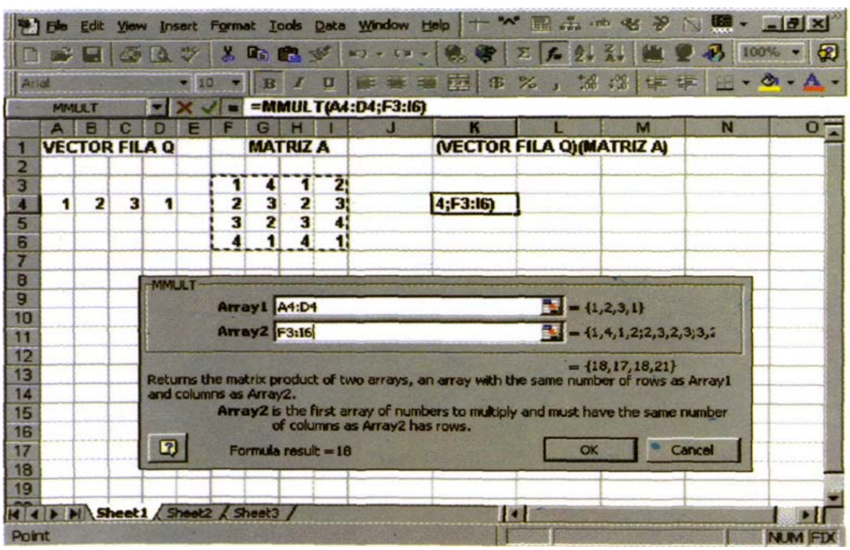
INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL Y DE MATRICES. APLICACIONES CON EXCEL

Araceli Rendón Trejo, Jesús Rodríguez Franco, Andrés Morales Alquicira



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD XOCHIMILCO

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL Y DE MATRICES. APLICACIONES CON EXCEL

Araceli Rendón Trejo, Jesús Rodríguez Franco,
Andrés Morales Alquicira

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD XOCHIMILCO

Proyecto editorial de los productos académicos de las áreas
de Investigación Departamental

Colección Investigaciones

ISBN: 970-654-297-3

Primera edición: 1998

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco
Calzada del Hueso núm. 1100, colonia Villa Quietud, 04960, México, D. F.
Sección de Producción Editorial

Impreso y hecho en México

Índice

Presentación

Las Matemáticas constituyen una parte fundamental en la formación académica de los estudiantes y profesionales de las Ciencias Sociales. Esto lo es aún más para los que se encuentran en áreas en donde es necesario resolver problemas relacionados con la producción, la organización, la toma de decisiones, etc.

El presente libro "Introducción al Algebra Lineal y de Matrices", se encuentra especialmente dirigido a las personas que estudian y laboran en las áreas de Administración, Economía y de Política y Gestión Social. Su objetivo es explicar las partes esenciales del Algebra Lineal de una manera clara, comprensiva y precisa abordando además, en la solución de los temas y problemas, el manejo de la computadora. Esto último, es imprescindible debido a las exigencias del competitivo mundo actual que demandan la solución rápida, y prácticamente inmediata, de problemas. Así, en este libro se busca integrar la enseñanza de las matemáticas y el uso de la computadora mediante el manejo de la hoja de cálculo electrónica Excel.

El libro consta de catorce capítulos en los que se presentan ejemplos que ayudan a comprender los temas tratados. Al principio de cada capítulo se encuentra una lista de objetivos que indican al lector el propósito del mismo. Para facilitar la comprensión de los temas y destacar los aspectos fundamentales, las definiciones han sido enmarcadas.

El primer capítulo describe el modelo lineal. Aborda las ecuaciones lineales considerando su estudio con dos o más incógnitas, la solución de los sistemas de ecuaciones por el método de eliminación Gaussiana y el método de matriz aumentada, el análisis de consistencia e inconsistencia de los sistemas de ecuaciones lineales y la determinación con un sistema de ecuaciones homogéneo.

En el capítulo 2 se tratan los conceptos básicos de vectores como la representación geométrica, la magnitud, la igualdad y los diferentes tipos de vectores. También se abordan las operaciones: suma, producto de vector, escalar por un vector, productos de un vector fila por un vector columna. Finalmente se analizan las propiedades de los vectores.

El capítulo 3 muestra el uso de la hoja de cálculo Excel en el manejo y solución de las operaciones entre vectores.

El capítulo 4 estudia los ángulos entre vectores, así como también la identificación de vectores paralelos y perpendiculares. También se analiza la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la proyección de vectores. Finalmente se ve la combinación lineal de vectores y la dependencia o independencia lineal.

El capítulo 5 se divide en dos partes para explicar el álgebra de matrices. En la primera se plantea el concepto de matriz y su notación, para posteriormente ver la dimensión de las matrices rectangulares y cuadradas. También se aborda el escalar. En la segunda parte se ven los diferentes tipos de matrices.

El capítulo 6 presenta las operaciones con matrices. En primer lugar se estudia la adición y sustracción seguida del producto interno de matrices y el producto entre dos matrices. Posteriormente se ve el producto de matrices especiales y finalmente la matriz inversa y sus aplicaciones para dar solución a un sistema de ecuaciones lineales.

El capítulo 7 explica el uso de la Hoja de Cálculo Excel para dar solución a las operaciones de matrices y vectores. Así mismo se plantea como obtener la matriz inversa y la matriz identidad.

En el capítulo 8 se analizan los métodos para encontrar los determinantes de matrices de orden (2 x 2), (3 x 3) y (n x n). Posteriormente se estudia el método de cofactores para aplicarlo en la determinación de la matriz inversa. También se analiza la solución de los sistemas de ecuaciones mediante la matriz inversa, el método de expansión por cofactores. Por último se realiza el estudio de la regla de Cramer.

El capítulo 9 emplea la hoja de cálculo Excel en la solución de determinates y transpuestas.

El capítulo 10 está integrado por siete partes, en la primera se muestra la obtención de ejes coordenados usando vectores, también se determina la combinación lineal de vectores y las bases en R^n. En la segunda parte se analiza la idea de representación única mediante el concepto de independencia lineal mientras que en la tercera se estudia el concepto de subespacios en R^n y de dimensión de un subespacio. En la cuarta se define el rango de una matriz, en la quinta se define el concepto de bases ortonormales y de matriz ortogonal, en la sexta se explica en concepto y cálculo de los mínimos cuadrados utilizando vectores y matrices, la última parte está dedicada al estudio de los espacios vectoriales.

El capítulo 11 aborda el tema de transformaciones lineales. En éste se hace énfasis en la representación matricial de las transformaciones lineales.

El capítulo 12 explica uno de los temas más importentes del álgebra lineal y matricial; el cálculo de los valores y vectores propios.

El capítulo 13 esta dedicado a tres aplicaciones en el Área Económica. La primera es el Modelo de Insumo-Producto, la segunda el de Ingreso Nacional y la tercera un modelo de mercado con dos bienes.

En el capítulo 14 se describe el proceso de cálculo de la Matriz Insumo-Producto utilizando la hoja de cálculo Excel

Deseamos que este libro contribuya a la compresión y a la resolución de los problemas de Algebra Lineal y de Matrices que enfrentan los estudiosos de las Ciencias Sociales. Confiamos que el uso de la hoja de cálculo Excel coadyuvará a la rapidez que se requiere en la solución de tareas y problemas del mundo actual.

Los autores

Capítulo 1
El modelo lineal

Objetivos:
Al terminar este capítulo, podrá :
- ✓ Identificar un modelo lineal.
- ✓ Diferenciar las características algebraicas y gráficas de las ecuaciones lineales.
- ✓ Resolver y graficar ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- ✓ Dar solución y graficar ecuaciones con dos incógnitas.
- ✓ Entender la composición de los sitemas de ecuaciones.
- ✓ Conocer los métodos de eliminación Gaussiana y Gauss - Jordan para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Identificar la consistencia e inconsistencia de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.1 Introducción

Durante muchos años, el estudio del álgebra ha estado principalmente relacionado con la solución de las ecuaciones. Una ecuación es un enunciado de dos expresiones algebraicas iguales[1].

[1] Paulk Rees Algebra. Mc-Graw Hill 1992 décima edición México 1992 pág. 121

Existen cierto tipo de problemas matemáticos que se resuelven utilizando ecuaciones lineales y otro en donde la relación entre variables incluye dos o más ecuaciones, siendo necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales simultaneas, las cuales pueden tener dos o más incógnitas. En éste capítulo se emplea la elimimación, reducción, eliminación Gaussiana y matriz aumentada (Gauss-Jordan) como métodos para dar solución a los sistemas de **m** ecuaciones con **n** incógnitas. Se incluye además los temas de consistencia e inconsistencia de sistemas de ecuaciones lineales y sistemas homogéneos.

1.2 Ecuaciones

La ecuación es una igualdad en la que hay una o varias incógnitas y sólo se puede comprobar si es verdadera para determinados valores de las incógnitas, por ejemplo:

Sea la ecuación $3x = 2x + 3$

Es verdadera si x se sustituye por el valor de 3, entonces cada lado es igual a 9

$$(3)(3) = 2(3) + 3$$
$$9 = 9$$

Es falsa si x se sustituye por el valor de 4, entonces cada lado es 12 y 11.

De lo anterior se concluye que el conjunto solución está formado por todos los números que satisfacen la ecuación. A los elementos del conjunto solución se les denomina raíz.

Teorema 1

a) Si a, b y c $\in \Re$.
Dada una ecuación $a = b$ es posible sumar cualquier cantidad c en ambos miembros de la ecuación, teniendo una ecuación equivalente:
$a + c = b + c$
$a - c = b - c$

b) Dada una ecuación $a = b$, se multiplica a ambos miembros de la ecuación por un número real distinto de cero ($c \neq 0$), obteniéndose una ecuación equivalente.
$ac = bc; \ c \neq 0$

c) Dada una ecuación $a = b$, se divide ambos miembros de la ecuación por un número real distinto de cero ($c \neq 0$), teniendo una ecuación equivalente.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}; \quad c \neq 0$$

Ecuación Lineal

Es la ecuación que esta formada con variables que tienen exponente uno, y que ningún término que forma la ecuación tiene más de una variable como factor, por ejemplo:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
2) Sea la ecuación:
$x^2 + x = 9$
No es una ecuación lineal, porque el exponente de la variable es igual a dos.
3) Sea la ecuación:
$2x + xy = 9$
No es una ecuación lineal, por tener dos variables como factores en uno de sus términos.

Ecuación de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita se escribe de la siguiente forma:

$ax = b$

En la solución de esta ecuación, se presentan solamente tres casos:

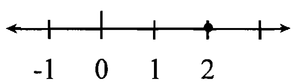
1) Si $a \neq 0$, la ecuación tiene una única solución
$x = b / a$

2) Si $a = 0$ y $b = 0$, la solución tiene número infinito de opciones ($0x = 0$), porque cualquier número real x satisface a la ecuación $ax = b$.

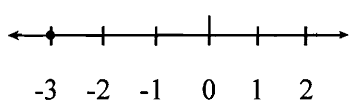
3) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación no tiene solución ($0x = b$) ya que cualquier número real x al sustituirlo del lado izquierdo de la ecuación y multiplicarlo por cero da como resultado que el primer miembro sea cero y el segundo miembro distinto de cero ($0 \neq b$).

Por ejemplo:

1) Sea la ecuación $3x = 6$
Encontrar la solución.
$x = 2$ es la solución única y representada geométricamente la solución es:



2) Sea la ecuación $-6 = 2x$ encontrar la solución.
$x = -3$ es la solución única y representada geométricamente la solución es :



3) Sea la ecuación $0 = 0x$, encontrar la solución.
La respuesta es No tiene solución

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se escribe en forma general de la siguiente manera:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2$$

en donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} son coeficientes de las variables (no todos son iguales a cero) b_1 y b_2 representan a los términos independientes (constantes numéricas reales), x_1 y x_2 son las variables.

La solución de este sistema de ecuaciones con dos incógnitas, es una pareja de números: $x_1 = \alpha$ y $x_2 = \beta$[2], los cuales se pueden denotar como x_1 y x_2, y al sustituirlos en ambas ecuaciones las convierten en identidades.

En el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, existen tres soluciones posibles; la primera tener una solución única, la segunda un número infinito de soluciones y la tercera no tener solución. El sistema de ecuaciones lineales que tenga por lo menos una solución se le llama compatible o consistente determinado, al que tiene un número infinito de soluciones se le conoce como incompatible o consistente indeterminado y si no tiene solución se dice que es inconsistente.

Por ejemplo:

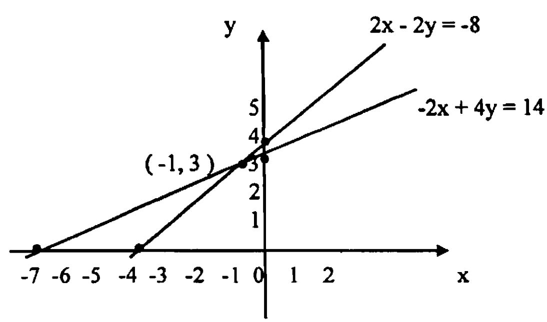
1) El sistema de ecuaciones:

   $2x - 2y = -8$

   $-2x + 4y = 14$

   El sistema tiene una solución única, la pareja (-1, 3), por lo tanto el sistema es consistente determinado, como se muestra en forma gráfica (ver figura 1.1).

Figura 1.1



[2] En donde α y β son constantes numéricas reales

2) El sistema de ecuaciones

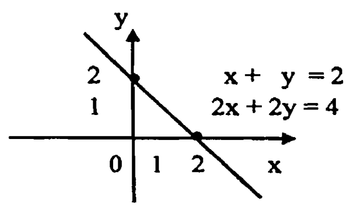
$x + y = 2$

$2x + 2y = 4$

El sistema tiene una infinidad de soluciones y el sistema es consistente indeterminado.

En la figura 1.2 se observa que las dos ecuaciones se representan en la misma recta.

Figura 1.2



3) El sistema de ecuaciones

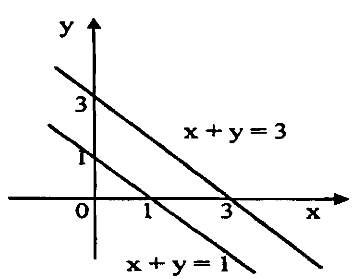
$x + y = 1$

$x + y = 3$

No hay ningún punto común (intersección) en el sistema de ecuaciones, por lo tanto no tiene solución, y el sistema es inconsistente.

En la figura 1.3 se observa que las dos rectas son paralelas.

Figura 1.3



Solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

> **Definición**
> Dos o más ecuaciones son equivalentes, si y sólo si, tienen el mismo conjunto solución

Por ejemplo:

1) Sea el sistema I

$$\left.\begin{array}{rl} x + 3y = 9 & ----(1) \\ 4x + 5y = 1 & ----(2) \end{array}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Multiplicando la primera ecuación por cuatro, tenemos el sistema II, equivalente al sistema I

$$\left.\begin{array}{rl} 4x + 12y = 36 & ----(1) \\ 4x + 5y = 1 & ----(2) \end{array}\right\} \quad \mathrm{II}$$

Multiplicando la segunda ecuación del sistema II por menos uno y sumando a la primera ecuación, tenemos el sistema III, equivalente al I y al II .

$$\begin{array}{r} 4x + 12y = 36 \\ -4x - 5y = -1 \\ \hline 7y = 35 \end{array}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{rl} 7y = 35 & ----(1) \\ 4x + 5y = 1 & ----(2) \end{array}\right\} \quad \mathrm{III}$$

El valor de Y para la primera ecuación del sistema III es:
$y = 35/7 = 5$

Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación del sistema III

$$
\begin{aligned}
4x + 5y &= 1 \\
4x + 5(5) &= 1 \\
4x &= 1 - 25 \\
x &= -6
\end{aligned}
$$

El sistema tiene una solución única, la pareja (-6, 5) por lo tanto el sistema es consistente determinado.

2) Sea el sistema I

$$
\left.\begin{array}{rl}
x + \ \ y = 2 & ----(1) \\
2x + 2y = 4 & ----(2)
\end{array}\right\} \quad \mathrm{I}
$$

Multiplicando la primera ecuación por dos, obtenemos el sistema II, equivalente al sistema I.

$$
\left.\begin{array}{r}
2x + 2y = 4 \\
2x + 2y = 4
\end{array}\right\} \quad \mathrm{II}
$$

Multiplicando la primera ecuación por menos uno y sumándosela a la segunda ecuación, tenemos el sistema III

$$
\begin{array}{rl}
-2x - 2y & = -4 \\
2x + 2y & = 4 \\
\hline
0 & = 0
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
0 = 0 \\
2x + 2y = 4
\end{array}\right\} \quad \mathrm{III}
$$

La primera ecuación del sistema III es cero, por lo tanto, el sistema III no tiene solución y es inconsistente. El sistema III no es equivalente al sistema I y II .

3) Sea el sistema I

$$\left.\begin{array}{l} -4x+6y=2 \quad \ldots\ldots\ldots(1) \\ 6x-9y=4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{array}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Multiplicando la primera ecuación por 6 y la segunda por 4, obtenemos el sistema II , equivalente al sistema I

$$\left.\begin{array}{l} -24x+36y=12\ldots\ldots\ldots(1) \\ 24x-36y=16\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{array}\right\} \quad \mathrm{II}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda del sistema II tenemos

$$\begin{array}{r} -24x+36y=12 \\ 24x-36y=16 \\ \hline 0+0=4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 0=4\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 24\,x-36\,y=16\ldots\ldots\ldots(2) \end{array}\right\} \quad \mathrm{III}$$

La primera ecuación del sistema III es falsa, entonces el sistema no tiene solución y es inconsistente. El sistema III no es equivalente al sistema I y II

4) Resolver el sistema I

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x+2y=4 \quad \ldots\ldots\ldots(2) \end{array}\right\} \quad \mathrm{I}$$

Multiplicando la primera ecuación por dos, tenemos el sistema II

$$\left.\begin{array}{l}2x + 2y = 4\\ 2x + 2y = 4\end{array}\right\} \quad \text{II}$$

En el sistema II ambas ecuaciones son iguales, por lo tanto tienen un número infinito de soluciones y el sistema es consistente indeterminado.

1.3 Sistema de m ecuaciones con n incógnitas

Un sistema de **m** ecuaciones con **n** incógnitas o variables se representa normalmente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c}a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1\\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2\\ \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot\\ \cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot\\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m\end{array}$$

En donde x_1 , x_2 , ... x_n son las incógnitas , a_{11} , a_{12} , a_{1n} , a_{21} , a_{22} , a_{2n} , a_{m1} ,a_{m2} y a_{mn} son los coeficientes de las incógnitas; b_1 , b_2 , ... b_m son los términos independientes. Las constantes a y b con subíndice, son constantes numéricas reales.

La solución del sistema es una n-ada (x_1 , x_2 , ... x_n) de números.

Por ejemplo:

1) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{l}x_1 \;+ x_2 \;+ 2x_3 \;= 9\\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1\\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0\end{array}\right\} \quad \text{I}$$

En este sistema m = 3 ecuaciones con n = 3 incógnitas. Las incógnitas son x_1 ,x_2, y x_3, los términos independientes b_1= 9, b_2= 1, y b_3= 0 ,los coeficientes son:

$a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = 3$, $a_{31} = -3$, $a_{32} = 6$, $a_{33} = -5$.

La solución del sistema I es una triada (1, 2, 3) de números que al sustituirlos en el mismo, todas las igualdades de éste se cumplen.

Método de eliminación gaussiana[3]

Un método sencillo con el que se acostumbra resolver sistemas de *m* ecuasiones con *n* incógnitas es el de eliminación gaussiana. Se emplean los siguientes pasos para efectuar la reducción.

1) La primera ecuación debe tener un coeficiente a_{11} diferente de cero. Intercambiar el orden de las ecuaciones del sistema de tal manera que el coeficiente a_{11} de la primera ecuación sea diferente de cero. Si no existe tal coeficiente en el sistema, se aplica el procedimiento con el coeficiente a_{12} de la variable x_2, y así sucesivamente.
2) Si en la primera ecuación a_{11} es diferente de cero, multiplicar por $1/a_{11}$ a la primera ecuación, para que el coeficiente de x_1 sea igual a uno ($a_{11} = 1$).
3) En las demás ecuaciones hacer cero a los coeficientes de la variable x_1 ($a_{12} = 0, \dots, a_{m1} = 0$), mediante la multiplicación de la primera ecuación por el número adecuado y sumar a ésta la ecuación en la que es necesario que el coeficiente de x_1 sea cero.
4) Encontrar la ecuación en la que el coeficiente de x_2 sea diferente de cero y repetir este procedimiento.
5) Repetir el procedimiento para las variables restantes del sistema.

   Por ejemplo:

1) Resolver el sistema por eliminación gaussiana

[3] Método desarrollado por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+2z=9 & ----(1) \\ 2x+4y-3z=1 & ----(2) \\ 3x+6y-5z=0 & ----(3) \end{array}\right\} \quad I$$

Multiplicando la primera ecuación por -2 y sumándola a la segunda del sistema I se obtiene:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+2z=\ \ 9 & ----(1) \\ 2y-\ 7z=-17 & ----(2) \\ 3x+6y-5z=\ \ 0 & ----(3) \end{array}\right\} \quad II$$

$$\begin{array}{r} -2x-2y-4z=-18 \\ 2x+4y-3z=\ \ 1 \\ \hline 0+2y-7z=-17 \end{array}$$

Multiplicando la primera ecuación por -3 y sumándosela a la ecuación 3 del sistema II se obtiene:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+2z=\ \ 9 & ----(1) \\ 2y-\ 7z=\ -17 & ----(2) \\ 3y-11z=-27 & ----(3) \end{array}\right\} \quad III$$

$$\begin{array}{r} -3x-3y-6z=-27 \\ 3x+6y-5z=\ \ 0 \\ \hline 0\quad 3y-11z=-27 \end{array}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 1/2 del sistema III se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+2z=\ \ 9 & ----(1) \\ y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2} & ----(2) \\ 3y-11z=-27 & ----(3) \end{array}\right\} \quad IV$$

$$\frac{2}{2}y-\frac{7}{2}z=-\frac{17}{2}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -3 y sumándosela a la ecuación 3 del sistema IV se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \quad \text{----}(1) \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \quad \text{----}(2) \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \quad \text{----}(3) \end{array}\right\} \text{V}$$

$$\begin{array}{r} -3y + 21/2z = 51/2 \\ 3y - 11z = -27 \\ \hline 0 - 1/2z = -3/2 \end{array}$$

Multiplicando la tercera ecuación por -2 del sistema V se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \quad \text{----}(1) \\ y - 7/2z = -17/2 \quad \text{----}(2) \\ z = 3 \quad \text{----}(3) \end{array}\right\} \text{VI}$$

$$\frac{2}{2}z = \frac{6}{2}$$

Entonces $z = 3$ y sustituyendo el valor de z en la ecuación dos del sistema VI

$y - 7/2\,(3) = -17/2$

Se tiene que: $y = 2$

Sustituyendo el valor de *z* y de *y* en la ecuación uno del sistema IV

$x + 2 + 2\,(3) = 9$

Se tiene que: $x = 1$.

2) Resolver el sistema de ecuaciones por el método de Gauss.

$3x - 7y + 11z + 2w = 15$

$x - 2y + 3z + w = 4$

Primero intercambiamos las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 3z + w = 4 \quad \text{----}(1) \\ 3x - 7y + 11z + 2w = 15 \quad \text{----}(2) \end{array}\right\} \text{I}$$

Multiplicando la ecuación uno por -3 y sumándola a la ecuación dos del sistema I obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 3z + w = 4 \quad ----(1) \\ 0 - y + 2z - w = 3 \quad ----(2) \end{array}\right\} \text{II} \qquad \begin{array}{r} -3x + 6y - 9z - 3w = -12 \\ 3x - 7y + 11z + 2w = 15 \\ \hline 0 - y + 2z - w = 3 \end{array}$$

Multiplicando la ecuación dos por -1 del sistema II se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z + w = 4 \quad ----(1) \\ y - 2z + w = -3 \quad ----(2) \end{array}\right\} \text{III}$$

Haciendo $z = a$, $w = b$, sustituyéndolos en la ecuación dos del sistema III y despejando se obtiene:

$y - 2a + b = -3$
$y = 2a - b - 3$

Ahora se sustituye el valor de y, z, w en la ecuación uno del sistema III y despejando x se tiene

$x - 2(2a - b - 3) + 3a + b = 4$
$x = a - 3b - 2$

El conjunto solución general del sistema es $(a - 3b - 2, 2a - b - 3, a, b)$ en donde:

$x = a - 3b - 2$
$y = 2a - b - 3$
$z = a$
$w = b$

Una solución particular será darles valores a z y w por ejemplo, si $z = -2$ y $w = 1$, tenemos: $(-7, -8, -2, 1)$ como solución particular del sistema.

$x = -2 -3 -2 = -7$
$y = 2(-2) -1 - 3 = -8$
$z = -2$
$w = 1$

Método de matriz aumentada (Gauss – Jordan)

Una matriz aumentada es un arreglo que permite resolver un sistema de ecuaciones lineales en forma sencilla. En lugar de escribir todo el sistema en cada paso de la eliminación gaussiana, sólo se escribe el arreglo de números que muestran los coeficientes de las variables del sistema y todos los términos independientes.

La matriz aumentada de un sistema de m-ecuaciones con n-incógnitas se representa de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Por ejemplo:
La matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rr} 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 9x_4 = 8 & ----(1) \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 & ----(2) \\ + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 5 & ----(3) \\ x_4 = 4 & ----(4) \end{array}\right\} \mathrm{I}$$

Es:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 5 & 1 & -9 & 8 \\ 1 & -7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Para resolver un sistema de ecuaciones empleando la matriz aumentada, se realizan operaciones elementales de renglón, estas operaciones son:

1. Intercambio de renglones de la matriz aumentada.
2. Multiplicación de cualquier renglón de la matriz aumentada por un número real diferente de cero.
3. Sustitución de cualquier renglón de la matriz por el resultado de sumarle el múltiplo de cualquier otro renglón.

A la acción de aplicar estos tres pasos en la matriz aumentada se le conoce como reducción de renglones, y esto permite obtener una matriz escalonada reducida por renglones.

Definición

Una matriz es de la forma escalonada reducida por renglones si se cumplen las condiciones siguientes:

1. El primer elemento de un renglón (componente guía) que no contiene un elemento cero es igual a uno.
2. Todos los elementos que están por debajo del componente guía de un renglón son iguales a cero.
3. El componente guía de cada renglón se encuentra a la derecha del componente guía de cada renglón precedente.
4. Todos los renglones que constan solamente del elemento cero se encuentran en la parte inferior de la matriz.
5. Todas las columnas que incluyen un componente guía de algún renglón tienen ceros en el resto de las posiciones.

Ejemplos: 10

1) $$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Utilizando la notación de matriz aumentada se resuelve el sistema siguiente.

$$\left.\begin{array}{ll} x + y + 2z = 9 & ----(1) \\ 2x + 4y - 3z = 1 & ----(2) \\ 3x + 6y - 5z = 0 & ----(3) \end{array}\right\} \quad \mathrm{I}$$

La matriz aumentada que representa el sistema I es:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Multiplicando el primer renglón por -2 y sumándolo al renglón 2, la matriz se reduce a

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Multiplicando el primer renglón por -3 y sumándolo al renglón 3:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Multiplicando por un 1/2 el renglón dos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

Multiplicando por -3 el renglón dos y sumándolo al renglón tres

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Multiplicando por -2 el renglón 3

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Utilizando el método de matriz aumentada (Gauss-Jordan) para generar más reducciones en los renglones, se multiplica por –1 el renglón dos y se suma al renglón uno, el resultado es:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Multiplicando por -11/2 el renglón tres y sumándolo al renglón uno

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Multiplicando por 7/2 el renglón tres y sumándolo al renglón dos

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

La matriz A se redujo a la forma escalonada reducida. Si planteamos el sistema de ecuaciones lineales asociado de A es:

$x = 1$
$y = 2$
$z = 3$

y el sistema tiene solución única.

Ejemplos:

1) Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 & ----(1) \\ 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 7 & ----(2) \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3 & ----(3) \end{array}\right\} \quad \mathrm{I}$$

La matriz aumentada que representa el sistema I es:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} & -2 & -\frac{15}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{7}R_3}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{4}{7} & \frac{15}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{4}{7} & \frac{15}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{22}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{4}{7} & \frac{15}{7} \end{array}\right] = A'$$

Sistema de ecuaciones asociado a la matriz A' .

$$
\begin{aligned}
X_1 - 6/7X_4 + 22/7X_5 &= 16/7\\
X_2 + 1/7X_4 + 13/7X_5 &= 2/7\\
X_3 + 11/7X_4 + 4/7X_5 &= 15/7
\end{aligned}
$$

Haciendo a $X_4 = a$ y $X_5 = b$, se obtiene un conjunto solución:

$$
\begin{aligned}
X_1 - 6/7a + 22/7b &= 16/7\\
X_2 + 1/7a + 13/7b &= 2/7\\
X_3 + 11/7a + 4/7b &= 15/7
\end{aligned}
$$

Ahora si a = 2 y b = 1, se obtiene una solución particular:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 6/7\\
X_2 &= -13/7\\
X_3 &= -11/7\\
X_4 &= 2\\
X_5 &= 1
\end{aligned}
$$

Para resolver un sistema de **m** ecuaciones con **n** incognitas se continua el método de Gauss - Jordan hasta donde la matriz tome la forma escalonada reducida.

1.4 Consistencia e inconsistencia de sistemas de ecuaciones lineales

Se puede determinar si un sistema es inconsistente, consistente o si tiene una solución única o infinidad de soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si la forma escalonada reducida por renglones de su matriz aumentada tiene un renglón del tipo [0 0 … 0 = 1], entonces la ecuación se convierte en 0 = 1 (0 = c, con c ≠ 0), en este caso el sistema es inconsistente.

Ejemplo:

La matriz A es inconsistente, porque la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones muestra en su último renglón la forma

[0 0 0 1] y la ecuación es 0 = 1.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Para determinar si un sistema de ecuaciones es **consistente** existen dos alternativas: el sistema tiene solución única, o tiene un número infinito de soluciones.

1. Para saber si un sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas tiene solución única se emplea el teorema 2:

Teorema 2

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, X1, X2, ... Xn, tiene una solución única, si en la forma escalonada reducida por renglones de su matriz aumentada los coeficientes son 1.

$$A = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \dots & 1 & C_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & C_n \end{array}\right]$$

El sistema de ecuaciones tiene la solución $X_1 = C_1$, $X_2 = C_2$, ... $X_n = C_n$ y existe una solución única.

Por ejemplo: ¿los sistemas asociados a la matriz A y B son consistentes?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teniendo reducida la matriz aumentada demostramos que los sistemas tienen una solución única, entonces las ecuaciones del sistema I asociado a la matriz A y el sistema II asociado a la matriz B se convierten en:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 1 \\ X_2 &= 2 \\ X_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \text{I} \qquad \left.\begin{aligned} X_1 &= 2 \\ X_2 &= 5 \\ X_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{II}$$

Entonces los sistemas I y II son consistentes determinados.

2. En un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, X_1, X_2, ... X_n, no hay solución única o tiene un número infinito de soluciones, empleamos el teorema 3.

Teorema 3

En un sistema de ecuaciones lineales que tiene más incógnitas (n) que ecuaciones (m), el sistema no tiene solución alguna o hay un número infinito de soluciones.

Ejemplo:

$$A = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

después de haber reducido la matriz aumentada, se observa que el número de variables es menor al número de ecuaciones del sistema. Entonces existe una incógnita que no aparece en la diagonal principal con el valor de 1, dando como resultado un número infinito de soluciones o si existe alguna solución. A este sistema se le conoce como inconsistente indeterminado.

