infty_{P\varphi(P)}}(X))\\&=A(P,\varphi(P);\varphi(\mathfrak{Z}),\infty_{P\varphi(P)}) \qquad (6)\\&=A(\varphi(P),P;\mathfrak{Z},\infty_{AT_{\triangle ABC}})\\&=A(\varphi(P),P;\mathfrak{Z},T_{\triangle ABC})=\frac{P\varphi(\mathfrak{Z})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{Z})}.\end{aligned}$$

∎