正交截線

𝔖

March 30, 2021

在看這篇之前最好是要先知道一些完全四邊形的性質，配極變換，交比，要是會錐線的話當然就更好，在最一開始我還是先給出它的定義。

Definition 0.1. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P 做過 P 垂直 PA 的直線交 BC 於 D。類似定義 E, F 則 D, E, F 共線，並稱該直線爲 P 對 $\triangle ABC$ 的正交截線 (Orthotransversal)，文中將用 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 表示，至於剛剛那裏的 D, E, F 爲甚麼會共線底下我會用不同的觀點給出幾個證明。

1 完全四邊形

完全四邊形版本的證明: 設 EF 交 BC 於 D'，那其實我們就是要證明 PD' 垂直 PA。考慮完全四邊形 $\triangle ABC \cup EF$，注意到完全四邊形的性質三個直徑圓共軸，這樣一來 PD' 垂直 PA 就顯然成立了。 □

透過這個證明我們可以馬上得到一個性質

Property 1.1. 考慮 $\triangle ABC$ 截 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 形成的完全四邊形，則 PH 爲垂心線，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

Property 1.2. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 過 $\triangle ABC$ 外心。

Proof. 設 B, C 關於外接圓的對徑點爲 B', C'，對 $(C'PB'BAC)$ 用帕斯卡定理，得到

$$(C'P \cap BA),\ (PB' \cap AC),\ (B'B \cap C'C) \text{ 三點共線}$$

即 EF 過 $\triangle ABC$ 外心。 □

其實上面這個可以推廣

Property 1.3. 假設一點 P 對 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形爲 A', B', C'，Q 是外接圓上一點，設 QA' 交 BC 於 D，同理定義 E, F，則 D, E, F 共線且過 P。

Proof. 對 $(C'PB'BAC)$ 用帕斯卡定理，則 EF 過 P 所以證畢。 □

Property 1.4. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交三邊於 D, E, F，且 $(AD)(BE)(CF)$ 共軸在 P, X，則 X 在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。
可以開封藤二號或是算冪所以這裡就不證了。

2 配極

配極版本的證明: 設 D 在 BC 上滿足 PA 垂直 PD，類似定義 E, F，我們選一個以 P 爲圓心的圓配極，考慮 A, B, C 的極線，則由 PA 垂直 PD，得到 D 的極線平行 PA 且 D 的極線過 BC 的極點，所以 D 配極完後就會變成 A, B, C 的極線所形成的三角形的高，三個高顯然會共點，故 D, E, F 共線。 □

這證明可以得到一個滿強的結論。

Corollary 2.1. 設以 P 爲圓心的配極變換把 $\triangle$ 變換成 $\triangle'$ 則這個變換把 $\triangle$ 的垂心變換到 $\mathcal{O}_P(\triangle')$

Property 2.1. 給定三角形 $\triangle ABC$，設 P, Q 爲等角共軛點對，Q_A, Q_B, Q_C 是 Q 對 $\triangle ABC$ 的佩多三角形，H 是 $Q_AQ_BQ_C$ 的垂心，則 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 垂直 QH。

Proof. 我們選一個以 P 爲圓心的圓對 $\triangle ABC$ 和 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 配極，假設 $\triangle ABC$ 配極後爲 $B'C', C'A', A'B'$ 則由上個性質 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 被變換至 $A'B'C'$ 的垂心，假設他叫 H'，且我們由等角共軛點的性質，AP 垂直 Q_BQ_C，又由配極變換知道，AP 垂直 $B'C'$ 故 $A'B'C'$ 和 $Q_AQ_BQ_C$ 相似，且 Q, P 分別爲 $Q_AQ_BQ_C, A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的正交中心，故 P, Q 也是位似的，所以 $PH' \parallel QH$，又 $PH' \perp \mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，所以原命題得證。 □