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema asociado a la matriz B es consistente indeterminado.

1.5 Sistemas homogéneos de ecuaciones

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, con m ecuaciones con n incógnitas, tiene por lo menos una solución que se conoce como **solución trivial**. A continuación se define el sistema homogéneo.

Definición:
Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es homogéneo si todos los términos independientes (C_n) son iguales a cero.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en general tiene la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = 0 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = 0 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = 0
\end{array}
$$

El sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene una solución trivial: $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0$.

Por ejemplo:

Los sistemas I y II son homogéneos.

1)

$$
\left.\begin{array}{l}
3X_1 + X_2 - 6X_3 = 0 \\
4X_1 + 8X_2 - 5X_3 = 0 \\
\tfrac{1}{2}X_1 + X_2 - X_3 = 0
\end{array}\right\} \quad \mathrm{I}
$$

2)

$$
\left.\begin{array}{l}
3X_1 - 2X_2 + X_3 - 4X_4 + 2X_5 = 0 \\
0X_1 + 2X_2 + 5X_3 + X_4 + X_5 = 0 \\
X_1 + 0X_2 - 3X_3 + 0X_4 + X_5 = 0
\end{array}\right\} \quad \mathrm{II}
$$

El método de Gauss-Jordan se emplea también para resolver un sistema homogéneo de ecuaciones, por ejemplo:

1)

$$
\left.\begin{array}{l}
X_1 + 4X_2 + 3X_3 = 0 \\
2X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\
3/2X_1 - \tfrac{1}{2}X_2 + 1/2X_3 = 0
\end{array}\right\} \quad \mathrm{I}
$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{8}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{8} & -\frac{8}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{18}{3}R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{8} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{8}{19}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_3+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema tiene una solución única: $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, el punto (0, 0, 0), o sea que tiene una solución trivial y el sistema es consistente determinado.

2) Un sistema II homogéneo de ecuaciones que tiene más incógnitas que ecuaciones, el cual tiene un número infinito de soluciones.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 - X_2 + 7X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + 3/2X_2 + 4X_3 + ½X_4 = 0 \end{array}\right\} \text{II}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-(R_1)+R_2} \begin{array}{ccccc} -1 & 1 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 4 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 5/2 & -3 & 3/2 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{2}{5}R_2} \quad 0 \quad 1 \quad -\frac{6}{5} \quad \frac{6}{10} \quad 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6/5 & 3/5 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 29/5 & -2/5 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{29}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Entonces se tiene el sistema:

$X_1 + 29/5X_3 - 2/5X_4 = 0$
$X_2 - 22/5X_3 + 3/5X_4 = 0$

Haciendo $X_3 = a$ y $X_4 = b$

$X_1 = -29a/5 + 2b/5$
$X_2 = 22a/5 - 3b/5$

El sistema II tiene un número infinito de soluciones. Ahora, si a =1 y b= 3

$X_1 = -29/5 + 6/5 = -23/5$
$X_2 = 22/5 - 9/5 = 13/5$

Entonces se tiene una solución particular no trivial
$X_1 = -23/5$, $X_2 = 13/5$, $X_3 = 1$ y $X_4 = 3$

Capítulo 2
Vectores

Objetivos:
Al terminar este capítulo, el lector:
- ✓ Comprenderá el concepto de vector.
- ✓ Identificará diferentes tipos de vectores.
- ✓ Conocerá sus propiedades.

2.1 Introducción

En el álgebra matricial no es posible representar una magnitud con un único número, si pensamos en la noción de fuerza en física, la cual caracterizamos por la intensidad y la dirección, para poderla representar geométricamente necesitamos por lo menos dos números. Ahora si analizamos los puntos que forman una línea recta, estos son representados con números reales en un plano o espacio euclidiano como un *par* o una *n-ada* ordenada. Al plano lo denotamos en $\Re^2$ y al espacio euclidiano en $\Re^n$.

2.2 Conceptos básicos

Vectores
A los *pares* o *n-adas* ordenadas de números reales se les llama **vectores**, aquí los denotaremos con letras minúsculas en negritas

como: **u** , **v** , **w**,... , etc. Cada elemento de la *n-ada* se le da el nombre de componente del punto o vector. Ejemplo:

1) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}$

componentes

2) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

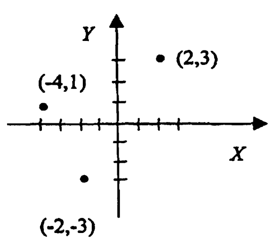
Representación geométrica

Un vector se representa geométricamente en un plano, un vector en el espcio bidimensional es un par ordenado (a, b), el plano lo denotamos con $\Re^2$. En el caso de un vector en un espacio tridimensional es una terna o triada ordenada de números reales (a, b, c), el plano lo denotamos con $\Re^3$. Cuando se tiene un vector (a, b, c, ...etc) en un espacio de n-dimensiones se opera en $\Re^n$.

Si se considera un espacio bidimensional $\Re^2$, se pueden representar a los vectores como puntos en un plano, ver figura 2.1.

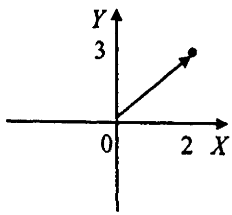
Ejemplo: Sean los vectores (2, 3) , (-4, 1) y (-2, -2)

Figura 2.1



El vector (a, b) en $\Re^2$, se representa a través de un segmento dirigido o flecha a partir de un origen a un punto P, sus propiedades más importantes son su magnitud y su dirección. Los vectores (a, b) en $\Re^2$ tienen una gran cantidad de aplicaciones, por ejemplo en física la noción de fuerza se caracteriza por la intensidad y dirección; en donde el tamaño o magnitud es la intensidad y la pendiente la dirección del vector, ver figura 2.2.

Figura 2.2



P (a, b) P(2,3)

Magnitud de un vector

La magnitud del vector es la longitud del segmento de recta que lo representa geométricamente.

> **Definición**
> Sea un vector **u** en $\Re^n$. La magnitud de **u** se denota por $|\mathbf{u}|$ y se define como: $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$

Para el plano $\Re^2$ es:

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En el plano $\Re^3$ se tiene:

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Y para el plano $\Re^n$ es:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

Ejemplo: La magnitud del vector **u** en $\Re^4$ es:

$$u = [3 \quad -5 \quad 2 \quad 4]$$

$$|u| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2 + 4^2}$$

$$|u| = \sqrt{9 + 25 + 4 + 16}$$

$$|u| = \sqrt{54}$$

Igualdad de vectores

Dos vectore **u** y **v** son iguales, si todos sus componentes son iguales y se encuentran en el mismo orden.

Ejemplos:

1) $\mathbf{u} = [1 \quad 5 \quad 7]$ es igual a $\mathbf{v} = [1 \quad 5 \quad 7]$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

2) Suponga que una empresa produce vasos, platos, jarras de vidrio y su venta en un día la registra en un orden. Si esta se expresa mediante un vector columna sería:

$$\begin{bmatrix} 75 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

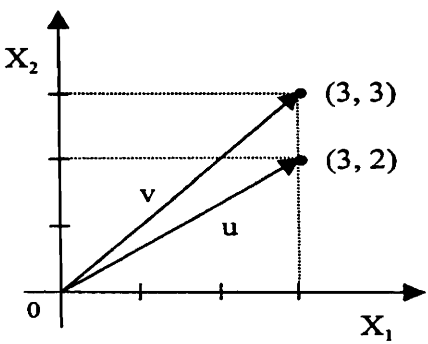
Esto indica que se vendieron \$75 de vasos, \$100 de platos y \$50 en jarras. Al plantear en otro orden los componentes del vector indican ventas diferentes de cada producto por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 75 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Significa que se vendieron \$100 de vasos, \$75 de platos y \$50 en jarras.

3) En el plano $\Re^2$, $\mathbf{u} = (3, 2)$ es diferente a $\mathbf{v} = (3, 3)$, entonces $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, es decir $u_1 = v_1$ y $u_2 \neq v_2$. Si lo representamos gráficamente, los vectores **u** y **v** no son iguales aunque tengan un componente en común (el 3) como se muestra en la figura 2.3

Figura 2.3



Propiedades de la igualdad

a) $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
b) Si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ $\therefore$ $\mathbf{v} = \mathbf{u}$
c) Si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{w}$

2.3 Tipos de vectores

Vector Renglón

El vector renglón de n-dimensiones es el conjunto ordenado de componentes (números) dispuestos en una fila y escritos como:

$$(a_1 , a_2 , \ldots a_n) \text{ o } [a_1 , a_2 , \ldots a_n]$$

Vector Columna

El vector columna de n-dimensiones es el conjunto ordenado de componentes dispuestos en una columna y escritos como:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Primer componente del vector} \\ \text{Segundo componente del vector} \\ \\ \\ \text{n-ésimo componente del vector} \end{array}$$

En donde cada componente del vector es un número real, es decir $a_i \in \Re$. Cuando cada componente de un vector es un número complejo se representa de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

Donde c_i es un número complejo

Vector Nulo (o vector cero)

Es un vector (fila o columna) en el que todos sus componentes son cero y se expresa por **0** , por ejemplo:

1) $\mathbf{0} = [\ 0\ ]$

2) $\mathbf{0} = [\ 0, 0, 0\ ]$

3) $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4) $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ . \\ . \\ 0_n \end{bmatrix}$

Vector Unidad
Es un vector (fila o columna) cuyo i-ésimo componente es la unidad y los demás componentes son iguales a cero. A este vector se le simboliza como $\mathbf{e}_i$ en donde i corresponde a la posición del componente unidad, (i = 1, 2, ..., n). Entonces existen n vectores unitarios de n componentes:

e_i = [1, 0, 0, ..., 0] Primer vector unidad
e_2 = [0, 1, 0, ..., 0] Segundo " "
e_3 = [0, 0, 1, ..., 0] Tercer " "
.
.
.
e_n = [0, 0, 0, ..., n] n-ésimo vector unidad

Vector unitario es el que todos sus componentes son la unidad y se simboliza como **1**.

Ejemplo:

1) $\mathbf{1} = [\ 1, 1, 1, ..., 1\ ]$

2) $$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Operaciones básicas

Suma de vectores

Definición:
Sean los vectores **u** y **v** en el plano $\Re^2$. La suma de vectores es:

Si: $\mathbf{u} = (a, b)$ y
$\mathbf{v} = (c, d)$

Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Para el plano $\Re^3$ la suma de vectores es:

$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$

En el plano $\Re^n$ la suma de vectores se representa como sigue:
Sean:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

La suma de **u** y **v** se define como:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Para que pueda efectuarse la suma **u** y **v** deben tener el mismo número de componentes y ser todos vectores renglones o vectores columnas.

Ejemplos:

Sumar los vectores **u** y **v**:

1) $\mathbf{u} = (1, 2) \qquad \mathbf{v} = (5, 4)$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 2) + (5, 4) = (1 + 5, 2 + 4) = (6, 6)$

2) $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 & + & 9 \\ 7 & + & 1 \\ 8 & + & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{v} = (3, 2, 1, 8)$

No está definida la suma ya que **u** es vector columna y **v** es vector fila

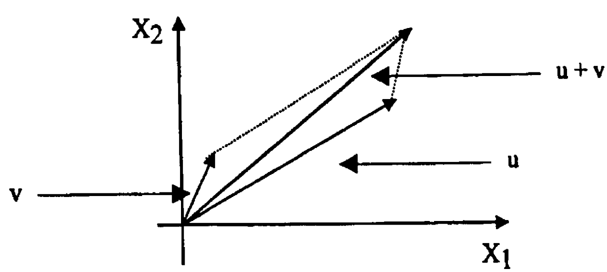
4) $\mathbf{u} = (5, 8)$ $\qquad$ $\mathbf{v} = (6, 7, 8)$

No está definida la suma por ser vectores de diferente orden.

Representación geométrica

La representación geométrica de la suma de vectores se obtiene formando un paralelogramo determinado por los vectores **u** y **v** (ver figura 2.4). En donde la flecha dirigida que corresponde a la diagonal del paralelogramo representa la suma de los vectores **u** y **v**, y sus lados son los vectores **u** y **v**.

Figura 2.4



Producto de escalar y vector

Dado un escalar λ y un vector **a** en un plano $\Re^2$, se define el producto como el vector $\lambda\mathbf{a}$, y sus componentes vienen dados de multiplicar el escalar λ por cada componente del vector **a**. Un escalar es un número real o complejo.

$\lambda a = (\lambda a_1 , \lambda a_2)$
Para el plano $\Re^3$ es: $\lambda a\ (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$
En el plano $\Re^n$ tenemos $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots \lambda a_n)$

Ejemplos:

1) Sea $\lambda = 3$ y $\mathbf{a} = (5, -1)$
$\lambda \mathbf{a} = 3\ (5, -1) = (15, -3)$

2) Si $\lambda = -2$ y $\mathbf{b} = (6, 4, -1)$
$\lambda b = -2\ (6, 4, -1) = (-12, -8, 2)$

3) Sea $\lambda = 5$ y $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\lambda \mathbf{c} = 5 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 10 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

4) Sea

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda \text{ un escalar.}$$

El producto de $\mathbf{a}\lambda$ es: $$\mathbf{a}\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

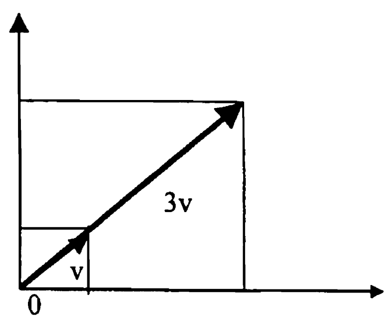
Representación geométrica

Si consideramos λ un escalar y **v** un vector en el plano $\Re^2$ la interpretación geométrica de $\lambda\mathbf{v}$, es una flecha de longitud $|\lambda|$ multiplicando a la longitud de **v**, y la dirección de éste es la misma que la del vector **v**, siempre que $\lambda > 0$, cuando $\lambda < 0$ la dirección es opuesta a la del vector **v**, y si $\lambda = 0$ entonces $0\mathbf{v} = 0$.

Ejemplos:

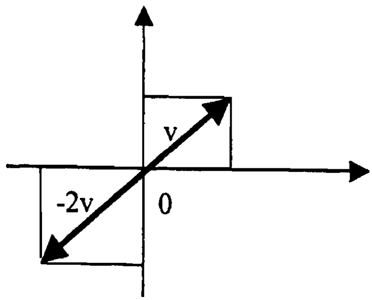
1) Sea l = 3 y **v** = (1, 1)
   l**v** = 3 (1, 1) = (3, 3)

Figura 2.5



2) Sea λ = -2 y **v** = (1, 1)
   λ**v** = -2 (1, 1) = (-2, -2)

Figura 2.6



Producto de vector fila y vector columna

Si un vector fila $\mathbf{u}_{1xn}$ multiplica a un vector columna $\mathbf{v}_{nx1}$, da como redultado un escalar (w) al que se le llama producto interno de dos vectores $(\mathbf{u}_{1xn}\ \mathbf{v}_{nx1})$.

Si $\mathbf{u} = [u_1, \ \ldots \ , \ u_n]$ es el vector renglón n-dimensional y

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$$ es el vector columna n-dimensional,

entonces el producto **uv** esta dado por:

$$\mathbf{uv} = [u_1, \ u_2, \ . \ . \ ., \ u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i\mathbf{v}_i = \mathbf{w}$$

El vector renglón siempre debe de escribirse a la derecha del vector columna.

Ejemplo:

1) Encontrar el producto de

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{uv} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = (5)(6) + (8)(9) = 30 + 72 = 102$$

2) Encontrar el producto de **u v**

$$\mathbf{uv} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$$

3) Obtener el producto de

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 24 + 20 + 18 = 62$$

Ahora si un vector columna $\mathbf{v}_{nx1}$ multiplica a un vector fila u_{1xn} el resultado es una matriz cuadrada nxn.

Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$ el vector columna n-dimensional y

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & . & ., & u_n \end{bmatrix}$ el vector fila n-dimensional.

El producto de **uv** está dado por:

$\mathbf{v}_{nx1}\, \mathbf{u}_{nx1} = x_{nxn}$ (Matriz cuadada) siendo $x_{ij} = \mathbf{u}_i\, \mathbf{v}_i$

Ejemplo:

1) Encontrar el producto de **u v**

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{vu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

2) Encontrar el producto de

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{vu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Encontrar el producto **uv**

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{vu} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2.5 Propiedades

Sean **u** , **v** y **w** vectores en el plano $\Re^n$, y *a, b* escalares. Con ellas se deben de cumplir las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$	Identidad aditiva
b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Conmutativa de suma de vectores
c) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	Asociativa de suma de vectores
d) $0\mathbf{u} = 0$	Cancelación multiplicativa (vectores)
e) $a\,(\mathbf{u} + v) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$	Distributiva (escalar suma de vectores)
f) $(a + b)\mathbf{u} = au + b\mathbf{u}$	Distributiva (suma de escalares - vector)

g) $(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u})$ Asociativa (escalares-vector)
h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ Identidad multiplicativa
i) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$ Inverso aditivo

Identidad aditiva

$\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ . \\ . \\ . \\ 0_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} u_1 & + & 0 \\ u_2 & + & 0 \\ u_3 & + & 0 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ u_n & + & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{u}+\mathbf{0}=\begin{bmatrix}3 & + & 0\\2 & + & 0\\1 & + & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

Conmutativa de suma de vectores

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

$$\mathrm{u}=\begin{bmatrix}u_i\\u_2\\u_3\\.\\.\\.\\u_n\end{bmatrix}\qquad \mathrm{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\.\\.\\.\\v_n\end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\.\\.\\.\\u_n\end{bmatrix}}+\underset{\mathbf{v}}{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\.\\.\\.\\v_n\end{bmatrix}}=\underset{\mathbf{v}}{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\.\\.\\.\\v_n\end{bmatrix}}+\underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\.\\.\\.\\u_n\end{bmatrix}}$$

Ejemplo:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Asociativa de suma de vectores

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

Ejemplo:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Cancelación multiplicativa (vectores)

$0\mathbf{u} = 0$

$$\lambda = 0 \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$0 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,u_1 \\ 0\,u_2 \\ . \\ . \\ . \\ 0\,u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{vector cero}$$

$$0\,(\mathbf{u}) \;=\; 0\mathbf{u} \;=\; 0$$

Distributiva (escalar suma de vectores)

$a\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{au} + \mathbf{av}$

$$a = a, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$a\left[\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}\right] = a\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$a\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\,\mathbf{u} + a\,\mathbf{v}$$

Ejemplo:

$$a = 2 \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2\left[\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right] = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

$$2\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Distributiva (suma de escalares - vector)

$(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

$$(a+b)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$(a+b)\ \mathbf{u} \quad = \quad a\ \mathbf{u} \quad + \quad b\ \mathbf{u}$$

Ejemplo:

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(2+3)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(a+b)\ \mathbf{u} \quad = a\ \mathbf{u} \quad + \quad b\ \mathbf{v}$$

$$5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Asociativa (escalares - vector)

$(ab)\,\mathbf{u} = a\,(b\mathbf{u})$

$$a = a\,, \qquad b = b\,, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$ab \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} = a \left[b \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \right]$$

$$(ab) \quad \mathbf{u} \quad = \quad a \quad (b\mathbf{u})$$

Ejemplo:

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \left[3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right]$$

$$ab\,(\mathbf{u}) = a\,(b\ \ \mathbf{u})$$

$$6\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6\\12\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\12\\18\end{bmatrix}$$

Identidad multiplicativa

$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$1 = \begin{bmatrix}1_1\\1_2\\1_3\\.\\.\\.\\1_n\end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\.\\.\\.\\u_n\end{bmatrix}$$

$$\underset{1}{\begin{bmatrix}1_1\\1_2\\1_3\\.\\.\\.\\1_n\end{bmatrix}} \underset{(\mathbf{u})}{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\.\\.\\.\\u_n\end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\.\\.\\.\\u_n\end{bmatrix}}$$

Ejemplo:

$$1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

Inverso aditivo

$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}} \underset{+(-1)}{+ (-1)} \underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}} + \underset{(-\mathbf{u})}{\begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \\ . \\ . \\ . \\ -u_n \end{bmatrix}} = 0$$

Ejemplo:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{u} \quad + (-1) \quad \mathbf{u} \quad = \quad \mathbf{u} \quad + (-\,\mathbf{u}) \quad = \quad 0$$

Capítulo 3
Operaciones con escalares y vectores utilizando Excel

Objetivos:
Al terminar este capítulo:

- ✓ El lector será capaz de realizar operaciones con vectores y escalares utilizando la hoja de cálculo electrónica Excel.

3.1 Introducción

La hoja de cálculo electrónica Excel resuelve prácticamente la totalidad de las operaciones que se desarrollan con matrices. Las operaciones más comunes como: la multiplicación de vectores, multiplicación de matrices, inversa, el cálculo de determinantes, etc. se resuelven utilizando funciones automáticas, otras operaciones como la suma de matrices, el producto de un escalar por un vector, el producto de un escalar por una matriz, etc. se calculan en forma manual generando las funciones; algunos arreglos como la transpuesta de una matriz, se obtienen utilizando las funciones de edición: copiado-pegado y especial-transpuesta. Las aplicaciones requieren el uso combinado de las funciones automáticas, las de edición, junto con la construcción de funciones manuales específicas.

3.2 Suma de vectores

Para explicar el procedimiento de sumar vectores utilizando Excel, supondremos que tenemos tres vectores, el **a** , el **b**, y el que resulta de sumarlos **(a + b)** = **c**.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6+9 \\ 7+1 \\ 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

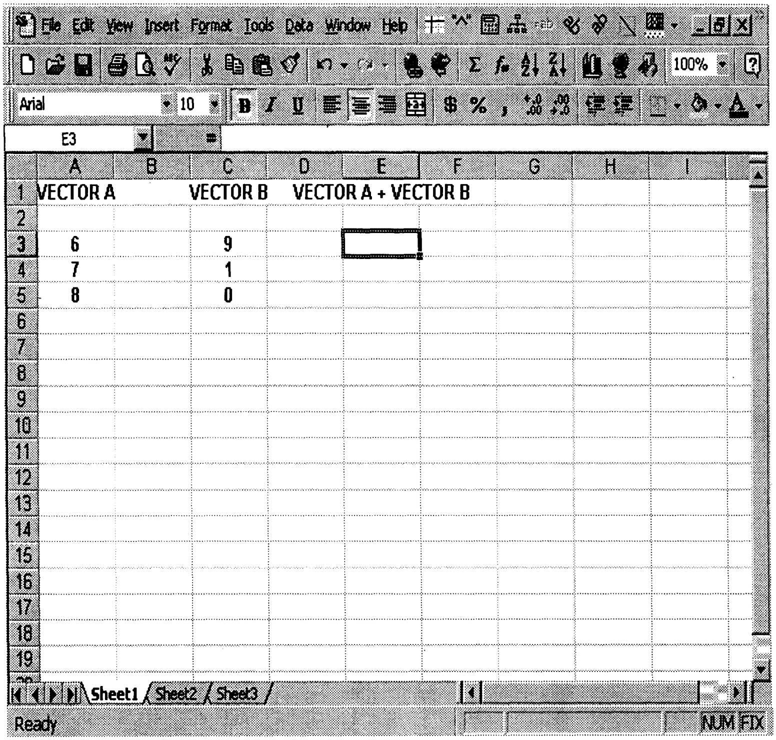
$$\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Recuerde que sólo se puede sumar vectores del mismo tipo y cantidad de componentes

Pasos para sumar dos o más vectores utilizando Excel:

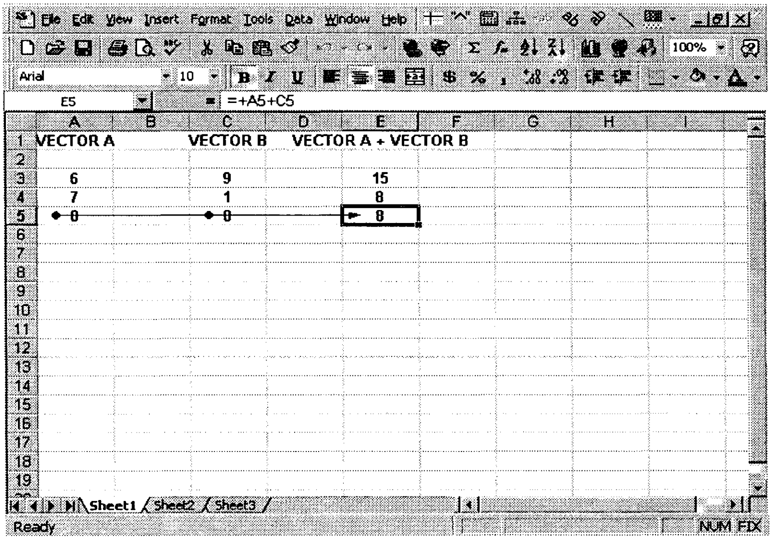
1. Se despliega una hoja, se etiquetan y capturan los elementos de los vectores. En seguida se posiciona el cursor en la celda en donde se desea aparezca el resultado, ver la imagen 3.1 a continuación.

Imagen 3.1
Hoja básica de Excel 7 (versión en inglés).



2. En la celda seleccionada se construye manualmente la función que especifica la suma, ésta aparece en la barra de fórmulas, ver imagen 3.2
3. Se copia la fórmula en todas las celdas que requiera la dimensión de los vectores. Automáticamente aparecerán los resultados.
4. Utilizando el menú de herramientas (tools) y seleccionando auditoría-trazado de precedentes (auditing-trace precedents) se identifica visualmente la operación realizada por celda, ver imagen 3.2

Imagen 3.2
Hoja básica de Excel 7



Como puede observar los resultados son iguales a los obtenidos manualmente. Auditoria muestra los elementos utilizados en la fórmula que aparece en la barra de herramientas, ésta fórmula corresponde a la celda seleccionada.

3.3 Producto de escalar por vector

Suponga que tiene el vector columna **a**, el escalar λ, y el producto de λa.

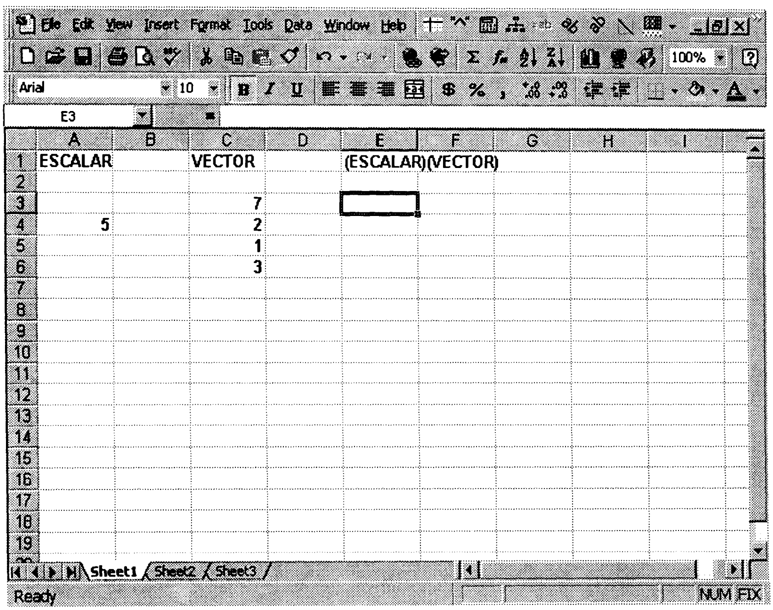
$$\lambda = 5$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda\mathbf{a} = 5\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 10 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Para calcular el producto de un escalar por un vector se realizan los siguientes pasos:

1. Se despliega una hoja, se anotan los títulos de escalar λ, vector **a**, y se capturan sus elementos.
2. Se coloca el cursor en la celda donde interesa aparezca el producto, ver imagen 3.3.

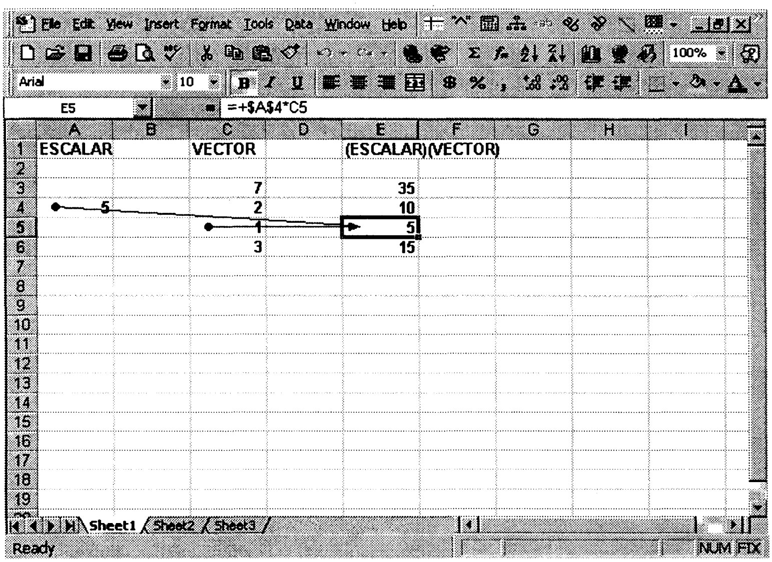
Imagen 3.3
Etiquetas y valores para multiplicar un escalar por un vector



3. En la celda marcada se elabora manualmente la función que especifica la suma.
4. Se copia la fórmula en todas las celdas que requiera la dimensión de los vectores. Automáticamente aparecerán los resultados.

5. Utilizando el menú de herramientas (tools) y seleccionando auditoría-trazado de precedentes (auditing-trace precedents) se identifica visualmente la operación realizada por celda, ver imagen 3.4.

Imagen 3.4
Resultado y empleo de Auditoría
en la multiplicación de un escalar por un vector



Los resultados son iguales a los obtenidos manualmente.

3.4 Producto de vector columna por vector fila

Cuando se multiplica un vector columna por un vector fila, el resultado es una matriz de dimensión m x n. La letra m corresponde al número de filas del vector columna y n el número de columnas del vector fila.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m \end{bmatrix}$$

$$n \times 1 \qquad\qquad\qquad 1 \times m$$

$$\mathbf{xy} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \cdots & x_2y_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

El siguiente ejemplo genera una matriz cuadrada de dimención 4 x 4.

