
等軸雙曲線



May 1, 2021

在看這篇講義之前還是希望讀者對於等角共軛點以及簡單的交比有初步的認識。

1 預備知識

Definition 1.0.1 (交比). 對於複數平面上四點 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ 我們定義其交比

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Remark 1.1. 複平面上四點四點交比為實數若且惟若四點共圓或共線。

Definition 1.0.2 (等角共軛點). 給定三角形 $\triangle ABC$ ，則對於任意點 P ，存在唯一點 P^* 滿足

$$\angle BAP + \angle CAP^* = \angle CBP + \angle ABP^* = \angle ACP + \angle BCP^* = 0$$

Definition 1.0.3 (斯坦納線). 對於三角形 $\triangle ABC$ 外接圓上的一點 X ，則 X 對 BC, CA, AB 的對稱點三點共線且過 $\triangle ABC$ 垂心，在這篇講義中我們用 S_X 來表示。

Proposition 1.0.1. 設 $\triangle ABC$ 外接圓上有一點 X ，則 S_X 垂直 X 的等角共軛點方向。

Theorem 1.1 (圓錐曲線基本定理). 平面上六點 A, B, C, D, E, F 共圓錐曲線若且惟若

$$A(C, D; E, F) = B(C, D; E, F)$$

Proposition 1.0.2. 設 ℓ 為平面上一直線，則 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡為一外接錐線，反之，一外接錐線 C 的等角共軛軌跡為一直線。

Proposition 1.0.3 (平行弦定理). 對於任意的錐線 C ，若 $P, Q, R, S \in C$ ，且 $PQ \parallel RS$ ，則 $\overline{PQ}, \overline{RS}$ 中點連線過 C 的中心。

2 等軸雙曲線

在以下章節我們都假設 \mathcal{H} 是一個等軸雙曲線， O 為他的中心。

Proposition 2.0.1. 對於 \mathcal{H} 上任三點 A, B, C 的垂心 H ，我們都有 $H \in \mathcal{H}$

Proposition 2.0.2. 對於任意點 P_1, P_2 ，以及對徑點 A_1, A_2 ，我們有以下的角度關係。

$$(i) \angle(\mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) + \angle P_1 O P_2 = 0$$

(ii) 設 A_1 在 \mathcal{H} 上的切線為 $T_{A_1}(\mathcal{H})$ ，則對於任意點 $P \in \mathcal{H}$

$$\angle A_1 A_2 P = \angle(PA_1, T_{A_1}(\mathcal{H}))$$

(iii) 若 $P_1, P_2 \in \mathcal{H}$ 則我們有

$$\angle P_1 A_1 P_2 + \angle P_1 A_2 P_2 = 0$$

Proof. (i) 考慮 OP_i 上的無窮遠點 ∞_{P_i} ， $\mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_2)$ 上的無窮遠點 V_1, V_2 ，以及 \mathcal{H} 上的兩個無窮遠點 W_1, W_2 ，則由於 ∞_{P_i} 的極線過 V_i ，因此我們有

$$-1 = (\infty_{P_i}, V_i; W_1, W_2) = O(P_i, V_i; W_1, W_2)$$

由 $OW_1 \perp OW_2$ ，我們有 $P_i O V_i$ 的角平分線是 OW_1, OW_2 ，因此

$$\begin{aligned} \angle(\mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_1), \mathbf{p}_{\mathcal{H}}(P_2)) &= \angle V_1 O V_2 = \angle V_1 O W_1 + \angle W_1 O W_2 + \angle W_2 O V_2 \\ &= \angle W_1 O P_1 + \angle W_2 O W_1 + \angle P_2 O W_2 = \angle P_2 O P_1 \end{aligned}$$

(ii) 注意到 $A_1 A_2$ 的中垂線關於 $\triangle A_1 P A_2$ 的等角共軛軌跡為 \mathcal{H} ，設 $A_1 A_2$ 中垂線和 PA_2 交於 S ，則

$$\angle A_1 A_2 P = \angle S A_1 A_2 = \angle(PA_1, T_{A_1}(\mathcal{H}))$$

(iii) 由 (ii) 我們有

$$\begin{aligned}\angle P_1 A_1 P_2 &= \angle(P_1 A_1, T_{A_1}(\mathcal{H})) + \angle(T_{A_1}(\mathcal{H}), P_2 A_1) \\ &= \angle A_1 A_2 P_1 + \angle P_2 A_2 A_1 = \angle P_2 A_2 P_1\end{aligned}$$

