張志煥截線

$\mathcal{L}i4+\mathfrak{B}$

October 16, 2021

1 張志煥截線

張志煥截線是幾何王子張志煥在計算共圓時經常使用到的工具。

Proposition 1. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。令 $\triangle P_AP_BP_C$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形。對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，令

$$X_{P,A}=XP_A\cap BC,\ X_{P,B}=XP_B\cap CA,\ X_{P,C}=XP_C\cap AB,$$

則 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。

Proof. 考慮 $\mathcal{C}$ 上的六折線們 BCP_CXP_AA, CAP_AXP_BB，由帕斯卡定理即可得 P, $X_{P,A}$, $X_{P,B}$, $X_{P,C}$ 共線。 ■

我們稱上述所共的直線 $PX_{P,A}X_{P,B}X_{P,C}$ 爲 X 關於 $(\triangle ABC,\mathcal{C})$ 的張志煥 P-截線，記爲 $\mathfrak{B}_P^{\mathcal{C}}(X)$。定義相當的簡單，我們顯然有

Proposition 2. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。我們有

$$\mathfrak{B}_P^{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to TP$$

爲保交比變換。

Proof. 注意到

$$\mathfrak{B}_P^{\mathcal{C}}=[X_{P,A}\mapsto PX_{P,A}]\circ[X\mapsto X_{P,A}].$$ ■

Proposition 3. 給定 $\triangle ABC$，一點 P 與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。設 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC \cup P$ 的外接圓錐曲線，T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 的第四個交點，則對於 $\mathcal{C}$ 上一點 X，$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathcal{D} \in TX$。

Proof. 令 $D = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathcal{D}$，由於 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P$ 爲保交比變換，我們有

$$\begin{aligned} T(A,B;C,X) &= (A,B;C,X)_{\mathcal{C}} = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(A,B;C,X) \\ &= (AP,BP;CP,\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X)) = (A,B;C,D)_{\mathcal{D}} = T(A,B;C,D), \end{aligned}$$

故 T, X, D 共線。 ■

Proposition 4. 給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$。對於任意兩點 P, Q 與任意一點 $X \in \mathcal{C}$，

(i) $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X) \in (ABCPQ)$,

(ii) 若 T 爲 $\mathcal{C}$ 與 $(ABCPQ)$ 的第四個交點，則 T, X, $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X)$ 共線。

Proof. (i) 令 $P_A = AP \cap \mathcal{C}$, $Q_A = AQ \cap \mathcal{C}$, $Z = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X)$，我們有

$$\begin{aligned} P(A,Z;B,C) &= (AP \cap BC, XP_A \cap BC; B, C) \overset{P_A}{=} (A,X;B,C)_{\mathcal{C}} \\ &\overset{Q_A}{=} (AQ \cap BC, XQ_A \cap BC; B, C) = Q(A,Z;B,C) \end{aligned}$$

因此由圓錐曲線基本定理可得 $Z \in (ABCPQ)$。
(ii) 由 (i) 及 (3)，

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap (ABCPQ) \in TX.$$ ■

這邊給一些未來會用到的記號。給定 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及一點 X。

(i) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathcal{D}_{P,Q} = (ABCPQ).$$

(ii) 對於任意兩點 P, Q，我們記

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{C}}_{P,Q}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \cap \mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_Q(X) \cap \mathcal{D}_{P,Q} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{P,Q})X.$$

(iii) 對於任意外接圓錐曲線 T，我們記

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cap \mathcal{D})X.$$

因此，$\mathfrak{L}^{\mathcal{C}}_{P,Q}(X) = \mathfrak{L}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_{P,Q}}(X)$。

Proposition 5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 $\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，則

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{\bullet}(X) : \mathcal{D} \to T\mathfrak{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. 因爲 $\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) = \mathfrak{T}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)P$。 ■

Proposition 6. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與其外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{C}$ 上一點 X。令 ℓ 爲任意直線，則

$$\{\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_P(X) \mid P \in \ell\}$$

的包絡線爲 $\triangle ABC$ 的內切圓錐曲線，記爲 $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}_{\ell}(X)$，且

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{C}}_{\bullet}(X) : \ell \to T\mathcal{B}^{\mathcal{C}}_{\ell}(X)$$

爲一保交比變換。

Proof. trivial ■

對於任意不過頂點的直線 $\mathcal{L}$，我們知道 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換與 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線有個一一對應，即 $\varphi \mapsto \varphi(\mathcal{L})$。以下簡記 $\varphi(\mathcal{L})$ 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ ，特別地，當 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$, φ 爲等角共軛變換 $(\cdot)^*$，$\mathcal{L}^*_\infty$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω。

Proposition 7. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，$\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線。則對於任意 $X \in \mathcal{L}^\varphi$，

$$\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathfrak{T}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathcal{D}}(X)^\varphi}(X).$$

Proof. 令 $D = \mathcal{D}^\varphi \cap BC$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathcal{D}}(X)$，則

$$\begin{aligned} X(B, C; D, A(XD \cap \mathcal{L}^\varphi) \cap BC) &= T(B, C; X, A) = (B, C; \mathfrak{T}, A)_{\mathcal{D}} \\ &= A(C, B; \mathfrak{T}^\varphi, D) = (B, C; D, A\mathfrak{T}^\varphi \cap BC), \end{aligned}$$

因此 $A\mathfrak{T}^\varphi$, XD, $\mathcal{L}^\varphi$ 共點，故 $\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathfrak{T}^\varphi}(X)$。 ■

Corollary 1. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，且 $X \in \mathcal{L}^\varphi$。對於任意點 P，設 $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{\mathcal{L}^\varphi}_{P,\varphi(P)}(X)$，則

$$P\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathfrak{T}^\varphi}(X).$$

Proof. 在 (7) 中取 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,\varphi(P)}$。 ∎

Theorem 1 (張志煥截線基本定理)**.** 令 φ, ψ 爲 $\triangle ABC$ 上的兩個等共軛變換。設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 和 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，P 爲任意一點，則

