張志煥截線

$\mathcal{L}i4 + \mathfrak{S}$

April 1, 2021

1 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

Proposition 1. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形。對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令

$$X_{P,A} = XP_A \cap BC,\ X_{P,B} = XP_B \cap CA,\ X_{P,C} = XP_C \cap AB,$$

則 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。

Proof. 考慮 $\mathcal{C}$ 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB，由帕斯卡定理即可得 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_{P,A}X_{P,B}X_{P,C}$ 爲 X 關於 $(\triangle ABC, \mathcal{C})$ 的張志煥 P-截線，記爲 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$。定義相當的簡單，我們顯然有

Proposition 2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。我們有

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to TP$$

爲保交比變換。

Proof. 注意到

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}} = [X_{P,A} \mapsto PX_{P,A}] \circ [X \mapsto X_{P,A}].$$ ■

Proposition 3. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。設 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC \cup P$ 的外接圓錐曲線，T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 的第四個交點，則對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D} \in TX$。

Proof. 令 $D = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}$，由於 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}$ 爲保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A,B;C,X) &= (A,B;C,X)_{\mathcal{C}} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(A,B;C,X) \\ &= (AP,BP;CP,\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)) = (A,B;C,D)_{\mathcal{D}} = T(A,B;C,D), \end{aligned}$$

故 T, X, D 共線。 ■

Proposition 4. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$，

(i) $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \in (ABCPQ)$,

(ii) 若 T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $(ABCPQ)$ 的第四個交點，則 T, X, $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$ 共線。

Proof. (i) 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$, $Z = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X)$，我們有

$$\begin{aligned} P(A,Z;B,C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B, C) \overset{P_A}{=} (A,X;B,C)_{\mathcal{C}} \\ &\overset{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B, C) = Q(A,Z;B,C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得 $Z \in (ABCPQ)$。

(ii) 由 (i) 及 (3)，

$$\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap (ABCPQ) \in TX.$$ ■

這邊給一些未來會用到的記號。給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及一點 X。

(i) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathcal{D}_{P,Q} = (ABCPQ).$$

(ii) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathfrak{L}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathfrak{S}_Q^{\mathcal{C}}(X) \cap \mathcal{D}_{P,Q} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{P,Q})X.$$

(iii) 對於任意外接圓錐曲線 T，我們記

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D})X.$$

因此，$\mathfrak{L}_{P,Q}^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{L}_{\mathcal{D}_{P,Q}}^{\mathcal{C}}(X)$。

Proposition 5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \mathcal{D} \to T\mathfrak{Li}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. 因爲 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{Li}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X)P$。 ■

Proposition 6. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 ℓ 爲任意直線，則

$$\{\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \mid P \in \ell\}$$

的包絡線爲 $\triangle ABC$ 的內切圓錐曲線，記爲 $\mathcal{B}_\ell^{\mathcal{C}}(X)$，且

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\mathcal{C}}(X) : \ell \to T\mathcal{B}_\ell^{\mathcal{C}}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. trivial ■

對於任意不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們知道 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應，即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$。以下簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ ，特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$, φ 爲等角共軛變換 $(\cdot)^*$，$\mathcal{L}_\infty^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω。

Proposition 7. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，$\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。則對於任意 $X \in \mathcal{L}^\varphi$，

$$\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{S}_{\mathfrak{Li}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X)^\varphi}^{\mathcal{L}^\varphi}(X).$$

Proof. 令 $D = \mathcal{D}^\varphi \cap BC$, $\mathfrak{Li} = \mathfrak{Li}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(X)$，則

$$\begin{aligned} X(B,C;D,A(XD\cap\mathcal{L}^\varphi)\cap BC) &= T(B,C;X,A) = (B,C;\mathfrak{Li},A)_{\mathcal{D}} \\ &= A(C,B;\mathfrak{Li}^\varphi,D) = (B,C;D,A\mathfrak{Li}^\varphi\cap BC), \end{aligned}$$