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4 \times 1 \qquad\qquad\qquad 1 \times 4$$

El producto es:

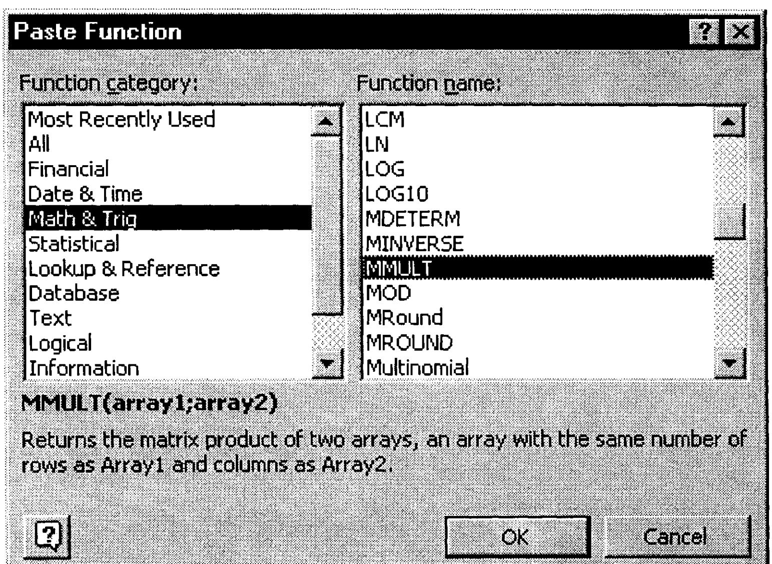
$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4 \times 4$$

Para obtener este resultado a través de Excel se realizan los siguientes pasos:

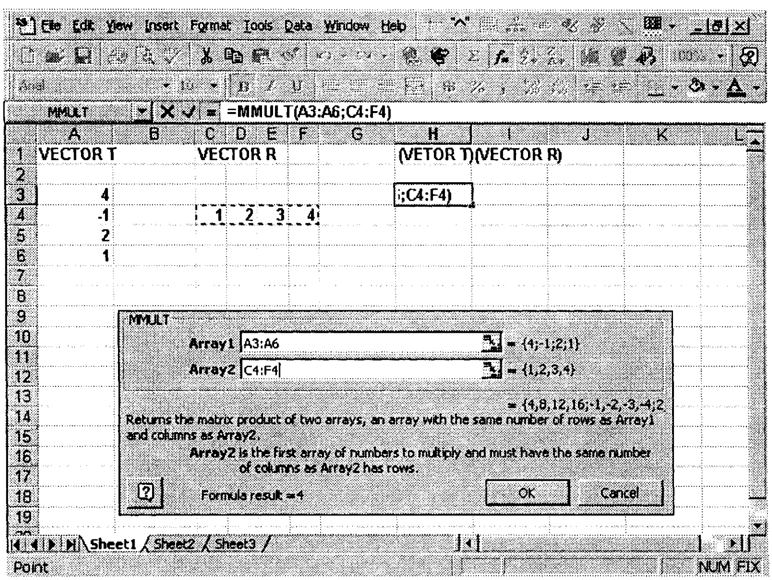
1. Se despliega una hoja de cálculo.
2. Se anotan los títulos de los vectores a multiplicar, (vector t, vector r, …, etc).
3. Se capturan sus elementos.
4. Ya que Excel sólo genera el elemento ubicado en la fila 1 columna 1 de la matriz resultante, se recomienda colocar el cursor en la celda donde interesa aparezca el primer elemento del producto de vectores.
5. Se pulsa el ícono *selección de funciones*, enseguida aparece una ventana que permite seleccionar diferentes categorias de funciones, ver imagen 3.5.

Imagen 3.5
Ventana de categoría de funciones.
Versión Excel 7 en Inglés



6. Se selecciona la categoría de función *Matemáticas y Trigonométricas.*
7. Enseguida aparece en la parte derecha de la ventana los nombres de las funciones de la opción matemáticas y trigonométricas.
8. Se selecciona la finción MMULT, el cual se refiere a la multiplicación de matrices. Con esta función se puede multiplicar vectores.
9. Enseguida aparece una ventana de diálogo que solicita en el primer renglón el rango de la matriz 1, (para este ejemplo el vector **t**). El rango puede indicarse utilizando el seleccionador (ratón o mause) o escribirse directamente. El rango de la segunda matriz (vector **r**) se introduce en el segundo renglón utilizando el mismo procedimiento, ver imagen 3.6.

Imagen 3.6
Ventana de diálogo para generar un producto de vectores

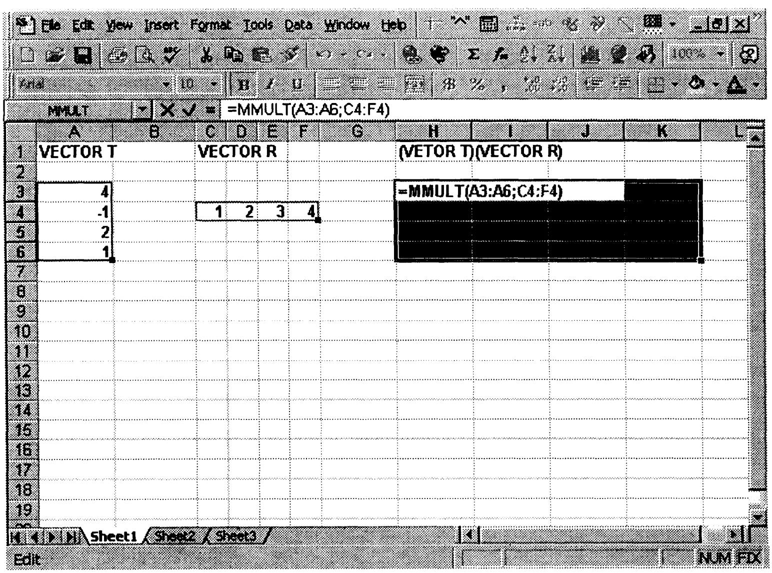


La función MMULT genera el producto matricial de dos matrices, en este caso las matrices son dos vectores.

Excel sólo genera un valor del producto. Por lo tanto hay que expandir la función a la dimensión de la matriz resultante de orden m x n. Para ello se realizan los siguientes pasos:

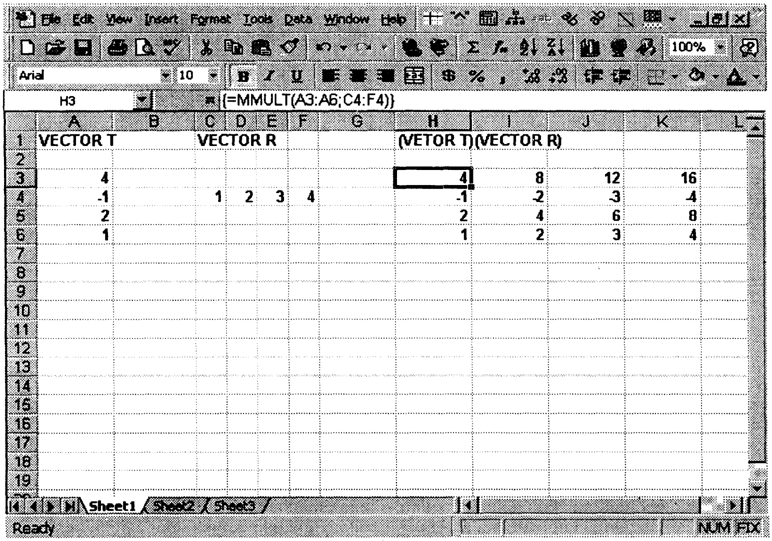
1. Activar la celda que contiene la función MMULT calculada.
2. Utilizando el puntero *cruz gruesa* del ratón, se marca el área donde se busca expandir o copiar la fórmula, ver imagen 3.7.

Imagen 3.7
Area seleccionada para la expansión de la función MMULT



3. Se oprime la tecla de funciones especiales F2.
4. Una vez hecho lo anterior se oprimen simultaneamente las teclas: <shift><control><enter>, automáticamente la función se expande en el rango seleccionado y aparecen los valores buscados, ver imagen 3.8.

Imagen 3.8
Expansión de la función MMULT



3.5 Producto de vector fila por vector columna

Al igual que para el producto de un vector columna por un vector fila, en el caso de multiplicar un vector fila por un vector columna, ambos vectores deben ser conformables, es decir, el número de columnas debe ser igual al número de renglones.

Por ejemplo, los vectores fila **x** y columna **y** pueden ser multiplicados, ya que el número de columnas de **x** es igual al número de filas de **y**.

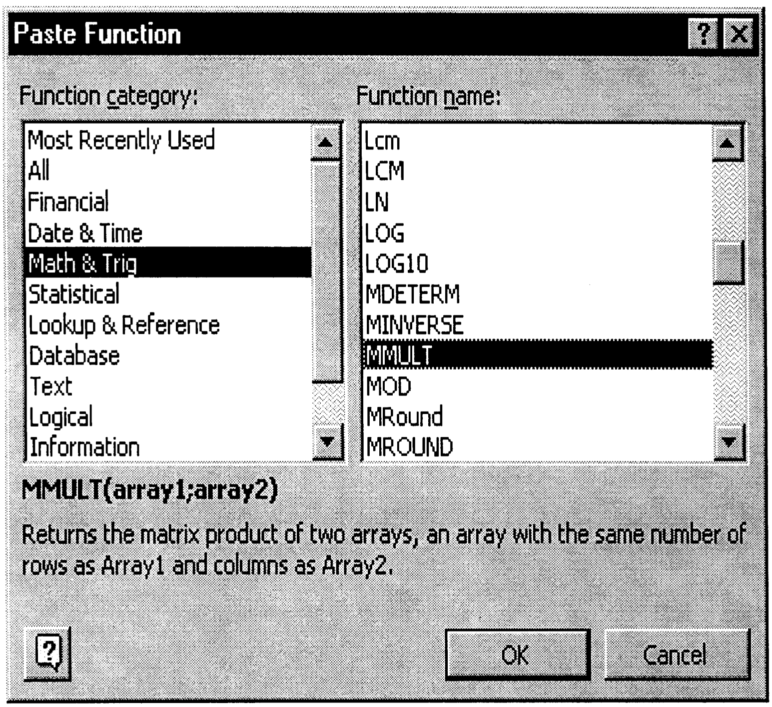
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 5\,(2) + 2\,(1) + 1\,(3) + 3\,(1)$$
$$= \ 10 \ + \ 2 \ + \ 3 \ + \ 3 \ = 18$$

El procedimiento es similar al desarrollado en la multiplicación de un vector columna por un vector fila:

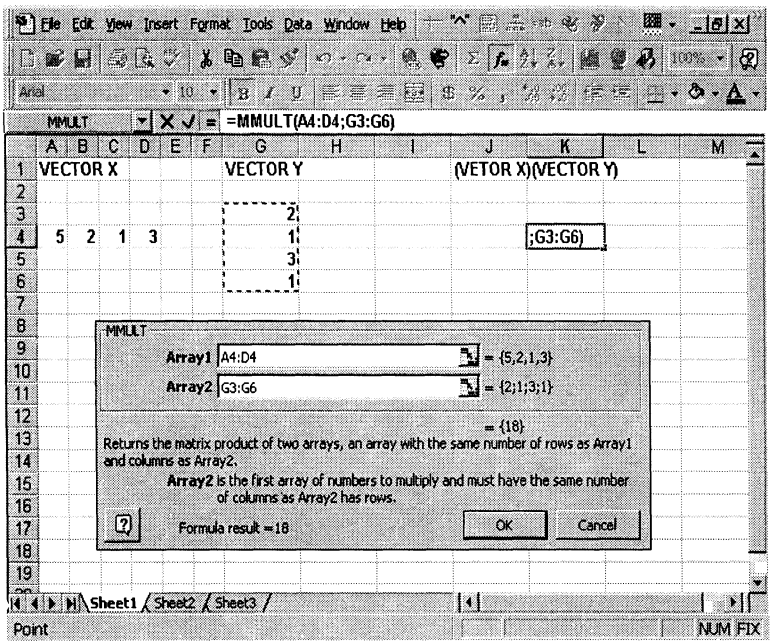
1. Desplegar una hoja de Excel.
2. Anotar los títulos de los vectores y sus valores.
3. Se capturan sus elementos
4. Seleccionar la celda en que se espera aparezca el resultado. En este caso el producto tendrá una dimensión de 1x 1.
5. Seleccionar el ícono de funciones fx.
6. Seleccionar funcion Matemáticas y Trigonométricas.
7. Seleccionar la funcion MMULT, ver imagen 3.9.

Imagen 3.9
Pegado de función MMULT



8. Enseguida aparece una ventana que solicita los rangos en que se encuentra la información de los vectores, el primer renglón (Array 1), corresponde al vector fila, y el segundo renglón (Array 2), al vector columna, ver imagen 3.10.

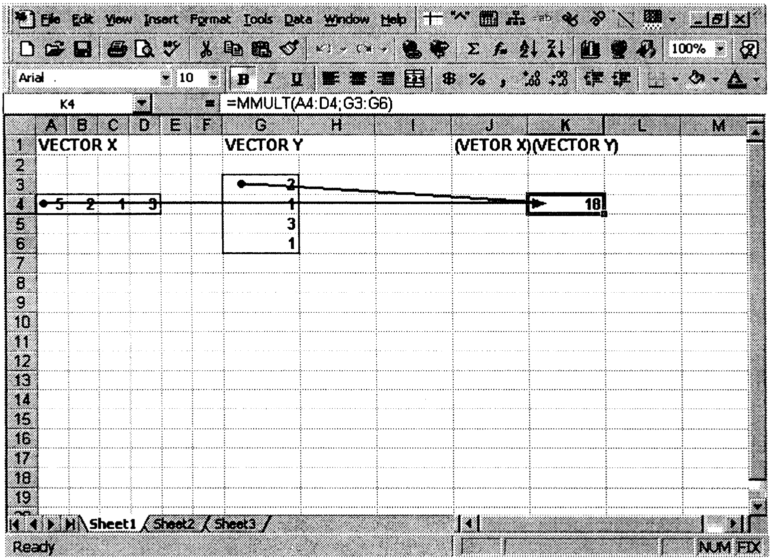
Imagen 3.10
Llenado de rangos de matriz, (vectores) para MMULT



9. Al seleccionar *aceptar* aparecerá el resultado en la hoja de cálculo, ver imagen 3.11.

En la imagen 3.11, se presenta el resultado de la multiplicación dentro de un cuadro relacionado por flechas con todos los datos del vector fila y columna. Aquí se ha utilizado la opción auditoría y tiene por objetivo mostrar que el resultado proviene de matrices, (en este caso vectores).

Imagen 3.11
Producto de vectores,
(resultado relacionado mediante la opción auditoría)



Capítulo 4
Vectores en $\Re^n$

Objetivos:
Al terminar el capítulo:
- ✓ El lector será capaz de realizar operaciones con vectores.
- ✓ Comprenderá la diferencia entre dependencia e independencia lineal de vectores.

4.1 Introducción

En un plano o espacio euclidiano, los puntos pueden identificarse con una n-ada ordenada de números reales.

Si (x,y) está en el plano, lo denotamos con (x, y) en $\Re^2$, (x, y, z) en un espacio de 3 dimensiones o en $\Re^3$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en un espacio de n-dimensiones o en $\Re^n$ cada número de esta n-ada se llama componente del punto.

A las n-adas ordenadas de números reales les llamamos vectores (**v**). En ocaciones es conveniente manejar al vector como un segmento dirigido del origen a un punto **P**, y no como un simple punto. Si representamos a un vector con flechas (geométricamente) las propiedades más importantes son su tamaño o magnitud y su dirección.

4.2 Producto interno y proyecciones

El producto interno de vectores explica los conceptos de longitud y el ángulo en las representaciones geométricas, en forma sencilla.

> **Definición:**
> Sean los vectores $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en el plano $\Re^n$, el producto interno de los vectores se denota por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, y es:
> $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

Ejemplo:

1) Encontrar el producto interno de los vectores $\mathbf{u} = (-2, 4)$ y $\mathbf{v} = (4, 3)$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2, 4)\,(4, 3)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)\,(4) + (4)\,(3)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4$

2) Sean los vectores $\mathbf{u} = (2, 4, 6)$ y $\mathbf{v} = (3, 5, 7)$ su producto interno es:

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2, 4, 6)\,(3, 5, 7)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(3) + 4\,(5) + 6\,(7)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 68$

La magnitud de un vector $\mathbf{u}$ de $\Re^n$ se denota con $|u|$ y se define como:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u \cdot v} = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}}$$

esta magnitud de vector representa (geométricamente) la longitud del segmento de recta que lo representa.

En el caso de los vectores **unitarios**, se debe de cumplir la condición:

$$|\mathbf{u}| = 1$$

Para determinar la magnitud de un vector $\mathbf{u} = (a_1,\ a_2)$ en el plano $\Re^2$, se tiene:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}$$

En el plano $\Re^3$ la magnitud del vector $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ es:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}$$

Cuando se desea encontrar la magnitud de $\mathbf{v}$ - $\mathbf{u}$ en el plano $\Re^2$, teniendo los vectores $\mathbf{u} = (a_1,\ a_2)$ y $\mathbf{v} = (b_1,\ b_2)$ entonces:

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (b_1 - a_1,\ \ b_2 - a_2)$$

por lo tanto

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

En el plano $\Re^3$ se tiene que $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces:

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$$

Por lo tanto

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

En el plano $\Re^n$ se tiene $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ entonces:

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

Las siguientes propiedades son las que se necesitan para aplicar el producto interno:

Sean **u**, **v**, **w** vectores en el plano $\Re^n$ y λ un esacalar distinto de cero.

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$

c) $\mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ para todo escalar λ

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, si $\mathbf{u} \neq 0$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si $\mathbf{u} = 0$

e) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$, ó $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$

Demostrar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |u|^2$ para el vector $\mathbf{u} = (8, 4)$

Tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 64 + 16 = 80$

Sabemos que:

$$|\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{8^2 + 4^2}\right)^2 = \left(\sqrt{64+16}\right)^2$$

$$|\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{80}\right)^2$$

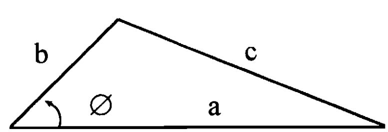
$$|\mathbf{u}|^2 = 80$$

Ángulo entre dos vectores

Para encontrar el ángulo entre dos vectores, partimos de la ley de los cosenos, la cual nos permite conocer el ángulo entre cualquier par de lados del triángulo

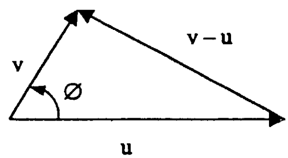
$\mathbf{c}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \mathrm{Cos}\varnothing$

Figura 4.1



Ahora si consideramos las propiedades del producto interno, la ley de los cosenos y el triángulo de la figura siguiente tenemos:

Figura 4.2



Por la ley de los cosenos

$$|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{v}||\mathbf{u}|\cos\varnothing$$

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\varnothing = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\varnothing = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

$$\cos\varnothing = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\cos\varnothing = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Definición:
El ángulo $\varnothing$ entre dos vectores **u** y **v** en $\Re^n$, donde **u** y **v** son diferentes de cero y con el mismo punto inicial, se define como:

$$\cos\varnothing = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

si $0 \le \varnothing \le \pi$ ó $0 \le \varnothing \le 180^o$

Por ejemplo:

1) ¿Cuál es el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = (-1, 5)$ y $\mathbf{v} = (4, 3)$?

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -4 + 15 = 11$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$$

entonces

$$\cos\varnothing = \frac{11}{\sqrt{26}\sqrt{25}} = \frac{11}{\sqrt{650}} = \frac{11}{25.4951}$$

$\cos\varnothing \approx 0.431455$
$\varnothing \approx 64°$ ó 1.125 rad.

2) ¿ Encontrar el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, 4, 6)$?

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6 + 4 + 12 = 22$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56}$$

entonces

$$\cos\varnothing = \frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{22}{\sqrt{784}} = \frac{22}{28}$$

$\cos\varnothing \approx 0.78571$
$\varnothing \approx 38°$ ó 21' ó 0.667 rad.

Desigualdad de Cauchy - Schwarz

Para todo vector **u** y **v** en $\Re^n$, sea $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|$.

Si $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, la desigualdad de Cauchy - Schwarz queda:

$$|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2}\ \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2}$$

También se puede escribir como:

$$\left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}\right]^2 \leq 1,$$

si los vectores **u** y **v** son distintos de cero en $\Re^n$; entonces existe un ángulo único $\varnothing$, el cual satisface que:

$$\cos\varnothing = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|} \text{ y } 0 \leq \varnothing \leq 180^{\circ}$$

Teorema 1

Sea $\varnothing$ el ángulo entre dos vectores **u** y **v** en $\Re^n$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos\varnothing$$

Teorema 2

Sea **u** y **v** vectores en $\Re^n$ y λ un escalar

a) $|\mathbf{v}| \geq 0$ y $|\mathbf{v}| = 0$, si sólo si $\mathbf{v} = 0$

b) $|\lambda \mathbf{v}| = |\lambda|\ |\mathbf{v}|$

c) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$

d) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

Vectores paralelos

> **Definición:**
> Sean los vectores **u** y **v** en $\Re^n$, éstos son paralelos si por lo menos uno de ellos puede escribirse como el proceso de un número real por el otro, y se denota por **u** || **v**, entonces:
>
> $$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} \text{ con } \lambda \in \Re$$

Por ejemplo:

1) ¿Son los vectores **u** = (3, 6) y **v**= (2, 4) paralelos?

$$(3, 6) \| (2, 4)$$
$$(3, 6) \| \lambda(2, 4)$$

entonces

$$(3, 6) \| (2\lambda, 4\lambda)$$

Por la igualdad de vectores obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$3 = 2\lambda \text{ ——— } (1)$$
$$6 = 4\lambda \text{ ——— } (2)$$

de la primera ecuación tenemos que

$$\lambda = 3/2$$

y sustituyendo el valor de λ en la segunda

$$6 = 4(3/2)$$
$$6 = 12/2$$
$$6 = 6$$

Como la igualdad se cumple, se puede concluir que **u** y **v** son paralelos (**u**||**v**)

2) ¿Son los vectores **u** = (1, 3, 2) y **v** = (4, 3, -1) paralelos?

$$(1, 3, 2) \| (4, 3, -1)$$
$$(1, 3, 2) \| \lambda(4, 3, -1)$$

entonces

$$(1, 3, 2) \| (4\lambda, 3\lambda, -\lambda)$$

por igualdad de vectores tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$1 = 4\lambda$ —— (1)
$3 = 3\lambda$ —— (2)
$2 = -\lambda$ —— (3)

de la tercera ecuación obtenemos que

$\lambda = -2$

sustituyendo el valor de λ en las demás ecuaciones, las igualdades no se cumplen, por lo que los vectores **u** y **v** no son paralelos ($\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$).

en la ec. 1
$1 = 4\lambda$
$1 = 4(-2)$
$1 \neq -8$

de la ec. 2
$3 = 3\lambda$
$3 = 3(-2)$
$3 \neq -6$

Vectores perpendiculares

Decimos que dos vectores distintos de cero son perpendiculares si el ángulo que forman entre ellos es de 90°(o $\pi/2$ rad)

Definición:
Dos vectores **u** y **v** en $\Re^n$ son ortogonales si por lo menos uno de ellos es cero, o el ángulo entre ellos es 90° (o $\pi/2$ rad.).
Ahora, si consideramos dos vectores **u** y **v** en $\Re^n$ son ortogonales (perpendiculares), si su producto interno es igual a cero, es decir:
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
y se denota por $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

Ejemplo :

1) ¿Los vectores $\mathbf{u} = (1, 4)$ y $\mathbf{v} = (3,6)$ son ortogonales?
   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 4) \cdot (-3, 6) = -3 + 24 = 21$
   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 21$
   entonces
   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ los vectores no son ortogonales $(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$.

2) ¿Son los vectores $\mathbf{u} = (1, 4, 3)$ y $\mathbf{v} = (-3, 6, 7)$ ortogonales?
   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 4, -3) \cdot (-3, 6, 7) = -3 + 24 - 21 = 0$
   entonces
   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y los vectores son ortogonales $(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$.

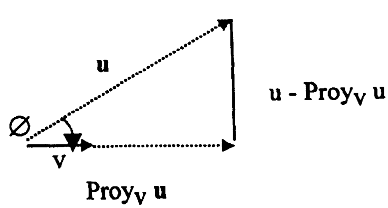
Proyección de vectores

Definición:
Sean los vectores **u** y **v** en $\Re^n$, con $v \neq 0$. La proyección ortogonal de **u** sobre **v**, es:

$$\mathrm{Proy}_v \mathbf{u} = \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right]\mathbf{v}$$

En la figura 4.3 se observa la proyección del vector **u** sobre la recta que contiene al vector **v**

Figura 4.3

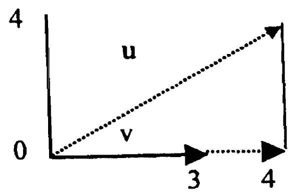


Por ejemplo:

1) Encontrar la proyección de **u** = (4, 4) sobre el vector **v** = (3, 0)

$$\mathrm{Proy}_v\mathbf{u} = \left[\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right]\mathbf{v} = 12/9\ \ (3, 0) = (36/9\ , 0/9) = (4, 0)$$

Figura 4.4



$\mathrm{Proy}_v\mathbf{u}$

2) Encontrar la proyección de **u** = (3, 2, -5) sobre el vector **v**= (4, 2, 0)

$$\mathrm{Proy}_v\mathbf{u} = \left[\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right]\mathbf{v} = 16/20\ \ (3, 2, -5) = (48/20, 32/20, -80/20)$$

Indicamos tres observaciones que son importantes:

a) $\mathrm{Proy}_v u$ es paralelo a **v**
b) **u** - Proy_v u es ortogonal a **v**
c) **u** = (**v** - Proy_v **u**) + Proy_v **u**

4.3 Combinación lineal de vectores

Se puede considerar cualquier vector como la suma de otros vectores particulares, por ejemplo: el vector

$\mathbf{u} = [\, a_1,\ a_2 \,]$ también se escribe como:

$$\mathbf{u} = [\, a_1,\ a_2 \,] = [\, a_1 , 0 \,] + [\, 0,\ a_2 \,]$$

Entonces

$$\mathbf{u} = [\, a_1 , 0 \,] + [\, 0,\ a_2 \,]$$

Ahora si multiplicamos al vector u por un escalar, podemos escribir el vector como sigue:

$$\mathbf{u} = a_1 \,[1 , 0 \,] + a_2 \,[\, 0,\ 1 \,]$$

Entonces un vector **u** con n componentes, se puede representar como la suma de n vectores unitarios y cada uno de los vectores unitarios multiplicado por un escalar igual al correspondiente componente del vector **u**, como se muestra a continuación:

$\mathbf{u} = [\, a_1 , a_2 \,...., a_n \,] = a_1[\, 1, 0, ..., 0 \,] + a_2[\, 0, 1, ..., 0 \,] + ...+ a_n[\, 0, 0, ..., 1]$

a esta expresión se le conoce como **Combinación lineal de vectores**.

Definición:
Se dice que un vector u es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots , \mathbf{v}_n$, si se puede expresar en la forma:

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$, son escalares

Ejemplo:
Considérese los vectores $\mathbf{v} = (\, 1, 2, -1 \,)$ y $\mathbf{w} = (\, 6, 4, 2 \,)$ en $\Re^3$.
Demuestre que:

1) **u** = (9, 2, 7) es una combinación lineal de **u** y **v**
2) **u'**= (4, -1, 8) no es combinación lineal de **u** y **v**

1) Resolviendo

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$$

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, - 1) + k_2(6, 4, 2)$$

$$(9, 2, 7) = (k_1, 2k_1, - k_1) + (6 k_2, 4k_2, 2k_2)$$

$$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, - k_1 + 2k_2)$$

Igualando los componentes correspondientes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} k + 6k_2 &= 9 \text{ ....(1)} \\ 2k + 4k_2 &= 2 \text{ ....(2)} \\ -k + 2k_2 &= 7 \text{ ....(3)} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema:
Se toman las ecuaciones 1 y 2 para formar la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$k_1 = -3$
$k_2 = 2$

Sustituyendo los valores de k_1 y k_2 en:

$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{w}$
$\mathbf{u} = -3\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$
$(9, 2, 7) = -3(1, 2, -1) + 2(6, 4, 2)$
$(9, 2, 7) = (9, 2, 7)$

2) $\mathbf{u}' = (4, -1, 8)$ ¿es combinación lineal?

Se puede expresar a $\mathbf{u}'$ como:

$\mathbf{u}' = k_1(\mathbf{v}) + k_2(\mathbf{w})$

$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$
$(4, -1, 8) = (k_1, 2k_1, -k_1) + (6k_2, 4k_2, 2k_2)$
$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2,\ 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$

Igualando los componentes correspondientes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
k_1 + 6k_2 &= 4 \text{ ....(1)}\\
2k_1 + 4k_2 &= -1 \text{ ....(2)}\\
-k_1 + 2k_2 &= 8 \text{ ....(3)}
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema:

Se toman las ecuaciones (1) y (2) para formar la matriz aumentada.

$$
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{array}\right]
$$

$$
\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} \end{array}\right]
$$

$$
k_1 = -\frac{11}{4}
$$

$$k_2 = \frac{9}{8}$$

$$\mathbf{u}' = -\frac{11}{4}(1, 2, -1) + \left(\frac{9}{8}\right)(6, 4, 2)$$

$$= \left(-\frac{11}{4}, -\frac{22}{4}, \frac{11}{4}\right) + \left(\frac{54}{8}, \frac{36}{8}, \frac{18}{8}\right)$$

$$(4, -1, 8) = \left(-\frac{11}{4}, -\frac{22}{4}, \frac{11}{4}\right) + \left(\frac{27}{4}, \frac{18}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$(4, -1, 8) = \left(\frac{16}{4}, -\frac{4}{4}, \frac{20}{4}\right)$$

$$(4, -1, 8) \neq (4, -1, 5)$$

entonces **u**' no es combinación lineal de **v** y **w**

2) Escribir el vector (1, -2, 5) como combinación lineal de los vectores.

$e_1 = (1, 1, 1)$ $e_2 = (1, 2, 3)$ $e_3 = (2, -1, 1)$

$\mathbf{u} = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3$

$(1, -2, 5) = k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 2, 3) + k_3(2, -1, 1)$

$= (k_1, k_1, k_1) + (k_2, 2k_2, 3k_2) + (2k_3, -k_3, k_3)$

$1 = k_1 + k_2 + 2k_3$

$-2 = k_1 + 2k_2 - k_3$

$5 = k_1 + 3k_2 + k_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$k_1 = -6$
$k_2 = 3$
$k_3 = 2$

$$\mathbf{u} = k_1\, e_1 + k_2\, e_2 + k_3\, e_3$$
$$(1, -2, 5) = -6\,(1, 1, 1) + 3\,(1, 2, 3) + 2\,(2, -1, 1)$$

4.4 Dependencia e independencia lineal de vectores

Definición:
Sea un conjunto de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, en $\Re^n$, son linealmente independientes, si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en el que todos son iguales a cero, tal que la combinación lineal se escribe como sigue:

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots\ \lambda_n\mathbf{u}_n + 0$$

Para el caso contrario se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ en $\Re^n$ son linealmente dependientes si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, y es posible encontrar al menos uno distinto de cero ($\lambda i \neq 0$),

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n \neq 0 \text{ si al menos una } \lambda \neq 0$$

Ejemplo:

1) ¿Los vectores (1, 1, -2), (4, -2, -2) y (3, -9, 6) son linealmente independientes?

Para poder comprobar si los vectores son linealmente independientes, se forma una combinación lineal de los vectores y se iguala a cero:

$$c_1(1, 1, -2) + c_2(4, -2, -2) + c_3(3, -9, 6) = (0, 0, 0)$$

Entonces:

$$(c_1, c_1, -2c_1) + (4c_2, -2c_2, -2c_2) + (3c_3, -9c_3, 6c_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} c_1 + 4c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 - 2c_2 - 9c_3 &= 0 \\ -2c_1 - 2c_2 + 6c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema para c_1, c_2 y c_3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -9 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtiene que:

$$\begin{aligned} c_1 - 5c_3 &= 0 \\ c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

En donde $c_1 = 5c_3$ y $c_2 = -2c_3$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones y los vectores son linealmente dependientes.

2) ¿Los vectores (1, -2, 1) , (3, 1, 2) y (5, 0, 3) son linealmente independientes?

Formando una combinación lineal de los vectores e igualando a cero:

$$c_1(1, -2, 1) + c_2(3, 1, 2) + c_3(5, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

Entonces

$$(c_1,-2c_1, c_1) + (3c_2, + c_2 + 2c_2) + (5c_3, 0, 3c_3) = (0, 0, 0)$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 5c_3 &= 0 \\ -2c_1 + \quad c_2 + 0 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema para c_1,c_2 y c_3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10}{7} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10}{7} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtiene que:

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Entonces los vectores son linealmente independientes.

Un conjunto de m vectores en $\Re^n$ es linealmente dependiente si $m > n$.

