Complejidad Computacional
Tarea 2.2

Karla Adriana Esquivel Guzmán
Andrea Itzel González Vargas
Luis Pablo Mayo Vega
Carlos Gerardo Acosta Hernández

Entrega: 25/04/17
Facultad de Ciencias UNAM

Ejercicios

1. Demuestra que si $P = NP$, entonces existe un lenguaje EXP que requiere circuitos de tamaño $2^n/n$.

Demostración: Por el teorema de Meyer (teorema 6.20 del libro) Implica que si $P = NP$ entonces $Exp \not\subset P/Poly$.
Entonces como $Exp \notin P/Poly$ por lo tanto debe existir un lenguaje $L \in EXP$ que requiere un circuito de tamaño $2^n/n$.

2. Describe un circuito NC para calcular el producto de dos matrices de $n \times n$.

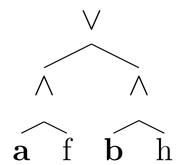
Demostración: Primero veamos el caso para matrices $2x2$

$$A = \begin{pmatrix} \text{a} & \text{b} \\ \text{c} & \text{d} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{f} & \text{g} \\ \text{h} & \text{i} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \text{af + bh} & \text{ag + bj} \\ \text{cf + dh} & \text{cg + dj} \end{pmatrix}$$

Para cada entrada de la matriz AB la calcularemos con el siguiente circuito



Ahora veamos para una matriz de $3x3$

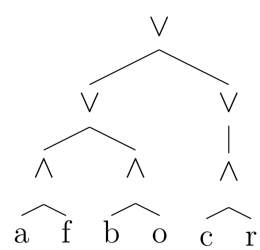
$$A = \begin{pmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} \\ \text{d} & \text{e} & \text{f} \\ \text{g} & \text{h} & \text{i} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \text{l} & \text{m} & \text{n} \\ \text{o} & \text{p} & \text{q} \\ \text{r} & \text{s} & \text{t} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \text{al + bo + cr} & ... & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

El circuito quedaría

Para la entrada [1,1] el valor de las hojas.



Podemos generalizar un árbol para las matrices de nxn que tengan profundidad de $log2n$ donde las primeras $(log2n) - 1$ niveles son para ir dividiendo por la mitad los OR (Sumas) que se deben hacer para obtener el valor de la entrada y el último nivel hace el AND (Multiplicación).

3. Demuestra que L **es** $P - completo$ **implica que** $L \in NC$ **si y sólo si,** $P = NC$

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que $L \in NC$

P.D. $P = NC$

$L \in NC$ y es $P - completo$, por lo que

$$\forall L' \in P,\ L' \leq_{NC} L \tag{1}$$

i.e. toda L' en P es NC reductible a L. Por otro lado tenemos que

$$si \quad L_1 \leq_{NC} L_2 \quad y \quad L_2 \in NC, \quad entonces \quad L_1 \in NC \tag{2}$$

Por (1) y (2) sabemos entonces que $\forall L' \in P$, $L' \in NC$. Como todo L' en P pertenece también a NC (i.e. $P \subseteq NC$) y $NC \subseteq P$, entonces $P = NC$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos que $P = NC$

P.D. L $\in$ NC

L es $P - completo$, entonces $L \in P$. Ya que $P = NC$, entonces $L \in NC$.

$\square$