Property 2.2. 給定五點 $PABCD$，則 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC), \mathcal{O}_P(\triangle ABD), \mathcal{O}_P(\triangle ACD)$, $\mathcal{O}_P(\triangle BCD)$ 共點。

Proof. 和剛剛這個證明一樣配極，這次我們要證明的是四個配極後的垂心共線，不過我們熟知完全四邊形的四個垂心共線，故命題證畢。 □

Property 2.3. 給定兩個透視的三角形 ABC, DEF 和透視中心 P，設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 對 $\triangle ABC$ 的三線性極點爲 Q,$\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$ 對 DEF 的三線性極點爲 R，則 P, Q, R 共線。

Proof. 和剛剛這個證明一樣配極，注意到 Q 配極後會變成 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的極點對 A, B, C 的極線所形成的三角形的三線性極線，所以現在我們要證明的是兩個三線性極線平行，不過有趣的是兩個透視三角形配極後會位似，所以兩個位似三角形的垂心的三線性極線就顯然平行了，配極回來就是 P, Q, R 共線。 □

接下來要進入有錐線 (有趣) 的部分了，有感到身體不適者可以先跳過這個章節。

3 錐線上的推廣

Property 3.1. 給定等軸雙曲線上五點 $PQABC$，做過 P 垂直 AQ 的線交 BC 於 D 同理定義 E, F 則，D, E, F 共線且垂直 PQ。

Proof. 設 BQ 交 PF 於 I，CQ 交 PE 於 J，考慮 $\triangle CQB$ 的垂心 H ，注意到等軸雙曲線的垂心性質和 $BH \parallel PI$，$CH \parallel PJ$，因此我們可以得到

$$(F, P; I, \infty) = B(A, P; Q, H) = C(A, P; Q, H) = (E, P; J, \infty)$$

所以我們有 $EF \parallel IJ$，但是因爲 $IJPQ$ 爲垂心組，所以有 $IJ \perp PQ$，所以 $EF \perp PQ$，同理可得 $DF, DF \perp PQ$，故 D, E, F 共線且垂直 PQ。 □

然後我們可以立即得到一個性質

Corollary 3.1. $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 垂直 P 在 $(ABCP)$ 等軸雙曲線上的切線。

Corollary 3.2. $\mathcal{O}_G(\triangle ABC) \perp GK$

Corollary 3.3. $\mathcal{O}_I(\triangle ABC) \perp OI$

這時候我們可以用一個很通靈的方式做出這題。

Problem 3.1. 三角形 $\triangle ABC$，O, I 是外心和內心，令切點三角形爲 DEF，D 對 EF 鏡射爲 D', 證明 AD',OI,BC 共點。

Proof. 考慮 IB, IC 上的兩點 U, V 滿足 $AU \perp AC, AV \perp AB$ 則發現到 $UV = \mathcal{O}_A(\triangle BIC)$，因此 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線垂直 UV，注意到我們同時得到 AEF 和 IUV 正交，考慮 D 關於 EF 中點的對稱點爲 D''，則 AD', AD'' 爲等角線，由 AEF 和 IUV 正交我們知道 AD'' 垂直 UV，因此我們知道 AD'' 是 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線，故 AD' 過 BC 和 OI 的交點。 □

然後下面這個東西配合一點小性質可以秒掉某次模競的一題

Property 3.2. 設 P 在 $\triangle ABC$ 外接圓上，H 爲垂心，過 A 做平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的線交外接圓於 E，HP 交外接圓於 F，則 EF 平行 BC。

