



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»
(ДФУ)**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

По курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»

Студент группы Б9123-01.03.02ии
Моттуева Уруйдана Михайловна

г. Владивосток

2025

Ход работы:

1. Выбор распределения

Номер распределения определяется как 13 по модулю 6, следовательно, номер распределения равен 1. Это соответствует равномерному распределению $U(a, b)$.

2. Оценка параметров равномерного распределения методом моментов

Равномерное распределение имеет плотность:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Моменты этого распределения:

- Математическое ожидание:

$$E(X) = \frac{a+b}{2},$$

- Дисперсия:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Метод моментов заключается в приравнивании теоретических моментов к выборочным. Выборочные моменты равны:

- Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

- Выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Из выражений для математического ожидания и дисперсии получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{x}, \\ \frac{(b-a)^2}{12} = s^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим оценку параметров:

$$\begin{cases} a+b = 2\bar{x}, \\ b-a = \sqrt{12s^2}. \\ a = \bar{x} - \sqrt{3s^2}, \\ b = \bar{x} + \sqrt{3s^2}. \end{cases}$$

3. Оценка параметров равномерного распределения методом максимального правдоподобия

Функция правдоподобия для выборки x_1, x_2, \dots, x_n из $U(a, b)$:

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^n f(x_i; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2}, & a \leq x_i \leq b \text{ для всех } i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\ln L(a, b) = -n \ln(b-a), \text{ при условии } a \leq x_i \leq b \text{ для всех } i.$$

Следовательно, для максимального аргумента L нужно минимизировать $b-a$, и в результате оптимальные оценки параметров равномерного распределения методом максимального правдоподобия равны:

$$\begin{cases} a = \min(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ b = \max(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

4. Генерируем 2 выборки из равномерного распределения на 100 и 10000 элементов на языке python и получаем результат оценки параметров.

```
1. from scipy.stats import uniform
2. import numpy as np
3. import pandas as pd
4. import matplotlib.pyplot as plt
5.
6. a, b = 5, 15
7.
8. np.random.seed(13)
9. sample_100 = np.random.uniform(a, b, 100)
10. sample_10000 = np.random.uniform(a, b, 10000)
11.
12. def method_M(sample):
13.     mean = np.mean(sample)
14.     variance = np.var(sample, ddof=0)
15.     ans_a = mean - np.sqrt(3 * variance)
16.     ans_b = mean + np.sqrt(3 * variance)
17.     return ans_a, ans_b
18.
19. def method_MP(sample):
20.     ans_a = np.min(sample)
21.     ans_b = np.max(sample)
22.     return ans_a, ans_b
23.
24. def method_fit(sample):
25.     loc, scale = uniform.fit(sample, floc=np.min(sample))
26.     ans_a = loc
27.     ans_b = loc + scale
28.     return ans_a, ans_b
29.
30. mm_a_100, mm_b_100 = method_M(sample_100)
31. ml_a_100, ml_b_100 = method_MP(sample_100)
32. fit_a_100, fit_b_100 = method_fit(sample_100)
33.
34. mm_a_10000, mm_b_10000 = method_M(sample_10000)
35. ml_a_10000, ml_b_10000 = method_MP(sample_10000)
36. fit_a_10000, fit_b_10000 = method_fit(sample_10000)
37.
38. data = [
```

```

39.     ["Истинные параметры", f"a={a}, b={b}", f"a={a}, b={b}"],
40.     ["Оценка ММ (a, b)", f"{mm_a_100:.3f}, {mm_b_100:.3f}",
      f"{mm_a_10000:.3f}, {mm_b_10000:.3f}"],
41.     ["Оценка ММП (a, b)", f"{ml_a_100:.3f}, {ml_b_100:.3f}",
      f"{ml_a_10000:.3f}, {ml_b_10000:.3f}"],
42.     ["Оценка fit (a, b)", f"{fit_a_100:.3f}, {fit_b_100:.3f}",
      f"{fit_a_10000:.3f}, {fit_b_10000:.3f}"]
43. ]
44.
45. columns = ["", "n=100", "n=10000"]
46.
47. fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 3))
48. ax.axis('tight')
49. ax.axis('off')
50.
51. table = ax.table(cellText=data, colLabels=columns, loc='center',
      cellLoc='center')
52. table.auto_set_font_size(False)
53. table.set_fontsize(10)
54. table.scale(1.2, 1.5)
55.
56. plt.title("Сравнение оценок параметров распределения  $U(a, b)$ ", fontsize=14,
      pad=20)
57.
58. plt.show()

```

	n = 100	n = 10000
Истинные параметры	a = 5, b = 15	a = 5, b = 15
Оценка ММ(a, b)	4.486, 15.017	5.046, 15.050
Оценка ММП(a, b)	5.000, 14.849	5.000, 15.000
Оценка fit(a, b)	5.000, 14.849	5.000, 15.00

https://colab.research.google.com/drive/1ZaJ-rDOka7qFhJNxM3yAzF53cX_1Wj9j?usp=sharing – ссылка на колаб с полным кодом программы