因此 $A\mathfrak{Li}^\varphi$, XD, $\mathcal{L}^\varphi$ 共點，故 $\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{S}_{\mathfrak{Li}^\varphi}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$。 ■

Corollary 1. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，且 $X \in \mathcal{L}^\varphi$。對於任意點 P，設 $\mathfrak{Li} = \mathfrak{Li}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X)$，則

$$P\varphi(P) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{Li}^\varphi}^{\mathcal{L}^\varphi}(X).$$

Proof. 在 (7) 中取 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,\varphi(P)}$。 ■

Theorem 1 (張志煥截線基本定理)**.** 令 φ, ψ 爲 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 和 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，P 爲任意一點，則

(i) $X, A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^\varphi, A\psi(P) \cap \mathcal{L}^\psi$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{\psi(P)}(X)$。

Proof. (i) 設 $A\varphi(P), A\psi(P)$ 分別交 $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$ 於 $\varphi(P)_A, \psi(P)_A$。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) = A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\varphi} &\overset{\varphi}{=} A(\infty_{BC}, P; B, C) \\ &\overset{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\psi} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 X_A，我們有

$$X_A\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{\psi(P)}(X) = X_A\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{\psi(P)}(X).$$ ■

Example 1 (等共軛對合)**.** 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換，則對於任意兩點 P, Q，設 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R$, $PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$，則 $\varphi(R) = S$。

Proof. 定義一等共軛變換 ψ 將 $P \mapsto Q$，考慮 $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$ 的交點 X，則由 (1) 的 (ii)。

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_P(X) = P\varphi(Q) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(Q)}(X), \\ \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_Q(X) = \varphi(P)Q = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X). \end{aligned}$$

注意到 $\mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\psi}_{P,Q}(X) = R = \mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P),\varphi(Q)}(X)$，因此由 (1)，

$$\varphi(R) \in PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S.$$ ■

Proposition 8. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換，$\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，T 爲 $\mathcal{D}$ 與 $\mathcal{L}^\varphi$ 的第四個交點。則對於任意 $P \in \mathcal{D}$，$TP \cap \mathcal{L}^\varphi, XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi, \mathfrak{Li}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)^\varphi$ 共線。

Proof. 令 $\mathfrak{Li} = \mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathcal{D}}(X)$, $Q = TP \cap \mathcal{L}^\varphi$, $R = XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi$，我們知道 $Q \mapsto R$ 爲保交比變換，因此我們只需證明 $Q \mapsto R$ 爲對合變換且對合中心爲 $\mathfrak{Li}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)^\varphi$。取 $P = A$，我們有 $Q = A$, $R = X(\mathcal{D}^\varphi \cap BC) \cap \mathcal{L}^\varphi$。由 (7)，我們知道 $\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathfrak{Li}^\varphi}(X)$，因此 QR 過 $\mathfrak{Li}^\varphi$。這在 $P = B, C$ 時也是對的，因此 $Q \mapsto R$ 爲對合變換且對合中心爲 $\mathfrak{Li}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)^\varphi$。 ■

現在假設 $\mathcal{C}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega = \odot(ABC)$，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

Example 2. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}_O^{\Omega}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$。

Example 3. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}_H^{\Omega}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_X$。

Example 4. 令 K 爲 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{S}_K^{\Omega}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

我們簡記 $\mathfrak{S}_P^{\Omega}(X)$ 爲 $\mathfrak{S}_P(X)$，$\mathfrak{L}_{\mathcal{D}}^{\Omega}(X)$ 爲 $\mathfrak{L}_{\mathcal{D}}(X)$，爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的 P-張志煥截線。事實上，我們對於 $\mathfrak{S}_P(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 9. 設 X 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω 上任意點，則對於任意兩點 P, Q，

$$\measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), \mathfrak{S}_Q(X)) + \measuredangle P^*XQ^* = 0^\circ,$$

其中 P^*, Q^* 分別爲 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。特別地，取 $Q \in BC$ 我們有

$$\measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), BC) = \measuredangle AXP^*.$$