(i) $X,\ A\varphi(P) \cap \mathcal{L}^\varphi,\ A\psi(P) \cap \mathcal{L}^\psi$ 共線。

(ii) $\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{\psi(P)}(X)$。

Proof. (i) 設 $A\varphi(P), A\psi(P)$ 分別交 $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$ 於 $\varphi(P)_A, \psi(P)_A$。簡單地觀察到

$$\begin{aligned} X(A, \varphi(P)_A; B, C) &= A(A, \varphi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\varphi} \overset{\varphi}{=} A(\infty_{BC}, P; B, C) \\ &\overset{\psi}{=} A(A, \psi(P)_A; B, C)_{\mathcal{L}^\psi} = X(A, \psi(P)_A; B, C). \end{aligned}$$

(ii) 設 $X\varphi(P)_A\psi(P)_A$ 交 BC 於 $X_{P,A}$，我們有

$$X_{P,A}\varphi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{\psi(P)}(X) = X_{P,A}\psi(P),$$

故

$$\varphi(P)\psi(P) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{\psi(P)}(X).$$ ∎

Example 1 (等共軛對合)**.** 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一等共軛變換，則對於任意兩點 P, Q，設 $P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = R$, $PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S$，則 $\varphi(R) = S$。

Proof. 定義一等共軛變換 ψ 將 $P \mapsto Q$，考慮 $\mathcal{L}^\varphi, \mathcal{L}^\psi$ 的交點 X，則由 (1) 的 (ii)。

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_P(X) &= P\varphi(Q) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(Q)}(X), \\ \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_Q(X) &= \varphi(P)Q = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P)}(X). \end{aligned}$$

注意到 $R = P\varphi(Q) \cap \varphi(P)Q = \mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\psi}_{P,Q}(X) = \mathfrak{Li}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(P),\varphi(Q)}(X)$，因此

$$\varphi(R) \in PQ \cap \varphi(P)\varphi(Q) = S.$$ ∎

Example 2 (正交共軛小性質)**.** 設 P 在三角形 $\triangle ABC$ 的歐拉線上，設 P^*, P^o 爲 P 的等角共軛點、正交共軛點，則 H, P^*, P^o 三點共線。

Proof. 令 $\mathcal{L}$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的歐拉線，則注意到 $H \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}^o$，因此 H, $AP^* \cap \mathcal{L}^*$, $AP^o \cap \mathcal{L}^o$ 三點共線。 ∎

Proposition 8. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換，$\mathcal{D}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線，T 爲 $\mathcal{D}$ 與 $\mathcal{L}^\varphi$ 的第四個交點。則對於任意 $P \in \mathcal{D}$，$TP \cap \mathcal{L}^\varphi, XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi, \mathfrak{z}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)^\varphi$ 共線。

Proof. 令 $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathcal{D}}(X), Q = TP \cap \mathcal{L}^\varphi, R = XP^\varphi \cap \mathcal{L}^\varphi$，我們知道 $Q \mapsto R$ 爲保交比變換，因此我們只需證明 $Q \mapsto R$ 爲對合變換且對合中心爲 $\mathfrak{z}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)^\varphi$。取 $P = A$，我們有 $Q = A, R = X(\mathcal{D}^\varphi \cap BC) \cap \mathcal{L}^\varphi$。由 (7)，我們知道 $\mathcal{D}^\varphi = \mathfrak{Z}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\mathfrak{z}^\varphi}(X)$，因此 QR 過 $\mathfrak{z}^\varphi$。這在 $P = B, C$ 時也是對的，因此 $Q \mapsto R$ 爲對合變換且對合中心爲 $\mathfrak{z}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(X)^\varphi$。 ■

現在假設 $\mathcal{C}$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 $\Omega = \odot(ABC)$，那麼某些張志煥截線就會是一我們平常熟悉的線。

Example 3. 令 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{Z}^{\Omega}_{O}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X)$。

Example 4. 令 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{Z}^{\Omega}_{H}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的施坦納線 $\mathcal{S}_X$。

Example 5. 令 K 爲 $\triangle ABC$ 的共軛重心，則對於任意一點 $X \in \Omega$，$\mathfrak{Z}^{\Omega}_{K}(X)$ 爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

我們簡記 $\mathfrak{Z}^{\Omega}_{P}(X)$ 爲 $\mathfrak{Z}_P(X)$，$\mathfrak{z}^{\Omega}_{\mathcal{D}}(X)$ 爲 $\mathfrak{z}_{\mathcal{D}}(X)$，爲 X 關於 $\triangle ABC$ 的 P-張志煥截線。事實上，我們對於 $\mathfrak{Z}_P(X)$ 的角度有一些刻畫。

Proposition 9. 設 X 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓 Ω 上任意點，則對於任意兩點 P, Q，

$$\measuredangle(\mathfrak{Z}_P(X), \mathfrak{Z}_Q(X)) + \measuredangle P^* X Q^* = 0^\circ,$$

其中 P^*, Q^* 分別爲 P, Q 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。特別地，取 $Q \in BC$ 我們有

$$\measuredangle(\mathfrak{Z}_P(X), BC) = \measuredangle AXP^*.$$

Proof. 令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{P,Q}$，$\ell = \mathcal{D}^\varphi$，由 (5)，

$$[\mathfrak{Z}_P(X) \mapsto XP^*] = [P^* \mapsto XP^*] \circ [P \mapsto P^*] \circ [\mathfrak{Z}_P(X) \mapsto P]$$

爲保交比變換。因此由對稱性我們只需證明

$$\measuredangle B\mathfrak{z}C + \measuredangle \ell_b X \ell_c = 0^\circ,$$

其中 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\mathcal{D}}(X)$, $\ell_b = \ell \cap CA$, $\ell_c = \ell \cap AB$。由 (8)，我們可以得到 $\mathfrak{L}_B^* = X\ell_b \cap B\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{L}_C^* = X\ell_c \cap C\mathfrak{L} \in \Omega$，因此

$$\measuredangle B\mathfrak{L}C = \measuredangle AB\mathfrak{L}^* + \measuredangle \mathfrak{L}^*CA = \measuredangle A\mathfrak{L}_C^*\mathfrak{L}_B^* + \measuredangle \mathfrak{L}_C^*\mathfrak{L}_B^*A = \measuredangle \mathfrak{L}_C^*A\mathfrak{L}_B^* = \measuredangle \ell_cX\ell_b. \qquad \blacksquare$$