Por ejemplo:

1) Los vectores (-3, 2, -1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, -2, 4), (-1, 3, 2, 2) , (1, 2, 3, 0), ¿Son linealmente independientes?
   No, ya que hay cinco vectores en un plano $\Re^4$.
2) Los vectores (1, 2, 3), (0, 1, -2), (-1, 3, 2), (0, 1, 1) ¿Son linealmente independientes?
   No, ya que se tienen cuatro vectores en el plano $\Re^3$, los vectores son linealmente dependientes.

Capítulo 5
Álgebra de matrices

Objetivos:
Al terminar este capítulo:
- ✓ El lector comprenderá la notación matricial.
- ✓ Identificará diferentes tipos de matrices.

5.1 Introducción

El álgebra de matrices es una rama de las matemáticas que se utiliza para analizar los sistemas de ecuaciones lineales, cuando éstos tienen un número de ecuaciones superiores a tres.

5.2 Matrices

Definición de matriz:
La matriz es un arreglo rectangular de elementos ordenados en **m** filas y **n** columnas

La forma general de una matriz A es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz esta constituida por elementos a_{ij}

Los elementos de una matriz pueden ser números reales ($\Re$), polinomios, números complejos (C), etc. En este material sólo se utilizan números reales como elementos de una matriz.

Cada elemento de la matriz tiene dos subíndices, el primer subíndice indica la fila o renglón (*i*) y el segundo la columna (*j*) de la matriz. El elemento a_{ij} indica que está en la *i*-ésima fila y la *j*-ésima columna, para $i = 1,2,...,m$ y $j = 1,2,...n$.

El elemento a_{12} que está situado en la intersección del renglón 1 y la columna 2; a_{22} es el elemento que está situado en el renglón 2 y la columna 2 .

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

El 5 está situado en el primer renglón y en la primera columna, así su posición es la a_{11}

El 9 está en el primer renglón y en la segunda columna, su posición es la a_{12}

El 2 está en el segundo renglón y en la primera columna, su posición es la a_{21}

El 7 está en el segundo renglón y en la segunda columna, su posición es a_{22}

Notación de matrices

1. Se representan mediante una letra latina mayúscula (**A**, **B**, **C**, ..., **Z**) en negritas.
2. También suelen representarse utilizando corchetes $[a_{ij}]$ o $\|a_{ij}\|$ El orden de la matriz$[a_{ij}]$ se representa como: $[a_{ij}]_{mxn}$.

Nota: no confundir al elemento a_{ij} con la matriz $[a_{ij}]$.

Ejemplos de matrices

1) Calificaciones obtenidas por seis estudiantes en cuatro exámenes.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Exámenes} & \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 10 & 10 \\ 6 & 7 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 7 & 10 \end{bmatrix} & \text{Estudiantes} \end{array}$$

2) Representación de una tabla de costos de producción por tipo de producto.

Costos de producción por tipo de producto

Costos	**Producto**			
	A	**B**	**C**	**D**
Mano de obra	10	12	16	9
Materiales	5	7	9	4

Los datos de la tabla se pueden representar en una matriz A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

1) Identificación de elementos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 & 2 \\ 9 & 5 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

¿Qué valor tiene el elemento?

a_{15} ——— no existe
a_{24} ——— 5
a_{33} ——— 2

¿De qué orden es esta matriz?

4x4

2) ¿Que diferencia hay entre : a_{ij} y $[a_{ij}]$?

a_{ij} —— es el elemento genérico de la matriz, ubicado en la fila "*i*", columna "*j*".
$[a_{ij}]$ —— es la notación abreviada de la matriz.

Dimensión de una matriz

La dimensión de una matriz u orden, indica primero el número de renglones (**m**), enseguida el número de columna (**n**), que forman a la matriz m x n, la cual se lee "m por n".

$$\begin{array}{cc} & \text{columna} \\ \text{renglón} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{m \times n} \end{array}$$

$$m = 2\,, \quad n = 3$$

La matriz de calificaciones obtenidas por estudiantes, tiene dimensión 6x4, son seis renglones con cuatro columnas.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Exámenes} & \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 10 & 10 \\ 6 & 7 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 8 \\ 7 & 8 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 7 & 10 \end{bmatrix}_{6 \times 4} & \text{Estudiantes} \end{array}$$

Matriz rectangular

La matriz rectangular se forma cuando $m \neq n$, o sea, el número de renglones es diferente al número de columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De dimensión m x n

Por ejemplo:

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

En donde m = 2 y n = 3, entonces m ≠ n, y A es una matriz rectangular de dimensión 2x3.

2) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 21 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

En donde m = 3 y n = 2 entonces 3 ≠ 2, y B es una matriz rectangular de dimensiones 3x2.

Matriz cuadrada de dimensión n

La matriz cuadrada se forma cuando se tiene el mismo número de renglones y columnas, o sea, que m = n.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

En donde m = 3 y n = 3, entonces m = n y la matriz C cuadrada es de dimensión n = 3.

Ejemplos:

1) R = [7] cuadrada de dimensión 1 ó [X]

2) $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ cuadrada de dimensión 2

3) $$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

cuadrada de dimensión 3

En la matriz cuadrada los elementos que tienen el mismo índice en la fila y columna forman la diagonal principal. Por ejemplo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Los elementos $a_{11,}\, a_{22,}\, a_{33,}\, a_{44}$ forman la diagonal principal de la matriz cuadrada de dimensión n = 4.

Por ejemplo:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Escalar (λ)

Es un caso especial de la matriz cuadrada, cuando está formada de una fila y una columna, el elemento que contiene es un número real.

Por ejemplo:

$$\lambda = [a_{11}]_{1 \times 1}$$

El elemento a_{11} es un número real y la matriz cuadrada de dimensión n = 1 o escalar.

$\lambda = [\ 7\ ]$ cuadrada de dimensión 1 ó $[\ x\ ]$

5.3 Tipos de matrices

La matriz triangular es un caso especial de la matriz cuadrada, se forma cuando todos los elementos por debajo o por encima de la diagonal principal de la matriz son nulos (tienen el número cero).

Matriz triangular superior

Es una matriz triangular que tiene elementos nulos por debajo de la diagonal principal.

> **Definición:**
> Es una matriz triangular superior si cumple con $a_{ij} = 0 \ \forall \ \ i > j$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad (5.3.3)$$

Los elementos a_{21}, a_{31}, a_{32} son nulos y están por debajo de la diagonal principal (a_{11}, a_{22}, a_{33}), entonces es una Matriz Triangular Superior de dimensión $n = 3$.

Ejemplo:

1) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

2) Algunos de los elementos a_{ij} para los que $i \leq j$ pueden ser también nulos, es decir, no hay restricción en esos elementos.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

↔

Esta es una matriz triangular superior ya que se cumple que $a_{ij} = 0 \;\; \forall \; i > j$.

Nótese que también hay ceros en la diagonal principal en los elementos $i < j$.

¿Cuáles son los elementos donde $i > j$?

Respuesta: $a_{21,}\, a_{31,}\, a_{41}\; a_{32,}\, a_{42,}\; a_{43}$

¿Cuál elemento de la diagonal principal es nulo?

Respuesta: a_{22}

Matriz triangular inferior

Está formada por elementos nulos en la parte superior de la diagonal principal de la matriz cuadrada.

> **Definición:**
> La matriz triangular inferior es en la que todos los elementos sobre la diagonal principal son nulos, $a_{ij} \; \forall \;\; i < j$
> En símbolos, una matriz $A = [aij]_{n \times n}$ es trinagular inferior si cumple que: $a_{ij} = 0 \; \forall \; i < j$

Por ejemplo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad (5, 3, 4)$$

Los elementos $a_{12,}$ $a_{13,}$ a_{23} ,son nulos y están por encima de la diagonal principal (a_{11}, a_{22}, a_{33}), entonces es una matriz triangular inferior de dimensión n = 3.

Ejemplo:

1) ¿Cuáles son los elementos donde $i < j$ de la matriz A?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Respuesta: $a_{12,}$ $a_{13,}$ a_{23}, es una matriz triangular inferior.

2) ¿Cuáles son los elementos donde $i < j$ de la matriz B?

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Respuesta: a_{21}, B es una matriz triangular inferior.

Matriz diagonal (D)

Definición:
La matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.
Se simboliza como: $D = [a_{ij}]_{nxn}$, si cumple $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

La matriz A cuadrada está formada por elementos nulos ($a_{21} = a_{12} = 0$) en la parte superior e inferior de la diagonal principal (a_{11} y a_{22}).

Por ejemplo:

1) $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Los elementos a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{34}, a_{41}, a_{42} y a_{43} son nulos, excepto los de la diagonal principal (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}), entonces es una matriz diagonal de dimensión n = 4.

2) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Matriz diagonal}$$

3) $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Matriz diagonal}$$

4) $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Matriz diagonal}$$

5) $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \& & 0 & 0 \\ 0 & \& & 0 \\ 0 & 0 & \& \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Matriz diagonal}$$

Nota: Obsérvese que los elementos de la diagonal principal pueden ser diferentes.

La matriz diagonal también la podemos representar como $\mathbf{D} = [\lambda i \, \delta_{ij}]$, si $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., n$ en donde λi es un escalar y δ_{ij} es llamado símbolo de Kronecker. Por definición, el símbolo de Kronecker es igual a 1 para $i = j$, e igual a cero para $i \neq j$

Matriz unitaria o idéntica (I)

Definición:
La matriz unitaria es una matriz triangular superior e inferior (matriz diagnal) en donde los elementos de la diagonal deben de ser igual a uno y se representan con la letra I o In (cuando es muy importante indicar el orden).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\mathbf{I} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Otra forma de expresarla es:

$$\mathbf{I}_3 = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz unitaria en álgebra matricial cumple con el mismo papel que la unidad en el álgebra básica (números reales), es decir, (a) (1) = (1) (a) = a.

Propiedades de la matriz unitaria

AI = A
IA = A

Matriz escalar (λ I)

Es una matriz diagonal en la que todos sus elementos diagonales son iguales entre si y se expresa $\lambda I = [\chi\delta_{ij}]_{nxn}$ y es una matriz escalar si cumple con

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

λ puede ser un número natural, o entero, racional real o complejo.

Por ejemplo:

a) $$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

b) Multiplicar la matriz **I** por el escalar 2

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y\ \lambda = 2$$

$$2I_3 = [2\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La operación de la multiplicación de la matriz (I) por el escalar (2), es para dar sentido a la operación: $I_3 + I_3$, la cual se puede escribir como $2I_3$.

Matriz simétrica

Definición:
Es una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{nxn}$ en que a_{ij} para todo i, j

Sea $\mathbf{M} = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ la siguiente matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Es simétrica puesto que cumple $n_{ij} = n_{ij}$

$a_{21} = a_{12} = 2$
$a_{31} = a_{13} = 1$
$a_{23} = a_{23} = -3$

Las matrices escalares, las matrices diagonales y las matrices identidad de los diversos órdenes son simétricas.

Matriz asimétrica

Definición:
Es una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ en que $a_{ij} = -a_{ji} \forall$ i,j. Los términos de la diagonal son nulos, es decir, la matriz antisimétrica es aquella en que:

$$a_{ij} = -a_{ji} \ \forall \ i,j. \quad a_{ij} = 0 \text{ donde } i = j$$

Matriz nula o cero (0)

Definición:
Una matriz cuadrada cuyos elementos son todos iguales a cero y se representa con la letra mayúscula **O** en negritas.

Por ejemplo:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

La matriz **O** es diferente al número real cero.

Matrices iguales

Definición:
Cuando dos matrices A y B son iguales (A = B), al tener la misma dimensión (m x n); todo elemento de A son iguales a su correspondiente elemento de B, o sea, si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i, j.

Por ejemplo:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2 \\ 3*2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{array}{ll} a_{11} = b_{11} & a_{21} = b_{21} \\ 2+1 = 3 & 3x2 = 6 \\ a_{12} = b_{12} & a_{22} = b_{22} \\ 2 = 2 & 1 = 1 \end{array}$$

Como cada elemento de A es igual a su correspondiente elemento B, entonces la matriz A es igual a la matriz B (A = B), por tener el mismo número de filas y columnas.

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ $\quad$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$ $\quad$ $\therefore A \neq B$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$ $\quad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$ $\quad$ $\therefore C \neq D$

Propiedades de las matrices iguales

a) Reflexiva $\quad$ A = A
b) Simétrica $\quad$ Si : A = B, entonces B = A
c) Transitiva $\quad$ Si : A = B y B = C, entonces A = C

Problemas

1. Marca con una x en el espacio correspondiente cuál es el orden de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4.3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

2^3	_____	3 x 1	_____	1	_____
3 x 2	_____	3	_____	0	_____
6	_____	1 x 3	_____	1 x 1	_____
2 x 3	_____	1	_____	1^0	_____

2. Dada la matriz P:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 464 & 721 & \ldots & 532 \\ 284 & 445 & \ldots & 222 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 482 & 285 & \ldots & 1000 \end{bmatrix}$$

Identifique el valor de los siguientes elementos:

$P_{m1} =$ _______ $P_{22} =$ _______ $P_{mn} =$ _______ $P_{1n} =$ _______

3. Escriba una matriz de orden 5 x 2 anotando sus elementos en forma simbólica; utilice la figura de abajo:

$$\mathbf{T}\,(\quad) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

4. ¿Cuál de los siguientes arreglos de números no constituyen una matriz?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \log^2 10 & e \\ 211 & -1 \end{bmatrix}$$

5. El departamento de planeación de la cadena de supermercados "Zamir" ha elaborado la siguiente tabla que resume las ventas (en miles de pesos) registradas durante el curso de una semana en sus principales secciones:

Días / Secciones	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
A	10.0	11.0	9.8	13.2	11.2	12.0
B	9.9	10.2	12.7	11.6	12.0	11.4
C	14.3	13.8	14.5	14.0	13.9	14.1
D	12.0	12.3	11.9	12.1	12.2	11.6

a) Indique a que es igual el elemento v_{24} y que representa
b) Indique, señalando el elemento v_{ij} respectivo, que día se alcanzo la venta máxima en la sección en la A; en la B; en la C; y en la D.
c) Indique, señalando el elemento correspondiente, cuál fue la sección de menor movimiento en el día jueves, y cuál fue la del día sábado.

6. Dadas las siguientes matrices:
a) Indique el orden de cada una de ellas.
b) ¿A que casos especiales corresponde cada una de ellas?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. ¿Cómo clasificaría a las siguientes matrices?

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Esciriba ejemplos de matrices de orden (3,3) que satisfagan respectivamente a cada uno de los siguientes conjuntos de requisitos.
   a) Que sea triangular superior, diagonal y no escalar
   b) Que sea simétrica, escalar y no diagonal
   c) Que sea simétrica y no diagonal
9. Indique en la columna de la derecha, la letra que le corresponde en la columna de la izquierda.

a)	$a_{ij} = a_{ij}$ para toda i, j	Matriz escalar	______
b)	$\{a_{ij}\}\, i = j$	Matriz triangular	______
c)	$a_{ij} = \begin{cases} \lambda \text{ para } & i = j \\ 0 \text{ para } & i \neq j \end{cases}$	Diagonal principal	______
d)	$I = [\delta_{ij}]$ con $\delta_{ij} = \quad Y = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ para } \; i \neq j \end{cases}$	Matriz diagonal	______
e)	$a_{ij} \neq 0$ para $i \neq j$	Matriz identidad	______
f)	$a_{ij} = -a_{ij}$ para todo i, j	Matriz simétrica	______
		Matriz nula	______
		Matriz antisimétrica	______

10. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

	V	F
• Una matriz identidad es simétrica	______	______
• Una matriz escalar es diagonal	______	______
• Una matriz nula es cuadrada	______	______
• Una matriz simétrica es diagonal	______	______
• Una matriz nula es simétrica	______	______
• Un vector fila es simétrico	______	______
• Una matriz triangular es rectangular	______	______
• Las matrices triangulares son simétricas	______	______
• Un vector suma es un vector unidad	______	______

	V	F
En las matrices rectangulares interesa:		
• La diagonal principal	_____	_____
• Hay matrices nulas que son cuadradas	_____	_____
• Hay matrices rectangulares que son cuadradas	_____	_____
• Una matriz diagonal es antisimétrica	_____	_____
• Hay matrices rectangulares que son simétricas	_____	_____

Capítulo 6
Operaciones con matrices

Objetivos:
Al terminar este capítulo:
- ✓ Podrá sumar y restar matrices.
- ✓ Obtendrá el producto de una matriz A por una matriz B.
- ✓ Calculará la inversa de una matriz.
- ✓ Resolverá un sistema de ecuaciones lineales mediante la matriz inversa.

6.1 Introducción

Una gran variedad de problemas de asignación de recursos en la economía, la administración y las políticas públicas se relacionan con matrices. Practicamente la totalidad de procesos con matrices se basan en la adición, sustracción y el producto, así como en operaciones especiales como la inversa. En este cápitulo de abordan estos temas.

6.2 Adición y sustracción de matrices

Adición de matrices

Definición:
Pueden sumarse dos matrices A y B, si sòlo si tienen la misma dimensión (mismos números de filas y columnas), al ser sometidas a la operación de suma, da como resultado una tercera matriz C, y ésta tendrá la misma dimensión que la matriz A y B.

Para obtener los elementos de la matriz C, se suman los elementos correspondientes de la matriz A y B, es decir:

$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; para todas las i y j

Por ejemplo:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4+7 & 2-3 \\ 3+2 & 9+5 \\ 5+1 & 16+0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

$A + B \neq C$, por que no cumple con la condición de que la matriz A y la matriz B, deben tener la misma dimensión.

Propiedades de la suma de matrices

a) Conmutativa $A + B = B + A$

b) Asociativa $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) Identidad $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

Producto de un escalar por una matriz

Definición:
Sea una matriz A de dimensión m x n y un escalar λ, se puede definir al producto de la matriz A por un escalar λ, para dar sentido a la operación A + A + ... El producto se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz A por el escalar λ.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} \qquad (6.2.1)$$

Por ejemplo:

1) Matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda\mathbf{A} = -A = \begin{bmatrix} -1a_{11} & -1a_{12} \\ -1a_{21} & -1a_{22} \end{bmatrix}$

Escalar $\lambda = -1$

2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

Escalar $\lambda = 2$

$$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(6) & 2(3) \\ 2(7) & 2(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$$

3) Demuestre que:

$\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 14 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+6 & 3+3 \\ 7+7 & -4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$$

4) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1$

$$-1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6(-1) & 3(-1) \\ 1(-1) & 1(-1) \\ 2(-1) & 4(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

5) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = -3/4$

$$-\frac{3}{4}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\left(-\frac{3}{4}\right) & -8\left(-\frac{3}{4}\right) \\ 7\left(-\frac{3}{4}\right) & 2\left(-\frac{3}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{24}{4} \\ -\frac{21}{4} & -\frac{6}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 6 \\ -5\frac{1}{4} & -1\frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

6) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0$

$$0\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4(0) & -5(0) \\ 3(0) & 6(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$0D = \mathbf{0}$

Sustracción de matrices

Definición:
Pueden restarse dos matrices A y B, si y sólo si, tienen la misma dimensión. Al ser sometidas a la operación de resta, da como resultado una tercera matriz C, y ésta tendrá la misma dimensión que la matriz A y B.

$$C = A - B$$

Para obtener los elementos de la matriz C se realizan los siguientes pasos:

1) Multiplicar la matriz B por el escalar:
$\lambda = -1$, λ B = (-1B).

2) Sumar la matriz A y la matriz -B
A + B = [A + (-B)] = A-B

Por ejemplo:

1) Demostrar que :
C = A-B = A+ (-B)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$(-1)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

C = A + (-B) = A- B

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

3)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -1 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

En la sustracción no hay propiedad conmutativa

$A - B \neq B - A$

6.3 Producto de matrices

Producto interno de matrices

Sean A el vector renglón y B el vector columna, entonces definiremos el producto interno como $A \bullet B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots\ldots + a_{1n}b_{mj}$. El vector renglón y columna contienen el mismo número de elementos y se calcula multiplicando los elementos correspondientes del vector A y B , y realizando una suma algebraica dando como resultado un valor escalar.

Ejemplo:

1) Sean A el vector renglón y B el vector columna

$A = a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots a_{1n}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ . \\ b_{mj} \end{bmatrix}$$

entonces:

$A \bullet B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots\ldots + a_{1n}b_{mj}.$

2) $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = -21 + 24 = 3$

3) $\mathbf{C} \bullet \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 20 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

$C \bullet D = (5)(6) + (4)(10) + (3)(20) + (2)(-4) + (1)(-2)$
$C \bullet D = \quad 30 \quad + \quad 40 \quad + \quad 60 \quad\quad -8 \quad\quad -2 \quad\quad = 120$

4) $\mathbf{E} \bullet \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 & 20 & 6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$E \bullet F = (-2)(0) + (-4)(1) + (10)(2) + (20)(4) + (6)(5)$
$E \bullet F = \quad 0 \quad\quad -4 \quad + \quad 20 \quad + \quad 80 \quad + \quad 30 \quad = 126$

Producto de matrices

Definición:
Dada la matriz A de dimensión m x n y una matriz B de dimensión n x p, se define el producto de A por B, como una tercera matriz C con una dimensión m x p, cuyo elemento cij es producto escalar del i-ésimo renglón por la jésima columna de las matrices A y B respectivamente.

Conformación para la multiplicación de matrices

Para poder realizar la multiplicación de dos matrices A y B , se debe de cumplir que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B. Dando como resultado que la matriz producto C tenga el mismo número de filas que la matriz A y el mismo número de columnas que la matriz B.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{6.3.1}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$

$j = 1, 2, \ldots\ldots, p$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

El número de columnas de A es igual al de B , o sea , n = 3.

$$m \times n = n \times p$$

$$2 \times 3 = 3 \times 3$$

El producto de la matriz A y B da como resultado la matriz C de dimensión mxp (2 x 3).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Por ejemplo:

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Para encontrar la matriz C, hay que sumar los productos formados de multiplicar, en orden, cada elemento (es decir, el primero, segundo, etc.) del i-ésimo renglón de A , por el elemento correspondiente (es decir, el primero, el segundo, etc) de la j-ésima columna de B.

El cálculo del elemento C_{11}, se obtiene al sumar el producto de los elementos del renglón (1) de la matriz A , por los elementos correspondientes de la columna (1) de la matriz B.

$$C_{11} = (2)(1) + (1)(4) + (6)(5) = 2 + 4 + 30 = 36$$

El cálculo del elemento C_{21} se obtiene al sumar los elementos del renglón dos de la matriz A por los elementos correspondientes de la columna 1.

$$\begin{aligned}
C_{21} &= (1)(1) + (-3)(4) + (2)(5) = 1 - 12 + 10 = -1 \\
C_{12} &= (2)(0) + (1)(2) + (6)(1) = 0 + 2 + 6 = 8 \\
C_{22} &= (1)(0) + (-3)(2) + (2)(1) = 0 - 6 + 2 = -4 \\
C_{13} &= (2)(3) + (1)(1) + (1)(6) = 6 + 1 + 6 = 13 \\
C_{23} &= (1)(3) + (-3)(1) + (2)(1) = 3 - 3 + 2 = 2
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 36 & 8 & 13 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

m x n = n x p

1 x 3 = 3 x 1

$C = AB = [\ 32\ ]_{1 \times 1}$

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

m x n = n x p

1 x 2 = 3 x 1

No se puede realizar porque el número de columnas de la matriz A es diferente al número de renglones de la matriz B.

5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$

m x n = n x p

3 x 1 = 1 x 2

Propiedades del producto de matrices

a) $AB \neq BA$ no se cumple la ley conmutativa.

b) Asociativa.

$A(BC) = (AB)C$

c) Distributiva.

$AB + AC = A(B + C)$
$(A + B)C = AC + BC$

6.4 Producto de matrices especiales

Producto de una matriz por una matriz unitaria

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{I}A = A \\ A\mathbf{I} = A \end{array}}$$

Demostración:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{y} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$m \times n = n \times p$$

$$2 \times 2 = 2 \times 2$$

$$\mathbf{IA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\mathbf{AI} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Producto de una matriz por una matriz escalar

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda\mathbf{I}A = \lambda A \\ A\lambda\mathbf{I} = \lambda A \end{array}}$$

Demostración:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

si $\lambda = 2 \therefore$

$$\lambda \mathbf{I} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \mathbf{IA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = (2)(1) + (0)(3) = 2$
$a_{21} = (0)(1) + (2)(3) = 6$
$a_{12} = (2)(2) + (0)(4) = 4$
$a_{22} = (0)(2) + (2)(4) = 8$

$$\lambda \mathbf{A} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Producto de una matriz A por una matriz nula (0)

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{0}\mathrm{A} = \mathbf{0} \\ \mathrm{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array}}$$

Demostración:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = (1)(0) + (2)(0) = 0$
$a_{21} = (3)(0) + (4)(0) = 0$
$a_{12} = (1)(0) + (2)(0) = 0$
$a_{22} = (3)(0) + (4)(0) = 0$

Cuando las matrices A y B dan como producto una matriz nula

$$\boxed{AB = 0}$$

Demostración:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto no significa que la matriz A o la B sea necesariamente nula.

6.5 Matriz inversa

Dada una matriz A, llamamos a su inversa A^{-1} (si ésta existe), entonces la relación entre la matriz A y su inversa A^{-1}, es el producto de A y A^{-1} el cual da origen a una matriz identidad (**I**) en donde:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I} \qquad (6.5.1)$$

Si la matriz inversa A^{-1} existe, a la matriz A se le llama Matriz no singular; cuando la matriz inversa A^{-1} no existe, a la matriz A se le llama matriz singular.

Para obtener la matriz inversa es necesario considerar los siguientes puntos:

1) La matriz A debe ser cuadrada para poder obtener su inversa A^{-1} (también es cuadrada), ambas tienen la misma dimensión mxn.

2) Una matriz A cuadrada tiene una matriz inversa A^{-1}, siempre y cuando todos los renglones o columnas, sean linealmente independientes, es decir, que ningún renglón o columna es una combinación lineal de los renglones o columnas restantes, entonces la matriz A se denomina no singular.
3) No toda matriz A cuadrada, tiene una inversa. Si una matriz A cuadrada no tiene inversa A^{-1}, esto quiere decir que los renglones y columnas son linealmente dependientes, entonces la matriz A se denomina Singular.

Ejemplo:

La inversa de una matriz se parece al recíproco de un número **a** en álgebra de números reales. Dado un número **a**, su inverso o recíproco es un número a^{-1}, tal que $aa^{-1} = 1$. En álgebra de números es fácil de comprender que $a^{-1} = 1/a$. En álgebra matricial es más laborioso encontrar la inversa de una matriz y se sabe que el producto de una matriz A por su inversa A^{-1} (existe) da por resultado una matriz identidad **I,** ($AA^{-1} = \mathbf{I}$).

Demostrar que la matriz B, es la inversa de la matriz A para obtener los productos AB y BA.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si : $A^{-1} = B$

Entonces:

a) $$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como en ambos resultados tenemos una matriz **I** de dimensión de 2x2, entonces podemos afirmar que la matriz B es la inversa de la matriz A.

Propiedades de la matriz inversa

a) La inversa de la matriz inversa da como resultado la matriz original.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b) Utilizando la definición de matriz inversa

$$A^{-1} (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} A^{-1} = \mathbf{I}$$
$$A^{-1} (A) = A(A^{-1}) = \mathbf{I}$$

c) La inversa de la matriz identidad es ella misma

$$\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$$

d) Inversa de la matriz diagonal

Si partimos de la definición de la matriz diagonal $D = [\delta_{ij}\lambda_i]$ la cual tiene todos los elementos de la diagonal principal distintos de cero, entonces la inversa de la matriz **D** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son los inversos de los elementos de la diagonal principal de la matriz original.

$$\mathbf{D} = \left[\delta_{ij} \frac{1}{\lambda_i} \right]$$

e) La inversa de la matriz transpuesta $(A^t)^{-1}$ es igual a la transpuesta de la inversa $(A^{-1})^t$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

f) La inversa del producto de dos matrices no singulares A y B es igual al producto de las dos matrices inversas en distinto orden.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

g) Si el producto de dos matrices A y B es igual a la matriz nula, y la matriz A es no singular, podemos determinar que la matriz B es igual a la matriz nula. De la misma manera cuando $BA = \mathbf{0}$ y la matriz A es no singular se puede determinar que $B = \mathbf{0}$. Si A es una matriz no singular y que $AB = \mathbf{0}$, al multiplicar el producto de matrices A y B por la inversa de A será igual a la matriz nula.

$$A^{-1}AB = A^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
si: $A^{-1}A = \mathbf{I}$

Entonces:

$$\mathbf{I}B = \mathbf{0}$$
$$B = \mathbf{0}$$

Determinación de la matriz inversa

Existen diversos métodos para calcular la matriz inversa. Partiendo de la misma definición ($AA^{-1} = \mathbf{I}$).

Sea la matriz A, llamamos a la matriz B la inversa de A.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

si: $AB = \mathbf{I}$ ∴

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la multiplicación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -b_{11}-0.6b_{21} & 1b_{12}-0.6b_{22} \\ -0.3b_{11}+1b_{21} & -0.3b_{12}+1b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la regla de multiplicación de matrices se puede plantear un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} -b_{11} \quad -0.6b_{21} &= 1 \text{ ——— } 1 \\ b_{12} \quad -0.6b_{22} &= 0 \text{ ——— } 2 \\ -0.3\,b_{11} + 1\,b_{21} &= 0 \text{ ——— } 3 \\ -0.3\,b_{12} + 1\,b_{22} &= 1 \text{ ——— } 4 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1.22 \\ b_{12} &= 0.73 \\ b_{21} &= 0.36 \\ b_{22} &= 1.22 \end{aligned}$$

La matriz inversa queda como:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.22 & 0.73 \\ 0.36 & 1.22 \end{bmatrix}$$

Inversa de la matriz por reducción gaussiana

Para determinar la matriz inversa de A (m x n) empleando el método de reducción gaussiana, se realizan los siguientes pasos:

1. Sumar a la matriz A (m x n) una matriz identidad **I** (m x n)

$[\,I\,|\,A]$

2. Realizar las operaciones de renglón en toda la matriz aumentada, de tal forma que la matriz A (de coeficientes del sistema) se transforma en una matriz identidad **I**, y la matriz identidad original se convierte en la matriz inversa de A.

$[\,I \mid A^{-1}]$

Por ejemplo:

1) Encontrar la matriz inversa.
Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 7 \\ 2x - \ y = -4 \end{array}\right\} \text{I}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrar A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{13}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{3}R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

2) Encontrar la matriz inversa
Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x - y + z &= 2 \\ x + y + z &= 4 \\ 2x + 2y - z &= -4 \end{array}\right\} \text{II}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrar la inversa de B

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \end{array}\right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \end{bmatrix}$$

6.6 Solución de ecuaciones lineales con la matriz inversa

En esta sección analizaremos un método diferente al de reducción gaussiana, para la solución de ecuaciones lineales. Esta técnica general se emplea en sistemas de **n** ecuaciones lineales y con **n** incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = C_2 \\ \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = C_n \end{array}\right\} \text{I}$$

El sistema I se puede expresar por una ecuación matricial $AX = C$, como se muestra:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

En donde A es una matriz (m x n), la cual está formada por los coeficientes de las variables del sistema (I) y se le conoce como **matriz de coeficientes**, X es el vector columna de n variables, C es el vector columna y está formado por los términos independientes (constantes del lado derecho) del sistema (I).