Proof. 假設過 A 平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的線交錐線 $(ABCPH)$ 於 T，考慮 ATP 的垂心，由等軸雙曲線知道 ATP 的垂心在過 P 垂直 AT 的直線上，但由上個性質可得，ATP 爲直角三角形，考慮 A 的對徑點 A'，即知 PT 過 A'，所以我們就可打個交比，

$$A(B, C; A', F) = P(B, C; A', F) = P(B, C; T, H) = A(B, C; E, H)$$

故 AE, AF 爲等角線，即 EF 平行 BC。 □

Problem 3.2. 設三角形 $\triangle ABC$，O, H 爲外心和垂心，EF 在外接圓上滿足 $BC \parallel EF$，D 爲 EH 中點，過 O 平行 AF 的直線交 AB 於 G。
證明:

$$DG \perp DC$$

其實我們可得到一些之後可能會用到的小性質。

Property 3.3. 三角形 $\triangle ABC$，P 在外接圓上，過 P 做垂直 AP, BP, CP 的直線交 $(ABCHP)$ 於 P_A, P_B, P_C 則 $AP_A, BP_B, CP_C, \mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 平行。

Proof. 直接考慮 APP_A 的垂心，因爲 $(ABCHP)$ 是等軸雙曲線，所以 AP_A 和 P 點的切線垂直，所以平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$。 □

接下來這個等軸雙曲線的性質可以推出一個讓我們算角的東西。

Property 3.4. 設 P, Q 對等軸雙曲線上的極線爲 T_P, T_Q，O 爲錐線中心，則

$$\measuredangle(T_P, T_Q) = \measuredangle QOP$$

Proof. 設 M, N 爲該等軸雙曲線上兩個垂直方向的無窮遠點，對任一點 P，打交比在無窮遠線上知 $(OP, T_P; OM, ON) = -1$，又 OM, ON 垂直，由調和性質知，OM 是 OP, T_P 方向的角平分線，T_P 方向根本就是把 OP 方向對其中一條漸進線做對稱，故自然就有 $\measuredangle(T_P, T_Q) = \measuredangle QOP$ 了 (做了對稱故方向會反過來)。 □

注意到若 P 在錐線上則 T_P 其實就是在該錐線在 P 的切線，於是就有等軸雙曲線上的切線是可算角的了!

Property 3.5. 設 P 在等軸雙曲線上的切線爲 T_P，O 爲錐線中心，P' 爲 P 對 O 的對徑點，X 爲錐線上任意一點，則 $\measuredangle(T_P, PX) = \measuredangle XP'P$。

錐線算角是有妙用的看看下面這個性質。

Property 3.6. 三角形 $\triangle ABC$，A' 是 A 在外接圓上的對徑點，則

$$(AB, AC; AA', \mathcal{O}_{A'}(\triangle ABC)) = -1$$

Proof. 假設過 A 平行 $\mathcal{O}'_A(\triangle ABC)$ 的直線和 $(ABCHA')$ 的交點爲 T，則我們等價要證 $H(B, C; A', T) = -1$，不過我們有 HA' 過 BC 中點，所以等於要證 HT 平行 BC 也就是要證 $ATA'H$ 共圓，假設 AT 交外接圓於 E，注意到 EA' 是切線，而且 H 是 A' 在錐線上的對徑點 (由九點錐線顯然)，所以

$$\measuredangle ATA' = \measuredangle EA'A = \measuredangle(EA', A'A) = \measuredangle AHA'$$

故 $ATA'H$ 共圓，證畢。 □

4 一些綜合性質和應用

Property 4.1. 給定三角形 $\triangle ABC$，設 P 在 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 上的垂足爲 Q，則 $\triangle APQ$, $\triangle BPQ$, $\triangle CPQ$ 垂心共線。

Proof. 設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 爲 L，考慮以 P 爲圓心 PQ 爲半徑的圓，假設 A, B, C 對他配極變成 L_A, L_B, L_C，P 配極後變成無窮遠線 L_∞，所以我們等價要證明

$$\mathcal{O}_P(\triangle L_A L L_\infty),\ \mathcal{O}_P(\triangle L_B L L_\infty),\ \mathcal{O}_P(\triangle L_C L L_\infty)\text{三線共點}$$