Remark. 關於特例的敘述有以下的純幾證明，而事實上也可由此推得廣義的情形：

令 $P_A = AP \cap \Omega$, $P_A^* = AP^* \cap \Omega$, $D = AP \cap BC$, $X_{P,A} = XP_A \cap BC$。由 $P_AP_A^* \parallel BC$，我們易得 $\triangle X_{P,A}P_AD \overset{-}{\sim} \triangle AP_A^*X$。在 $P_AX_{P,A}$ 上取點 E 使得
$DE \parallel PX_{P,A} = \mathfrak{S}_P(X)$，由常見的等角共軛比例 Lemma，我們有

$$\frac{AP^*}{P^*P_A^*} = \frac{PD}{DP_A} = \frac{X_{P,A}E}{EP_A}.$$

因此我們有 $\triangle X_{P,A}ED \overset{-}{\sim} \triangle AP^*X$，最後由算角度可得

$$\measuredangle AXP^* = \measuredangle EDX_{P,A} = \measuredangle(PX_{P,A}, BC) = \measuredangle(\mathfrak{S}_P(X), BC). \qquad \blacksquare$$

以下假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$ 無窮遠線。我們來看看幾何王子是怎麼計算共圓的吧！

Theorem 2 (a)**.** 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 T 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 $(ABCP\varphi(P))$ 的第四個交點，P^*, $\varphi(P)^*$ 分別爲 P, $\varphi(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等角共軛點。則 TX, $P\varphi(P)^*$, $P^*\varphi(P)$, $\odot(P\varphi(P)X)$, $(ABCP\varphi(P))$ 共於一點 $\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$。

Proof. 由 (4) 及 (1) 的 (ii)，我們有

$$TX \cap (ABCP\varphi(P)) = \mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi} = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = P\varphi(P)^* \cap P^*\varphi(P).$$

因此由 (1) 的 (ii) 及 (9)，

$$\begin{aligned} \measuredangle P\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}\varphi(P) &= \measuredangle(P\varphi(P)^*, \varphi(P)P^*) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{\varphi(P)^*}(X), \mathfrak{S}_{P^*}(X)) \\ &= \measuredangle AX\varphi(P) + \measuredangle PXA = \measuredangle PX\varphi(P), \end{aligned}$$

即 P, $\varphi(P)$, X, $\mathfrak{L}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{L}^\varphi}$ 共圓。 $\blacksquare$

上面這個定理我們常用的是以下的敘述。

Theorem 2 (b)**.** 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等共軛變換 φ，設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 與 Ω 的第四個交點。對於任意點 P，設 $\mathfrak{L} = P^*\varphi(P) \cap P\varphi(P)^*$，其中 $(\cdot)^*$ 爲等角共軛變換。則 P, $\varphi(P)$, X, $\mathfrak{L}$ 四點共圓。

因此我們有以下推論

Corollary 2. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓。對於任意等角共軛點 P, P^*，以及外接圓上一點 X，設 $(ABCPP^*)$ 和 $\odot(ABC)$ 的第四個交點為 T，XT 和 $(ABCPP^*)$ 交於一點 $\mathfrak{Li}$。則 $P, P^*, X, \mathfrak{Li}$ 四點共圓。

事實上，(5) 有如下的推廣：

Proposition 10. 若 X 位於 $\triangle ABC$ 的外接圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 上，P 為 $\triangle ABC$ 與 $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}(\triangle ABC)$ 的透視中心，則 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Proof. 令 $\triangle P_AP_BP_C$ 為 P 關於 $\triangle ABC$ 的 $\mathcal{C}$-西瓦三角形，則 ABP_AC 為 $\mathcal{C}$ 上的調和四邊形，因此

$$(B, C; AX \cap BC, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap BC) \overset{X}{=} (B, C; A, P_A)_{\mathcal{C}} = -1.$$

同理有

$$(C, A; BX \cap CA, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap CA) = (A, B; CX \cap AB, \mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) \cap AB) = -1,$$

故 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{C}}(X) = \mathfrak{t}_X$。 ■

Example 6. 令 $\mathcal{S}t$ 為三角形 $\triangle ABC$ 的施坦納外接橢圓，則重心 G 為透視中心，因此 $\mathfrak{S}_G^{\mathcal{S}t}(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

Example 7. 設 $\mathcal{L}^\circ$ 為 $\mathcal{L}_\infty$ 的正交共軛軌跡，則垂心 H 為透視中心，因此 $\mathfrak{S}_H^{\mathcal{L}^\circ}(X)$ 為 X 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線 $\mathfrak{t}_X$。

2 更多等共軛

不知道大家有沒有發現，置換線基本定理有一個缺點，就是常常等共軛定完之後我們根本不知道關於等共軛本身的事實，像是無窮遠的等共軛軌跡是誰，或者是有沒有辦法找出其他等共軛點對之類的問題，所以最多只能作開兩次基本定理的操作，因此這個章節我們將證明一個等共軛的小性質，並且用它來讓置換線基本定理變的更強大。

Proposition 11. 設 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換，並假設 $\mathcal{L}^\varphi$ 是無窮遠線的軌跡，則 $\mathcal{L}^\varphi$ 的中心爲 O 若且惟若 $\varphi(O)$ 爲 O 的反補點。