□

Proposition 2.0.3. 設 $\triangle DEF$ 爲 \mathcal{H} 上的一個自共軛三角形，則 $O \in \odot(DEF)$

Proof. 由 (2.0.2)，我們有

$$\angle EOF = \angle(\mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(F), \mathfrak{p}_{\mathcal{H}}(E)) = \angle(DE, DF) = \angle EDF$$

□

3 龐色列點

Definition 3.0.1. 對於平面上的一完全四點形 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，設過 P_1, P_2, P_3, P_4 ，的外接等軸雙曲線爲 \mathcal{H} ，則我們定義 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的龐色列點爲 \mathcal{H} 的中心。

Theorem 3.1. 令 T 爲 $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的龐色列點，則我們有 T 在下列的圓上。

- (i) $\triangle P_i P_{i+1} P_{i+2}$ 的九點圓。
- (ii) P_i 對 $\triangle P_{i+1} P_{i+2} P_{i+3}$
- (iii) $\mathcal{Q} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ 的西瓦圓。

Proof. (i),(iii) 由 (2.0.2) 即可得到，以下證明 (ii)

設 P_4 關於 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 的佩多三角形爲 $\triangle Q_1 Q_2 Q_3$ ，並且設 M_{ij} 爲 $\overline{P_i P_j}$ 的中點，則由 $T \in \odot(M_{14} Q_2 M_{31})$ 和 $T \in \odot(M_{14} Q_3 M_{12})$ 我們有

$$\begin{aligned}\angle Q_2 T Q_3 &= \angle Q_2 T M_{14} + \angle M_{14} T Q_3 = \angle Q_2 M_{31} M_{14} + \angle M_{14} M_{12} Q_3 \\ &= \angle Q_2 P_3 P_4 + \angle P_4 P_2 Q_3 = \angle Q_2 Q_1 P_4 + \angle P_4 Q_1 Q_3 = \angle Q_2 Q_1 Q_3\end{aligned}$$

□

Theorem 3.2. 令 T 為 $\mathcal{Q} = (A, B, C, P)$ 的龐色列點， P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點， O 為 $\triangle ABC$ 的外心，則 OP^* 為 T 關於 $\triangle ABC$ 的中點三角形的斯坦那線。

Proof. 我們對 G 做 -2 倍位似，設 T^c 滿足 $GT^c = 2TG$ ，則我們等價要證明 T^c 對 $\triangle ABC$ 的斯坦納線平行 OP^* ，注意到 T^c 關於外接圓的對徑點是 OP^* 上無窮遠點的等角共軛點，故得證。 \square

接下來這個算角定理十分的毒瘤，所以我不會在上課講，自己回家看就好了。

Theorem 3.3. 給定任意 $\triangle ABC$ 及一點 P ，那麼 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓在 $\mathcal{Q} = (A, B, C, P)$ 的龐色列點的夾角為

$$90^\circ + \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP)$$

Proof. 設 $\triangle P_a P_b P_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形， $\triangle M_a M_b M_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形，則 T 在 $\triangle PBA$ 和 $\triangle PCA$ 的九點圓上。設 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 為 T 在 $\odot(P_a P_b P_c), \odot(M_a M_b M_c)$ 上的切線，則我們可以算角

$$\begin{aligned} \angle(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) &= \angle(\mathcal{T}_1, TP_c) + \angle P_c T M_c + \angle(M_c T, \mathcal{T}_2) \\ &= \angle TP_b P_c + \angle M_c M_b T + \angle P_c T M_c \\ &= \angle(M_b M_c, P_b P_c) + \angle(P_b P_c, M_b T) + \angle(T P_b, P_b P_c) + \angle P_c T M_c \\ &= \angle(BC, P_b P_c) + \angle P_b T M_b + \angle P_c T M_c \\ &= \angle(BC, P_b P_c) + (\angle ACP + \angle CAP) + (\angle BAP + \angle ABP) \\ &= (\angle AP_b P_c + \angle BAP) + \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP) \\ &= 90^\circ + \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP) \end{aligned} \quad \square$$

Definition 3.0.2. 給定 $\triangle ABC$ ，對於一點 P ，存在唯一一點滿足

$$\angle BPC + \angle BP'C = \angle CPA + \angle CP'A = \angle APB + \angle AP'B = 0$$

我們稱 P' 為 P 的 antigonal conjugate.