假設 PQ 交 L_A, L_B, L_C 於 A', B', C'，PA, PB, PC 交 L 於 P_A, P_B, P_C，注意到因爲 PA' 垂直 L，PP_A 垂直 L_A，所以 $P_AA' = \mathcal{O}_P(\triangle L_A L L_\infty)$，所以現在只需要證明 P_AA', P_BB', P_CC' 共點也就是要證明

$$P(P_A, P_B; P_C, Q) = (A', B'; C', Q)$$

假設 L_A, L_B, L_C 圍出的三角形爲 $\triangle XYZ$，則我們有 $XQ \perp L_A$，而注意到 PP_A 也垂直 L_A，所以

$$P(P_A, P_B; P_C, Q) = Q(X, Y; Z, P)$$

設 $QX \cap YZ = T$，則

$$Q(X,Y;Z,P) = (T,Y;Z,A') = (A',Z;Y,T) = X(A',B';C',Q)$$

這就證明了 L_A, L_B, L_C 共點，配極回來就是垂心共線。 □

Property 4.2. 設 P 對 $\triangle ABC$ 的反希瓦三角形爲 $\triangle DEF$，P 對 $\triangle ABC$ 的佩多三角形爲 $\triangle XYZ$ 則，P 對 $\odot(XYZ)$ 的極線是 $\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$。

Proof. 設過 P 垂直 PD 的線交 EF, AC, AB 於 T, M, N，我們要證明的就是 T 在 P 對 (XYZ) 的極線上，首先有 $YZMN$，$AYZP$ 分別四點共圓，且 PT 和 $(AYZP)$ 相切。設 YZ 交 MN 於 J，則我們可以得到

$$JM \times JN = JY \times JZ = JP^2$$

再加上完全四邊形的調和性質，

$$A(B,C;P,E) = (N,M;P,T)$$

因此可得到 J 爲 $\overline{PT}$ 中點，故 PT 直徑圓和 $\odot(XYZ)$ 正交，即 T 在 P 對 $\odot(XYZ)$ 的極線上。 □

上面這個看起來沒用的東東可以證出下面這兩個很強的結論。

Property 4.3. 設 $\triangle DEF$ 是 P 對 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形，Q 是 P 對 $\triangle DEF$ 的等角共軛點，則 PQ 和過 $ABCP$ 的等軸雙曲線相切。

Proof. 考慮 P 對 $\triangle DEF$ 的佩多圓，注意到 PQ 過佩多圓的圓心，故 P 對佩多圓的極線會垂直 PQ 但是我們由 (4.2) 知道那條極線就是 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，也就是說 PQ 垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，但是我們又知道 P 在錐線上的切線垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，故 PQ 就是切線。 □

Property 4.4. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P，則 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，$P$ 對 $\triangle ABC$ 的三線性極線，P 對 P 對 $\triangle ABC$ 的配多圓的極線共點。

Proof. 我們先把極線換掉，設 P 對 $\triangle ABC$ 的反希瓦三角形爲 $\triangle DEF$，注意到 P 對 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的三線性極線重合，則變成要證明 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$,$\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$,$P$ 對 $\triangle DEF$ 的三線性極線共點。設 AC, DF 交於 T_B，AB, DE 交於 T_C，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交 AB, AC 於 O_C, O_B，$\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$ 交 DF, DE 於 O_E, O_F，變成要證明 T_BT_C, O_BO_C, O_EO_F 共點，不過 T_BO_B, T_CO_C 交於 A，T_BO_E, T_CO_F 交於 D，O_BO_E, O_CO_F 交於 P，所以由迪沙格定理證畢。 □

Corollary 4.1. I 的三線性極線平行 $\mathcal{O}_I(\triangle ABC)$

Corollary 4.2. I 的三線性極線垂直 OI。

Property 4.5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和外接圓上一點 P，則 P 對 $\triangle ABC$ 的三線性極線，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，$P$ 對 $\triangle ABC$ 的斯坦那線共點在 Jerabek 雙曲線上。