Proof. 令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,Q}$，$\ell = \mathcal{D}^{\varphi}$，由 (5)，

$$[\mathfrak{S}_P(X) \mapsto XP^*] = [P^* \mapsto XP^*] \circ [P \mapsto P^*] \circ [\mathfrak{S}_P(X) \mapsto P]$$

爲保交比變換。因此由對稱性我們只需證明

$$\measuredangle B\mathfrak{L}C + \measuredangle \ell_b X \ell_c = 0^\circ,$$

其中 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathcal{D}}(X)$, $\ell_b = \ell \cap CA$, $\ell_c = \ell \cap AB$。由 (8)，我們可以得到 $\mathfrak{L}_B^* = X\ell_b \cap B\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{L}_C^* = X\ell_c \cap C\mathfrak{L} \in \Omega$，因此

$$\measuredangle B\mathfrak{L}C = \measuredangle AB\mathfrak{L}^* + \measuredangle \mathfrak{L}^*CA = \measuredangle A\mathfrak{L}_C^*\mathfrak{L}_B^* + \measuredangle \mathfrak{L}_C^*\mathfrak{L}_B^*A = \measuredangle \mathfrak{L}_C^*A\mathfrak{L}_B^* = \measuredangle \ell_c X \ell_b. \quad \blacksquare$$

Remark. 關於特例的敘述有以下的純幾證明，而事實上也可由此推得廣義的情形：

令 $P_A = AP \cap \Omega$, $P_A^* = AP^* \cap \Omega$, $D = AP \cap BC$, $X_{P,A} = XP_A \cap BC$。由 $P_AP_A^* \parallel BC$，我們易得 $\triangle X_{P,A}P_AD \overset{-}{\sim} \triangle AP_A^*X$。在 $P_AX_{P,A}$ 上取點 E 使得

$DE \parallel PX_{P,A} = \mathfrak{S}_P(X)$，由常見的等角共軛比例 Lemma，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_{P,A}E}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_AED \overset{-}{\sim} \triangle AP^*X$，最後由算角度可得

$$\measuredangle AXP^* = \measuredangle EDX_{P,A} = \measuredangle(PX_{P,A}, BC) = \measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), BC). \qquad \blacksquare$$

以下假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 無窮遠線。我們來看看幾何王子是怎麼計算共圓的吧！

Theorem 2 (a). 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 為 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 T 為 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $(ABCP\varphi(P))$ 的第四個交點，$P^*, \varphi(P)^*$ 分別為 $P, \varphi(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。則 TX, $P\varphi(P)^*$, $P^*\varphi(P)$, $\odot(P\varphi(P)X)$, $(ABCP\varphi(P))$ 共於一點 $\mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\varphi}_{P,\varphi(P)}$。

Proof. 由 (4) 及 (1) 的 (ii)，我們有

$$TX \cap (ABCP\varphi(P)) = \mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\varphi}_{P,\varphi(P)} = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X) = P\varphi(P)^* \cap P^*\varphi(P).$$

因此由 (1) 的 (ii) 及 (9)，

$$\begin{aligned} \measuredangle P\mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\varphi}_{P,\varphi(P)}\varphi(P) &= \measuredangle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{\varphi(P)^*}(X), \mathfrak{S}_{P^*}(X)) \\ &= \measuredangle AX\varphi(P) + \measuredangle PXA = \measuredangle PX\varphi(P), \end{aligned}$$

即 P, $\varphi(P)$, X, $\mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\varphi}_{P,\varphi(P)}$ 共圓。 $\blacksquare$

上面這個定理我們常用的是以下的敘述。

Theorem 2 (b). 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 為 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 $\mathfrak{Li} = P^*\varphi(P) \cap P\varphi(P)^*$，其中 $(\cdot)^*$ 為等角共軛變換。則 P, $\varphi(P)$, X, $\mathfrak{Li}$ 四點共圓。

因此我們有以下推論

Corollary 2. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等角共軛點 P, P^*，以及外接圓上一點 X，設 $(ABCPP^*)$ 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點為 T，XT 和 $(ABCPP^*)$ 交於一點 $\mathfrak{Li}$。則 P, P^*, X, $\mathfrak{Li}$ 四點共圓。

