基礎幾何預備知識

ꕤ

May 30, 2021

這篇講義會盡可能的把你所需要會的基礎幾何知識補足。

1 你會算角嗎

首先我們從算角度說起。

Definition 1.1. 記直線 l_a, l_b 之間所夾的逆時針夾角爲 $\measuredangle(l_a, l_b)$

Definition 1.2. 給定任三點 ABC 則 AB, BC 之間所夾的逆時針夾角爲 $\measuredangle ABC$

這裡提醒一下各位，通常我們都會把有向角模 180 度

Proposition 1.1. 對於四點 A, B, C, P 我們有以下性質

1. $\measuredangle APA = 0°$
2. $\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA$
3. $\measuredangle PBA = \measuredangle PBC \iff A, B, C$ 三點共線
4. $PA \perp PB \iff \measuredangle APB = \measuredangle BPA = 90°$
5. $\measuredangle ABP + \measuredangle PBC = \measuredangle ABC$
6. $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0°$
7. $AB = AC \iff \measuredangle ABC = \measuredangle BCA$

所以我們就可以好好地定出共圓的充要條件了。

Proposition 1.2. $ABCD$ 共圓若且惟若 $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$

Example 1.1 (Russian Olympiad 1996)**.** 已知凸四邊形 $ABCD$，點 E, F 是邊 BC 是上的點 (E 比 F 靠近 B) 已知 $\measuredangle BAE = \measuredangle FDC$ 且 $\measuredangle EAF = \measuredangle EDF$，證明 $\measuredangle FAC = \measuredangle EDB$

Proof. 首先我們有 $\measuredangle EAF = \measuredangle EDF$，即 E, A, D, F 四點共圓，因此注意到

$$\measuredangle FAC = \measuredangle EDB \iff \measuredangle BAC = \measuredangle BDC \iff A, B, C, D\text{共圓}$$

接著算角度

$$\begin{aligned}\measuredangle ABC &= \measuredangle BAF + \measuredangle AFB \\ &= \measuredangle EDC + \measuredangle ADE = \measuredangle ADC \implies A, B, C, D \text{ 四點共圓}\end{aligned}$$

□

我們來看一些經典的例子。

Theorem 1.1 (西姆松定理). 對於三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P，做 P 在 BC, CA, AB 的垂足 D, E, F，則 D, E, F 共線若且惟若 A, B, C, P 四點共圓。

Proof. 注意到 P, D, E, C 四點共圓，P, F, B, D 四點共圓，因此

$$\begin{aligned} D, E, F\text{三點共線} \iff 0^\circ &= \measuredangle FDP + \measuredangle PDE = \measuredangle FBP + \measuredangle PCE \\ &= \measuredangle ABP + \measuredangle PCA = 0^\circ \iff A, B, C, P \text{ 四點共圓} \end{aligned}$$ □

Example 1.2. 設三角形 ABC 的切點三角形爲 $\triangle DEF$，且 ID 交 EF 於 T，證明:AT 平分 $\overline{BC}$

Proof. 考慮過 T 平行 BC 的直線交 AC, AB 於 X, Y，顯然有 E, T, F 共線，因此由西姆松定理 I 在 $\odot(AXY)$ 外接圓上，且由 $\measuredangle YAI = \measuredangle IAX$，可以得到 I 爲 XY 弧中點，因此 T 爲 $\overline{XY}$ 中點，故由 $XY \parallel BC$，AT 平分 $\overline{BC}$。 □

Theorem 1.2 (三角形的密克定理). 對於三角形 ABC 和 BC, CA, AB 上三點 D, E, F，則 (AEF), (BDF), (CDE) 共點。

Proof. 考慮 $\odot(AEF)$, $\odot(BDF)$ 的交點 P，則我們有

$$\begin{aligned} \measuredangle DPE &= \measuredangle DPF + \measuredangle FPE \\ &= \measuredangle DBF + \measuredangle FAE \\ &= \measuredangle CBA + \measuredangle BAC \\ &= \measuredangle BCA = \measuredangle DAE \end{aligned}$$ □

Example 1.3. 設 A, B, C, D 四點共圓，做 $AB \cap CD = E$, $BC \cap AD = F$，則

$$\overline{EF}^2 = \overline{EA} \times \overline{EB} + \overline{FA} \times \overline{FD}$$

2 等角共軛點

Proposition 2.1 (定差冪線定理). 給定平面上任意四點 A, B, C, D，則

$$AB \perp CD \iff \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{DA}^2 - \overline{DB}^2$$