Proof. ($\Rightarrow$) 設 AO, $A\varphi(O)$ 交 $\mathcal{L}^\varphi$ 於 U, V，則 $\overline{UV} \parallel BC$，且由平行弦定理 $\overline{UV}$ 中點、$\overline{BC}$ 中點、O，三點共線，且由於 O 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 的中心，O 爲 $\overline{AU}$ 中點，故 U 關於 $\overline{BC}$ 中點的對稱點位於 $A\varphi(O)$ 上，即 O 的反補點在 $A\varphi(O)$ 上，故由三邊對稱可知 $\varphi(O)$ 爲 O 的反補點。

($\Leftarrow$) 考慮以 O 爲中心的外接錐線 $\mathcal{C}$，則由等共軛和外接錐線有一一對應，存在一個等共軛 φ' 滿足 $\mathcal{L}^{\varphi'} = \mathcal{C}$，因此由 ($\Rightarrow$)，我們知道 $\varphi'(O)$ 爲 O 的反補點，即 $\varphi'(O) = \varphi(O)$，因此 $\varphi' = \varphi$，故 $\mathcal{L}^\varphi$ 的中心爲 O。 ■

Corollary 3. 設 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等共軛變換滿足 $\varphi : N \leftrightarrow O$，則 $\varphi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$

Proof. 設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$，$X$ 爲 Ω 和 $\mathcal{L}^\varphi$ 的第四個交點，則由置換線基本定理

$$\mathfrak{S}_N^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_H(X) = NH$$

因此 X 爲歐拉線的反斯坦那點，故 $X = X_{110}$。 ■

Proposition 12. N, Ko, X_{110} 三點共線。

Proof. 注意到由 (11)，$\mathcal{L}^\varphi$ 的中心爲 N，因此由 $X_{110} \in \mathcal{L}^\varphi$，我們有 X_{110} 關於 N 的對稱點 $T \in \mathcal{L}^\varphi$，考慮錐線 $\mathcal{C} = (ABCNT)$，則我們有 $\mathfrak{L}_\mathcal{C}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = N$，即 NH 和 $\mathcal{C}$ 相切，且由 N 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 的中心，我們有過 A, B, C, T 的錐線截 OH 所導出的對合爲關於 N 的對稱，因此 $T \in \mathcal{J} = (ABCOH)$，此時考慮置換線基本定理

$$\mathfrak{S}_O^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{Ko}(X) = OKo \implies \mathfrak{L}_\mathcal{J}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = Ko \implies Ko \in X_{110}T$$

因此由 $N \in X_{110}T$，我們得到 N, Ko, X_{110} 三點共線。 ■

Proposition 13. 設 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的一個等共軛變換滿足 $\varphi : Ge \leftrightarrow X_9$，則我們有

(i) $\varphi : I \leftrightarrow G$

(ii) $\varphi(X_{100}) \in \mathcal{L}_\infty$

(iii) $Na \leftrightarrow X_{57}$

Proof. 設 X 爲 $\mathcal{L}^\varphi$ 和 Ω 的第四個交點，$\mathcal{H}_{(Fe)}$ 爲費爾巴哈雙曲線，則由基本定理，

$$\mathfrak{S}_{Ge}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{X_{57}}(X) = GeX_{57} = GeX_9, \; \mathfrak{S}_{X_9}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{Ge^*}(X) = Ge^*X_9$$

因此 $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_{(Fe)}}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_{Ge}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) \cap \mathfrak{S}_{X_9}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = X_9$。

注意到 $G \in GeX_9$，因此 $\varphi(G) \in \mathcal{H}_{(Fe)}$，因此對 G 使用置換線基本定理我們有

$$KX_9 = \mathfrak{S}_{\varphi(G)}^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_K(X) \implies \varphi(G) \in KX_9$$

但注意到 $I \in KX_9$，且 $I \in \mathcal{H}_{(Fe)}$，因此 $\varphi(G) = I$ 或 X_9，但 φ 是一個雙射，故 $\varphi(G) = I$。

接著，我們證明 $X = X_{100}$。

對 I 使用置換線基本定理，則我們有

$$GI = \mathfrak{S}_G^{\mathcal{L}^\varphi}(X) = \mathfrak{S}_I(X) \implies \mathfrak{S}_I(X) = INa \implies X = X_{100}$$

接著，我們證明 $\varphi : Na \leftrightarrow X_{57}$。

注意到以下交比

$$(Ge, X_9; G, \varphi(Na)) = (Ge, X_9; Na, I)_{\mathcal{H}_{(Fe)}} = I(Ge, X_9; Na, I) = (Ge, X_9; G, X_{57})$$

故 $\varphi : Na \leftrightarrow X_{57}$。 ■

Corollary 4. I, X_9 的 cross point 是 Ge^*。

Corollary 5. IK 和 IGX_{100} 相切。

3 配極

接著我們可以來討論和配極有關的一些性質，以下假設 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\infty$

Theorem 3. 令 $\Omega = \mathcal{L}^*$ 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓，則對於任意等角共軛點 P, P^*，和一點 $X \in \Omega$，設 Γ 爲以 X 爲圓心的圓，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\Gamma(AB)$，則

(i) $X \in \odot(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}})$

(ii) $\triangle ABC \cup P \cup P^* \eqsim \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} \cup \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X)) \cup \mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$

Proof. (i) 由算角度我們顯然有

$$\measuredangle B^{\mathfrak{p}}XC^{\mathfrak{p}} = \measuredangle(AC, AB) = \measuredangle CAB = \measuredangle CXB = \measuredangle(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}, A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}) = \measuredangle B^{\mathfrak{p}}A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$$

(ii) 首先注意到

$$\measuredangle BAC + \measuredangle B^{\mathfrak{p}}A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} = 0$$

因此我們顯然有 $\triangle ABC \eqsim \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$
設 $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_P(X))$, $\mathfrak{p}_\Gamma(\mathfrak{S}_{P^*}(X))$ 爲 Q, Q^*，則

$$\measuredangle QA^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}} = \measuredangle(\mathfrak{S}_P(X) \cap BC)XC = \measuredangle PAC = -\measuredangle P^*AB$$

故顯然有

$$\triangle ABC \cup P \cup P^* \eqsim \triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}} \cup Q^* \cup Q. \qquad \blacksquare$$