事實上，(4) 有如下的推廣：

Proposition 10. 若 X 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上，P 爲 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC)$ 的透視中心，則 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 t_X。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形，則 ABP_AC 爲 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形，因此

$$(B,C;AX\cap BC,\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)\cap BC)\overset{X}{=}(B,C;A,P_A)_{\mathcal{C}}=-1.$$

同理有

$$(C,A;BX\cap CA,\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)\cap CA)=(A,B;CX\cap AB,\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)\cap AB)=-1,$$

故 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)=\mathsf{t}_X$。 ■

Example 5. 令 $\mathcal{S}t$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的施坦納外接橢圓，則重心 G 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}_G^{\mathcal{S}t}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 t_X。

Example 6. 設 $\mathcal{L}^\circ$ 爲 $\mathcal{L}_\infty$ 的正交共軛軌跡，則垂心 H 爲透視中心，因此 $\mathfrak{S}_H^{\mathcal{L}^\circ}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 t_X。

2 配極

接著我們可以來討論和配極有關的一些性質。

Theorem 3. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓，則對於任意等角共軛點 P, P^*，和一點 $X \in \Omega$，設 Γ 爲以 X 爲圓心的圓，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(AB)$，則

(i) $X \in \odot(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}})$

(ii) $\triangle ABC \cup P \cup P^* \overset{-}{\sim} \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} \cup \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X)) \cup \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$

Proof. (i) 由算角度我們顯然有

$$\measuredangle B^{\mathfrak{p}}XC^{\mathfrak{p}} = \measuredangle(AC, AB) = \measuredangle CAB = \measuredangle CXB = \measuredangle(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}, A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}) = \measuredangle B^{\mathfrak{p}}A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$$

(ii) 首先注意到

$$\measuredangle BAC + \measuredangle B^{\mathfrak{p}}A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} = 0$$

因此我們顯然有 $\triangle ABC \overset{-}{\sim} \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$
設 $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$, $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X))$ 爲 Q, Q^*，則

$$\measuredangle QA^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}} = \measuredangle(\mathfrak{S}_P(X) \cap BC)XC = \measuredangle PAC = -\measuredangle P^*AB$$

故顯然有

$$\triangle ABC \cup P \cup P^* \overset{-}{\sim} \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} \cup Q^* \cup Q. \qquad \blacksquare$$

事實上配極某種程度上也可以保共斯坦納外接橢圓。

Proposition 11. 設 $\mathcal{S}\boldsymbol{t}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於 $\mathcal{S}\boldsymbol{t}$ 上一點 X，設 (X) 爲以 X 爲中心的圓錐曲線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則 X 在 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓上。

Proof. 設 $\mathcal{S}\boldsymbol{t}^{\mathfrak{p}}$ 爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓，則

$$\begin{aligned} A(A, B; C, X)_{\mathcal{S}\boldsymbol{t}} &= (\infty_{BC}, B; C, AX \cap BC) \\ &\overset{\mathfrak{p}_{(X)}}{=} (A^{\mathfrak{p}}X, A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}; A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}, A^{\mathfrak{p}}\infty_{B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}) \\ &= A^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}, B^{\mathfrak{p}}; C^{\mathfrak{p}}, X)_{\mathcal{S}\boldsymbol{t}^{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

同理可得

$$B(A,B;C,X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}} = B^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};C^{\mathfrak{p}},X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}},\ C(A,B;C,X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}} = C^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};C^{\mathfrak{p}},X)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}}$$

因此 $X \in \boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}$。 ■

Proposition 12. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等截共軛變換，$\boldsymbol{\mathcal{S}t} = \mathcal{L}^{\varphi}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於任意點 P，和一點 $X \in \boldsymbol{\mathcal{S}t}$，設 (X) 爲以 X 爲中心的任意錐線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則

$$\mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)), \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$$

爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的一對等截共軛點。

Proof. 令 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$，則我們等價要證明

$$A^{\mathfrak{p}}(B^{\mathfrak{p}},C^{\mathfrak{p}};A^{\mathfrak{p}},Q)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}} = A^{\mathfrak{p}}(C^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};A^{\mathfrak{p}},R)_{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}}$$

然而這等價於要證明

$$(C,B;AX\cap BC, \circledast_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)\cap BC) = (B,C;AX\cap BC, \circledast_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)\cap BC)$$

但這是顯然的。 ■

Theorem 4. 延續 (12) 的標號，設 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$，設 $\boldsymbol{\mathcal{L}i}_{P,\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X) = \boldsymbol{\mathcal{L}i}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}i}_{Q,R}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}^{\mathfrak{p}}}(X) = \boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}}$，設 $\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}}$ 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'}$，則

$$\frac{P\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})}{\varphi(P)\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})} = \frac{R\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'}}{Q\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'}}$$

Proof. 設 $\infty_{P\varphi(P)}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle ABC}$，∞_{QR} 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}$，則

$$\frac{P\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})}{\varphi(P)\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})} = (P,\varphi(P);\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i}),\infty_{P\varphi(P)}) = A(\varphi(P),P;\boldsymbol{\mathcal{L}i},T_{\triangle ABC})_{(ABCP\varphi(P))}$$
$$\frac{R\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'}}{Q\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'}} = (R,Q;\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}'},\infty_{RQ}) = A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}})_{(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}QR)}$$

注意到我們有

$$Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_P^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)),\ R = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_{\varphi(P)}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$$
$$\boldsymbol{\mathcal{L}i}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_{\varphi(\boldsymbol{\mathcal{L}i})}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X)),\ T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}_{(X)}(\circledast_{\infty_{P\varphi(P)}}^{\boldsymbol{\mathcal{S}t}}(X))$$

則我們有

$$\begin{aligned}
\frac{R\boldsymbol{\mathscr{L}\!i}^{\mathfrak{p}'}}{Q\boldsymbol{\mathscr{L}\!i}^{\mathfrak{p}'}} = A^{\mathfrak{p}}(Q, R; \boldsymbol{\mathscr{L}\!i}^{\mathfrak{p}}, T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}) &= (\mathfrak{S}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}_{P}(X), \mathfrak{S}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}_{\varphi(P)}(X); \mathfrak{S}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}_{\varphi(\boldsymbol{\mathscr{L}\!i})}(X), \mathfrak{S}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}_{\infty_{P\varphi(P)}}(X)) \\
&= A(P, \varphi(P); \varphi(\boldsymbol{\mathscr{L}\!i}), \infty_{P\varphi(P)}) \qquad (5) \\
&= A(\varphi(P), P; \boldsymbol{\mathscr{L}\!i}, \infty_{AT_{\triangle ABC}}) \\
&= A(\varphi(P), P; \boldsymbol{\mathscr{L}\!i}, T_{\triangle ABC}) = \frac{P\varphi(\boldsymbol{\mathscr{L}\!i})}{\varphi(P)\varphi(\boldsymbol{\mathscr{L}\!i})}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Problem 1. $\triangle ABC$ 三角形，$\triangle D'E'F'$ 爲三個旁切圓切點，A' 爲 A 關於外接圓的對鏡點，AI 交 $\odot(ABC)$ 於 $M \neq A$，MA' 交 BC 於 X。
證明：$XI \parallel E'F'$。

3 心世界

Problem 2 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P2). X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到 X_{99} 的三線姓極線爲 X_2X_6，且我們知道 X_{69} 爲 X_6 的反補點且在 $(ABCOH)$ 上，因此 $X_{69} = \mathfrak{I}^{\mathcal{L}^*}_{X_3,X_4}(X_{99})$，故由 (2)，$X_3$, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓。 ■

Problem 3 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P5). $X_{69}X_{99}$ 交歐拉線在 X_2 對 X_3 對稱點。