Theorem 2.1 (正交). 對於兩三角形 $\triangle UVW$, $\triangle XYZ$，以下兩件事等價

1. U 對 YZ 的垂線、V 對 ZX 的垂線、W 對 XY 的垂線共點。
2. X 對 VW 的垂線、Y 對 WU 的垂線、Z 對 UV 的垂線共點。

Proof. 只需要注意到 1. 2. 都等價到下式即可。

$$UY^2 - UZ^2 + VZ^2 - VX^2 + WX^2 - WY^2 = 0$$ □

Proposition 2.2. 設 P 爲平面上任意點，且有一點 Q 滿足 $\measuredangle BAP = \measuredangle QAC$，並設 P 對 AC, AB 的垂足爲 P_B, P_C，則

$$AQ \perp P_B P_c$$

Proof. 設 $T = P_B P_C \cap AQ$，則顯然有 $\triangle APP_C \overset{+}{\sim} \triangle AP_B T \implies AT \perp P_B P_C$。 □

Theorem 2.2 (等角共軛點的存在性)**.** 三角形 $\triangle ABC$，設 P 爲不在三邊上的任意點，則存在一點 P^* 滿足

$$\measuredangle BAP + \measuredangle CAP^* = \measuredangle CBP + \measuredangle ABP^* = \measuredangle ACP + \measuredangle BCP^* = 0$$

Proof 1. 設 $\triangle P_A P_B P_C$ 爲 P 關於 $A\triangle ABC$ 的垂足三角形，則 $\triangle ABC, \triangle P_A P_B P_C$ 正交，因此我們有 A 對 $P_B P_C$ 的垂線，B 對 $P_C P_A$ 的垂線，C 對 $P_A P_B$ 的垂線，三線共點，設此點爲 P^*，則由 (2.2)。

$$\measuredangle BAP + \measuredangle CAP^* = \measuredangle CBP + \measuredangle ABP^* = \measuredangle ACP + \measuredangle BCP^* = 0 \qquad \square$$

Proof 2. 考慮 PA, PB, PC 和 $\odot(ABC)$ 的交點，P_A, P_B, P_C，並且令 $\triangle XYZ$ 爲 P 對 $\triangle P_A P_B P_C$ 的垂足三角形，注意到

$$\begin{aligned}\measuredangle YXZ &= \measuredangle YXP + \measuredangle PXZ \\ &= \measuredangle YP_C P + \measuredangle PP_B Z \\ &= \measuredangle P_A P_C C + \measuredangle BP_B P_A \\ &= \measuredangle P_A AC + \measuredangle BAP_A = \measuredangle BAC\end{aligned}$$

因此我們有 $\triangle ABC \overset{+}{\sim} \triangle XYZ$。考慮一點 P^* 使得

$$\triangle ABC \cup \{P^*\} \overset{+}{\sim} \triangle XYZ \cup \{P\}$$

則

$$\measuredangle BAP^* = \measuredangle YXP = \measuredangle YP_C P = \measuredangle P_A P_C C = \measuredangle PAC$$

同理可得 P^* 滿足

$$\measuredangle BAP + \measuredangle CAP^* = \measuredangle CBP + \measuredangle ABP^* = \measuredangle ACP + \measuredangle BCP^* = 0 \qquad \square$$

3 内心

内心的常用代號是 I，在 ETC 裡面的編號是 $X(1)$，接下來我們用純算角證明一些内心的常用性質。

Proposition 3.1. 我們有

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC.$$

Proof. 考慮切點三角形 $\triangle DEF$，注意到 AI, BI, CI 分別垂直 EF, FD, DE，所以

$$\measuredangle BIC = \measuredangle FDE = \measuredangle AFE = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \measuredangle IAC. \qquad \square$$

Proposition 3.2 (雞爪圓). 設 AI 交 $\odot(ABC)$ 於 $M \neq A$，則 B, I, C, I_A 共圓且圓心爲 M。

Proof. 我們只須證明 $\overline{MI} = \overline{MB} = \overline{MC}$ 即可，注意到

$$\measuredangle MBI = \measuredangle MBC + \measuredangle CBI = \measuredangle BAI + \measuredangle IBA = \measuredangle BIM$$

因此 $\overline{MB} = \overline{MI}$，同理 $\overline{MI} = \overline{MB} = \overline{MC}$ □

4 歐拉線

Proposition 4.1. 三角形 $\triangle ABC$ 中，外心垂心互爲等角共軛點。

Proof. 考慮 A 對外接圓的對鏡點 A'，以及 A 對 BC 的垂足 H_A，則

$$\triangle AH_AC \overset{+}{\sim} ABA' \implies \measuredangle BAH = \measuredangle OAC$$ □