Para poder explicar con mayor facilidad esta técnica general, considérese primero un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, como el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = C_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = C_2 \end{array}\right\} \text{II}$$

Expresar el sistema II mediante una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \text{———————} (1)$$

Suponemos que existe una matriz B de (2 x 2) que sea la inversa de A. La matriz B se expresa como:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

entonces $A^{-1} = B$,

Multiplicar la matriz A por B es igual a la matriz identidad (I), o sea $AB = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

realizando la multiplicación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la multiplicación de matrices se plantea un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \text{ ——————— } 2$$
$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \text{ ——————— } 3$$
$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \text{ ——————— } 4$$
$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \text{ ——————— } 5$$

resolviendo simultáneamente las ecuaciones 2 y 3 se obtienen los valores de b_{11} y b_{21}; para conocer los valores de b_{12} y b_{22} se resuelven las ecuaciones 4 y 5.

Ahora, si multiplicamos la ecuación matricial (1) por la matriz B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

como $B = A^{-1}$ y $AA^{-1} = BA = I$ entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}C_1 + b_{12}C_2 \\ b_{21}C_1 + b_{22}C_2 \end{bmatrix}$$

los valores de $X_1 = b_{11}C_{11} + b_{12}C_2$ y $X_2 = b_{21}C_1 + b_{22}C_2$.

Ejemplo:

1) Resolver el sistema de ecuaciones, encontrando la matriz inversa de coeficientes

$3x + 5y = 7$

$2x - y = -4$

Expresar el sistema I mediante una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$

2) Resolver el sistema de ecuaciones, encontrando la matriz inversa de coeficientes.

$$\left.\begin{array}{r} 0 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 0 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{array}\right\} \text{II}$$

Expresar el sistema II mediante una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{6}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$

Ejercicios

1. Indique cuáles de la siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas:

	V	F
• Las matrices son conformables para la suma si son del mismo orden matricial	_____	_____
• Si el producto A x B = 0 entonces A = 0, B = 0	_____	_____
• Hay matrices cuadradas para las que no existe su transpuesta	_____	_____
• A x B = B x A si y sólo si A y B son matrices cuadradas	_____	_____
• (A x B)′ = B′ x A′ para cualquier par de matrices conformables para el producto	_____	_____
• Para que dos matrices sean conformables para el producto deben ser del mismo orden	_____	_____
• A (B + C) = B x A + C x A se cumple siempre que las matrices A, B y C sean conformables para el producto.	_____	_____

2. Indique si la siguiente proposición es verdadera o falsa y explique brevemente su respuesta (A - B) + C = A - (B + C) para todas las matrices A, B y C conformables para la operación de suma.

3.- Dada la matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Obtenga la matriz P'
b) Efectúe el producto P x P'
c) ¿Qué tipo de matriz ha obtenido?

4.- Dada la matriz $R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ 9 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

Calcule:

a) (R + R')
b) (R - R')
c) ½ (R + R′) + ½ (R - R′)

¿Qué tipo de matriz ha obtenido en cada caso?
¿Se trata de una propiedad general o de un caso particular?

5. Si $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

Demuestre que:

$Q \times Q' = Q' \times Q = 161$

Capítulo 7
Operaciones con vectores y matrices usando Excel

Objetivos:
Al terminar este capítulo:
✓ El lector será capaz de realizar operaciones entre matrices y vectores utilizando la hoja electrónica Excel.

7.1 Introducción

La hoja de cálculo electrónica Excel resuelve las operaciones que se desarrollan con matrices y vectores, las operaciones más comunes: el producto de una matriz por un vector columna, vector fila por una matriz, la solución de matrices de orden (m,n) y la obtención de la inversa de una matriz.

7.2 Operaciones entre matrices y vectores con excel

Matriz por vector columna

Para multiplicar una matriz por un vector columna es necesario que sean conformables, es decir el número de columnas de la matriz debe ser igual al número de filas del vector.

En símbolos: $\underset{m \times n}{A} \times \underset{n \times 1}{Y} = \underset{m \times 1}{AY}$

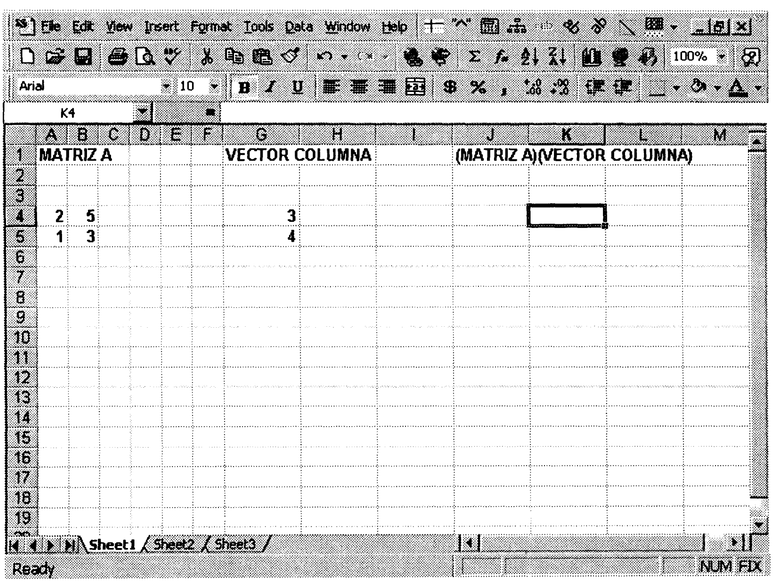
Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{2 \mathrm{X} 1}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 6+20 \\ 3+12 \end{bmatrix}_{2 \mathrm{X} 1} = \begin{bmatrix} 26 \\ 15 \end{bmatrix}_{2 \mathrm{X} 1}$$

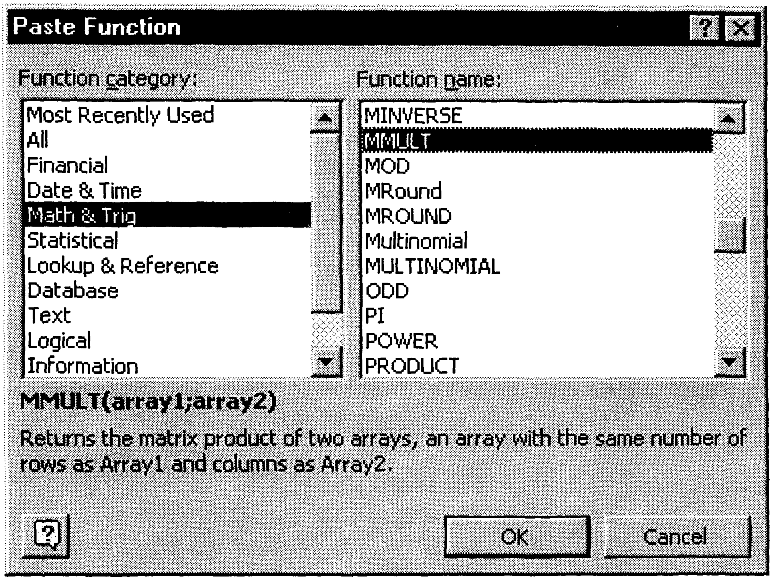
Una vez revisada la conformabilidad entre la matriz y el vector se despliega la hoja de cálculo, se indican los títulos, se anota la información, y se posiciona el cursor en la celda en que se desea anotar el resultado, ver imagen 7.1

Imagen 7.1
Producto de matriz por vector columna



Enseguida se selecciona <Pegar función><Matemáticas y trigonométricas><MMULT>, ver imagen 7.2

Imagen 7.2
Ventana de pegar función



MMULT despliega una ventana en la que aparecen 2 renglones uno para la matriz 1 (en este caso la matriz A) y otro para la matriz 2 (el vector columna B). En los renglones se anota la dimensión en que se encuentran los valores de las matrices solicitadas, ver imagen 7.3

Una vez indicada la localización de la información de las matrices, se pulsa *aceptar*. El resultado aparecerá en la celda previamente seleccionada, ver imagen 7.4

Enseguida se expande la fórmula mediante el procedimiento descrito anteriormente, ver imagen 7.5

Después de expandir la matriz se obtiene el resultado para todos los elementos, ver imagen 7.6

Imagen 7.3
Llenado de la información que solicita MMULT

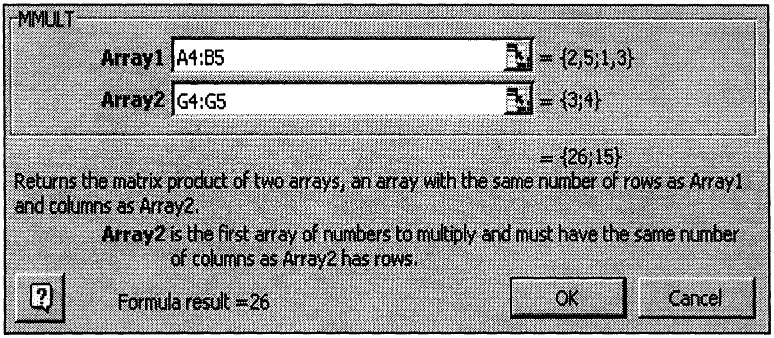


Imagen 7.4
Producto de una matriz por un vector columna utilizando MMULT

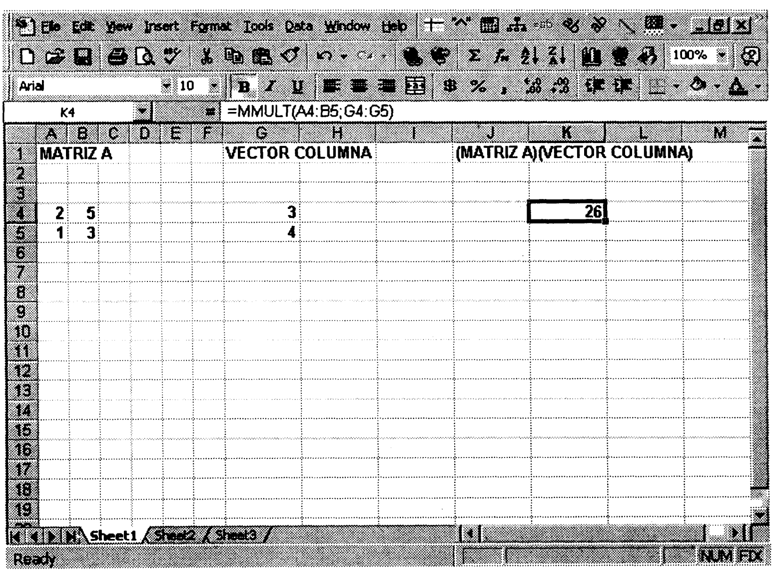


Imagen 7.5
Expansión de MMULT

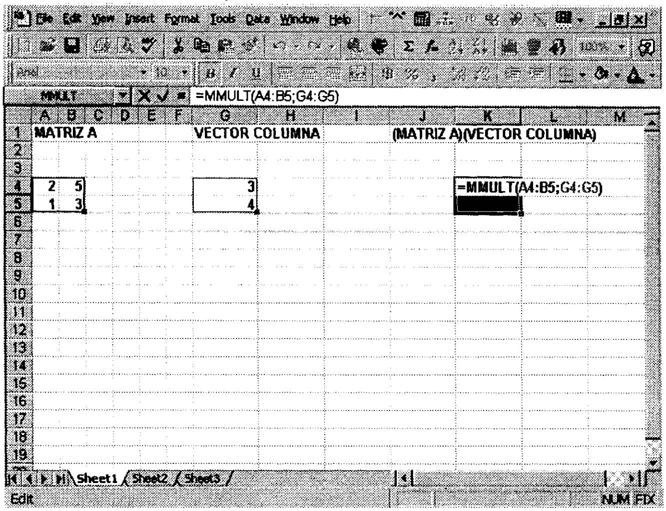
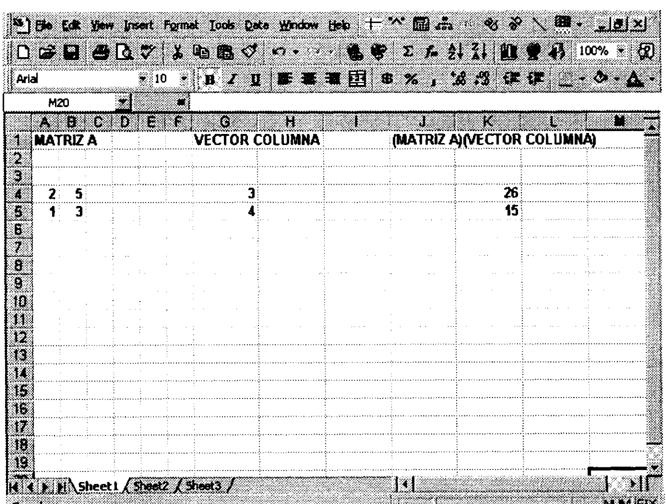


Imagen 7.6
Resultado de expandir MMULT



Vector fila por matriz

Para multiplicar un vector fila por una matriz se requiere que sean conformables.

Ejemplo:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

El producto será

$$\mathbf{QA} = \begin{bmatrix} 18 & 17 & 18 & 21 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

Procedimiento

Una vez seleccionada la celda donde se desea que aparezca el primer elemento del vector fila resultante se realizan los siguientes pasos:

1. Seleccionar <Pegar función>.
2. Seleccionar <Matemáticas y trigonométricas>.
3. Seleccionar <MMULT>.
4. Indicar la posición de la matriz 1, y matriz 2, ver imagen 7.7
5. Pulsar <aceptar>.
6. Expandir la función a la dimención del vector resultante.

En la imagen 7.8 se observa que cada uno de los elementos de la matriz resultante (vector fila en este caso) están vinculados con todos los elementos de la matriz y del vector, en consecuencia, si se trata de borrar algún elemento, Excel indicará mediante un mensaje que la operación de borrado no se puede realizar. Sólo es posible borrar completamente una matriz o vector.

Imagen 7.7
Selección de información para matriz 2 en MMULT

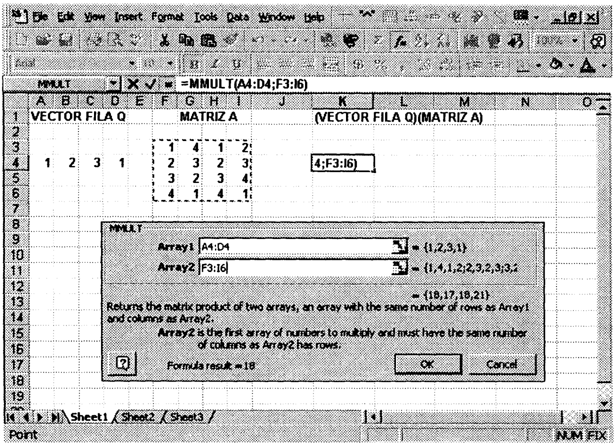
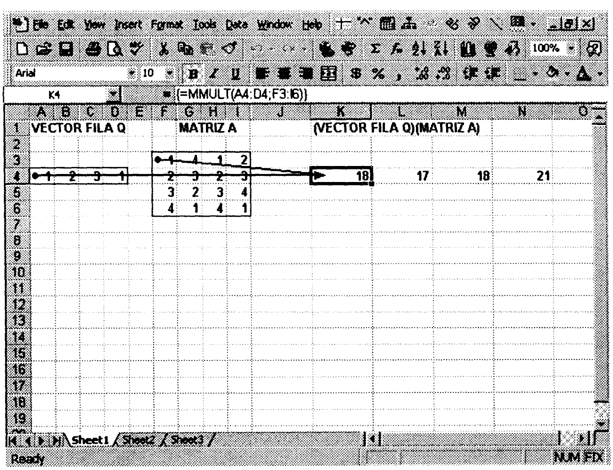


Imagen 7.8
Vínculos entre el vector resultante y las matrices utilizando auditoría



7.3 Multiplicación de matrices utilizando Excel

Matriz de orden (m, n) por matriz (n, p)

Para multiplicar matrices, Excel requiere que previamente se revise que éstas sean conformables.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 26 & 23 & 28 \\ 35 & 35 & 22 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Procedimiento

1. Etiquetar y anotar la información de las matrices en la hoja de cálculo.
2. Seleccionar la celda en la que se espera registrar el primer elemento de la matriz resultante, c_{11}.
3. Seleccionar el ícono <*fx*> (pegado de función).
4. Seleccionar *Matemáticas y trigonométricas*.
5. Seleccionar MMULT.
6. Registrar la información de matriz 1 y 2 en la ventana de MMULT, ver imagen 7.9
7. Pulsar *aceptar*
8. Enseguida aparecerá el primer elemento del producto en la hoja de cálculo.
9. Expandir la fórmula.

Imagen 7.9
Registro de matrices 1 y 2 en MMULT

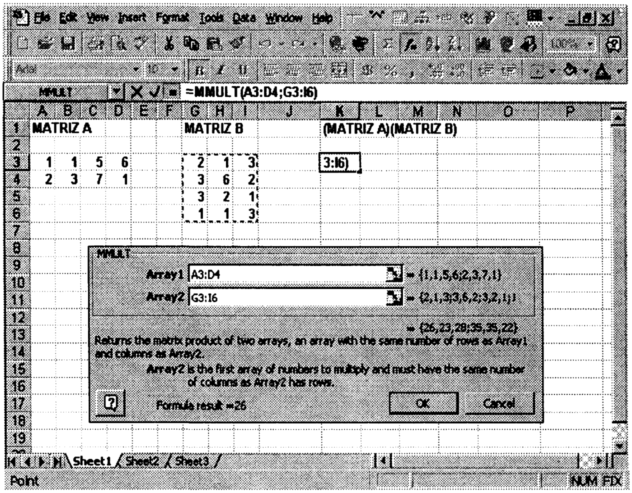
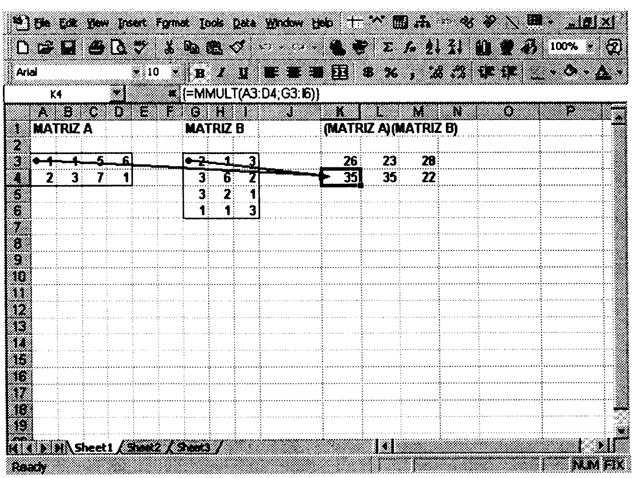


Imagen 7.10
Vínculos entre la matriz resultante y las matrices utilizando auditoría



La imagen 7.10 muestra que cada elementos de la matriz resultante está vinculado con el total de elementos de las matrices.

7.4 Obtencion de la inversa de una matriz mediante Excel

A partir de una matriz cuadrada A es posible obtener su inversa A^{-1}

Ejemplo:

La inversa de:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{es} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1. Titular y registrar la información de la matriz a invertir en la hoja de cálculo, ver imagen 7.11
2. Seleccionar la celda en la que se espera registrar el primer elemento de la matriz inversa, ($a^{-1}{}_{1,1}$).
3. Seleccionar el ícono <*fx*>, (pegado de función).
4. Seleccionar *Matemáticas y trigonométricas.*
5. Seleccionar *MINVERSE*, ver imagen 7.12
6. Registrar la información de matriz a invertir en el renglón de MINVERSE, ver imagen 7.13
7. Pulsar *aceptar*
8. Enseguida aparecerá el primer elemento de la inversa de la matriz A.
9. Expandir la fórmula, ver imagen 7.14

Imagen 7.11
Registro de la matriz a invertir en MINVERSE

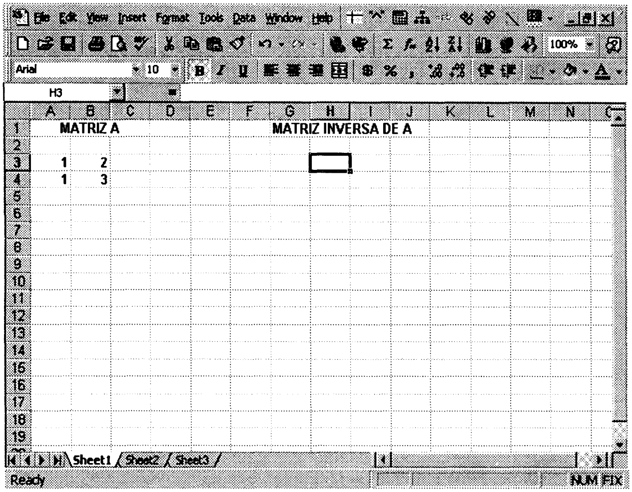


Imagen 7.12
Selección de MINVERSE

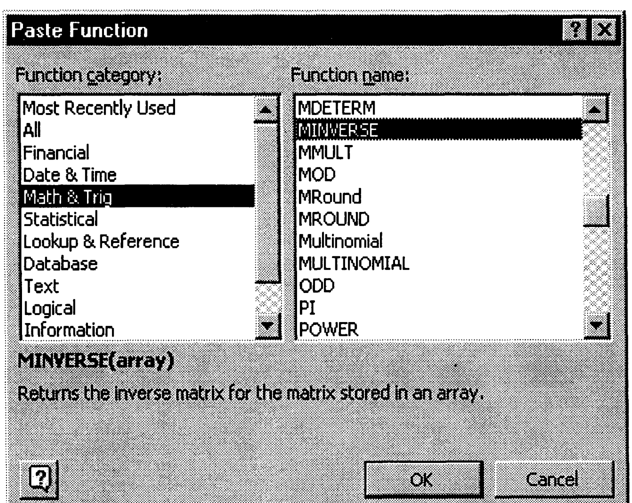


Imagen 7.13
Selección de la matriz a invertir con MINVERSE

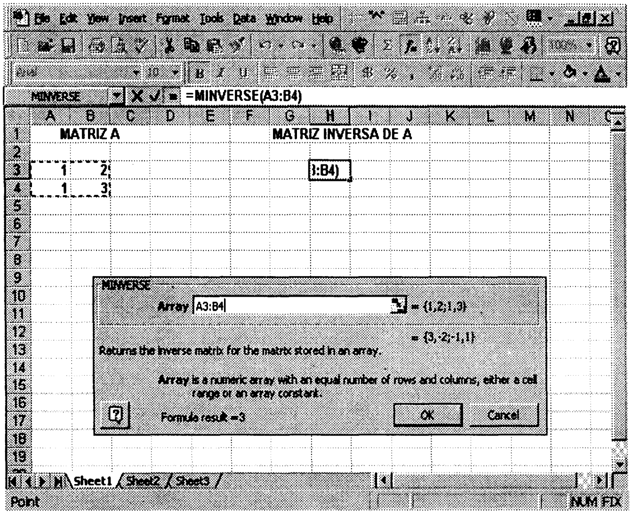
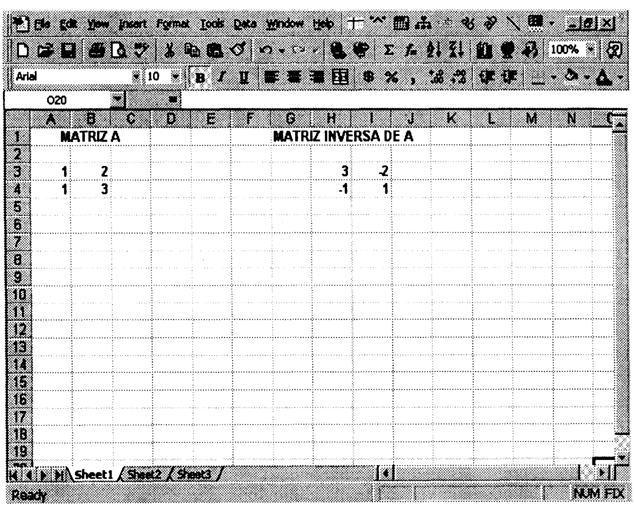


Imagen 7.14
Matriz A inversa generada



La matriz identidad

Una aplicación de la matriz inversa es la matriz identidad.

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & -2-2 \\ 3-3 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad de **A** se puede obtener con Exel, para ello se hacen dos operaciones, primero se obtiene la matriz inversa de A, y enseguida se multiplican la matriz A por su inversa (A^{-1}). En la imagen 7.15 se muestra el producto de MMULT de A por A^{-1}.

Imagen 7.15
Cálculo de la matriz identidad utilizando MMULT

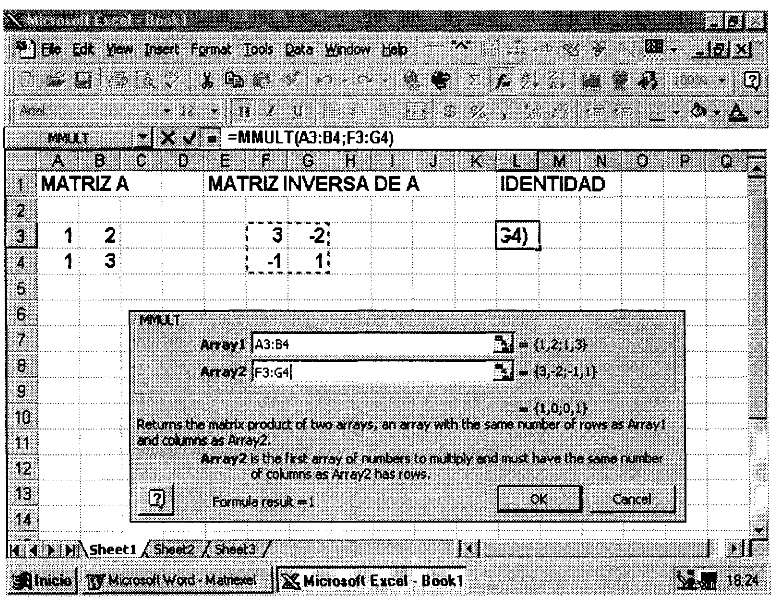
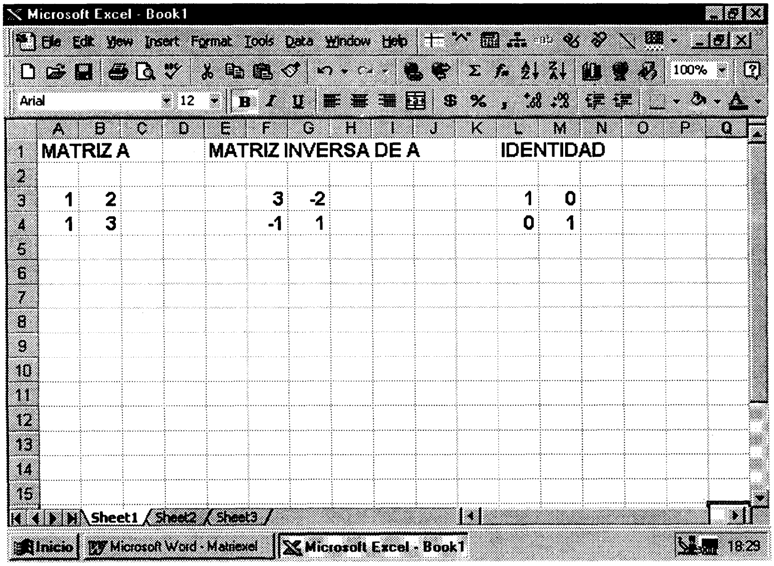


Imagen 7.16
Cálculo de la matriz identidad utilizando MMULT



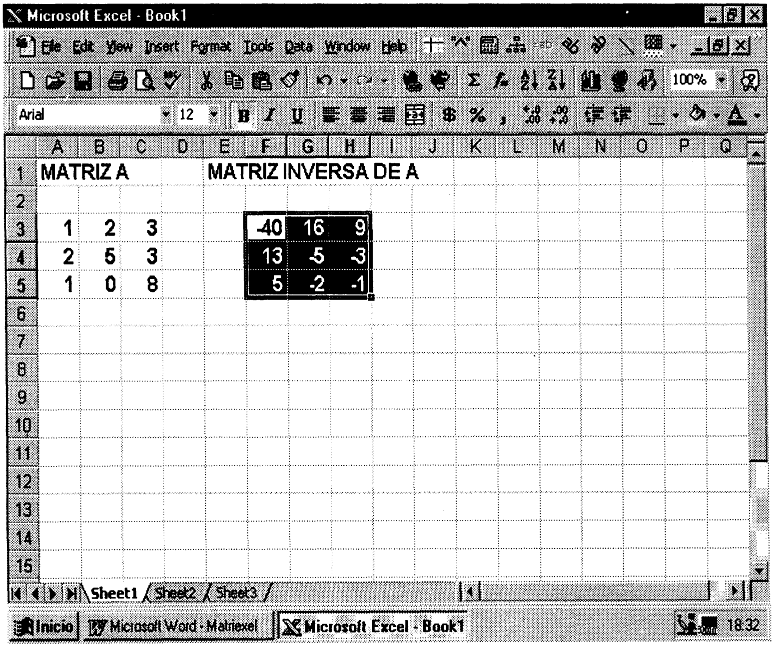
Ejemplo:

Obtener la inversa de **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Imagen 7.17
Cálculo de la matriz inversa utilizando MMULT.



Capítulo 8
Determinantes

Objetivos:
Al terminar este capítulo:
- ✓ Entenderá qué son los determinantes
- ✓ Manejará sus propiedades
- ✓ Utilizará los determinantes en la solución de ecuaciones lineales
- ✓ Aplicará los determinantes en la solución de la inversa de una matriz utilizando el método de cofactores y el de matriz adjunta

8.1 Introducción

El concepto de determinante es de gran utilidad en la solución de ecuaciones simultáneas.

Analicemos el sistema de ecuaciones I

$$\left.\begin{array}{l} -2x - 2y = -8 \\ -2x + 4y = 14 \end{array}\right\} \quad \mathrm{I}$$

El sistema puede representarse por los coeficientes

$$\begin{array}{rrl} -2 & -2 & = -8 \\ -2 & 4 & = 14 \end{array}$$

El conjunto de coeficientes de las incógnitas

-2 -2

-2 4

se conoce como matriz de incógnitas A

El determinante de la matriz A del sistema de ecuaciones lineales I, puede denotarse escribiendo líneas paralelas a los lados del nombre de la matriz o a los lados de los elementos de la matriz como se muestra:

$$|A| \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

8.2 Determinantes

Determinante de una matriz (2 x 2)

La matriz A es (2 x 2) y tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces el determinante de A es $|A|$ = ad - cb, el cálculo se realiza haciendo una multiplicación cruzada de los elementos a y d menos los elementos c y b.

Ejemplo:

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

y el determinante $|A| = (-2)(3) - 4(1) = -6 - 4 = -10$ $|A| = -10.$

Determinante de una matriz (3 x3)

Sea la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para encontrar el determinante se emplean los siguientes pasos:

1. Escribir las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la matriz A.
2. Localizar los elementos de las tres diagonales primarias (P_1, P_2, P_3) y las tres diagonales secundarias (S_1, S_2, S_3).

$$\begin{array}{ccccc} & & & S_1 \quad S_2 & S_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & P_1 \quad P_2 & P_3 \end{array}$$

3. Multiplicar los elementos de cada diagonal primaria ($\cdots\rightarrow$) y de cada diagonal secundaria ($\longrightarrow$).
4. El determinante resultante es igual a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos la suma de los productos de las tres diagonales secundarias.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}\,a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}]$$

Ejemplo:

Encontrar el determinante de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & S_1 & S_2 & S_3 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ & & P_1 & P_2 & P_3 \end{array}$$

$|A| = (3)\,(2)\,(4) + (-2)\,(4)\,(-1) + (1)\,(3)\,(2) -$
$[\,(-1)\,(2)\,(1) + (2)\,(4)\,(3) + (4)\,(3)\,(-2)\,]$
$= 24 + 8 + 6 - [-2 + 24 - 24]$
$= 38 + 2$
$|A| = 40$

Los métodos anteriormente vistos para el cálculo de las matrices de (1x1), (2x2) y (3x3), sólamente son válidos para las matrices que tienen esas dimensiones.