Proof. 共點由上個性質可以立即推論，所以我們只要證，$\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$，$P$ 對 $\triangle ABC$ 的斯坦那線共點在 Jerabek 雙曲線上，假設這個點叫 X，我們等於要證 $(ABCOHX)$ 共錐線，很自然地會想要對 $(AHXOCB)$ 開帕斯卡，假設 AH 交 OC 於 T，HX 交 BC 於 S，XO 交 AB 於 U，C 的對徑點爲 C'，且 AH 交外接圓於 D，要證明的是 T, S, U 共線，考慮對外接圓上六點 $(BADPC'C)$ 用帕斯卡，則 BA 交 PC' 於 U，AD 交 $C'C$ 於 T，DP 交 BC 於 S，所以 T, S, U 共線，由帕斯卡定理 $(AHXOCB)$ 共錐線。 □

眼尖的朋友可以發現到當 P 在外接圓上跑的時候 X 會和 P 保交比喔，所以這其實根本就可以用大保交比來證，而且這可以再推廣。

Property 4.6. 設 X, Y 對 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形爲 $\triangle X_AX_BX_C$, $\triangle Y_AY_BY_C$，P 在外接圓上，令 PX_A 交 BC 於 X'_A 同理有 $X'_BX'_C$，由性質 3 我們知道 $X'_AX'_BX'_C$ 共線，假設他叫 L_X，同理定義 L_Y，若 L_X, L_Y 共點在 Z，則 $(ABCXYZ)$ 共錐線。證明一樣用帕斯卡所以毒者可以自己動手做

你還可以再推論一件事

Property 4.7. 和上面標號一樣，設 PZ 交外接圓於 Q，則 Q 爲 $(ABCXYZ)$ 和外接圓的第四個交點。證明可以用大堡礁比所以這裡也留給毒者。

這裡提供一個等等會用到的性質。

Property 4.8. 給定五點 A, B, C, D, E，則 E 對 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ 的佩多圓共點。

Proof. 設 E 在 AB, BC, CD, DA, AC, BD 的垂足爲 P, Q, R, S, U, V 設 E 對 $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ 的佩多圓交於 T，則我們要證明的是 $\measuredangle(TV, TQ) = \measuredangle(RV, RQ)$ 由算角度我們有

$$\begin{aligned}
\measuredangle(TV, TQ) &= \measuredangle(TV, TP) + \measuredangle(TP, TQ) = \measuredangle(SV, SP) + \measuredangle(UP, UQ) \\
&= \measuredangle(SV, SE) + \measuredangle(SE, SP) + \measuredangle(UP, UE) + \measuredangle(UE, UQ) \\
&= \measuredangle(RV, RE) + \measuredangle(SE, SP) + \measuredangle(UP, UE) + \measuredangle(RE, RQ) \\
&= \measuredangle(RV, RE) + \measuredangle(RE, RQ) + \measuredangle(SE, SP) + \measuredangle(UP, UE) = \measuredangle(RV, RQ)
\end{aligned}$$

□

然後下面這個太毒了我不會證。

Property 4.9. 給定五點 $ABCDE$，定義 E_1 爲 $\mathcal{O}_E(\triangle ABC)$,$\mathcal{O}_E(\triangle ABD)$,$\mathcal{O}_E(\triangle ACD)$,$\mathcal{O}_E(\triangle BCD)$ 的交點，同理定義 A_1, B_1, C_1, D_1，然後假設 E 對 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ 的佩多圓共點在 E_2，類似定義 A_2, B_2, C_2, D_2，則 $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$，且錐線 $(ABCDE)(A_1B_1C_1D_1E_1)(A_2B_2C_2D_2E_2)$ 的中心是同一個而且這個中心同時也是 $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$ 的位似中心

5 正交共軛

我們先看某次公奕在張修展別吃我 po 的題目

Problem 5.1. *H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是平面上任一點，過 H 對 PA, PB, PC 做垂線依序交 BC, CA, AB 在 D, E, F，證明 D, E, F 共線。*