事實上配極某種程度上也可以保共斯坦納外接橢圓。

Proposition 14. 設 $\mathcal{S}t$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於 $\mathcal{S}t$ 上一點 X，設 (X) 爲以 X 爲中心的圓錐曲線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則 X 在 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓上。

Proof. 設 $\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}$ 爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的斯坦納外接橢圓，則

$$\begin{aligned} A(A, B; C, X)_{\mathcal{S}t} &= (\infty_{BC}, B; C, AX \cap BC) \\ &\overset{\mathfrak{p}_{(X)}}{=} (A^{\mathfrak{p}}X, A^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}; A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}, A^{\mathfrak{p}}\infty_{B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}) \\ &= A^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}}, B^{\mathfrak{p}}; C^{\mathfrak{p}}, X)_{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

同理可得

$$B(A,B;C,X)_{\mathcal{S}t} = B^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};C^{\mathfrak{p}},X)_{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}},\ C(A,B;C,X)_{\mathcal{S}t} = C^{\mathfrak{p}}(A^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};C^{\mathfrak{p}},X)_{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}}$$

因此 $X \in \mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}$。 ■

Proposition 15. 令 φ 爲 $\triangle ABC$ 上的等截共軛變換，$\mathcal{S}t = \mathcal{L}^{\varphi}$ 爲 $\triangle ABC$ 的斯坦納外接橢圓，則對於任意點 P，和一點 $X \in \mathcal{S}t$，設 (X) 爲以 X 爲中心的任意錐線，設 $A^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(BC)$,$B^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(CA)$, $C^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(AB)$，則

$$\mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{S}t}(X)), \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{S}t}(X))$$

爲 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的一對等截共軛點。

Proof. 令 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{S}t}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{S}t}(X))$，則我們等價要證明

$$A^{\mathfrak{p}}(B^{\mathfrak{p}},C^{\mathfrak{p}};A^{\mathfrak{p}},Q)_{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}} = A^{\mathfrak{p}}(C^{\mathfrak{p}},B^{\mathfrak{p}};A^{\mathfrak{p}},R)_{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}}$$

然而這等價於要證明

$$(C,B;AX\cap BC,\mathfrak{S}_P^{\mathcal{S}t}(X)\cap BC) = (B,C;AX\cap BC,\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{S}t}(X)\cap BC)$$

但這是顯然的。 ■

Theorem 4. 延續 (15) 的標號，設 $Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{S}t}(X))$, $R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{S}t}(X))$，設 $\mathfrak{K}_{P,\varphi(P)}^{\mathcal{S}t}(X) = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_{Q,R}^{\mathcal{S}t^{\mathfrak{p}}}(X) = \mathfrak{K}^{\mathfrak{p}}$，設 $\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}}$ 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}'}$，則

$$\frac{P\varphi(\mathfrak{K})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{K})} = \frac{R\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}'}}$$

Proof. 設 $\infty_{P\varphi(P)}$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle ABC}$，∞_{QR} 關於 $\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}$ 的等截共軛點爲 $T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}$，則

$$\begin{aligned}\frac{P\varphi(\mathfrak{K})}{\varphi(P)\varphi(\mathfrak{K})} &= (P,\varphi(P);\varphi(\mathfrak{K}),\infty_{P\varphi(P)}) = A(\varphi(P),P;\mathfrak{K},T_{\triangle ABC})_{(ABCP\varphi(P))}\\ \frac{R\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}'}} &= (R,Q;\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}'},\infty_{RQ}) = A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}})_{(A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}QR)}\end{aligned}$$

注意到我們有

$$\begin{aligned}&Q = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_P^{\mathcal{S}t}(X)),\ R = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{S}t}(X))\\ &\mathfrak{K}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\varphi(\mathfrak{K})}^{\mathcal{S}t}(X)),\ T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}_{(X)}(\mathfrak{S}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{\mathcal{S}t}(X))\end{aligned}$$

則我們有

$$
\begin{aligned}
\frac{R\mathcal{L}\boldsymbol{i}^{\mathfrak{p}'}}{Q\mathcal{L}\boldsymbol{i}^{\mathfrak{p}'}} = A^{\mathfrak{p}}(Q,R;\mathcal{L}\boldsymbol{i}^{\mathfrak{p}},T_{\triangle A^{\mathfrak{p}}B^{\mathfrak{p}}C^{\mathfrak{p}}}) &= (\mathfrak{S}_{P}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}(X),\mathfrak{S}_{\varphi(P)}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}(X);\mathfrak{S}_{\varphi(\mathcal{L}\boldsymbol{i})}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}(X),\mathfrak{S}_{\infty_{P\varphi(P)}}^{\mathcal{S}\boldsymbol{t}}(X)) \\
&= A(P,\varphi(P);\varphi(\mathcal{L}\boldsymbol{i}),\infty_{P\varphi(P)}) \qquad (5) \\
&= A(\varphi(P),P;\mathcal{L}\boldsymbol{i},\infty_{AT_{\triangle ABC}}) \\
&= A(\varphi(P),P;\mathcal{L}\boldsymbol{i},T_{\triangle ABC}) = \frac{P\varphi(\mathcal{L}\boldsymbol{i})}{\varphi(P)\varphi(\mathcal{L}\boldsymbol{i})}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

4 正交截線

我們都知道外接圓上一點 X 的正交截線會是 O-張志煥線，但這樣似乎有點狹隘，因此我們給了他一個也許會有用的推廣，我們先用另一個觀點來看平常的正交截線。

Proposition 16. 設 X 爲任意點，設 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{H,X}$，假設垂直 X 關於 $\mathcal{D}$ 的切線方向的無窮遠點爲 $\infty^{\perp}_{\mathcal{D}_X}$，則 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_{\infty^{\perp}_{\mathcal{D}_X}}(X)$，特別的我們有 $\mathcal{O}(X)$ 垂直 X 在 $\mathcal{D}$ 上的切線