Determinante de una matriz (n x n)

Para poder resolver matrices cuadradas de un orden superior a (2x2), podemos considerar a una matriz A de (nxn), y el determinante de A es representado por |A|. Ahora podemos definir el concepto de determinante:

Definición:
El determinante de una matriz A es denotado por $|A|$ y se define como:

Si $\mathbf{A} = a_{ij}$ es de nxn y $n > 1$ entonces:

$$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{21}| + \ldots + (-1)^{j+1}a_{ij}|M_{j1}| + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}|M_{n1}|$$

Observe que los escalares $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ son los elementos de la primera columna de A

En general, si la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, entonces su **cofactor** es $\mathbf{A}_{ij}$ de $\mathbf{a}_{ij}$ y se define como:

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

en el que $|M_{ij}|$ es el determinante menor de la matriz **A**. Este determinante menor de la matriz de **A** se obtiene del i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Entonces el determinante de una matriz **A** de nxn se puede expresar también de la siguiente manera:

$$|A| = a_{11}\mathbf{A}_{11} + a_{12}\mathbf{A}_{12} + \ldots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathbf{A}_{ik}$$

en el que $\mathbf{A}_{ik}$ es el factor 1k de la matriz **A**.

En el caso de valores pequeños de n, es muy fácil de calcular el determinante de una matriz **A**, utilizando la definición, por ejemplo:

1. Cuando $n = 1$
   Si $\mathbf{A} = [a]$
   entonces $|A| = a$
2. Para $n = 2$

   Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\text{entonces } |A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a|d| - c|b| = ad - cb$$

3. Si n = 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})$$
$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

4. Cuando se evalúan determinantes n > 3, se vuelve muy laborioso, como se muestra en el caso de n = 4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Ahora resolviendo cada determinante

$$a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}\left[a_{22}\left(a_{33}a_{44} - a_{43}a_{34}\right) - a_{32}\left(a_{23}a_{44} - a_{43}a_{24}\right) + a_{42}\left(a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24}\right)\right]$$

$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}\left[a_{12}\left(a_{33}a_{44} - a_{43}a_{34}\right) - a_{32}\left(a_{13}a_{44} - a_{43}a_{14}\right) + a_{42}\left(a_{13}a_{34} - a_{33}a_{14}\right)\right]$$

$$a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$= a_{31}\left[a_{12}\left(a_{23}a_{44} - a_{43}a_{24}\right) - a_{22}\left(a_{13}a_{44} - a_{43}a_{14}\right) + a_{42}\left(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}\right)\right]$$

$$-a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{41}\left[a_{12}\left(a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24}\right) - a_{22}\left(a_{13}a_{34} - a_{33}a_{14}\right) + a_{32}\left(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
|A| = & \, a_{12}[a_{22}(a_{33}a_{44} - a_{43}a_{34}) - a_{32}(a_{23}a_{44} - a_{43}a_{24}) + a_{42}(a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24})] \\
& - a_{21}[a_{12}(a_{33}a_{44} - a_{43}a_{34}) - a_{32}(a_{13}a_{44} - a_{43}a_{14}) + a_{42}(a_{13}a_{34} - a_{33}a_{14})] \\
& + a_{31}[a_{12}(a_{23}a_{44} - a_{43}a_{24}) - a_{22}(a_{13}a_{44} - a_{43}a_{14}) + a_{42}(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14})] \\
& - a_{41}[a_{12}(a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24}) - a_{22}(a_{13}a_{34} - a_{33}a_{14}) + a_{32}(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14})]
\end{aligned}
$$

Empleando ejemplos numéricos encontrar los determinantes:

1) $\mathbf{A} = [5]$

$\mathbf{A}_{11} = (-1)^{1+1}|5| = -1^2|5| = 1(5) = 5$

2) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3(9) - 2(-1) = 27 + 2$

$|A| = 29$

$A_{11} = (-1)^{1+1}|9| = 1^2|9| = +1|9|$

$A_{21} = (-1)^{2+1}|-1| = (-1)^3|-1| = -1|-1|$

3) $\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$|B| = 1[5(4) - 0(1)] - 8\,[4(4) - 0] + 5[4(1) - 5(0)]$

$|B| = 1[\,20 - 0\,] - 8\,[16 - 0] + 5[4 - 0]$

$|B| = 20 - 128 + 20$

$|B| = -88$

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

d)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = -1\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Resolviendo los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$= 2[1(1) - 0(-1)] - 0[2(1) - 0] + 1[2(-1) - 1(0)]$$

$$= 2(1) - 0 + 1(-2) = 2 - 0 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 1[1(-1) - (1)(3)]$$

$$= 0 + 1[-1 - 3] = 1[-4] = -4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$= 0 - 2[1(1) - 0(3)] + 1[1(0) - 2(3)]$$

$$= 0 - 2 + 1(-6) = -2 - 6 = -8$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2[1(-1) - 1(3)] + 0$$

$$= -2[-1 - 3] = -2(-4) = 8$$

$|D| = -1(0) - 0(-4) + 4(-8) + 5(8) = -32 + 40$

$|D| = 8$

Para simplificar la evaluación de determinantes considérense las siguientes propiedades:

Propiedades de los determinantes

En todos los casos sea **A** una matriz cuadrada

1. Si todos los elementos de un renglón o columna de la matriz A son ceros, entonces $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

2. Cuando dos renglones o columnas de la matriz A son idénticos, entonces $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

porque la columna uno es igual a la columna cuatro.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que el renglón uno es igual al renglón tres.

3. Cuando la matriz A es triangular superior o inferior, entonces $|A|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(-3)(1) = -18$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (3)(-3)(2) = -18$$

4. Si A es una matriz identidad, entonces su determinante es igual a uno.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

5. Si **B** es la matriz que se obtiene de **A** intercambiando dos renglones o columnas, entonces: $|A| = -|B|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -|B|$$

Empleando la propiedad 3, entonces $|B| = 2$ y $|A|$ -2.

6. Si la matriz **B** se obtiene de la matriz **A** al multiplicar un renglón o columna por un escalar λ entonces:

$$|B| = \lambda |A|$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

7. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es el producto de su determinante, o sea $|AB| = |A|\,|B|$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = |A| \bullet |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = [2(5)-4(1)][1(3)-0] = (10-4)(3) = 18$$

8. Si **A**, **B** y **C** son matrices idénticas, excepto que para cierta i, el renglón i-ésimo de C es igual a la suma del renglón i-ésimo de A y el renglón i-ésimo de B, entonces $|C| = |A| + |B|$.

9. Si **B** es la matriz de sumar a un renglón o columna de **A** un múltiplo de otro renglón o columna, entonces $|B| = |A|$.

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

la matriz **B** se obtiene de sumarle al renglón 1 el renglón 3 multiplicado por -2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2+[1(-2)] & 4+[2(-2)] & 2+[1(-2)] & 6+[3(-2)] \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

de acuerdo con la primera propiedad $|B| = 0$ y por lo tanto $|A| = 0$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

10. $|A| = |A^t|$

11. Si **A** es invertible entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

8.3 Cálculo de la matriz inversa

Método de cofactores

Este método es el más usado en la solución de las matrices cuadradas de dimensión (2x2) o de orden superior. A cualquier matriz cuadrada **A** se le puede encontrar su matriz de cofactores **Ac**, la cual tiene la misma dimensión de **A**. La matriz **Ac** tiene los elementos a'_{ij} a los que se conoce con el nombre de cofactores. Por cada elemento a'_{ij} de **A** existe un cofactor correspondiente a'_{ij}.

Para encontrar el cofactor a_{ij} asociado al elemento a_{ij} se emplean los siguientes pasos:

1. Con un lápiz tachar el renglón i y la columna j seleccionando en la matriz original, los elementos no tachados forman una submatriz (M) de la original.
2. El ij-ésimo menor M_{ij}, de una matriz A de (nxn) es de la matriz de (n-1) x (n-1), que se obtiene de eliminar el renglón i-ésimo y la columna j-ésima de A.

Por ejemplo:

1) Encontrar la matriz de cofactores (2x2)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

▶

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} -4 & 2 \\ \hline -2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{11} = (-1)^{1+1}(5)$

$= (-1)^2(5)$

$a'_{11} = 5$

▸

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} -4 & 2 \\ \hline -2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{12} = (-1)^{1+2}[-2]$

$= (-1)^3(-2) = (-1)(-2)$

$a'_{12} = 2$

▸

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} -4 & 2 \\ \hline -2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{21} = (-1)^{2+1}[2]$

$= (-1)^3(2) = (-1)(2)$

$a'_{21} = -2$

▸

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} -4 & 2 \\ \hline -2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{22} = (-1)^{2+2}[-4]$

$= (-1)^4(-4) = (-1)(-4)$

$a'_{22} = 4$

$$\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Encontrar la matriz de cofactores para la matriz (3x3)

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}}_{\text{submatriz}} = M_{11}$$

▸

$$a'_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2[3(6) - 8(0)]$$

$$a'_{11} = 18$$

▸

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$a'_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3[2(6) - 9(0)]$$

$$a'_{12} = -12$$

▸

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$a'_{13} = (-1)^{1+3}[2(8) - 9(3)]$$

$$= (-1)^4[16 - 27]$$

$$a'_{13} = -11$$

▸

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$a'_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3[4(6)-8(3)] = (-1)(24-24)$$

$$a'_{21} = 0$$

$$\mathbf{A} = \left|\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right|$$

$$a'_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4[5(1)-3(3)] = 1(5-9)$$

$$a'_{22} = -4$$

$$\mathbf{A} = \left|\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right|$$

$$a'_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^5[5(-2)-3(4)] = (-1)(-10-12)$$

$$a'_{23} = 22$$

$$\mathbf{A} = \left|\begin{array}{c|cc} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 3 & -2 & 1 \end{array}\right|$$

$$a'_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4[4(0)-3(3)] = 1(0-9)$$

$$a'_{31} = -9$$

▶

$$\mathbf{A} = \left|\begin{array}{c|cc} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 3 & -2 & 1 \end{array}\right|$$

$$a'_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^5[5(1)-3(3)] = -1(5-9) = -1(-4)$$

$$a'_{32} = 4$$

$$\mathbf{A} = \left|\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 3 & -2 & 1 \end{array}\right|$$

$$a'_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^6[5(3)-2(4)] = 1(15-8)$$

$$a'_{33} = 7$$

$$Ac = \begin{bmatrix} 18 & -12 & -11 \\ 0 & -4 & 22 \\ -9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa por el método de cofactores

En el cápitulo 6 se estudió a la matriz inversa, sus propiedades y el procedimiento de reducción gaussiana para determinar la inversa de una matriz cuadrada; en este tema se analizará el procedimiento para determinar la inversa de una matriz cuadrada a partir de la matriz de cofactores.

Los pasos a seguir con este método son los siguientes:

1. Determinar la matriz de cofactores **Ac**, de la matriz **A**.
2. Encontrar la matriz transpuesta de **Ac**
3. La matriz inversa de **A** se encuentra multiplicando a la matriz $\mathbf{A}_c^t$, por su recíproco.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_c^t \left[\frac{1}{|\mathrm{A}|} \right]$$

Ejemplo:

1) Determinar la matriz inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz de cofactores es:

$$\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ \hline 2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{11} = (-1)^{1+1}(5) = 1(5)$

$a'_{11} = 5$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ \hline 2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -1(2)$

$a'_{12} = -2$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ \hline 2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{21} = (-1)^{2+1}(7) = -1(7)$

$a'_{21} = -7$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 7 \\ \hline 2 & 5 \end{array}\right]$$

$a'_{22} = (-1)^{2+2}(3) = 1(3)$

$a'_{22} = 3$

$$\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontrar la matriz transpuesta de cofactores

$$\mathbf{A}_c^t = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

El determinante de A_c^t es:

$$\left|\mathbf{A}_c^t\right| = 5(3) - (-2)(-7) = 15 - 14$$

$$\left|\mathbf{A}_c^t\right| = 1$$

La matriz inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Determinar la matriz inversa de

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz de cofactores

$$\mathbf{B}c = \begin{bmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1[\,0(5)-2(-4)\,] = 8$$

▸ $$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{12} = (-1)^{3}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -1[\,3(5)-1(-4)\,] = -1(15+4) = -19$$

▸ $$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{13} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1[\,3(2)-1(0)\,] = 6$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1[\ 1(5)-2(1)\ ] = -3$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1[\ 1(5)-1(1)\ ] = 4$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1[\ 1(2)-1(1)\ ] = -1$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 1[\ 1(-4)-0(1)\ ] = -4$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1[\ 1(-4)-3(1)\ ] = -1(-4-3) = -1(-7) = 7$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$b'_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1[\ 1(0)-3(1)\ ] = -3$$

$$\mathbf{Bc} = \begin{bmatrix} 8 & -19 & 6 \\ -3 & 4 & -1 \\ -4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución de sistemas de ecuaciones utilizando matriz inversa

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones se puede determinar conociendo la inversa de un matriz.

Si consideramos un sistema de ecuaciones de (mxn) de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = C1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = C2 \\
\;.\qquad\quad .\qquad .\qquad .\qquad . \\
\;.\qquad\quad .\qquad .\qquad .\qquad . \\
\;.\qquad\quad .\qquad .\qquad .\qquad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = Cm
\end{array}\right\} \mathrm{I}$$

El sistema de ecuaciones (I) se puede representar por la ecuación matricial

$$AX = C \qquad (1)$$

Ahora, si multiplicamos a la ecuación (1) por A^{-1} (matriz inversa de A):

$$A^{-1}AX = A^{-1}C \qquad (2)$$

se sabe que $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$, entonces la ecuación (2) queda como

$$IX = A^{-1}C$$

o bien de la forma

$$X = A^{-1}C \qquad (3)$$

Por ejemplo:

1) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}
3x_1 + 5x_2 = 7 \\
2x_1 - x_2 = -4
\end{array}\right\} \mathrm{I}$$

El sistema se representa por su ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de A por el método de cofactores

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontrar la transpuesta de A_c

$$A_c^t = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz A

$|A| = (3)(-1) - (2)(5) = -13$

Por tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

El vector solución X es:

$$X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \\ \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ \\ \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.

2) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Su ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A por el método de cofactores

$$A_c = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Encontrar la matriz transpuesta de A_c

$$A_c^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

El determinante de A

$$|A| = \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}$$

$$|A| = 10$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{5}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{0}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} & \frac{5}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{5}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{0}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$.

Método de expansión por cofactores

Definición:
Es una manera general de calcular el determinante de una matriz, a través de los siguientes pasos:

1. Seleccionar un renglón o columna de la matriz.
2. Multiplicar cada elemento del renglón o columna de la matriz A por el elemento correspondiente de la matriz de cofactores A_c.
   - 2.1 Encontrar el determinante al ampliar el renglón i cualesquiera
     $|A| = \alpha_{i1}\alpha_{i1} + \alpha_{i2}\alpha'_{i2} + \ldots + \alpha_{in}\alpha'_{in}$
   - 2.2 Encontrar el determinante al ampliar el renglón j cualesquiera
     $|A| = \alpha_{1j}\alpha_{1j} + \alpha_{2j}\alpha'_{2j} + \ldots + \alpha_{mj}\alpha'_{mj}$

Por ejemplo

1) Resolver el sistema de ecuaciones

$x + 6y = 27$
$7x - 3y = 9$

La ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Matriz de cofactores

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

El determinante de A se encuentra tomando la columna 2 de la matriz A y Ac.

$|A| = (1)(-3) - (7)(6) = -42 - 3$

$|A| = -45$

La matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{-45}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{45} & \frac{7}{45} \\ \frac{6}{45} & -\frac{1}{45} \end{bmatrix}$$

El vector solución X es

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{45} & \frac{7}{45} \\ \frac{6}{45} & -\frac{1}{45} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix}$$

La solución de un sistema es $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$

2) Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + y + z &= 4 \\ 2x + 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

La ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de cofactores

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El determinante de A se encuentra tomando la columna 3 de la matriz A y A_c.

$|A| = (1)(0) + (1)(-4) + (-1)(2)$

$|A| = -6$

La matriz transpuesta de cofactores

$$\mathbf{A}_c^t = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

El vector solución es

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{3}{6} & \frac{3}{6} & \frac{0}{6} \\ \frac{0}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 4$

8.4 Regla de Cramer

Es un método para resolver un sistema de "n" ecuaciones lineales con "n" incógnitas, a través de los determinantes, empleando los siguientes pasos.

Sea el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = C_2 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\qquad . \qquad\quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = C_m \end{array}\right\} \quad \mathrm{I}$$

1. Encontrar la ecuación matricial del sistema de ecuaciones I

   $AX = C$

2. Encontrar el valor de la variable j-ésima, empleando la expresión

   $$x_i = \frac{A_j}{A}$$

   2.1 A_j se obtiene al reemplazar la j-ésima columna de A con el vector columna C.

Cuando $|A| = 0$ y X_i no está definida, entonces A es singular, y el sistema de ecuaciones no tiene solución o se obtienen un número infinito de soluciones.

Si $|A| \neq 0$, existe una solución única.

Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= C_2 \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

Ecuación matricial del sistema de ecuaciones (I)

$$X\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Encontrar la expresión para x_1

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Encontrar la expresión para x_2

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Por ejemplo

1) Resolver el sistema mediante la regla de Cramer

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 7 \\ 2x_1 - \ \ x_2 &= -4 \end{aligned}\right\} \text{II}$$

Ecuación matricial del sistema de ecuaciones II

$$X\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Encontrar la expresión para X_1 y el valor de la misma

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7(-1)-(-4)(5)}{3(-1)-(2)(5)} = \frac{-7+20}{-3-10} = \frac{13}{-13} = -1$$

Para X_2

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3(-4)-2(7)}{-13} = \frac{-12-14}{-13} = \frac{-26}{-13} = 2$$

Por lo tanto la solución es $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$

2) Resolver el sistema mediante la regla de Cramer

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= -5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \text{III}$$

Ecuación matricial del sistema de ecuaciones III

$$X\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Encontrar el valor de X_1

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-69}{-23} = 3$$

Encontrar el valor de X_2

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-23} = 2$$

Encontrar el valor de X_3

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{23}{-23} = -1$$

Por lo tanto la solución es $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 1$.

Capítulo 9
Determinantes y transpuestas con excel

Objetivos:
Al terminar este capítulo:
✓ El lector será capaz de obtener determinantes y transpuestas de una matriz utilizando Excel.

9.1 Introducción

La hoja electrónica de Excel resuelve la totalidad de las operaciones que se desarrollan con determinates de una matriz utilizando pegar función y la función MDETERM. Para el caso de la matriz transpuesta se utiliza el menú Edición, transpuesta de una matriz y pegado especial; porque en este caso sólo se trata de un ordenamiento de datos.

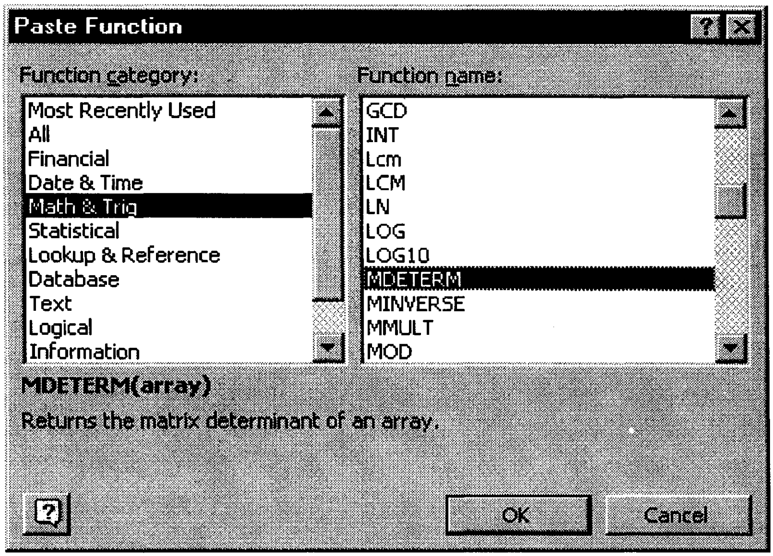
9.2 Determinantes

El determinante de la matriz B es = -1

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular el determinante de una matriz se utiliza la función MDETERM, la cual se obtiene seleccionando de la barra estandar <Pegar función>, <Matemáticas y trigomométricas>, <MDETERM>, ver imagen 9.1

Imagen 9.1
Selección de MDETERM



Enseguida aparece una ventana que solicita la identificación de las celdas en que se encuentran los elementos de la matriz a la que se le calculará el determinante, ver imagen 9.2

Ya que el valor del determinante es único, esta operación no requiere expanción de fórmula. La imagen 9.3 muestra que el determinante es calculado utilizando todos los valores de la matriz.

Imagen 9.2
Llenado de MDETERM

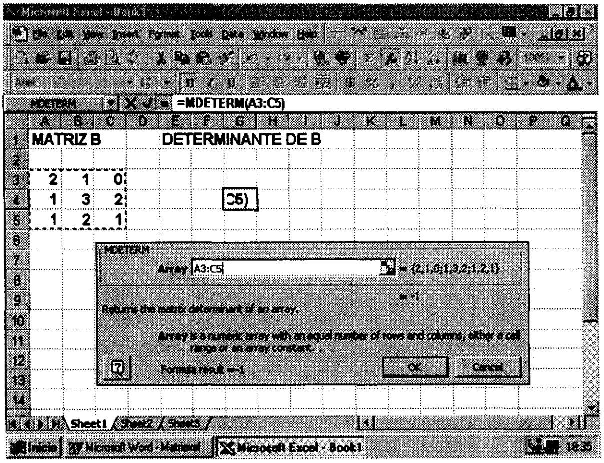
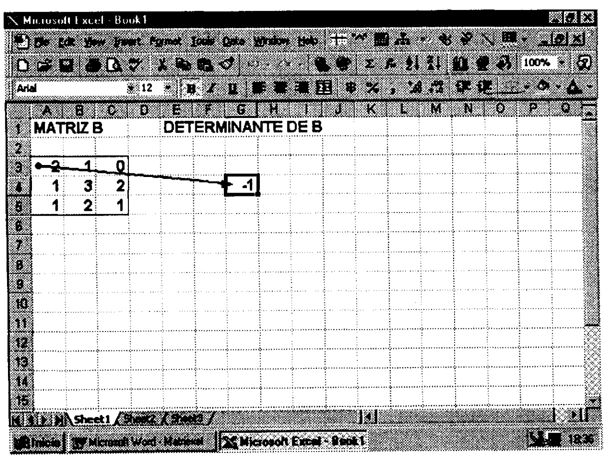


Imagen 9.3
El valor del determinante se calcula utilizando todos los elementos de la matriz.



9.3 Tanspuesta

La transpuesta de una matriz se obtiene utilizando el menú Edición. En este caso más que una operación es un ordenamiento de elementos.

Procedimiento:

1. En primer lugar hay que rotular y capturar los datos de las matrices.
2. Enseguida se selecciona la matriz a transponer.
3. Después se selecciona la celda donde se desea aparezca el primer elemento de la transpuesta.
4. Se selecciona el menú Edición, ver imagen 9.4
5. Se pulsa <Pegado especial><Pegar valores><Operación ninguna>, en la parte inferior de la ventana de pegado especial se selecciona transponer y aceptar, ver imagen 9.5. La transpuesta aparece iniciando en la celda seleccionada, este proceso no requiere expanción de fórmula, ver imagen 9.6

Imagen 9.4
Uso del menú Edición para transponer una matriz

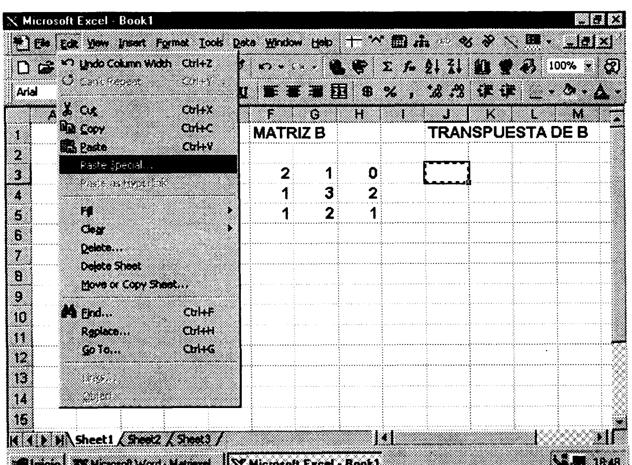


Imagen 9.5
Uso del menú Edición para transponer una matriz

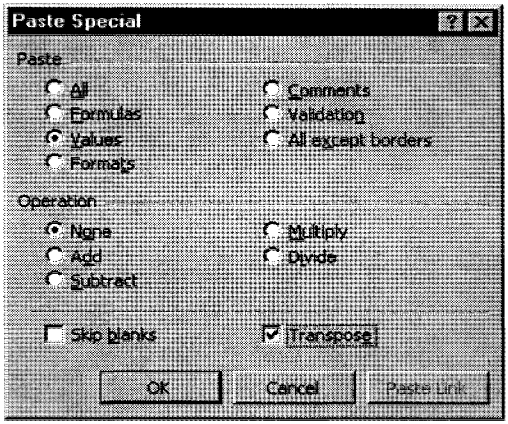
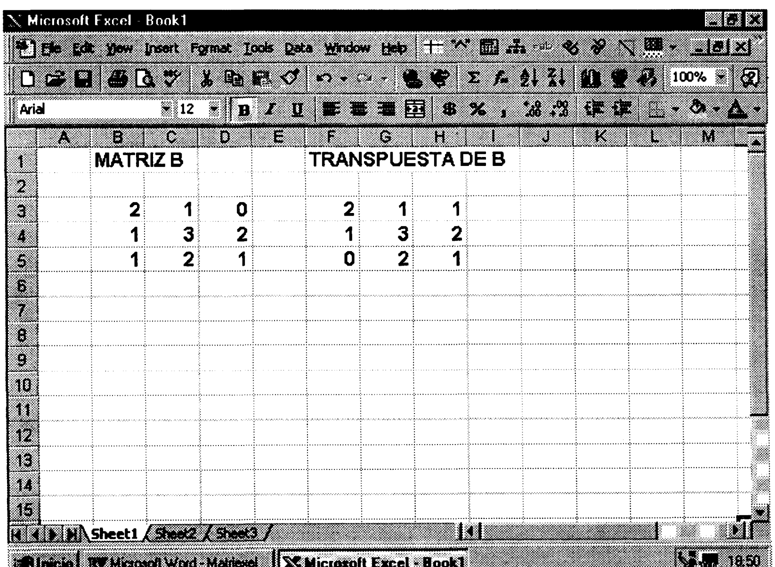


Imagen 9.6
Matriz transpuesta



Çapítulo 10
Álgebra del espacio $\Re^n$

Objetivos:
Al finalizar este capítulo, el lector :
- ✓ Construirá los ejes coordenados empleando vectores.
- ✓ Identificará vectores linealmente independientes.
- ✓ Gererará subespacios en $\Re^n$ y conocerá su dimensión.
- ✓ Identificará el rango de una matriz.
- ✓ Generará bases ortonormales en $\Re^n$.

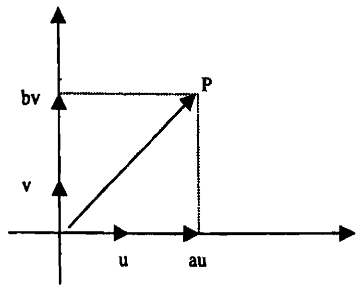
10.1 Introducción

En esté capitulo se estudia la forma de obtener los ejes coordenados empleando los vectores, y también utilizando los conceptos de independencia lineal, conjuntos generadores y bases, desarrollados en capítulos anteriores.

10.2 Ejes de coordenadas usando vectores

A partir de cualquier par de rectas que se cortan se pueden construir ejes de coordenadas si las rectas son perpendiculares. Por ejemplo considere dos vectores unitarios **u** y **v** perpendiculares en el espacio (euclidiano real) denotado por R^2 y un punto de origen común de éstos como **0**. Ahora bien si **P** es un punto en el plano R^2 como se muestra en la figura 10.1

Figura 10.1

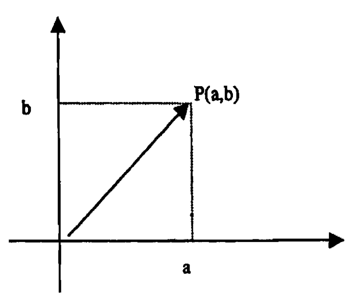


Los vectores **u** y **v** desde **0** hasta donde las perpendiculares de **P** son **au** y **bv**, y $\overline{OP}$ es un vector que se denota como:

$$\overline{OP} = au + bv$$

Las rectas que contienen a los vectores unitarios **u** y **v** se transforman en los ejes de coordenadas, y las coordenadas del punto **P** son (a,b), representándose gráficamente como se muestra en la figura 10.2

Figura 10.2



Capítulo 10
Álgebra del espacio $\Re^n$

Objetivos:
Al finalizar este capítulo, el lector :
- ✓ Construirá los ejes coordenados empleando vectores.
- ✓ Identificará vectores linealmente independientes.
- ✓ Gererará subespacios en $\Re^n$ y conocerá su dimensión.
- ✓ Identificará el rango de una matriz.
- ✓ Generará bases ortonormales en $\Re^n$.

10.1 Introducción

En esté capitulo se estudia la forma de obtener los ejes coordenados empleando los vectores, y también utilizando los conceptos de independencia lineal, conjuntos generadores y bases, desarrollados en capítulos anteriores.

10.2 Ejes de coordenadas usando vectores

A partir de cualquier par de rectas que se cortan se pueden construir ejes de coordenadas si las rectas son perpendiculares. Por ejemplo considere dos vectores unitarios **u** y **v** perpendiculares en el espacio (euclidiano real) denotado por R^2 y un punto de origen si y solo si **Ax**=**u** tiene una solución única, si la columna *i*-ésima de **A**=[$v_1, v_2, \ldots, v_k$] es u_i.

Si tiene solución, los componentes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de x proporcionan los coeficientes de la combinación lineal.

Ejemplo

a) Expresar el vector (7, -4) como una combinación lineal de los vectores **u** = (3, 2) y **v** = (5, -1), representando los vectores en columnas, y usando como escalares a y b.

$$\underbrace{a\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}}_{u}+\underbrace{b\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}}_{v}=\begin{bmatrix}3a & +5b\\2a & -b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix}$$

se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$$

o también

3a + 5b = 7
2a - b = 4

se puede encontrar la solución

$$\left[\begin{array}{cc:c}3 & 5 & 7\\2 & -1 & -4\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1}\left[\begin{array}{cc:c}1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\2 & -1 & -4\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_1+R_2}\left[\begin{array}{cc:c}1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\0 & \frac{-13}{3} & \frac{-26}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{-3}{13}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc:c}1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\0 & 1 & 2\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{-5}{3}R_2+R_1}\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

entonces a = -1 y b = 2, por lo tanto

(7, -4) = -u +2 v

b) Expresar el vector (6, 5, -10) como una combinación lineal de los vectores **u** = (1, 1, 1), **v** = (1, -1, -1) y **w** = (1, 2, -3), represente los vectores en columnas y utilice como escalares a, b y c.

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & +b & +c\\a & -b & +2c\\a & -b & -3c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\\-10\end{bmatrix}$$

se puede escribir como

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 2\\1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\\-10\end{bmatrix}$$

o también

$$\begin{aligned}a+b+\ \ c &= 6\\ a\ -b+2c &= 5\\ a\ -b\ -3c &= -10\end{aligned}$$

Encontrar la solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6\\1 & -1 & 2 & 5\\1 & -1 & -3 & -10\end{array}\right]\xrightarrow{-R_2+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6\\0 & 2 & -1 & 1\\1 & -1 & -3 & -10\end{array}\right]\rightarrow\ldots\xrightarrow{\frac{-3}{2}R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

entonces $a=1, b=2$ y $c=3$, por lo tanto $(6,5,-10)=u+2v+3w$.