Proposition 3.0.1. 設 P' 為 P 的 antigonal，則 P 的等角共軛點關於外接圓的反演點的等角共軛點為 P'

4 封騰三定理

Theorem 4.1 (封騰一號). 令 $\triangle M_a M_b M_c$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形。對於任意一對等角共軛點對 (P, P^*) ，令 T 為 $Q = (A, B, C, P^*)$ 的龐色列點， $\triangle P_a P_b P_c$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多三角形， $R_a = P_b P_c \cap M_b M_c$ ，則 $T \in P_a R_a$ 。

Proof. 考慮 P_a, T 對 $M_b M_c$ 的對稱點 P'_a, T' ，則我們等價要證明 $T' \in R_a P'_a$ 即可注意到 T' 是完全四線形 $Q(AM_c, M_b M_c, P_c P_b, P_b A)$ 的密克點，因此

$$\angle R_a T' P_c = \angle R_a M_c P_c = \angle P'_a A P_c = \angle P'_a T' P_c \implies T' \in R_a P'_a \quad \square$$

Theorem 4.2 (封騰二號). 給定任意 $\triangle ABC$ ， ℓ 為一個通過 $\triangle ABC$ 的外心的直線， P 為 ℓ 上一動點，則 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓過一定點且該定點位於 $\triangle ABC$ 的九點圓上 (該定點即為 $Q(A, B, C, P^*)$ 的龐色列點，其中 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點)。

Proof. 考慮 P 的等角共軛點 P^* ，則我們知道 P^* 的軌跡是一個固定的等軸雙曲線 \mathcal{H} ，因此中心也是固定的，則由 P, P^* 的佩多圓是同一個，我們有 P 的佩多圓過 \mathcal{H} 的中心。 \square

Theorem 4.3 (封騰三號). 給定任意 $\triangle ABC$ ， (P, P^*) 為 $\triangle ABC$ 的一對等角共軛點對，則 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切若且唯若 PP^* 通過 $\triangle ABC$ 的外心。

Proof. 令 O, H, N 分別為 $\triangle ABC$ 的外心、垂心、九點圓圓心， T_1 為

(A, B, C, P) 的龐色列點， T_2 為 (A, B, C, P^*) 的龐色列點。

(\Rightarrow) 若 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切，則我們有 $T_1 = T_2$ ，因此 A, B, C, P, P^* 共等軸雙曲線，因此 PP^* 通過 $\triangle ABC$ 的外心。

(\Leftarrow) 若 PP^* 通過 $\triangle ABC$ 的外心，則我們有 $T_1 = T_2 = T$ ，因此若我們可以證明 P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心過 T ，也就證明了相切，故我們現在的目標是證明 T, M, N 共線，其中 M 為 $\overline{PP^*}$ 中點。

令 \mathcal{H} 為通過 A, B, C, P, P^* 的圓錐曲線，則我們有 H 對 T 的對稱點 $T' \in \mathcal{H}$ ，令 T' 關於 $\triangle ABC$ 外接圓的對徑點為 T^* ，則我們有 $S_{T^*} \parallel PP^*$ 故

$$T'(A, B; C, O) = (A, B; C, T^*) = (S_A, S_B; S_C, S_{T^*}) = H(A, B; C, \infty_{PP^*})$$

因此由圓錐曲線基本定理我們有 $D := T'O \cap H \in \mathcal{H}$ ，故由平行弦定理， HD 中點 $\in TM$ ，故將 OT' 對 H 位似 $1/2$ 倍即得到 $N \in TM$ 。 \square

最後這個推論可以說是十分的強大且重要。

Corollary 4.1. 對於 $\triangle ABC$ 和任意點 P ，我們有以下幾件事等價

- (i) $90^\circ = \angle(BC, AP) + \angle(CA, BP) + \angle(AB, CP)$
- (ii) P 關於 $\triangle ABC$ 的佩多圓與 $\triangle ABC$ 的九點圓相切
- (iii) PP^* 過 $\triangle ABC$ 的外心。

那我們也可以直接推論費爾巴哈定理

Theorem 4.4 (費爾巴哈定理). 給定 $\triangle ABC$ 則， $\triangle ABC$ 的九點圓和內切圓、旁切圓相切。

5 常見的等軸雙曲線

接著我們可以來看一些在競賽上比較常出現 (吧?) 的錐線，他們都是等軸的所以都可以看成是某條過 O 直線的等角共軛軌跡。

5.1 費爾巴哈雙曲線

Definition 5.1.1 (費爾巴哈雙曲線). 設 I, H 為 $\triangle ABC$ 的內心、垂心，則我們稱 $\mathcal{H}_{Fe} := (ABCIH)$ 為 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線。

