Complejidad Computacional
Tarea 2

Karla Adriana Esquivel Ramírez
Andrea Itzel González Vargas
Luis Pablo Mayo Vega
Carlos Gerardo Acosta Hernández

Entrega: 14/03/17
Facultad de Ciencias UNAM

Ejercicios

1.

2.

3.

Demuestra que el lenguaje
$SPACETM = \{\langle \mathrm{M} \rangle \langle \alpha \rangle 1^n \mid \mathrm{M}$ es una MT que acepta α en espacio n $\}$
es PSPACE-completo.

P.D.

I) $SPACETM \in PSPACE$.

II) Cualquier $L \in PSPACE$ se puede reducir a SPACETM

Entrada $<$ M, α,1^n $>$

Construimos $M' \in TM$ para Simular M, M' con dos contadores.

I) Un contador para contar el espacio utilizado por M, el otro contador contará el número de pasos que va a ejecutar M. Cada vez después de que M ' Simule un paso de M, actualiza los contadores y comprueba si el espacio utilizado es mayor que n o si las etapas que se ejecutan en M son mayores que 2^{cn} para alguna constante c que está relacionada con M.

Si cualquiera de las anteriores ocurre entonces se rechaza inmediatamente. Observemos que el número total de configuraciones posibles de M es como máximo 2^{cn}, por lo tanto, si M no se detiene en este número de pasos, entonces debe haber entrado en un bucle infinito y M ' Rechaza, después de simular M corriendo en w, si M acepta w en espacio n, M ' Acepta, en otro caso M' rechaza. Por definición de SPACETM, M' decide a SPACE. Para simular M solamente utilzamos espacio O(n). Entonces SPACETM PSPACE

II) Ahora Observemos que para cualquier $L \in PSPACE$ dónde L es un lenguaje existe una Maquina de Turing Determinista M que decide L usando espacio s(n) el cual es una entrada polinomial de tamaño n. Consideremos la función f: $\Big\{0,1\Big\}^n \Rightarrow \Big\{0,1\Big\}^m$ tal que $f(x) =< M, x, 1^{s(n)} >$. Dónde m es polinomial de n. La función f puede ser computada en espacio y tiempo polinomial. Por definición de SPACETM $x \in L$ syss $f(x) \in SPACETM$. Así que SPACETM es PSPACE-hard entonces $SPACETM \in PSPACE-completo$

$\therefore$ Es PSPACE-Completo.

...

4.

Demuestra $2SAT \in NL$

Primero veamos que para todo F en 2-SAT podemos construir una grafica dirigida G de la siguiente manera:

V(G) son las literales de F y hay una arista de a a b en E(G) si y solo si (a' v b) esta e F

Con esta construccion veamos que:

F es satisfaceible si y solo si G no tiene un ciclo donde exista una literal y su negacion.

=>)

veamos que a' V b es equivalente a a->b

Supongamos que tenemos un ciclo que contiene a b y b' en G. Si esto pasa entonces por transitividad signfica que b...b' y que b'. . . b por lo que tendriamos b b' lo cual es una contradiccion.

Por lo que si F es satisfacible entonces G no tiene un ciclo donde exista una literal y su negacion.

<=)

Veamos estos haciend induccion sobre el numero de variables Cuando se tienen 0 varaibles

Si F no tiene variables entonces F es satisfacible y G no tiene ciclos.

Hip. Ind

Supongamos que se cumple cuando se tiene n variables

Ahora vemos que pasa cuadno se tiene un variables mas:

Tomamos una literal b que en la grafica G generada no tiene un camino de b a b'.

Ahora supongamos que hay un camino de b a c y un camino de b a c'

Por contraposicion tendriamos un camino de c' a b' y por transitividad tendiamos un camino b a b' lo cual sera una contradiccion.

Ahora hagamos todas las literales a las que llegamos a partir de b verdaderas, esta conjunto esta bien definido por lo anterior visto. Entonces todas las clausulas que contenga a un literal de este conjunto se satisfacen. Y nos queda una grafica G' dada por las clausulas restantes las cuales tampoco tienen un ciclo con una literal y su negacion y por Hipotesis de induccion esta formula tambien es satisfacible.

.: Si G no tiene ciclos donde existe una literal y su negacion F es satisfacible

En libro tenemos que NL= coNL veamos que 2-SAT' en NL implica 2-SAT en NL

Para ver si algo cumple con 2-SAT' basta con ver si hay una camino de alguna literal b a b' y de b' a b esto es que exista un ciclo en la grafica G generada. Por lo que podemos reducir el problema a PATH que de igual manera por lo visto en el libro PATH esta en NL.

.: 2-SAT' esta en NL .: 2-SAT esta en NL

5.

6.