Proposition 4.2. 設 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則 H 對 BC, CA, AB 鏡射皆在 $\triangle ABC$ 外接圓上。

Proof. 設 H' 爲 H 對 BC 邊的對稱點，則

$$\measuredangle BH'C = \measuredangle CHB = \measuredangle BAC \implies A, B, C, H' \text{ 四點共圓}$$ □

Proposition 4.3. 設 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則 H 對 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 的中點鏡射皆在 $\triangle ABC$ 外接圓上。

Proof. 設 H' 爲 H 對 $\overline{BC}$ 中點的對稱點，則

$$\measuredangle BH'C = \measuredangle CHB = \measuredangle BAC \implies A, B, C, H' \text{ 四點共圓}$$ □

Theorem 4.1 (九點圓). 三角形 $\triangle ABC$ 中的三邊垂足、三邊中點，和三頂點到垂心的中點，九點共圓且圓心爲垂心和外心的中點。

Proof. 注意到以垂心爲中心將這九個點往外推一倍都在外接圓上，故得證。 □

Definition 4.1 (九點圓圓心). 我們稱上面的定理中的圓爲九點圓，其圓心爲九點圓圓心。

Proposition 4.4. 三角形 $\triangle ABC$ 中，設 O, N 爲外心、九點圓圓心，設 O_A 爲 BOC 外心。則 AN, AO_A 爲等角線。

Proof. 考慮 $\overline{AB}$ 中垂線和 AC 的交點 D，考慮 $\overline{AC}$ 中垂線和 AB 的交點 E，設 O' 爲 O 關於 BC 的對稱點，則注意到

$$\triangle ABC \cup \{O'\} \overset{-}{\sim} \triangle ADF \cup \{O_A\} \implies AO', AO_A \text{ 爲等角線}$$

且由 $AHO'O$ 爲平行四邊形，我們有 AO' 過 $\overline{OH}$ 中點，故結論得證。 □

Theorem 4.2. 重心、外心、垂心、九點圓圓心，四點共線，我們稱此線爲該三角形的歐拉線。

Theorem 4.3 (斯坦納定理)**.** 對於三角形 $\triangle ABC$ 和外接圓上一點 P，做 P 對 BC, CA, AB 的對稱點 P_A, P_B, P_C，則 P_A, P_B, P_C 共線且過 $\triangle ABC$ 垂心。

Proof. 我們只要證明 P_A, H, P_B 三點共線即可，考慮 PP_A, PP_B 和 $\triangle ABC$ 的外接圓的交點 P'_A, P'_B，則注意到 $AHP_AP'_A$ 爲平行四邊形。因此我們只需要證明 $AP'_A \parallel BP'_B$ 即可，注意到 $PP'_A \perp BC, PP'_B \perp CA$ 故

$$\measuredangle P'_AAP'_B = \measuredangle P'_APP_B = \measuredangle BCA = \measuredangle BP'_BA \implies AP'_A \parallel BP'_B$$ □

5 完全四線形和圓冪

Theorem 5.1 (四邊形的密克定理)**.** 考慮四點 $ABCD$，設 AB 交 CD 於 E，AD 交 BC 於 F，則 $\odot(AED), \odot(ABF), \odot(BCE), \odot(CDF)$ 共點。

Proof. 考慮 $\odot(AED), \odot(ABF)$ 的交點 M，則由西姆松定理 M 對 AB, BC, CD, DA 的垂足四點共線，再則由西姆松定理, $M \in \odot(BCE), M \in \odot(CDF)$。 □

Definition 5.1. 上面的 M 稱爲 $\mathcal{Q}\{AB, BC, CD, DA\}$ 完全四線形的密克點。

Theorem 5.2 (垂心線)**.** 考慮四點 $ABCD$，設 AB 交 CD 於 E，AD 交 BC 於 F，則 $\triangle AED, \triangle ABF, \triangle BCE, \triangle CDF$ 垂心共線。

Proof. 由斯坦那定理顯然。 □

Definition 5.2. $\triangle AED, \triangle ABF, \triangle BCE, \triangle CDF$ 的垂心所共的線稱爲完全四線形 $\{AB, BC, CD, DA\}$ 的垂心線。