10.3 Base en R^n

Un subconjunto de vectores en R^n se puede utilizar para formar un sistema de coordenadas en R^n, al cual se le llama base de R^n.

> **Definición:**
> Sea el conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ de vectores R^n, se le conoce como base de R^n si todo elemento de R^n se puede expresar como una combinación lineal de $u_1, u_2, ..., u_k$ en una y sólo una forma.

El método para determinar si un conjunto de vectores S es de base R^n es el siguiente:

1. Formular una matriz A de orden n x n cuyas columnas sean $u_1, u_2, ..., u_k$
2. Para saber si S es base, se debe de cumplir cualquiera de los siguientes casos: a) es invertible, b) el determinante de A es distinto de cero, c) A se reduce por renglones a In.
3. Para saber que S no es base, no se cumplen los casos mencionados en el segundo punto.

Antes de plantear algunos ejemplos es importante mencionar el teorema 2.

Teorema 2

Sean los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n$ en R^n y $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n]$ la matriz n x n cuya columna *i -ésima* es $\mathbf{v}i$.

a) $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ es una base de R^n
b) $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n]$ es invertible
c) $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n]$ es I_n
d) Determinante $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n] \neq 0$

Ejemplo:

1) Probar que el conjunto de vectores **u** = (-1, -3, -3), **v** = (3, -1, 9) y **w** = (5, 5, 15) no es una base de R^3.
Formar una matriz **A** de n x n cuyas columnas son **u**, **v** y **w**

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 5 \\ -3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{array} \longleftarrow \text{vectores} \end{array}$$

encontrar el determinante de A

$$|A| = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 5 \\ -3 & 9 & 15 \end{bmatrix} = 0$$

Como el $|A| = 0$, los vectores **u**, **v** y **w** no forman una base de R^3
Si empleamos la forma reducida de renglones de A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 5 \\ -3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \dots . \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se observa la matriz A no se puede reducir a I_3, entonces el conjunto de vectores **u**, **v** y **w** no forman una base de R^3.

2) Probar que el conjunto de vectores **u** = (1, 1, 2), **v** = (-1, 1, 2) y **w** = (1, 1, -1) forman una base de R^3.
Construir la matriz A de n x n cuyas columnas son los vectores **u**, **v** y **w**.

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \quad\quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} \end{array}$$

encontrar el determinante de A

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -6$$

Como el $|A| \neq 0$, entonces los vectores **u**, **v** y **w** forman una base en R^3.
Empleando la formas reducida de renglones de A

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow .... \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A se pudo reducir a I_3 , entonces el conjunto de vectores **u**, **v** y **w**, forman una base de R^3.
Encontrar la inversa de la matriz **A**.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{-3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \end{bmatrix}$$

Como la matriz A es invertible, el conjunto de vectores **u**, **v** y **w**, forman una base de R^3.

3) Demostrar que los vectores **u** = (1, 0, 0), **v** = (0, 1, 0) y **w** = (0, 0, 1), son base de R^3.
Construir la matriz **A** de n x n cuyas columnas son los vectores

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se observa la matriz A es de forma

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo cual nos indica que también es invertible y que su determinante es distinto de cero ($|A| = 1$), entonces el conjunto de vectores **u**, **v** y **w** son base de R^3.

En base al ejemplo 3 podemos plantear la forma general de la base canónica de R^n, en donde los vectores $u_1 = (1, 0, ..., 0)$, $u_2 = (0, 1,..., 0)$, ..., $u_n = (0, 0,..., 1)$, forman el conjunto $S = \{ u_1, u_2 ,..., u_n \}$ de la base canónica de R^n.

La matriz A de n x n cuyas columnas son los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

es invertible y el determinante de A es distinto de cero.

10.4 Independencia Lineal

Una ecuación vectorial $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_k\mathbf{u}_k = 0$ va a tener por lo menos una solución, los escalares $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$. Un conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ es linealmente independiente si y sólo si, se tiene una solución única. Entonces la representación única es empleada para la independencia lineal.

> **Definición:**
> Sea el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ de vectores en Rn es linealmente independiente, si y sólo si, la ecuación vectorial tiene una solución única, si existen escalares $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$

Los pasos para identificar si un conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k\}$ de vectores es linealmente independiente, son los siguientes:

1. Se plantea la ecuación vectorial $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_k\mathbf{u}_k = 0$, y se resuelve para los escalares $a_1,\ a_2, ..., a_k$
2. Se verifica que la solución única es $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$, entonces el conjunto S de vectores es linealmente independiente.

Ejemplo:

1) Mostrar que los vectores $\mathbf{u} = (3,4,1)$ y $\mathbf{v} = (2,1,0)$ son linealmente independientes

$$\begin{aligned} a_1\,\mathbf{u} + a_2\,\mathbf{v} &= a_1(3, 4, 1) + a_2(2, 1, 0) \\ &= (3a_1, 4a_1, a_1) + (2a_2, a_2, 0) \\ &= (3a_1 + 2a_2,\ 4a_1 + a_2, a_1) \\ a_1\,\mathbf{u} + a_2\,\mathbf{v} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{aligned} 3a_1 + 2a_2 &= 0 \text{ ----------- } ① \\ 4a_1 + a_2 &= 0 \text{ ----------- } ② \\ a_1 + 0 &= 0 \text{ ----------- } ③ \end{aligned}$$

al sustituir $a_1 = 0$ en la ecuación 1 y 2 a_2 es igual a cero, entonces tenemos una solución única $a_1 = a_2 = 0$ de la ecuación a_1 **u** + a_2 **v** = 0, esto nos lleva afirmar que los vectores **u** y **v** son linealmente independientes.

2) Mostrar que los vectores **u** = (1, 1) y **v** = (-1, 2) en R^2 son linealmente independientes.

$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v} &= a_1(1, 1) + a_2(-1, 2) \\ &= (a_1, a_1) + (-a_2, +2a_2) \\ &= (a_1 - a_2 ,\ a_1 + 2a_2) \\ a_1 \mathbf{u} + a_2 \mathbf{v} &= (0, 0) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones queda como:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \ \ a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

Entonces la solución del sistema I es única con $a_1 = a_2 = 0$, y los vectores **u** y **v** son linealmente independientes.

Definición:
Sea el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ de vectores en R^n es **linealmente dependiente**, si y sólo si, la ecuación vectorial $a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k = 0$, se tiene una solución en la que **no todos** los coeficientes a*i* son iguales a cero.

Ejemplo:

1) Mostrar que los vectores **u** = (1,1), **v** = (-1,2) y **w** = (-2,1) en R^2 son linealmente dependientes.

$$
\begin{aligned}
a_1\,\mathbf{u} + a_2\,\mathbf{v} + a_3\,\mathbf{w} &= a_1(1,1) + a_2(-1,2) + a_3(-2,1)\\
&= (a_1, a_1) + (-a_2, 2a_2) + (-2a_3, a_3)\\
&= (a_1 - a_2 - 2a_3, a_1 + 2a_2 + a_3)\\
&= (0, 0)
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuaciones queda como:

$$
\begin{aligned}
a_1 - a_2 - 2a_3 &= 0\\
a_1 + 2a_2 + a_3 &= 0
\end{aligned}
$$

como puede observarse la solución del sistema no es única por lo que los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes.

2) Mostrar que los vectores **u** = (2,3), **v** = (1,-1) y **w** = (0,1) en R^2 son linealmente dependientes.

$$
\begin{aligned}
a_1\,\mathbf{u} + a_2\,\mathbf{v} + a_3\,\mathbf{w} &= a_1(2,3) + a_2(1,-1) + a_3(0,1)\\
&= (2a_1 + 3a_1) + (a_2 - a_2) + (0, a_3)\\
&= (2a_1 + a_2, 3a_1 - a_2 + a_3) = (0, 0)
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuaciones es

$$
\begin{aligned}
2a_1 + a_2 + 0 &= 0\\
3a_1 - a_2 + a_3 &= 0
\end{aligned}
$$

El sistema no tiene una solución única, entonces los vectores u, v y w son linealmente dependientes.

3) Mostrar que S = {(1, 0), (0, 1), (1, -1)} son linealmente independientes

$$
\begin{aligned}
&a_1\,(1,0) + a_2\,(0,1) + a_3\,(1,-1) = a_1\,u + a_2\,v + a_3\,w\\
&a_1 + a_2 + (a_3 - a_3) = (0, 0)\\
&(a_1 + a_3, a_2 - a_3) = (0, 0)
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuación es:

$a_1 + a_3 = 0$
$a_2 - a_3 = 0$

Si $c \neq 0$ y $a_2 = c$ entonces la solución del sistema es $a_3 = +c$, $a_1 = -c$, no se obtiene una solución trivial, por lo que S es linealmente dependiente.

4) Mostrar que $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ son linealmente dependientes

$$\begin{aligned} a_1 u + a_2 u &= a_1(1, 0) + a_2(0, 1) \\ a_1 + a_2 &= (0, 0) \end{aligned}$$

Como tenemos una solución única, entonces S es linealmente independiente, ya que $a_1 = a_2 = 0$

Teorema 3

Los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ de R^n forman un conjunto de vectores linealmente independientes en R^n, si y sólo si, se cumplen cualquiera de los siguientes casos.

a) El determinante de $[u_1, u_2, \ldots, u_k] \neq 0$
b) o es invertible $[u_1, u_2, \ldots, u_k]$
c) o $[u_1, u_2, \ldots, u_k]$ es I_n.

Ejemplo:

a) Mostrar que los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (1, -1, -1)$ son linealmente independientes.

$$\textbf{a.}\ \ \mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -6$$

b. es invertible $\begin{bmatrix} \frac{3}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{-3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow .... \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente independientes.

Los vectores $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ de R^n forman un conjunto de vectores linealmente dependientes, si y sólo si, se cumplen cualquiera de los siguientes casos:

a) El determinante de $[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k] = 0$
b) o si es singular $[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k]$
c) o $[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k] \neq I_n$

Ejemplo:

a) Mostrar que los vectores **u** = (-1,-3,-3), **v** = (3,-1,9) y **w** = (5,5,15) son linealmente dependientes.

a. $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 5 \\ -3 & 9 & 15 \end{vmatrix} = 0 \\ \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} \end{array} \longleftarrow$ vectores

b. $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 5 \\ -3 & 9 & 15 \end{vmatrix} = 0$

La matriz **A** no se puede transformar en I_3, por lo tanto A^{-1} no existe, entonces **A** es singular porque no existe solución de la ecuación

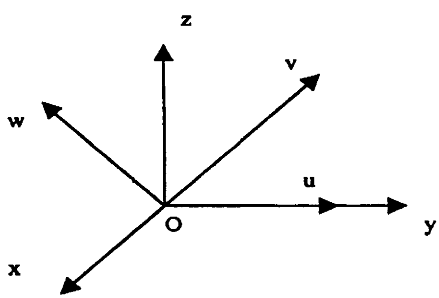
c. $$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 15 \end{bmatrix} \to \ldots\ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 4

Sea el conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de vectores en R^n es linealmente independiente, si y sólo si, se cumple para cualquier vector $\mathbf{v} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k$ de tal forma que la representación es única.

Dos vectores no paralelos (no colineales) en una misma recta, son linealmente independientes. En el espacio tres vectores cualesquiera no paralelos en el mismo plano (no coplanares) son linealmente independientes como se muestra en la figura 10.3

Figura 10.3



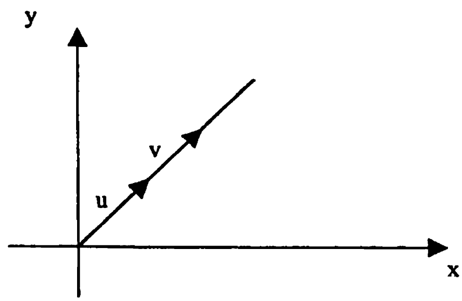
Teorema 5

Sea el conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de vectores en R^n es linealmente dependiente, si y sólo si, al menos uno de los vectores del conjunto S se puede expresar como una combinación lineal en términos de los demás vectores.

Ejemplo:

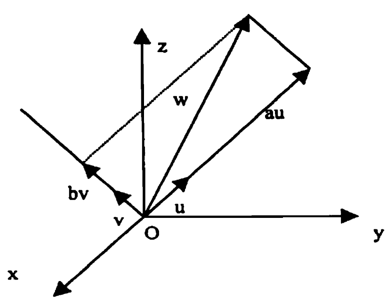
a) Si consideramos dos vectores **u** y **v** que tienen un punto inicial en el origen en R^2, son linealmente dependientes porque son paralelos en la misma recta que pasa por el origen, ver figura 10. 4

Figura 10.4



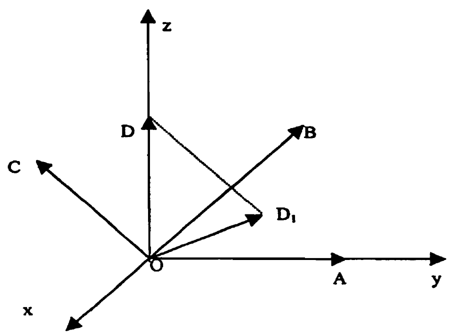
b) Si consideramos un conjunto S de tres vectores {u, v y w} que tienen un punto inicial en el origen de R^3, estos serán linealmente dependientes, por que los vectores son paralelos en el mismo plano (coplanares), como se observa en la figura 10.5 el vector **w** se puede expresar como una combinación lineal **w** = a**u** + b**v** de los vectores **u** y **v**.

Figura 10.5



c) Sean cualesquiera cuatro vectores A, B, C y D del espacio son linealmente dependientes, si los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ son no coplanares y sea $\overline{OD}$ otro vector. Ahora sí tenemos la restas DD_1 paralela OC entonces D_1 pertenece al plano AOB, como se muestra en la figura No. 10.6, el vector $\overline{OD_1}$ es coplanar respecto a los vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, entonces $\overline{OD} = \overline{OD_1} + \overline{D_1D}$

Figura 10.6



Teorema 6

Sea $S = \{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}$ un conjunto de vectores en R^n, si $k > n$ entonces S es linealmente dependiente.
Ejemplo:

Sean tres vectores $\mathbf{u} = (1,3)$, $\mathbf{v} = (0,3)$ y $\mathbf{w} = (8,2)$ en R^2 son linealmente dependientes, porque $k > n$, o sea $3 > 2$.

Si un conjunto de vectores S, es linealmente independiente si $k \leq n$. Para la dimensión del conjunto de todos los vectores planos es igual a dos, en el conjunto de vectores espaciales de tres, en una dimensión finita (a la cual se le conoce como espacios de dimensión finita) y para un espacio de dimensión infinita se puede encontrar un número tan grande de vectores independientes como se quiera.

Teorema 7

En un espacio lineal de dimensión finita todo conjunto de vectores linealmente independientes puede ser incluido como una base.

10.5 Subespacios en R^n y dimensión

Existe un determinado tipo de aplicaciones en el que es necesario utilizar subconjuntos de espacios vectoriales, siendo a su vez éstos espacios vectoriales.

Comenzaremos primero analizando el espacio generado por S. Sea el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto arbitrario S, se le conoce como espacio generado por S. Ahora si $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}$ es un conjunto generado de R^n, se puede decir que los vectores $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ generan a R^n.

Definición:
Dado un conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de vectores en R^n, es un conjunto generador de R^n, si cada uno de los vectores en R^n se expresan como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ de la base.

Ejemplo.

1) Mostrar que los vectores $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,2)$ y $\mathbf{w} = (-2,1)$ no generan a R^2.

   Se considera un vector arbitrario (a, b) como una combinación de los vectores **u**, **v** y **w**.

   $a_1(1,1) + a_2(1,2) + a_3(-2,1) = (a,b)$

el sistema se escribe como:

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 - 2\,a_3 &= a \\
a_1 + 2a_2 + a_3 &= b
\end{aligned}
$$

En forma matricial:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right] \rightarrow \ldots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -5 & 2a & -b \\ 0 & 1 & 3 & -a & +b \end{array}\right]
$$

Como puede observarse no hay una solución única, por lo tanto van a existir una infinidad de soluciones, esto nos lleva a que el vector (a, b) también se puede representar en una infinidad de formas en una combinación lineal de los vectores **u**, **v** y **w**.

2) Mostrar que el vector (0, 3) no pertenece al conjunto de vectores **u** = (-1, 2) y **v** = (-2,6) para generar a R^2.
Se considera al vector (0, 3) como una combinación de los vectores **u** y **v**.

$$a_1(-1, 2) + a_2(-2, 6) = (0, 3)$$

El sistema se escribe como:

$$
\begin{aligned}
-a_1 - 2\,a_2 &= 0 \\
2\,a_1 + 6\,a_2 &= 3
\end{aligned}
$$

En forma matricial:

$$
\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \ldots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]
$$

No hay solución.

3) Los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ van a generar a R^3 , porque forman una base de R^3.

Teorema 8

Sea el conjunto S una base de R^n, si y sólo si es un conjunto generador de R^n linealmente independiente.

Ejemplo.

1) Los vectores $\mathbf{u} = (-1,-3,-3)$, $\mathbf{v} = (3,-1,9)$ y $\mathbf{w} = (-1 ,1,2)$ no generan a R^3 ya que no forman una base de R^3.

2) El conjunto de vectores $\mathbf{u} = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (-1,1,2)$ y $\mathbf{w} = (1,1,-1)$ generan a R^3, porque forman una base de R^3 y son linealmente independientes.

Sea v un espacio real o complejo, si S es un subconjunto de v, teniendo S las mismas operaciones que v. Podemos decir que S es un subespacio de v si S tiene las mismas operaciones en un espacio vectorial.

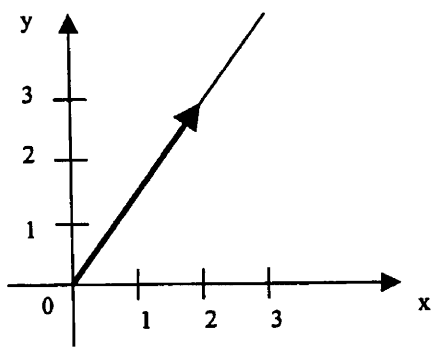
Definición:
Sea S un subconjunto (no vacío) de R^n, es un subespacio de R^n si cumple con las propiedades siguientes:
1. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen a S, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenecen a S.
2. Si $\mathbf{u}$ pertenece a S, sea c cualquier escalar, entonces $c\mathbf{u}$ pertenecen a S.

Esto quiere decir que todas las combinaciones lineales del conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ de vectores en R^n, que se conocen como un espacio generado por S cualquier subconjunto de R^n que satisfaga estas dos propiedades es llamado un subespacio de R^n .

Ejemplo:

1) Sea un espacio generado por $\{(2,3)\}$ en un subespacio de R^2, se encuentra en la recta de la figura 10.7 (todo subespacio de R^n siempre tiene una base).

Figura 10.7



Este subespacio contiene a todos los vectores en R^2 que se encuentran en la recta que pasa por los puntos (0,0) y (2,3).

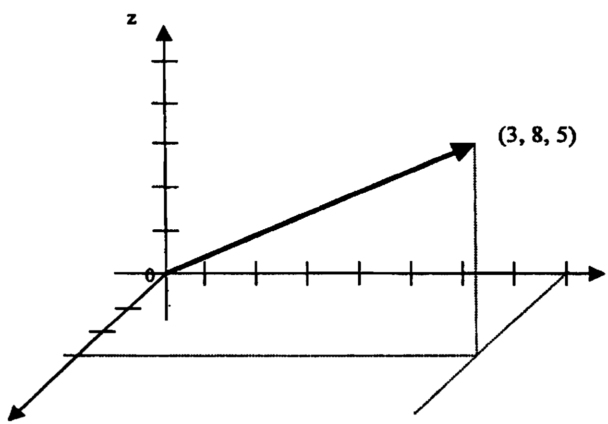
A los subespacios $\{0\}$ y R^n se les conoce como subespacios triviales de R^n y a los demás subespacios de R^n se les nombran espacios propios.

Si un subconjunto de R^n no contiene a cero, no es un subespacio de R^n (Toda recta o plano que no pasa por el origen no es un subespacio). Ahora si decimos que el vector cero pertenece a todo subespacio de R^n entonces $\{0\}$ como R^n deben ser subespacios de R^n.

Ejemplo:

2) Sea el espacio generado por {(3,8,5)} en un subespacio de R^3, este subespacio contiene a todos los vectores en R^3, que se encuentran en la recta que pasa por los puntos (0,0,0) y (3,8,5), como se muestra en la figura 10.8

Figura 10.8



3) Los vectores $\mathbf{u}_1 = (2,-1,3)$, $\mathbf{u}_2 = (4,0,6)$ y $\mathbf{u}_3 = (8,-2,-3)$ generan a R^3, porque forman una base de R^3. El espacio generado por los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ es un subespacio de R^3 que contiene a los vectores (0,0,0) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$.

Teorema 9

Sea la matriz **A** de m x n. En donde el conjunto de todas las soluciones posibles de un sistema homogéneo de ecuaciones $\mathbf{A}x = 0$, va a ser un subespacio de R^n, al cual se le nombrará como espacio solución del sistema.

Ejemplo:

1) Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Probar que [1, 1, 1] no pertenecen al espacio de renglones de A. Sean los escalares x_1 *y* x_2

$$x_1[1 \quad 0 \quad 3] + x_2[0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Entonces el sistema queda

$$\begin{aligned} x_1 + 0 &= 1 \\ 0\, x_1 + 0 &= 1 \\ 3\, x_1 + 0 &= 1 \end{aligned}$$

El sistema no tiene solución y el subconjunto [1 1 1] no pertenece al espacio vectorial de renglones de la matriz **A**.

2) Probar que [2 0 7] pertenece al espacio de renglones de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sean los escalares x_1 y x_2

$$x_1[1 \quad 0 \quad 3] + x_2[0 \quad 0 \quad 1] = [2 \quad 0 \quad 7]$$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} x_1 + 0 &= 2 \\ 0\, x_1 + 0 &= 0 \\ 3\, x_1 + 0 &= 7 \end{aligned}$$

La solución es $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$, entonces el vector [2 0 7] pertenece al espacio de renglones de A.

Ahora si partimos de que todo subespacio de R^n tiene una base, y la base de un subespacio **v** de R^n es un conjunto generado de **v** linealmente independiente y puede tener muchas bases diferentes de R^n.

Teorema 10

Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ una base de un subespacio de R^n, de tal forma que todo subconjunto de **v**, que contenga más de p elementos es linealmente dependiente.

Demostración del teorema 10

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un subconjunto de **v**, en donde $m > p$. Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ es una base de **v**, entonces cada vector $\mathbf{v_i}$ debe de expresarse como una combinación lineal de los elementos de la base.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{v}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{p1}\mathbf{u}_p \\ \mathbf{v}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{p2}\mathbf{u}_p \\ \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \mathbf{v}_m = a_{1m}\mathbf{u}_1 + a_{2m}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{pm}\mathbf{u}_p \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Sean los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$; no todos iguales a cero.

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m = 0 \qquad (2)$$

La ecuación equivalente 3 se obtiene de las ecuaciones 1 y 2

$$\mathbf{u}_1(c_1a_{11} + c_2a_{12} + \ldots + c_ma_{1m}) + \mathbf{u}_2(c_1a_{21} + c_2a_{22} + \ldots + c_ma_{2m}) + \ldots + \mathbf{u}_p(c_1a_{p1} + c_2a_{p2} + \ldots + c_ma_{pm}) = 0 \qquad (3)$$

Si el conjunto $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,..., \mathbf{u}_p\}$ es una base y es un conjunto linealmente dependiente, entonces la ecuación (2) tendrá una solución no trivial, solamente cuando los coeficientes de la ecuación (3) sean todos iguales a cero.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1m}c_m = 0\\
&a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2m}c_m = 0\\
&.\\
&.\\
&.\\
&a_{p1}c_1 + a_{p2}c_2 + ... + a_{pm}c_m = 0
\end{aligned}
$$

El sistema anterior es homogéneo con precauciones lineales con m incógnitas, en donde $m>p$. El sistema tiene una solución no trivial, o sea, que tiene un número infinito de soluciones y por consecuencia se pueden llegar a tener escalares distintos de cero.

Por lo tanto:

$S = \{v_1,v_2,..., v_m\}$ es linealmente dependiente

Corolario

Sean las bases infinitas $s_1 = \{u_1,u_2,..., u_p\}$ y $s_2 = \{v_1,v_2,..., v_n\}$de un subespacio v de R^n. Entonces debemos tener el mismo número de elementos $(m = p)$ en el mismo espacio.

Teorema 11

Al número de elementos de cualquier base de un subconjunto **v** de R^n se le llama dimensión de **v.** Entonces sí la dimensión de **v** es n, se dice que **v** es n - dimensional.

La dimensión de un subespacio de R^n siempre es menor que, o igual a n.

Ejemplo:

a) Si **v** es el subespacio de R^n generado por el vector (1,2), entonces el vector (1,2) es una base de **v** y la dimensión de **v** es uno.

b) Sea el subespacio **v** de R^3 generado por los vectores (1,1,0) y (2,0,4), los vectores son linealmente independientes y la dimensión de **v** es dos.

c) La dimensión de un subespacio trivial $\{0\}$ es cero (por convención).

10.6 Rango de una matriz

Al relacionar los conceptos de espacios vectoriales en R^n con los de matrices, se puede definir el rango de una matriz.

> **Definición:**
> Sea A una matriz, el rango de ésta es la dimensión del espacio de renglones y la dimensión del espacio de columnas.

El rango por renglones de la matriz **A** es igual al número de renglones no nulos, de cualquier forma escalonada por renglones correspondientes a la matriz **A**.

Ejemplo:

1) Determinar el rango de **A**

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

La reducción por renglones de la matriz A es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = A'$$

Existen tres vectores no nulos, entonces el rango de la matriz **A** es de tres.

2) Encontrar el rango de la matriz **B**.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \\ 6 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma escalonada por renglones de la matriz **B** es:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \\ 6 & 18 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}'$$

Sólo existen dos renglones no nulos, entonces el rango de la matriz **B** es de dos. Como la matriz B no se reduce a I_3, por lo tanto no es una base de R^3 y el espacio generado por $\{u_1, u_2, u_3\}$ es dado por los renglones no nulos de **B'**, es decir, $\mathbf{v_1} = (1, 3, 0)$ y $\mathbf{v_2} = (1, 1, 1)$.

Teorema 12

Sea la matriz **A** de n x n entonces:

1. A es invertible

2. En toda matiz **B** n x 1 la ecuación A X = B tiene solución única.
3. A X = 0 tiene solución trivial.
4. La columna de **A** forma una base en R^n.
5. Las columnas de **A** son linealmente independientes
6. Los renglones de **A** forman una base de R^n.
7. Los renglones de **A** son linealmente independientes.
8. La forma escalonada reducida por renglones de **A** es I_n.
9. Determinante de A es distinto de cero
10. El rango de **A** es igual a n

10.7 Bases ortonormales

Cuando es necesario tener ejes coordenados mutuamente perpendiculares, se necesita un conjunto ortogonal de vectores como base, o sea, el conjunto de **s** = $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ en Rn es ortogonal, si cumple con $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, siempre y cuando $i = j$. Ahora si el conjunto **s** = $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ de vectores no nulos en R^n es ortogonal, se puede afirmar que **s** es linealmente independiente, y si todo vector que pertenece a la base ortogonal **s** tiene una longitud unitaria, esto quiere decir que la base es lineal o canónica.

Definición:
Sea el conjunto **s** = $\{u_1, u_2, ..., uk\}$ de vectores en R^n es **ortonormal** si cumple con que: **s** es ortogonal y que todo vector de **s** tiene una longitud unitaria, o sea; $|\mathbf{u}_i| = 1$, para todo i

Ejemplo:

1) Transformar el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ en un conjunto ortonormal.

$\mathbf{u} = (2, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, -3)$

Encontrar la magnitud de cada vector

$$|\ \mathbf{u}\ | = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$|\ \mathbf{v}\ | = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

para **normalizar** cada vector, se divide a éste entre su magnitud.

$$\mathbf{u'} = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(2,\ 4) = \left(\frac{2}{\sqrt{20}},\ \frac{4}{\sqrt{20}}\right)$$

$$\mathbf{v'} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{34}}(5,\ -3) = \left(\frac{5}{\sqrt{34}},\ \frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$$

El conjunto ortonormal es { **u'**, **v'**} y es una base de R^2, los vectores u' y v' son linealmente independientes y la matriz es invertible.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{20}} & \frac{4}{\sqrt{20}} \\ \frac{5}{\sqrt{34}} & \frac{-3}{\sqrt{34}} \end{bmatrix}$$

Para expresar el vector **w** = (1, -2) como una combinación lineal de los vectores ortonormales **u'** y **v'** es haciendo a **w** = a **u'** + b **v'** y resolviendo para encontrar a y b. Otra alternativa de solución es emplear el siguiente teorema.

Teorema 13

Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de R^n y **v** es cualquier vector en R^n entonces $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + ... + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n$ el coeficiente de $\mathbf{v}_i$ es $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}_i$.

Si expresamos a **w** = (1, -2) como una combinación lineal de vectores ortonormales **u'** y **v'** empleando el teorema 14 tenemos:

w = (w • **u'**) **u'** + (w • **v'**) **v'**

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}`= (1,\ -2)\left(\frac{2}{\sqrt{20}},\quad \frac{4}{\sqrt{20}}\right) = \frac{2}{\sqrt{20}} - \frac{8}{\sqrt{20}} = \frac{-6}{\sqrt{20}}$$

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}`= (1,\ -2)\left(\frac{5}{\sqrt{34}},\quad \frac{-3}{\sqrt{34}}\right) = \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{6}{\sqrt{34}} = \frac{11}{\sqrt{34}}$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{-6}{\sqrt{20}}\right)\mathbf{u}` + \left(\frac{11}{\sqrt{34}}\right)\mathbf{v}`$$

2) Sean los vectores **u** = (-1, 2, 5), **v** = (-2, -1, 0) y **w** = (1, -2, 1)
   a) Encontrar la base ortonormal
   b) Expresar a t (1, 4, 3) como una combinación lineal de los vectores ortonormales **u'**, **v'** y **w'**.

Solución:

a) $$|\ \mathbf{u}\ | = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (5)^2} = \sqrt{30}$$

$$|\ \mathbf{v}\ | = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\ \mathbf{w}\ | = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{u}`= \frac{\mathbf{u}}{|\ \mathbf{u}\ |} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,\quad 2,\quad 5)$$

$$\mathbf{v}`= \frac{\mathbf{v}}{|\ \mathbf{v}\ |} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\quad -1,\quad 0)$$

$$\mathbf{w}` = \frac{\mathbf{w}}{|\ \mathbf{w}\ |} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, \quad -2, \quad 1)$$

b) $\mathbf{t} = (\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}`)\,\mathbf{u}` + (\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}`)\,\mathbf{v}` + (\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}`)\,\mathbf{w}`$

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}` = (1 \quad 4, \quad 3)\left(\frac{-1}{\sqrt{30}}, \quad \frac{2}{\sqrt{30}}, \quad \frac{5}{\sqrt{30}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{30}} + \frac{8}{\sqrt{30}} + \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{22}{\sqrt{30}}$$

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}` = (1 \quad 4, \quad 3)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad 0\right) = \frac{-2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{-6}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{w}` = (1 \quad 4, \quad 3)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{-2}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{8}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{t} = \left(\frac{22}{\sqrt{30}}\right)\mathbf{u}` + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\mathbf{v}` + \left(\frac{-4}{\sqrt{6}}\right)\mathbf{w}`$$

Matriz ortogonal

La matriz **A** de n x n es ortogonal si sus columnas forman un conjunto de vectores ortonormales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, si éstos vectores son linealmente independientes entonces la matriz es invertible.