Proof. 注意到我們有 $X_{69} = \mathfrak{I}^{\mathcal{L}^*}_{\mathcal{H}_\mathcal{J}}(X_{99})$，因此我們算角

$$\begin{aligned}\measuredangle GX_{99}X_{69} &= \measuredangle AX_{99}X_{74} + \measuredangle GX_{99}A\\ &= \measuredangle(OH,BC) + \measuredangle(BC,\mathfrak{S}^{\Omega}_{K}(X_{99}))\\ &= \measuredangle(OG,BC) + \measuredangle(BC,GX_{69}) = \measuredangle(OG,GX_{69})\end{aligned}$$

即 $\odot(GX_{69}X_{99})$ 和歐拉線相切於 G。設 $X_{69}X_{99}$ 交 OH 於 T，則由上一題我們知道 X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓，故 T 滿足

$$\overline{TG}^2 = \overline{TO} \times \overline{TH} \implies T\text{爲 } X_2 \text{ 對 } X_3 \text{ 的對稱點}$$ ■

Problem 4 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P12). 三角形 $\triangle ABC$，I 爲內心，O 爲外心，Ge 爲格爾鋼點，設 X_{104} 爲 OI 上無窮遠點的等角共軛點，X_{999} 爲 I, X_{57} 中點，則 Ge, $X(104)$, $X(999)$ 三點共線。

Proof. 設 $X_{104}Ge$ 交 $\odot(ABC)$ 於 X，則我們有 $Ge = \mathfrak{I}^{\Omega}_{\mathcal{H}_{Fe}}(X)$，因此由我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle GeXI &= \measuredangle AXGe + \measuredangle AXI\\ &= \measuredangle(OI,BC) + \measuredangle(BC,\mathfrak{S}_{I}(X)) = \measuredangle(OI,IGe)\end{aligned}$$

即 OI 和 $\odot(XGeI)$ 相切。

另一方面，我們有 X_{56}, Ge, X_{21} 共線，因此

$$\begin{aligned}\measuredangle X_{65}X_{56}Ge &= \measuredangle(OI,\mathfrak{S}_{21}(X))\\ &= \measuredangle(OI,BC) + \measuredangle(BC,\mathfrak{S}_{X_{21}}(X))\\ &= \measuredangle AXGe + \measuredangle X_{65}XA = \measuredangle X_{65}XGe\end{aligned}$$

因此 X_{56}, Ge, X_{21}, X 四點共圓，且注意到我們有

$$-1=(I,X_{57};X_{65},X_{56}) \implies \overline{X_{999}I}^2=\overline{X_{999}X_{57}}^2=\overline{X_{999}X_{56}}\times\overline{X_{999}X_{65}}$$

故 X_{999} 在 $\odot(X_{56}GeX_{21}X)$ 和 $\odot(XGeI)$ 的根軸上，即 $X_{999}\in XGe=GeX_{104}$ ■

Problem 5 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P13). X_7, X_8, X_{21}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到我們有 $X_{99}\in\mathcal{L}^*\cap\mathcal{L}^\varphi$，其中 φ 為等截共軛變換，現在取 $P=X_7$，因此由 (2)，我們有

$$X_7, X_8, \mathfrak{L}^{\mathcal{L}^\varphi}_{X_7,X_8}(X_{99}), X_{99}, \text{ 四點共圓}$$

且我們注意到 $X_{21}=X_7X_{56}\cap X_8X_{55}=\mathfrak{L}^{\mathcal{L}^\varphi}_{X_7,X_8}(X_{99})$，故得證。 ■