Proof. 爲了照顧不熟悉錐線的人，這邊先給個純幾證明。令 AP, BP, CP 和 BC, CA, AB 的交點分別爲 X, Y, Z，A, B, C 對 BC, CA, AB 的垂足爲 H_A, H_B, H_C，考慮對 H 的反演 φ，其中 $\varphi(A) = H_A$, $\varphi(B) = H_B$, $\varphi(C) = H_C$，不難發現 H 也是 $\triangle ADX$ 的垂心，算冪知 $\varphi(D)$ 爲 D 對 AP 的垂足，在 PH 直徑圓上，同理有 $\varphi(E)$, $\varphi(F) \in (PH)$，故 D ,E, F 顯然共線了。 □

有了上面的性質後，下面這題就變得不堪一擊了!!

Problem 5.2. *H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，P 是 (ABC) 上任一點，令 M 爲 HP 中點，在 BC 上做一點 D 使得 $DH \parallel AP$，類似定義 E, F 證明 D, E, F, M 共線。*

Definition 5.1. 我們定義上面這條線爲 $\mathcal{H}_P(\triangle ABC)$，令他的三線性極點爲 P°，則我們定義 $P \mapsto P^\circ$ 的變換爲正交共軛 (Orthogonal conjugate)。

下面這個主要是想說正交共軛是射影對合變換，然後標號 P° 沿用。

Property 5.1. 設 P 的正交共軛點是 P°，則 P° 的正交共軛點是 P，且 $P \mapsto P^\circ$ 是保交比對合變換。

Proof. 我們要證 P 的三線性極線是 $\mathcal{H}_{P^\circ}(\triangle ABC)$，設 AP, AP° 交 BC 於 U, V，P, P° 的三線性極線交 BC 於 U', V'，AH 交 BC 於 D，不過

$$DA \times DH = DU \times DV' = DU' \times DV$$

即 $U'H \perp AV$，故 $(P^o)^o = P$。 □

Corollary 5.1. 以下都是可以立即得到的推論

(1) 標號同上，$P^\circ H$ 垂直 P 的三線性極線。

(2) G, H 互爲正交共軛點。

(3) 直線的正交共軛軌跡爲三角形的外接錐線。

(4) 尤拉線的正交共軛軌跡爲三角形的 *Kiepert* 雙曲線。

Property 5.2. 設 P 在尤拉線上，Q 爲 P 的等角共軛點，則 H, Q, P° 共線。

而由今年的一階可以得到下面這個推論。

Corollary 5.2. 外接圓上一點 P，P 的補點在 $\mathcal{H}_P(\triangle ABC)$ 上。

Property 5.3. H, I, Na° 共線。

Proof. 注意到因爲 A, B, C, I, H, Na 共錐線，所以 I°, G, Na° 共線，然後我們有 I, G, Na 共線，所以由迪沙格對合 $H = INa^\circ \cap NaI^\circ$，故 H, I, Na° 共線。 □

Corollary 5.3. 三角形 $\triangle ABC$ 的奈格爾點 Na 的三線性極線垂直 HI。

事實上同樣的方法可以證明出底下這個更廣的結論。

Property 5.4. 過 $\triangle ABC$ 重心 G 的直線與 $\triangle ABC$ 的外接等軸雙曲線交於 U, V, 則 HU 垂直於 V 的三線性極線, 其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

Property 5.5. K° 是 O 的等截共軛點。

Proof. 注意到 K 的三線性極線和 A 在外接圓上的切線交在 BC 上，設此點爲 X，我們只須證明 XH 垂直 AO' 其中 O' 爲 O 的等截共軛點，設 D 是 $A-$ 垂足，設 AO, AO' 交 BC 於 V, V'，注意到 $DA^2 = DX \times DV$，故可算出 $DA \times DH = DV' \times DX$，故 H 是 $\triangle XAV'$ 的垂心，即 $XH \perp AO'$。 □