Definition 5.3. 設有兩圓 $\odot(O_1), \odot(O_2)$，則稱到這兩圓的圓冪一樣的點的軌跡爲 O_1, O_2 的根軸。

Proposition 5.1. 根軸垂直連心線

Proposition 5.2. 對於任意三個圓，兩兩根軸三線共點或平行。

Theorem 5.3 (牛頓線)**.** 完全四線形 $\mathcal{Q}\{AB, BC, CD, DA\}$ 的三條對角線中點共線。且垂直垂心線。

Proof. 考慮 $\triangle EBC$ 的垂心 H，並考慮 H 對 BC, CE, EB 的垂足 X, Y, Z，則

$$HE \times HX = HB \times HY = HC \times HZ$$

因此我們有 H 在 (AC) 直徑圓、(BD) 直徑圓、EF 直徑圓的跟軸上，同理我們有 $\triangle ABF, \triangle CDF$ 的垂心在此根軸上，故三直徑圓共軸，即圓心共線。 □

Problem 5.1. 設 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，設 EF, FD 交 BC, CA 於 M, N 則 MN 垂直歐拉線。

Proof. 注意到 B, C ,E, F 四點共圓，因此我們有

$$MB \times MC = ME \times MF$$

因此 M 在外接圓和九點圓的根軸上，同理有 N 在外接圓和九點圓的根軸上，且我們知道外心和九點圓連線爲歐拉線，因此 MN 爲根軸故垂直歐拉線。 □

Problem 5.2. 設 H 爲 ABC 的垂心，M, N 爲 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 邊上的中點，射線 MH, NH 交外接圓於 P, Q，則 PQ, MN, A 在外接圓上的切線共點。

Proof. 設 M', N' 爲 H 對 M, N 的對稱點 (熟知其在外接圓上)，則

$$HM \times HP = \frac{1}{2}HM' \times HP = \frac{1}{2}HN' \times HQ = HN \times HQ \implies P, Q, M, N \text{ 四點共圓}$$

考慮三圓 $\odot(AMN)$,$\odot(MNPQ)$ $\odot(APQ)$，則由根心的存在性知道則 PQ, MN, A 在外接圓上的切線共點。 □

6 習題

Problem 6.1. 三角形 ABC，設 $\triangle DEF$ 爲頂點對各邊的垂足 (以後叫他垂足三角形)，設 EF 交外接圓於 P，做 BP 交 DF 於 Q，試證 $AP = AQ$。

Problem 6.2. 三角形 ABC，A, B, C 在 BC, CA, AB 上的垂足爲 D, E, F，H 爲垂心。試證：H 是 $\triangle DEF$ 内心。

Problem 6.3. 設 $ABCD$ 爲圓内接四邊形，I_1, I_2 爲 $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ 的内心。試證：B, C, I_1, I_2 共圓。

Problem 6.4. 三角形 ABC 中 BC 爲最短邊，D, E 在線段 AB, AC 上滿足 $BD = BC = CE$，試證: 内外心連線垂直 DE

Problem 6.5. 三角形 $\triangle ABC$，O 爲其外心，O_A 爲 $\triangle BOC$ 外心，設 B', C' 爲 B, C 關於 AC, AB 的對稱點，證明：$AO_A \perp B'C'$

Problem 6.6. 三角形 ABC，DEF 爲垂足三角形，M 爲 BC 中點，證明 ME, MF 爲 M 對 $\odot(AEF)$ 的切線。

Problem 6.7. (2017 APMOC P5) $ABCD$ 爲圓内接四邊形，AB, DC 交於 P，AD, BC 交於 Q，M 是 PQ 中點，MC 交 $\odot(ABCD)$ 於 G，證明 $AGPQ$ 共圓。

Problem 6.8. 三角形 ABC 其中 H 爲垂心，P 爲外接圓上任意點，做 PH 中垂線交 AB, AC 於 Q, R，試證 $APQR$ 共圓。

Problem 6.9. (2013 IMO P4) 設 ABC 爲銳角三角形，H 爲垂心，W 爲 BC 上一點，設 M, N 爲 B, C 在 AC, AB 上的垂足，WX 上在 $\odot(BWN)$ 上的直徑，WY 是 $\odot(CWM)$ 上的直徑，證明 H, X, Y 共線。

Problem 6.10. 點 A, B 在圓 $\odot(O)$ 上 M 爲劣弧 AB 上的弧中點，C 在圓外且 CS, CT 爲圓 $\odot(O)$ 的切線，MS, MT 分別交 AB 於 E, F 兩點。過 E, F 做垂直 AB 的直線，分別交 OS, OT 於 X ,Y，過 C 做任意一條直線交 (O) 於 P, Q，設 MP 和 AB 的交點爲 R。證明：$\triangle PQR$ 的外心在 XY 上。

Problem 6.11 (正交截線). 三角形 $\triangle ABC$，P 爲任意一點，過 P 做垂直 AP, BP, CP 的直線交 BC, CA, AB 於 D, E, F，試證 D, E, F 共線。