Proof. This is Trivial. ■

Proposition 17. 設 X 爲任意點，$\mathcal{D}$ 爲過 A, B, C, X 的任意外接錐線，則存在一點 P 使得，$\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_P(X)$，並且我們有 X 在 $\mathcal{D}$ 上的切線垂直 PX。

Proof. 考慮一個變換 $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，使得 $X\mathcal{F}(Y) \perp XY$，則這顯然是一個射影對合變換，故存在一對合中心 P 滿足對所有 Y 都有 $P, Y, f(Y)$ 共線，特別的取 $Y = A, B, C$ 可以注意到 $\mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_P(X) = \mathcal{O}(X)$，且因爲 P 爲對合中心，故 $PX \perp XX$，即 X 在 $\mathcal{D}$ 上的切線垂直 PX。 ■

Proposition 18. 設 X 爲任意點，則對於任何一點 $P \in \mathcal{O}(X)$，存在一個過 A, B, C, X 的外接圓錐曲線 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_P(X)$。

Proof. 設 AP 和過 X 垂直 AX 的直線交於點 P_A，考慮錐線 $\mathcal{D} = (ABCXP_A)$，則由 (17)，存在一點 P' 使得 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{D}}_{P'}(X)$，但這表示 $P' \in \mathcal{O}(X) \cap AP_A$，即 $P = P'$。 ■

Proposition 19. 對於 $\triangle ABC$ 外接圓 Ω 上的點 X，設等共軛 φ 滿足 $\varphi(X) \in \mathcal{L}_\infty$，則 $\mathcal{O}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(H)}(X)$，特別的我們有 $\varphi(H) \in \mathcal{O}(X)$。

Proof. 考慮張志煥截線基本定理則我們有

$$\mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\varphi}_{\varphi(H)}(X) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^*}_{H^*}(X) = \mathfrak{S}_O(X) = \mathcal{O}(X)$$ ■

Proposition 20. 給定等軸雙曲線上五點 $PQABC$，做過 P 垂直 AQ 的線交 BC 於 D 同理定義 E, F 則 D, E, F 共線且垂直 PQ。

5 心世界

Problem 1. $\triangle ABC$ 三角形，$\triangle D'E'F'$ 爲三個旁切圓切點，A' 爲 A 關於外接圓的對鏡點，AI 交 $\odot(ABC)$ 於 $M \neq A$，MA' 交 BC 於 X。
證明：$XI \parallel E'F'$。

Proof. 設 H 爲 $\triangle ABC$ 垂心，I' 爲 I 對 EF 的對稱點，注意到根據定義我們有 $\mathfrak{S}_I(A') = IX$，因此由算角 Lemma

$$\measuredangle(IX, BC) = \measuredangle AA'I$$

另一方面，設 S 爲 (AI) 和 (ABC) 的交點，則由完全四線形性質我們有 SN, EF, BC 共點，其中 N 爲 $\widehat{BAC}$ 弧中點，且由 $\measuredangle ASI = 90^\circ$，我們有 $\mathfrak{S}_I(S) = ID$，其中 D 爲 BC 上的內切圓切點，故 S, D, M 共線，設 T 爲 D 在 EF 上的垂足，U 爲 EF, BC 的交點，則我們有 $\measuredangle UTD = 90^\circ = \measuredangle USD$，因此 S 爲 $\{BC, CA, AB, EF, DT\}$ 的密克點，故我們有垂心線 H, T, I' 共線，且由垂心線垂直牛頓線以及牛頓線平行等截共軛線，我們有 $E'F' \perp HI'$，最後算角

$$\begin{aligned}\measuredangle(XI, E'F') &= \measuredangle(XI, BC) + \measuredangle(BC, AI) + \measuredangle(AI, E'F')\\ &= \measuredangle AA'I + \measuredangle(AH, EF) + \measuredangle(EF, TI')\\ &= \measuredangle AA'I + \measuredangle(EF, AA') + \measuredangle(IA', EF) = 0\end{aligned}$$

■

Problem 2 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P15)**.** 設 $Sc = X_{21}$ 爲三角形 $\triangle ABC$ 的歐拉線和費爾巴哈雙曲線除了 H 以外的交點，則 Sc 的等角共軛點爲 X_{65} 即切點三角形的垂心。

Proof. 首先注意到 $X_{65} = X_{55}X_{56} \cap NaGe$ (屬於後者可以用 I, H 的極點是 X_{65} 看出來)，接著考慮 X_{110}，則我們顯然有

$$\mathfrak{i}_{\mathcal{H}_{Fe}}(X_{110}) = Sc,\ \text{因此，} \mathfrak{S}_{Ge}(X_{110}) = GeSc, \mathfrak{S}_{Na}(X_{110}) = NaSc$$

接著考慮等共軛變換 $\psi = (\cdot)^* \circ \varphi \circ (\cdot)^*$，其中 $(\cdot)^*, \varphi$ 分別爲等角和等截共軛變換。
則不難發現 $\psi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$，故我們可以使用張志煥截線基本定理，

$$Sc \in \mathfrak{S}_{Ge}(X_{110}) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{X_{56}}(X_{110}) = GeX_{56}, Sc \in \mathfrak{S}_{Na}(X_{110}) = \mathfrak{S}^{\mathcal{L}^\psi}_{X_{55}}(X_{110}) = NaX_{55}$$

因此由迪沙格對合定理 $Sc^* = X_{65}$。 ■

Problem 3 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P2). X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到 X_{99} 的三線姓極線爲 X_2X_6，且我們知道 X_{69} 爲 X_6 的反補點且在 $(ABCOH)$ 上，因此 $X_{69} = \mathfrak{i}^{\mathcal{L}^*}_{X_3,X_4}(X_{99})$，故由 (2)，$X_3, X_4, X_{69}, X_{99}$ 四點共圓。 ■

Problem 4 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P5). $X_{69}X_{99}$ 交歐拉線在 X_2 對 X_3 對稱點。