Problem 6. X_{21}, X_{55}, X_{56}, X_{110} 四點共圓。

Proof. 設 φ 為等截共軛變換，則考慮等共軛 $\psi:(\cdot)^*\circ\varphi\circ(\cdot)^*$，則我們有

$$\psi: X_{55}\mapsto X_{56}$$

設 X 為 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，則我們有 $X_{55}X_8\cap X_{56}X_7=X_{21}$ 因此由 (2)，

$$X_{55}, X_{56}, X_{21}, X \text{ 四點共圓}$$

接著我們證明 $X=X_{110}$。

這等價要證明 $\psi(X_{110})\in\mathcal{L}_\infty$ 但注意到

$$\psi:[x:y:z]\mapsto\left[\frac{a^4}{x}:\frac{b^4}{y}:\frac{c^4}{z}\right]$$

且我們有 $X_{110}=\left[\dfrac{a^2}{b^2-c^2}:\dfrac{b^2}{c^2-a^2}:\dfrac{c^2}{a^2-b^2}\right]$，因此

$$\psi(X_{110})=\left[a^2(b^2-c^2):b^2(c^2-a^2):c^2(a^2-b^2)\right]$$

顯然滿足無窮遠線的方程式 $x+y+z=0$，因此 $X=X_{110}$，故得證。 ■

Problem 7. 設 K_θ 為 Kiepert 雙曲線上角度為 θ 的點，則對於任意的 θ，我們都有 G, K_θ^*, $K_{-\theta}^*$, X_{110} 四點共圓。特別地，我們有 G, X_{15}, X_{16}, X_{110} 四點共圓。

Proof. (純幾) 首先我們知道 X_{110} 的斯坦納線為 HG，因此由 $\mathfrak{S}_H(X_{110})=HG$ 我們知道 $\mathfrak{L}^\Omega_{\mathcal{H}_k}(X_{110})=G$，並且注意到對於任意的 α，我們都有 K, K_α, $K_{-\alpha}$ 共線和 G, K_α^*, $K_{-\alpha}$ 共線，即

$$\mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110})=GK_{-\theta}^*, \mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110})=GK_\theta^*$$

因此由算角引理

$$\measuredangle K_\theta^* G K_{-\theta}^* = \measuredangle(GK_\theta^*, GK_{-\theta}^*) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}), \mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110})) = \measuredangle K_\theta^* X_{110} K_{-\theta}^*. \qquad \blacksquare$$

Proof. (重心坐標) 我們只要證明 X_{110} 會被把 $K_\theta^* \mapsto K_{-\theta}^*$ 的等共軛變換 φ 打到無窮遠即可，注意到對於所有的 K_θ 我們有重心坐標

$$\begin{aligned}
&K_\theta = \left[\frac{a}{\sin(A+\theta)} : \frac{b}{\sin(B+\theta)} : \frac{c}{\sin(C+\theta)}\right] \\
&\implies K_\theta^* = [a\sin(A+\theta) : b\sin(B+\theta) : c\sin(C+\theta)] \\
&\implies \varphi([x:y:z]) \\
&= \left[\frac{a^2\sin(A+\theta)\sin(A-\theta)}{x} : \frac{b^2\sin(B+\theta)\sin(B-\theta)}{y} : \frac{c^2\sin(C+\theta)\sin(C-\theta)}{z}\right] \\
&= \left[\frac{a^2(\sin^2 A - \sin^2\theta)}{x} : \frac{b^2(\sin^2 B - \sin^2\theta)}{y} : \frac{c^2(\sin^2 C - \sin^2\theta)}{z}\right]
\end{aligned}$$

代入 X_{110} 則我們有 $\sum_{\text{cyc}}(\sin^2 A - \sin^2\theta)(b^2 - c^2) = 0$ 故得證 $\blacksquare$

Problem 8. 九點圓圓心 N 在 $\mathcal{D}_{N,H}$ 上的切線平行 OKo。

Problem 9. N, Ko, X_{110} 三點共線。

Proof. 注意到 $\mathcal{L}_{\mathcal{D}_{N,H}}(X_{110}) = N$, $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_\mathcal{J}}(X_{110}) = O$，並且我們有 N 的正交截線垂直 OKo，因此我們有 OKo 平行 N 在 $\mathcal{D}_{N,H}$ 上的切線，即 $OKo \parallel \mathfrak{S}_N(X_{110})$，故

$$\measuredangle AX_{110}N = \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_{Ko}(X_{110})) = \measuredangle(BC, OKo) = \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_N(X_{110})) = \measuredangle AX_{110}Ko$$

$\blacksquare$