Proposition 5.1.1. \mathcal{H}_{Fe} 為 OI 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡。

Proposition 5.1.2. $Na, Ge \in \mathcal{H}_{Fe}$ 。

Proposition 5.1.3. OI 和 \mathcal{H}_{Fe} 相切。

Proposition 5.1.4. \mathcal{H}_{Fe} 的中心是費爾巴哈點 Fe 。

Theorem 5.1 (Kariya 定理). 設 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的切點三角形，對於任意實數 t ，設 $D_t \in ID$ 滿足 $tID = ID_t$ ，類似定義 E_t, F_t ，則我們有 AD_t, BE_t, CF_t 共

點且

$$\left\{ P_t := AD_t \cap BE_t \cap CF_t \mid t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \right\} = \mathcal{H}_{Fe}$$

Problem 5.1 (2016 ISL G7). 設 I_a, I_b, I_c 為 $\triangle ABC$ 的旁心， I_a 對 BC 的對稱點為 I'_a ，類似定義 I'_b, I'_c 。

證明： AI'_a, BI'_b, CI'_c 共點且該點的等角共軛點在 OI 上。

Proposition 5.1.5. 設 L 為 H 關於 O 的對稱點，則 I, Ge, L 三點共線。

Proposition 5.1.6. 設 AI 直徑圓和 $\triangle ABC$ 外接圓交於 S ， $\triangle BIC$ 垂心為 H_a ，則 S 關於 $\triangle ABC$ 的斯坦納線為 HH_a 。

Proposition 5.1.7 (Schiffler point X_{21}). $\triangle BIC, \triangle CIA, \triangle AIB, \triangle ABC$ 的歐拉線共點且在 \mathcal{H}_{Fe} 上。

Proposition 5.1.8. 切點三角形的垂心 (X_{65}) 和 X_{21} 互為等角共軛點。

Proposition 5.1.9. 設 $X_{80} = P_{-2}$ ，則 O, N, X_{65}, X_{80} 四點共圓。

Proposition 5.1.10. 設 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 的切點三角形， D 關於 EF 的對稱點為 D' 。

證明： AD', OI, BC 三線共點。

Problem 5.2 (2020 2J P6). 設 I, O, ω, Ω 為 $\triangle ABC$ 的內心、外心、內切圓以及外接圓。內切圓 ω 和 BC 邊切於 D 。設 S 在外接圓 Ω 上使得 AS, OI, BC 共點。設 H_A 為 $\triangle BIC$ 的垂心。點 T 在 Ω 上使得 $\angle ATI = 90^\circ$ 。

證明： D, T, H_A, S 四點共圓。

Problem 5.3. 給定 $\triangle ABC$ 和內心 I 外心 O ，設 H_A 為 $\triangle BIC$ 垂心。且設 $\triangle DEF$ 為切點三角形。設 $\odot(AEF)$ 和 $\odot(AIO)$ 分別交 $\odot(ABC)$ 於 S 和 T 。

證明： T, H_A, I, S 共圓。

5.2 Jerabek 雙曲線

這個人的性質絕對不比費爾巴哈少，但都比較進階所以我沒辦法放太多 QQ

Definition 5.2.1 (Jerabek 雙曲線). 設 O, H 為 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，則我們稱 $\mathcal{H}_J := (ABCOH)$ 為 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線。

Proposition 5.2.1. \mathcal{H}_J 為 OH 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡。

Definition 5.2.2. 我們稱九點圓圓心的等角共軛點為 Kosnita 點 X_{54} 。

Definition 5.2.3. 我們稱歐拉線上無窮遠點的等角共軛點為 X_{74} 。

Definition 5.2.4. 我們稱歐拉線的反斯坦納線為歐拉反射點 X_{110} 。

Corollary 5.1. X_{74} 關於 $\triangle ABC$ 外接圓的對徑點為 X_{110}

Definition 5.2.5. 我們稱 \mathcal{H}_J 的中心為 Jerabek center X_{125} 。

Proposition 5.2.2. G, X_{110}, X_{125} 三點共線。

Theorem 5.2. 設 X 為 $\triangle ABC$ 外接圓上任意點，則 X 的斯坦納線、正交截線、三線性極線、三線共點且在 Jerabek 雙曲線上。

Problem 5.4. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心， B, C 對 $\odot(ABC)$ 的切線交於 T ， $D \in \odot(ABC)$ 滿足 AD 和 $\triangle ABC$ 的歐拉線垂直， TD 交 $\odot(ABC)$ 於 $E \neq D$ ， R 為 T 關於 BC 的對稱點。