Proof. 注意到我們有 $X_{69} = \mathfrak{i}^{\mathcal{L}^*}_{\mathcal{H}_\mathcal{J}}(X_{99})$，因此我們算角

$$\begin{aligned}\measuredangle GX_{99}X_{69} &= \measuredangle AX_{99}X_{74} + \measuredangle GX_{99}A\\ &= \measuredangle(OH, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}^{\Omega}_{K}(X_{99}))\\ &= \measuredangle(OG, BC) + \measuredangle(BC, GX_{69}) = \measuredangle(OG, GX_{69})\end{aligned}$$

即 $\odot(GX_{69}X_{99})$ 和歐拉線相切於 G。設 $X_{69}X_{99}$ 交 OH 於 T，則由上一題我們知道 X_3, X_4, X_{69}, X_{99} 四點共圓，故 T 滿足

$$\overline{TG}^2 = \overline{TO} \times \overline{TH} \implies T\text{爲 } X_2 \text{ 對 } X_3 \text{ 的對稱點}$$ ■

Problem 5 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P12). 三角形 $\triangle ABC$，I 爲內心，O 爲外心，Ge 爲格爾鋼點，設 X_{104} 爲 OI 上無窮遠點的等角共軛點，X_{999} 爲 I, X_{57} 中點，則 Ge, $X(104)$, $X(999)$ 三點共線。

Proof. 設 $X_{104}Ge$ 交 $\odot(ABC)$ 於 X，則我們有 $Ge = \mathfrak{i}^{\Omega}_{\mathcal{H}_{Fe}}(X)$，因此由我們有

$$\begin{aligned}\measuredangle GeXI &= \measuredangle AXGe + \measuredangle AXI\\ &= \measuredangle(OI, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_I(X)) = \measuredangle(OI, IGe)\end{aligned}$$

即 OI 和 $\odot(XGeI)$ 相切。

另一方面，我們有 X_{56}, Ge, X_{21} 共線，因此

$$\begin{aligned}\measuredangle X_{65}X_{56}Ge &= \measuredangle(OI, \mathfrak{S}_{21}(X))\\ &= \measuredangle(OI, BC) + \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_{X_{21}}(X))\\ &= \measuredangle AXGe + \measuredangle X_{65}XA = \measuredangle X_{65}XGe\end{aligned}$$

因此 X_{56}, Ge, X_{21}, X 四點共圓，且注意到我們有

$$-1 = (I, X_{57}; X_{65}, X_{56}) \implies \overline{X_{999}I}^2 = \overline{X_{999}X_{57}}^2 = \overline{X_{999}X_{56}} \times \overline{X_{999}X_{65}}$$

故 X_{999} 在 $\odot(X_{56}GeX_{21}X)$ 和 $\odot(XGeI)$ 的根軸上，即 $X_{999} \in XGe = GeX_{104}$ ■

Problem 6 (幾何毒書會 X_n 馬拉松 P13)**.** X_7, X_8, X_{21}, X_{99} 四點共圓

Proof. 注意到我們有 $X_{99} \in \mathcal{L}^* \cap \mathcal{L}^\varphi$，其中 φ 爲等截共軛變換，現在取 $P = X_7$，因此由 (2)，我們有

$$X_7, X_8, \mathfrak{i}^{\mathcal{L}^\varphi}_{X_7,X_8}(X_{99}), X_{99}, \text{ 四點共圓}$$

且我們注意到 $X_{21} = X_7X_{56} \cap X_8X_{55} = \mathfrak{i}^{\mathcal{L}^\varphi}_{X_7,X_8}(X_{99})$，故得證。 ■

Problem 7. X_{21}, X_{55}, X_{56}, X_{110} 四點共圓。

Proof. 設 φ 爲等截共軛變換，則考慮等共軛 $\psi : (\cdot)^* \circ \varphi \circ (\cdot)^*$，則我們有

$$\psi : X_{55} \mapsto X_{56}$$

設 X 爲 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{L}^\psi$ 的第四個交點，則我們有 $X_{55}X_8 \cap X_{56}X_7 = X_{21}$ 因此由 (2)，

$$X_{55}, X_{56}, X_{21}, X \text{ 四點共圓}$$

接著我們證明 $X = X_{110}$。

這等價要證明 $\psi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$ 但注意到

$$\psi : [x : y : z] \mapsto \left[\frac{a^4}{x} : \frac{b^4}{y} : \frac{c^4}{z}\right]$$

且我們有 $X_{110} = \left[\dfrac{a^2}{b^2 - c^2} : \dfrac{b^2}{c^2 - a^2} : \dfrac{c^2}{a^2 - b^2}\right]$，因此

$$\psi(X_{110}) = \left[a^2(b^2 - c^2) : b^2(c^2 - a^2) : c^2(a^2 - b^2)\right]$$

顯然滿足無窮遠線的方程式 $x + y + z = 0$，因此 $X = X_{110}$，故得證。 ■

特別地，我們有 G, X_{15}, X_{16}, X_{110} 四點共圓。

Problem 8. 設 K_θ 爲 Kiepert 雙曲線上角度爲 θ 的點，則對於任意的 θ，我們都有 G, K^*_θ, $K^*_{-\theta}$, X_{110} 四點共圓。

Proof. (純幾) 首先我們知道 X_{110} 的斯坦納線爲 HG，因此由 $\mathfrak{S}_H(X_{110}) = HG$ 我們知道 $\mathfrak{i}^\Omega_{\mathcal{H}_k}(X_{110}) = G$，並且注意到對於任意的 α，我們都有 K, K_α, $K_{-\alpha}$ 共線和 G, K^*_α, $K_{-\alpha}$ 共線，即

$$\mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110}) = GK^*_{-\theta}, \mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}) = GK^*_\theta$$

因此由算角引理

$$\measuredangle K^*_\theta G K^*_{-\theta} = \measuredangle(GK^*_\theta, GK^*_{-\theta}) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{K_{-\theta}}(X_{110}), \mathfrak{S}_{K_\theta}(X_{110})) = \measuredangle K^*_\theta X_{110} K^*_{-\theta}.$$ ■