Corollary 5.4. 設 H' 是 H 的等截共軛點，則 H'°, H, K 共線。

Proof. 考慮 H, G, O 的等截共軛的正交共軛共線故得證 □

Property 5.6. 若 P 在 $\triangle ABC$ 尤拉線上，則 $\mathcal{Q}\{AB, BC, CA, \mathcal{H}_P(\triangle ABC)\}$ 的牛頓線平行 P 的三線性極線。

Proof. 注意到 $\mathcal{H}_P(\triangle ABC) \perp HP$，而 $\{AB, BC, CA, \mathcal{H}_P(\triangle ABC)\}$ 的牛頓線平行 $\mathcal{H}_P(\triangle ABC)$ 對 $\triangle ABC$ 的等截共軛線，記此線爲 ℓ'，注意到 ℓ' 的三線性極點爲 P° 的等截共軛點，所以變成要證明 P^o 的等截共軛點的三線性極線垂直 HP^o，因此現在問題變成要證 Kiepert 上任一點 X 的等截共軛點 X' 的三線性極線會垂直 HX，設 ℓ 爲 X' 的三線性極線，設

$$A' = BC \cap GX',\ B' = AB \cap GX',\ C' = AC \cap GX'$$

則

$$H(X, A; B, C) = A(X, A; B, C) = A(X', A'; C', B') = (\ell, BC; AC, AB)$$

$$\implies HX \perp \ell$$ □

Corollary 5.5. $\mathcal{H}_P(\triangle ABC)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛線平行 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線。

於是我們可以用上面這些東西來得到 TS 在幾何毒書會裡面丟的關於 Kiepert 雙曲線的一個性質。

Problem 5.3. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與一垂直於 $\triangle ABC$ 尤拉線的直線 ℓ，則 $\mathcal{Q}\{BC, CA, AB, \ell\}$ 的垂心線過 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點。

Proof. 首先注意到過定點的直線的三線性極點的軌跡是錐線，特別的過垂直尤拉線上無窮遠點的所以直線的三線性極點也是錐線，不難發現他就是 Kiepert 雙曲線，回到原題，設 ℓ 的三線性極點爲 P°，由牛頓線垂直垂心線我們要證明 HP° 垂直 $\mathcal{Q}\{BC, CA, AB, \ell\}$ 的牛頓線，注意到 $\ell = \mathcal{H}_P(\triangle ABC)$，考慮 P° 的正交共軛點 P，由 (5.1) 我們知道 P 在尤拉線上，由 (5.6) $\mathcal{Q}\{BC, CA, AB, \ell\}$ 的牛頓線平行 P 的三線性極線再由 (5.1) 有 HP° 垂直 P 的三線性極線也就是 HP° 垂直 $\mathcal{Q}\{BC, CA, AB, \ell\}$ 的牛頓線。 □

6 題目

Problem 6.1. 設三角形 $\triangle ABC$，O, H 爲外心和垂心，S 爲外接圓上一點，做 P 在 BC 邊上滿足 $\measuredangle ASP = 90^\circ$，$SH$ 交 AP 直徑圓於另一點 X，OP 交 AC, AB 於 Q, R，Q, R 在 AB, AC 邊上的垂足爲 Y, Z，試證 X, Y, Z 共線。

Problem 6.2. 設 I, O, H 爲 $\triangle ABC$ 的內心、外心、垂心，$\triangle DEF$ 爲 I 的西瓦三角形，X 是 $\triangle DEF$ 的垂心，則 $IX \parallel OH$