證明： A, R, E 三點共線。

Proposition 5.2.3. 令 P 位於 $\triangle ABC$ 的歐拉線上， H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，若 P^* 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。

證明： HP^* 與經過 A, B, C, H, P 的圓錐曲線相切。

Problem 5.5 (這個可能很難). N, Ko, X_{110} 三點共線。

5.3 Kiepert 雙曲線

Definition 5.3.1 (Kiepert 雙曲線). 設 G, H 為 $\triangle ABC$ 的重心、垂心，則我們稱 $\mathcal{K} := (ABCGH)$ 為 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線。

Proposition 5.3.1. \mathcal{K} 為 OK 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡，其中 K 為 G 的等角共軛點。

不知道大家有沒有看過那種對三邊向外做等腰三角形的題目，那 Kiepert 雙曲線其實跟他很有關係。

Theorem 5.3. 對於任意角度 θ ，取 $A_\theta, B_\theta, C_\theta$ 滿足

$$\angle A_\theta BC = \angle BCA_\theta = \angle B_\theta CA = \angle CAB_\theta = \angle C_\theta AB = \angle ABC_\theta = \theta$$

則 $AA_\theta, BB_\theta, CC_\theta$ 三線共點，設這個點為 K_θ ，則我們有

$$\left\{ K_\theta \mid \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \mathcal{K}$$

我們先來看一個常見的例子：

Definition 5.3.2. $K_{60^\circ}, K_{-60^\circ}$ 稱為第一和第二等角點，常用 F_1, F_2 來表示。

Proposition 5.3.2. F_1, F_2 互為 \mathcal{K} 上的對徑點。

Definition 5.3.3. 我們稱 F_1^*, F_2^* 為第一、第二等力點，常用 S_1, S_2 來表示。

那關於這個 K_θ 我們有一些很棒的性質。

Proposition 5.3.3. 對於任意的 θ 我們有 $(K_\theta, K_{-\theta}; H, G)_\mathcal{K} = -1$ 。

Corollary 5.2. $(F_1, F_2; H, G)_\mathcal{K} = -1$ 。

Corollary 5.3. S_1, S_2 為 OK 直徑圓的反演相互對。

Theorem 5.4. 對於三個任意角度 α, β, γ ，

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \iff K_\alpha, K_\beta, K_\gamma^* \text{ 三點共線}$$

5.4 某條常見的等軸雙曲線

大家應該有看過一種題目是考慮某個點 P 滿足 $\angle ABP + \angle ACP = 0$ 之類的，那個點的軌跡無疑是一條等軸雙曲線，因為他是 BC 中垂線的等角共軛軌跡，而且他的中心會是 \overline{BC} 中點。

Problem 5.6. 給定 $\triangle ABC$ ， $D, E \in BC$ 使得 $BD = CE$ 且 $D \in \overline{BE}$ ，假設存在一點 P 滿足 $PD \parallel AE$ 且 $\angle PAB = \angle EAC$ 。

證明： $\angle PBA = \angle ACP$

Problem 5.7. 設 A 對外接圓的切線交 BC 於 X ， A 關於 X 的對稱點為 Y 。

證明： $\angle YBA = \angle ACY$

Problem 5.8 (2012 ISL G2). 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，其中 AC, BD 交於 E ， AD, BC 交於 F ， G 為平面上一點滿足 $ECGD$ 為平行四邊形，設 H 為 E 關於 AD 的對稱點。

證明： D, H, F, C 四點共圓。

6 習題

Problem 6.1. 給定 $\triangle ABC$ ， D 是 BC 中垂線上一動點， E 是 D 的等角共軛點， T 是 $\triangle BCD$ 垂心。證明： T, H, E 三點共線。

Problem 6.2 (2021 2J 模競 P3). 設 O, H 為 $\triangle ABC$ 的外心、垂心。 P 點滿足 $\angle AHP = \angle POA$ 。 M 為 \overline{OP} 中點。設 BM, CM 交 $\triangle ABC$ 外接圓於 X 和 Y 。
證明： XY 過 $\triangle APO$ 外心。

Problem 6.3 (這題非常難). 設 X 為 I 的西瓦三角形的垂心，證明 $IX \parallel OH$ 。

參考資料

[1] 鄭容濤 + 李雙言. 對合與大保交比

[2] $\mathcal{Li4}$. 圓錐曲線. <https://lii4.github.io/Conic.pdf>