Proof. (重心坐標) 我們只要證明 X_{110} 會被把 $K_\theta^* \mapsto K_{-\theta}^*$ 的等共軛變換 φ 打到無窮遠即可，注意到對於所有的 K_θ 我們有重心坐標

$$K_\theta = \left[\frac{a}{\sin(A+\theta)} : - : -\right] \implies K_\theta^* = [a\sin(A+\theta) : - : -]$$
$$\implies \varphi([x:y:z]) = \left[\frac{a^2\sin(A+\theta)\sin(A-\theta)}{x} : - : -\right] = \left[\frac{a^2(\sin^2 A - \sin^2\theta)}{x} : - : -\right]$$

代入 X_{110} 則我們有 $\displaystyle\sum_{\text{cyc}}(\sin^2 A - \sin^2\theta)(b^2 - c^2) = 0$ 故得證 ■

Problem 9. N, Ko, X_{110} 三點共線。

Proof. 以下的證明中使用到 N 的正交截線垂直 OKo 這一件事。

注意到 $\mathfrak{L}_{\mathcal{D}_{N,H}}(X_{110}) = N$, $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_\mathcal{J}}(X_{110}) = O$，並且我們有 N 的正交截線垂直 OKo，因此我們有 OKo 平行 N 在 $\mathcal{D}_{N,H}$ 上的切線，即 $OKo \parallel \mathfrak{S}_N(X_{110})$，故

$$\measuredangle AX_{110}N = \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_{Ko}(X_{110})) = \measuredangle(BC, OKo) = \measuredangle(BC, \mathfrak{S}_N(X_{110})) = \measuredangle AX_{110}Ko$$ ■

Problem 10. 設 K 爲共軛重心，G_H 爲垂足三角形的重心。
證明：KG_H 和 $\odot(KX_{69}X_{110})$ 相切

Proof. 設 $\mathcal{H}_\mathcal{J}$ 爲 $\triangle ABC$ 的 Jerabek 雙曲線，考慮等角共軛：$(\cdot)^*$，等截共軛：$(\cdot)'$，正交共軛：φ，則我們知道 $\psi = (\cdot)' \circ \varphi \circ (\cdot)^*$ 爲一等共軛變換，則我們可以立即得到 $\psi(K) = X_{69}$，且我們有 X_{110} 的等角共軛點的正交共軛點的三線性極線爲歐拉線，故 X_{110} 的等角共軛點的正交共軛點在斯坦納外接橢圓上，故 $\psi(X_{110}) \in \mathcal{L}_\infty$，因此我們可以使用張志煥截線基本定理

$$\mathfrak{S}_G(X_{110}) = \mathfrak{S}_{X_{69}}^{\mathcal{L}_\infty^\psi}(X_{110}) = GX_{69} = GK \implies \mathfrak{L}_{\mathcal{H}_\mathcal{J}}^{\mathcal{L}_\infty^\psi}(X_{110}) = K$$

另一方面由 cross point 我們知道 KG_H 和 $\mathcal{H}_\mathcal{J}$ 相切，因此由算角引理

$$\measuredangle X_{69}X_{110}K = \measuredangle(\mathfrak{S}_G(X_{110}), \mathfrak{S}_{X_{69}^*}(X_{110})) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{X_{69}}^{\mathcal{L}_\infty^\psi}(X_{110}), \mathfrak{S}_K^{\mathcal{L}_\infty^\psi}(X_{110})) = \measuredangle(KX_{69}, KG_H)$$

■

Problem 11. 給定 $\triangle ABC$ 和內心 I 外心 O，設 H_A 爲 $\triangle BIC$ 垂心。且設 $\triangle DEF$ 爲切點三角形。設 $\odot(AEF)$ 和 $\odot(AIO)$ 分別交 $\odot(ABC)$ 於 S 和 T (與 A 相異)。
證明：T, H_A, I, S 共圓。

Proof. 設 $\mathcal{H}_{Fe}$ 爲 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈雙曲線，則顯然我們有

$$\mathfrak{S}_I(S) = IH_A \implies \mathfrak{L}_{\mathcal{H}_{Fe}}(S) = H_A$$

設 OI 上無窮遠點的等角共軛點爲 Y，則我們有 $Y \in SH_A$。
設 A' 爲 A 在 $\odot(ABC)$ 上的對鏡點則我們有 S, I, A' 共線，故

$$\measuredangle H_ASI = \measuredangle YSA' = \measuredangle YAO = \measuredangle H_AIO \implies \odot(H_ASI) \text{ 和 } OI \text{ 相切}$$

另一方面我們有

$$\measuredangle TSI = \measuredangle TSA' = \measuredangle TAO = \measuredangle TIO \implies \odot(TSI) \text{ 和 } OI \text{ 相切}$$

故 T, H_A, I, S 共圓。 ■

Problem 12 (GAMO P3)**.** $\triangle ABC$ 中設 I, H, Na 爲其內心、垂心、奈格爾點。D 爲 AH 和外接圓的交點，S 爲 $\odot(AI)$ 和外接圓的交點，設 Na' 爲 Na 對 BC 的對稱點，M 爲 BC 弧中點，ANa 交 $\triangle ABC$ 外接圓於 X。
證明：過 Na' 垂直 SD 的直線、BC、MX 三線共點。

Proof. 設 $T = MX \cap BC$ 則我們只需要證明 $Na'T \perp SD$ 即可，因爲 $AD \perp BC$，因此我們只需要證明以下的角度關係

$$\measuredangle(BC, TNa') = \measuredangle ADS$$

注意到

$$\measuredangle(BC, TNa') = \measuredangle(NaT, BC) = \measuredangle(\mathfrak{S}_{Na}(M), BC) = \measuredangle AMN^*$$

且我們由常用 Lemma 有 SM 過 BC 上的切點，因此我們有 S, Na^*, M 三點共線，故

$$\measuredangle(BC, TNa') = \measuredangle AMN^* = \measuredangle AMS = \measuredangle ADS$$

■