Proof. 我們就先配極把垂心換掉，注意到對內切圓配極的話 D 的極線過 BC 邊上的切點，且垂直 AI，所以會變成切點三角形的反補三角形，所以 I 變成 DEF 配極後的三角形的九點圓圓心，所以命題變成要證 N 對原三角形的正交截線會垂直以九點圓爲內切圓且切在中點的三角形的尤拉線，注意到那個三角形會和原三角形的外切三角形相似 (因爲那個三角形就是中點三角形的外切三角形)，外切三角形又和垂足三角形相似，所以我們只要證明 N 對原三角形的正交截線會垂直垂足三角形的尤拉線，N 對垂足三角形的等角共軛點恰好是垂足三角形的垂心，注意到前面的某個性質，這兩個點連線 (就是尤拉線) 會和錐線相切，所以就垂直 N 對原三角形的正交截線。 □

Problem 6.3. 三角形 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心爲 N，則

$$\mathcal{O}_{\triangle ABC}(N) \perp OKo$$

Problem 6.4. 三角形 $\triangle ABC$，設 $\triangle DEF$ 爲其切點三角形且 I, H 爲 $\triangle ABC$ 的內心、垂心。
證明: 三角形 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點 Fe 關於 $\triangle DEF$ 的正交截線爲 IH。

Problem 6.5 (TS 在幾何毒書會丟的題). 設 G, H 爲三角形 $\triangle ABC$ 的外心、內心，(P, Q) 爲 $\triangle ABC$ 的一對 antigonal conjugate 且 O_P, O_Q 爲 P, Q 的 orthocorrespondent，若 GH 分別與 PO_P, QO_Q 交於 U, V 證明 $(G, H; U, V) = -1$。

Proof. 設 $\mathcal{C}$ 爲 $(ABCPH)$，過 H 做垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的直線交 $\mathcal{C}$ 於 X，則

$$(X, H; P, Q)_{\mathcal{C}} = -1$$

因此我們只需要證明 PO_P, QO_Q, XG 三線交在 $\mathcal{C}$ 上即可，注意到 A, B, C, O_P, O_Q, G 共錐線，因此考慮錐線 $\mathcal{G} = (ABCGO_PO_Q)$，注意到 $\mathcal{C}, \mathcal{G}$ 有四個交點，令 Y 爲第四個交點，我們先證明 X, G, Y 共線，事實上我們可以證明以下這件事。

Claim 6.1. 考慮 GX 和 $\mathcal{C}$ 的另一個交點 Y'，則 Y' 的三線性極線垂直 HX。

Proof of claim 1. 設 GA, GB, GC 交 $\mathcal{C}$ 於 A_M, B_M, C_M 注意到

$$H(X, A; B, C) = (Y, A_M; B_M, C_M)$$

由於 $A_M.B_M, C_M$ 在 AG, BG, CG 上因此他們的三線性極線垂直 AH, BH, CH，故 HX 垂直 Y 的三線性極線。 □

由 (6.1) 我們有 $Y' \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}$ 故 $Y = Y' \implies X, G, Y$ 共線。接著我們證明 P, O_P, Y 共線，這等價要證明 $(P, A; B, C)_{\mathcal{C}} = (O_P, A; B, C)_{\mathcal{G}}$

Claim 6.2. $(P, A; B, C)_{\mathcal{C}} = (O_P, A; B, C)_{\mathcal{G}}$

proof of claim 2. 設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交 BC, CA, AB 於 A_1, B_1, C_1，注意到

$$(P, A; B, C)_{\mathcal{C}} = P(P, A; B, C) = (\infty_{\mathcal{O}_P(\triangle ABC)}, A_1; B_1, C_1)$$

而另一方面，設過 A 平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的直線交 BC 於 S 則

$$(O_P, A; B, C)_{\mathcal{G}} = (A_1, S; B, C) = A(\infty_{\mathcal{O}_P(\triangle ABC)}, A_1; B_1, C_1) = (P, A; B, C)_{\mathcal{C}} \quad \square$$

因此我們得到 P, O_P, Y 共線，由於 P, Q 對稱我們同時也得到 Q, O_Q, Y 共線。故

$$(G, H; U, V) = Y(G, H; U, V) = Y(X, H; P, Q) = -1 \quad \square$$