Teorema 14

Los siguientes enunciados son equivalentes

a) **A** es ortogonal
b) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$
c) $\mathbf{A}^t$ es ortogonal

Ejemplo:

1) Sean los vectores

$$\mathbf{u'} = \left(\frac{1}{\sqrt{20}}, \quad \frac{3}{\sqrt{20}} \right) \text{ y}$$

$$\mathbf{v'} = \left(\frac{3}{\sqrt{20}} \quad \frac{-1}{\sqrt{20}} \right), \text{ ortonormal}$$

Entonces la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} & \frac{-1}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

es ortogonal y tiene

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{3}{\sqrt{20}} \\ \frac{3}{\sqrt{20}} & \frac{-1}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

2) Como los vectores

$$\mathbf{u}` = \left(\frac{-1}{\sqrt{30}}, \quad \frac{2}{\sqrt{30}}, \quad \frac{5}{\sqrt{30}} \right)$$

$$\mathbf{v}` = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad 0 \right) \text{ y}$$

$$\mathbf{w}` = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{-2}{\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \text{ son ortonormales.}$$

Entonces la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

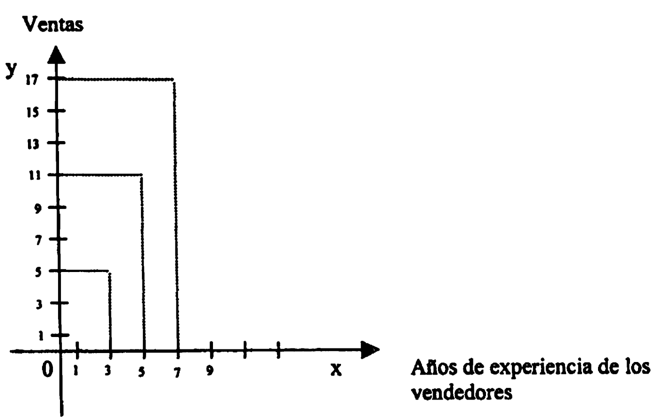
es ortogonal

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{t} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

10.8 Mínimos cuadrados

Para explicar este tema, consideremos un experimento que relaciona el ingreso obtenido por ventas (en miles de pesos) y el número de años de experiencia de cada vendedor. Si tomamos una muestra de seis vendedores, se obtiene el siguiente conjunto de datos $(1,4)$, $(3,5)$, $(4,7)$, $(5,11)$, $(6,13)$ y $(7,17)$, vea la figura 10.10.

Figura 10.10



Con los puntos obtenidos del experimento (*Figura 10.10*) deseamos encontrar la recta y = a + bx que mejor se ajuste a los puntos obtenidos.

Definición:
Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ los **n** puntos distintos de datos. La recta y = a + bx con la prioridad de que el valor
$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2$
es el mínimo, en donde d_i es la distancia vertical desde el punto (x_i, y_i). Y se llama recta de mejor ajuste del conjunto de puntos de datos.

Si la recta y = a + bx es la que mejor se ajusta a los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Ahora, sí consideramos que todos los puntos están sobre la recta de mejor ajuste, se tiene el sistema I.

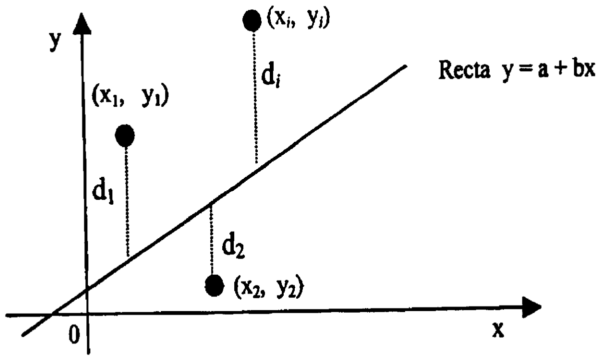
$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a + bx_1 \\ y_2 = a + bx_2 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ y_n = a + bx_n \end{array}\right\} \mathrm{I}$$

el sistema I se puede escribir como y = A**v**

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Ahora cuando no todos los puntos de datos caen sobre la recta de mejor ajuste, se aplican los dos siguientes pasos, primero se elige una línea recta $y = a + bx$, como segundo paso se encuentran las distancias verticales de cada uno de los puntos obtenidos (x_i, y_i) a la línea recta, ver figura 10.11

Figura 10.11



De la figura 10.11 se observa que la distancia vertical d_i del punto (x_i, y_i) a la recta es $d_i = y_i - (a + bx_i)$ para los demás puntos:

$$\left.\begin{array}{c} y_1 - (a + bx_1) = d_1 \\ y_2 - (a + bx_2) = d_2 \\ . \\ . \\ y_n - (a + bx_n) = d_n \end{array}\right\} \text{II}$$

El sistema II se puede escribir como:

$y - \mathbf{Av} = d$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix}$$

Para calcular la magnitud de los vectores, se tiene

$$|y - \mathbf{Av}| = |d| \qquad .....(1)$$

al efectuar el cuadrado de la ecuación 1

$$|y - \mathbf{Av}|^2 = |d|^2$$

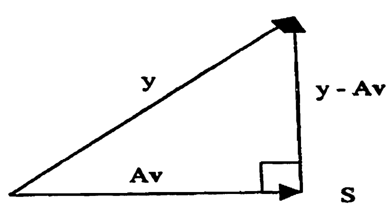
entonces el valor que debe ser minimizado es:

$$|y - \mathbf{Av}|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2$$

Para tener la recta del mejor ajuste, el vector **v** debe ser el vector que minimice el valor de $|y - A\mathbf{v}|^2$

Si $|y - A\mathbf{v}|$ es mínimo, entonces $|y - A\mathbf{v}|^2$ es mínimo cuando y - **Av** es ortogonal a cualquier vector del espacio S como se muestra en la figura 10.12

Figura 10.12



Cuando **v** es el vector minimizante de los vectores de la forma $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y el producto de A**v** forman parte del subespacio S de R^n.

Teorema 15

Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), "**n**" puntos distintos en donde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ y la recta $y = a + bx$ de mejor ajuste tiene coeficientes dados por $\mathbf{v} = (A^t A)^{-1} A^t y$.

Ejemplo:

Encontrar la recta de mejor ajuste de los puntos obtenidos de siete experimentos.

(0, 0), (3, 5), (4, 7), (5, 11), (6, 13) y (7, 17)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \\ 1 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} 6 & 25 \\ 25 & 135 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^tA\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{81}{111} & -\frac{5}{37} \\ -\frac{5}{37} & \frac{6}{185} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = (A^t A)^{-1} A^t \ y$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{81}{111} & -\frac{5}{37} \\ -\frac{5}{37} & \frac{6}{185} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{81}{111} & -\frac{5}{37} \\ -\frac{5}{37} & \frac{6}{185} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53 \\ 295 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1.189 \\ 2.405 \end{bmatrix}$$

La ecuación de la recta de mejor ajuste es:

$y = -1.189 + 2.4\ x$

Teorema 16

Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), "**n**" puntos distintos en donde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, y el polinomio de grado m, $y = a_o + a_1x_1 + \dots + a_mx^m$ de mejor ajuste tiene coeficientes dados por $\mathbf{v} = (A^t A)^{-1} A^t y$.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & . & . & . & x_{1m} \\ 1 & x_2 & . & . & . & x_{2m} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 1 & x_n & . & . & . & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Encontrar el polinomio de segundo grado de mejor ajuste para el conjunto de datos (0, 100), (1, 90), (2, 60), (3, 12) y (4, -57)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \\ 12 \\ -57 \end{bmatrix}$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^tA\right)^{-1} = \left(\frac{1}{70}\right) \begin{bmatrix} 62 & -54 & 10 \\ -54 & 87 & -20 \\ 10 & -20 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \left(A^tA\right)^{-1} A^tY = \left(\frac{1}{70}\right) \begin{bmatrix} 62 & -54 & 10 \\ -54 & 87 & -20 \\ 10 & -20 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \\ 12 \\ -57 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{70}\right) \begin{bmatrix} 62 & -54 & 10 \\ -54 & 87 & -20 \\ 10 & -20 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 205 \\ 18 \\ -474 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{70}\right) \begin{bmatrix} -6998 \\ -24 \\ 680 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -99.971 \\ -0.343 \\ 9.714 \end{bmatrix}$$

La ecuación es:
$Y = -99.971 - 0.343x + 9.714\, x^2$

10.9 Espacios vectoriales

Es importante mencionar que existen semejanzas en las definiciones de los conceptos en el espacio de R^n, con las definiciones de los espacios vectoriales. Porque para poder definir los conceptos de espacios con producto interno, norma de un vector, determinar si dos vectores son ortogonales y ortonormales en cualquier espacio vectorial, se debe de partir tal y como se analizó en el caso de R^n, tomando en consideración las propiedades del producto interno en R^n.

Espacios con producto interno

Los espacios vectoriales en los que puede definir el producto interno, se les conoce como espacios con producto interno.

Definición:
Sea V un espacio vectorial sobre los números reales. Un producto interno real en V es una función que asocia a cada pareja de vectores u y v pertenecientes a V, un número real $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$, con las siguientes propiedades:

a) $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = <\mathbf{v}, \mathbf{u}>$
b) $<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = <\mathbf{u}, \mathbf{w}> + <\mathbf{v}, \mathbf{w}>$
c) $<c\mathbf{u}, \mathbf{v}> = c<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$
d) $<\mathbf{u}, \mathbf{u}> \geq 0$ y $<\mathbf{u}, \mathbf{u}> = 0 <=> \mathbf{u} = 0$

Ejemplo

1) Sea $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2)$ vectores en R^2, si $< \mathbf{u} , \mathbf{v} > = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$ podemos afirmar que $< \mathbf{u} , \mathbf{v} >$ es un producto interno.

2) Comprobar las propiedades del inciso a al d de la definición.

2.a) $< \mathbf{u} , \mathbf{v} > = 3a_1b_1 + 2a_2b_2 = 3a_1b_1 + 2a_2b_2 = < \mathbf{u} , \mathbf{v} >$

2.b) Si $\mathbf{w} = (c_1, c_2)$

$$< \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} > = 3\,(a_1 + b_1)\,c_1 + 2\,(a_2 + b_2)\,c_2$$
$$= 3\,a_1c_1 + 3\,b_1c_1 + 2\,a_2c_2 + 2\,b_2c_2$$
$$< \mathbf{u} , \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \mathbf{w} > = (3\,a_1c_1 + 2\,a_2c_2) + (3\,b_1c_1 + 2\,b_2c_2)$$

2.c) $< c\mathbf{u} , \mathbf{v} > = 3\,(ca_1)\,b_1 + 2\,(ca_2)\,b_2$

$\mathbf{c} < \mathbf{u} , \mathbf{v} > = c[3a_1b_1 + 2a_2b_2]$

2.d) Si $< \mathbf{u} , \mathbf{u} > = 3a_1^2 + 2a_2^2 \geq 0$

ó $< \mathbf{u} , \mathbf{u} > = 0 = 3a_1^2 + 2a_2^2$ se cumple,

si y sólo si $a_1 = a_2 = 0$, entonces $< \mathbf{u} , \mathbf{u} > = 0$

Teorema 17

Sea **V** un espacio de un producto interno, **u**, **v** y **w** son vectores en V, y que a y b son escalares.

a) $<au + bv, w> = <w, au + bv> = a <u, w> + b <v, w>$

b) $<0, u> = <u, 0> = 0$

Definición:
Sea v un espacio con producto interno. La norma v de un vector v está dada por:

$$\| v \| = \sqrt{<v,v>}$$

Cuando la norma $\|v\|$ de un vector **v** es un espacio con producto interno, va ha denotar la magnitud del vector **v**. Entonces $\|u - v\|$

representa la distancia entre los vectores **u** y **v**, los cuales pertenecen a un espacio con producto interno.

Teorema 18

Si **u** y **v** son vectores en un espacio con producto interno, entonces:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

La desigualdad de Cauchy - Schwarz es la resultante de relacionar el producto interno de dos vectores con sus normas.

$$|\langle u, v \rangle| = \sqrt{\langle u, v \rangle^2} \leq \sqrt{\langle u, u \rangle}\sqrt{\langle v, v \rangle} = \|u\| \, \|v\|$$

Ejemplo:

1) Sean $\mathbf{u} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ dos vectores en R^n. El producto definido por:

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

   Ahora, si aplicamos la desigualdad de Cauchy - Schwarz

   $$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$$

2) Sean $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2)$ dos vectores en R^n. El producto definido por:

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$$

   Si aplicamos la desigualdad de Cauchy - Schwarz

   $$|3a_1b_1 + 2a_2b_2| \leq \sqrt{3a_1^2 + 2a_2^2}\sqrt{3b_1^2 + 2b_2^2}$$

El concepto de ortogonalidad en un espacio vectorial con producto interno, se define a continuación.

Definición:
Si **u** y **v** son vectores que pertenecen a un espacio vectorial con producto interno, entonces **u** y **v** serán ortogonales si cumplen $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = 0$

Ejemplo:

Sea $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2)$ vectores en R^2, entonces $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = a_1b_1 + a_2b_2$ es un producto interno de R^2, ahora para que $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = 0 = a_1b_1 + a_2b_2$, si sólo si $a_1 = a_2 = 0$, por lo tanto $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = 0$.

Es importante recordar que dos vectores en R^n son ortogonales si su producto interno es cero. Si consideramos ahora a un conjunto S contenido en un espacio con producto interno ortogonal, entonces toda pareja de elementos de S es ortogonal. Para que un conjunto S sea ortonormal debe de cumplir con que S sea ortogonal y que todo vector S tenga una norma igual a uno.

Capítulo 11
Transformaciones lineales

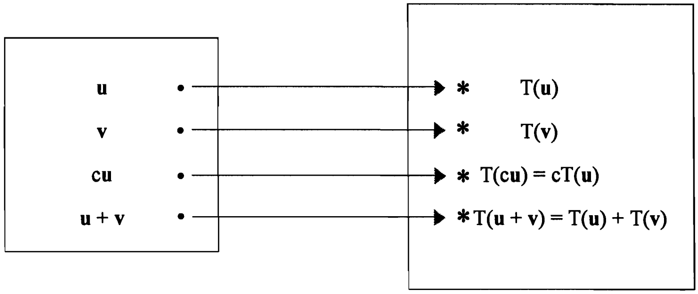
Objetivos:
Al finalizar este capítulo, el lector:
✓ Identificará funciones de transformación lineal.
✓ Realizará transformaciones lineales básicas.
✓ Representará matricialmente una transformación lineal.

1.1 Introducción

La utilidad de una función de transformación lineal (T), es la de aplicar (o transformar) elementos de un espacio vectorial **U** a un espacio vectorial **V**. Toda función de transformación lineal T debe tener las propiedades siguientes.

1) Para todo **u** y **v** en **V**, T (**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**)
2) Para todo **u** en **V**, cualquier escalar c opera como; Tc(**u**) = cT(**u**). Ver figura 11.1

Figura 11.1
Algunos ejemplos de transformación lineal



Ejemplo:

Sea la función T: $R^2 \rightarrow R^2$ dada por:

$T[(p, q)] = (3p + 2q)$, donde T es una transformación lineal.

Para comprobar que T es una transformación lineal se demuestran las propiedades de suma y multiplicación por un escalar enunciadas anteriormente.

1) $$\begin{aligned} T[(p_1, q_1) + (p_2, q_2)] &= T[(p_1 + p_2,\ q_1 + q_2)] \\ &= (3[p_1 + p_2], 2[q_1 + q_2]) \\ &= (3p_1 + 3p_2,\ 2q_1 + 2q_2) \end{aligned}$$

De otra forma:

$$\begin{aligned} T[(p_1,\ q_1)] + T[(p_2,\ q_2)] &= (3p_1,\ 2q_1) + (3p_2,\ 2q_2) \\ &= (3p_1 + 3p_2, 2q_1 + 2q_2) \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$T[(p_1,\ q_1) + (p_2,\ q_2)] = T[(p_1,\ q_1)] + T[(p_2,\ q_2)]$$

2) $T[c\,(p, q)\,] = T\,[(cp, cq)] = (3\,(cp), 2\,(cq))$
$= c\,(3p, 2q)$
$= cT\,[(p, q)]$

Por lo tanto

$$T[\,c\,(p, q)\,] = cT\,[(p, q)]$$

Ya que T satisface las propiedades de suma y multiplicación por un escalar, T es una transformación lineal.

11.2 Representación matricial de una transformación lineal

En esta sección se muestra la forma como se representa matricialmente una transformación lineal.

Para facilitar la comprensión del tema se inicia la exposición con la representación matricial de una transformación lineal entre dos espacios vectoriales **V** y **W.**

Teorema 1

Sea T: **V** $\rightarrow$ **W** una transformación lineal entre dos espacios vectoriales **V** y **W**. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base de **v**, luego T está determinada de manera única por los vectores de $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), T(\mathbf{u}_3), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$.

En los siguientes ejemplos se expresan los elementos de los espacios vectoriales como vectores columna.

Ejemplos:

1) Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$ una transformación lineal donde:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ya que:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = (-3)T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 5T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = (-3)\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matricialmente la transformación lineal que resulta es:

$$T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -27 \\ 11 \end{bmatrix}$$

De aquí se infiere que:

$$(-3)\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}(-3) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(5)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

Donde, $\quad T(e_1) \quad T(e_2)$

$$= T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$$

2) Sea T: $R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal en donde:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

Ya que:

$$\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix}\right)=4T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)+2T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)+(-2)T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix}\right)=4\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

Matricialmente la transformación lineal que resulta es:

$$T\left(\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}8\\20\end{bmatrix}$$

Al analizar se observa que:

$$4\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}(4)+\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}(2)+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}(-2)$$

$$
\begin{array}{l}
= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
\text{Donde,} \quad \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{array}
\end{array}
$$

$$
= T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)
$$

3) Sea $T: R^n \rightarrow R^m$ una transformación lineal en donde: $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de R^n, y los vectores $T(e_i)$ están definidos para $1 \leq i \leq n$, de esta forma los vectores $T(e_i)$ son:

$$
T(e_1) = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ . \\ . \\ . \\ e_{m1} \end{bmatrix}, \qquad T(e_2) = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ . \\ . \\ . \\ e_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad T(e_n) = \begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ e_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ e_{mn} \end{bmatrix}
$$

y el vector $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ es cualquier vector en R^n.

ya que :

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + \ldots + x_ie_i + \ldots + x_ne_n$$

$$T(x) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) + \ldots + x_iT(e_i) + \ldots + x_nT(e_n)$$

$$T(x) = x_1\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ . \\ . \\ . \\ e_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ . \\ . \\ . \\ e_{m2} \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \\ . \\ . \\ . \\ e_{m3} \end{bmatrix} + \ldots + x_i\begin{bmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ e_{3i} \\ . \\ . \\ . \\ e_{mi} \end{bmatrix} + \ldots + x_n\begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ e_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ e_{mn} \end{bmatrix}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \ldots & e_{1i} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \ldots & e_{2i} & \ldots & e_{2n} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \ldots & e_{3i} & \ldots & e_{3n} \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ e_{m1} & e_{m2} & e_{m3} & \ldots & e_{mi} & \ldots & e_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \ldots & e_{1i} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \ldots & e_{2i} & \ldots & e_{2n} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \ldots & e_{3i} & \ldots & e_{3n} \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ e_{m1} & e_{m2} & e_{m3} & \ldots & e_{mi} & \ldots & e_{mn} \end{bmatrix} X$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & \ldots & T(e_i) & \ldots & T(e_n) \end{bmatrix} X$$

$$T(x) = S_T X$$

De esta forma se obtiene que para cualquier transformación lineal $T : R^n \rightarrow R^m$ corresponde una matriz S_T de m x n, tal como para todo X en R^n. La matriz S_T se conoce como matriz estandar o canónica de T.

Teorema 2

Sea $T : R^3 \rightarrow R^3$ una transformación lineal. Luego entonces existe una sóla matriz estándar (ó canónica) tal que, para toda X en R^n es $T(x) = S_T X$, en donde la columna *i*-ésima de S_T es $T(e_i)$, y $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_i, ..., e_n\}$ es la base canónica de R^n.

Ejemplo:

Sea $T : R^n \rightarrow R^m$ una transformación lineal definida como:

$$T\left[(p, \quad q, \quad r)\right] = (p + 3q, \ \ 2p + q + 5r, \ \ -p + 2r)$$

Para obtener la matriz estándar (ó canónica) S_T, se procede de la siguiente forma:

1) Se obtienen los vectores $T(e_i)$. En este caso se requieren 3 vectores.

$T(e_1) = (1, 2, -1)$, $T(e_2) = (3, 1, 0)$, $T(e_3) = (0, 5, 2)$

2) Se reescriben los vectores como vectores columna para formar la matriz estándar, S_T.

$$S_T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3) De acuerdo con el teorema 2, $T(x) = S_T X$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = S_T X$$

De esta forma se prueba que la matriz estándar o canónica del ejemplo es:

$$S_T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Capítulo 12
Valores y vectores propios

Objetivos:
Al finalizar este capítulo, el lector :
- ✓ Comprenderá la importancia de los valores y vectores propios.
- ✓ Calculará los valores propios de una matriz A de orden n x n.
- ✓ Obtendrá los vectores propios de una matriz A de orden n x n.

12.1 Introducción

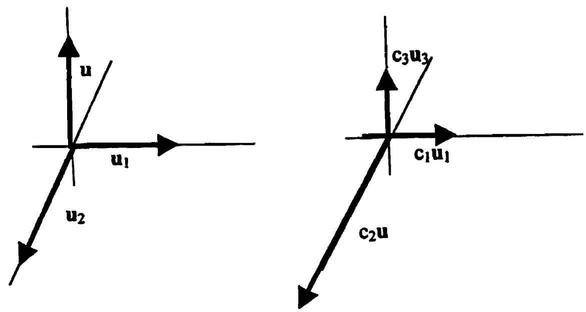
Una de las utilidades de los valores y vectores propios[1] en las ciencias sociales, la economía y la administración, es que permiten obtener transformaciones lineales que especifican un nuevo sistema de ejes de coordenadas, que permiten describir en forma más sencilla comportamientos analizados.

Por ejemplo, suponga que tiene una transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3$, y que requiere tres vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ para construir ejes de coordenadas, de tal forma que éstos permanezcan

[1] Estos conceptos también se conocen como valores y vectores característicos. En algunos textos aparecen los términos híbridos eigenvalores y eigenvectores, en éstos se utiliza el término alemán *eigen*, que significa propio.

iguales al aplicarse la transformación T. Esto puede lograrse si $T(\mathbf{u}_1) = c_1\mathbf{u}_1$, $T(\mathbf{u}_2) = c_2\mathbf{u}_2$ y $T(\mathbf{u}_3) = c_3\mathbf{u}_3$, aquí los escalares c_1, c_2 y c_3 son $\neq 0$. Los vectores $c_1\mathbf{u}_1$, $c_2\mathbf{u}_2$ y $c_3\mathbf{u}_3$ generan los mismos ejes de coordenadas de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ pero con diferentes o iguales unidades, ver figura 12.1

Figura 12.1



12.2 Valores propios

Sea **A** una matriz de orden n x n. Una matriz **u** no nula de dimensión n x 1 es un vector propio de **A** si tiene un escalar real de λ (lambda) de forma que:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

Donde:

λ = valor propio de la matriz **A**, el cual corresponde al vector **u**.
u = vector propio.

Para una matriz **A** de orden n x n es conveniente obtener todos sus vectores propios, así como sus correspondientes valores característicos, para ello aplicaremos los siguientes teoremas:

Teorema 1

El escalar λ es un valor propio de una matriz **A** de orden n x n si y sólo si, λ tiene solución real en la ecuación det (λ I- **A**) = 0

Ejemplo:

1) Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$

Aplicando λ I - **A** se tiene

$$\lambda \, \mathrm{I} - \mathrm{A} \; = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix}$$

Enseguida se aplica el det (λ I - **A**) = 0, y se obtiene la ecuación propia de **A**

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = 0$$

$$= (\lambda - 15)\,(\lambda - 6) - (6)\,(6) = 0$$

$$= \lambda^2 - 6\,\lambda - 15\,\lambda + 90 - 36 = 0 \quad \longleftarrow \text{Ecuación propia de } \mathbf{A}$$

$= \lambda^2 - 21\lambda + 54 = 0$

$= (\lambda - 3)(\lambda - 18) = 0$

$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 18 \qquad \longleftarrow$ Valores propios de **A**

Ya que el det $(\lambda I - A) = 0$ tiene solución real, $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 18$ son valores propios de la matriz **A** n x n $= \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$

2) Sea $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Aplicando $\lambda I - B$ se tiene:

$$\lambda I - \mathbf{B} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda - 2 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando det $(\lambda I - B) = 0$ se determina la ecuación propia de **B**.

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda - 2 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc} \lambda-2 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda-2 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda-2 \\ \hdashline \lambda-2 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda-2 & -4 \end{array}\right| =$$

$$= (\lambda-2)^3+(-4)^3+(-4)^3-\left[(-4)^2(\lambda-2)+(-4)^2(\lambda-2)+(-4)^2(\lambda-2)\right]=0$$

$$= (\lambda-2)^3-128-\left[16(\lambda-2)+16(\lambda-2)+16(\lambda-2)\right]=0$$

$$= (\lambda-2)^3-128-3(16\lambda-32)=0$$

$$= (\lambda-2)^3-128-48\lambda+96=0$$

$$= (\lambda-2)^3-48\lambda-32=0$$

$$= \lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8-48\lambda-32=0$$

A partir del polinomio propio se simplifica y se obtiene la ecuación propia.

$= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 36\lambda - 40 = 0$ $\longleftarrow$ Ecuación propia de **B**

Si al resolver la ecuación propia de **B** se obtienen soluciones reales, éstas son valores propios de la matriz **B**.

Las soluciones de $= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 36\lambda - 40 = 0$ son:

$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 10$

Ya que λ_1 y λ_2 tienen soluciones reales, son valores propios de la matriz **B**.

3) Sea $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Al aplicar $\lambda\, \mathrm{I} - \mathbf{C}$ resulta:

$$\lambda\, \mathrm{I} - \mathbf{C} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\, \mathrm{I} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = 0$$

Cálculo del det $(\lambda\, \mathrm{I} - \mathbf{C}) = 0$

$$\det(\lambda\, \mathrm{I} - \mathbf{C}) = \det \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 8 \\ \hdashline \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 4 & 0 \end{array}\right| =$$

$$=(\lambda+2)+(\lambda+4)+(\lambda-8)-[0+0+0]=0$$

$$=(\lambda+2)+(\lambda+4)+(\lambda-8)=0$$

De aquí se obtiene que las soluciones del det (λ I - **C**) = 0 son reales: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 8$, por lo tanto son valores propios de la matriz **C**.

12.3 Vectores propios

Teorema 2

Sea λ un valor propio de una matriz **A** de orden n x n. El conjunto E_λ de todas las matrices columna de orden n x 1 en R^n, tales que **Au** =λ**u** es un subespacio de R^n y se conoce como espacio o vector propio de A correspondiente al valor propio λ.

Para obtener los vectores propios (**u**) correspondientes a los valores propios (λ_i) se haya el espacio solución de (λ_i I - A) **u** = 0, para ésto se desarrollan dos pasos:

1. Se calculan los valores propios λ_i, para cada i = 1, 2, 3, ..., k.
2. Se obtienen los vectores que resultan de resolver el espacio solución (λ_i I - A) **u** = 0 para i = 1, 2, 3, ..., k.

Ejemplos:

1) Obtener los valores y vectores propios de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Cálculo de los valores propios

$$\lambda\,I - A = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-15 & 6 \\ 6 & \lambda-6 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\,\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = 0$$

$$= \lambda^2 - 21\lambda + 54 = (\lambda - 3)(\lambda - 18) = 0$$

$$= (\lambda - 15)(\lambda - 6) - 36$$

$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 18$ ⟵ Valores propios de **A**

b) Cálculo de los vectores propios.

Cálculo del vector propio asociado a $\lambda_1 = 3$

Para calcular el vector se obtiene el espacio solución (λ_i I - **A**) **u** = 0 para $\lambda_1 = 3$

$$(\lambda\,\mathrm{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix}$$

$$(3\,\mathrm{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3-15 & 6 \\ 6 & 3-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} -12x + 6y \\ 6x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} -12x + 6y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

El espacio solución puede obtenerse reduciendo el sistema de ecuaciones, o reduciendo los renglones de la matriz de coeficientes.

- Reduciendo el sistema de ecuaciones (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} -6x + 3y &= 0 \\ 3y &= 6x \\ y &= 2x \quad \text{ó} \quad 2x = y \\ x &= \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

• Reduciendo los renglones de la matriz de coeficientes (1) resulta:

$$\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{6}{12} \\ 1 & -\frac{3}{6} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuación se obtiene de:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2}y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - \frac{1}{2}y = 0$$

$$x = \frac{1}{2}y$$

De esta forma el espacio solución, es el conjunto de todos los vectores de la forma:

$$\left(\frac{1}{2}y, y\right) = y\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Así el vector propio E_1 que corresponde a $\lambda = 3$ es:

$$E_1 = s\left\{\frac{1}{2}, \quad 1\right\}.$$

Comprobación:

Utilizando $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{15}{2} - \frac{12}{2} = \frac{3}{2} \checkmark, \qquad -3 + 6 = 3 \checkmark$$

Cálculo del vector propio asociado a $\lambda_2 = 18$

$$(\lambda\, I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix}$$

$$(18\, I - A)\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 18-15 & 6 \\ 6 & 18-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} 3x + 6y \\ 6x + 12y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 3x + 6y = 0 \\ 6x + 12y = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (4)$$

Reduciendo el sistema de ecuaciones (4) se obtiene:

$3x + 6y = 0$

$x = -2y$

De esta forma el espacio solución es (-2y, y) = y (-2, 1); es decir el vector propio E_2 que corresponde a $\lambda_2 = 18$ es $E_2 = s\{-2, \ 1\}$.

Comprobación:

Utilizando $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 18$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 18 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

-30 - 6 = -36 ✓ ,   12 + 6 = 18 ✓

2) Obtener los valores y vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -14 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Cálculo de los valores propios

Aplicando λ I - **A** = **A** se tiene:

$$\lambda \mathrm{I} - \mathbf{A} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -14 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -14 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\,\mathrm{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - 10 & 0 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & 0 \\ 14 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

Utilizando det $(\lambda\mathrm{I} - \mathbf{A}) = 0$ se determina la ecuación propia de A:

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 0 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & 0 \\ 14 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 0 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & 0 \\ 14 & -2 & \lambda \\ \hdashline \lambda - 10 & 0 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 10)(\lambda - 2)(\lambda) - 8 - [-28(\lambda - 2)]$$

$$= [\lambda^2 - 2\lambda - 10\lambda + 20]\lambda - 8 - [-28\lambda + 56]$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 10\lambda^2 + 20\lambda - 8 + 28\lambda - 56$$

$$= \lambda^3 - 12\lambda^2 + 48\lambda - 64 = 0$$

La solución de $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 48\lambda - 64 = 0$ es $\lambda = 4$

Comprobación:

$4^3 - 12\,(4)^2 + 48\,(4) - 64 = 0$
$64 - 192 + 192 - 64 = 0$

El valor propio de la matriz A es $\lambda = 4$

b) Cálculo del vector propio asociado a $\lambda = 4$

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda - 10 & 0 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & 0 \\ 14 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$(4\,\mathrm{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4-10 & 0 & -2 \\ -2 & 4-2 & 0 \\ 14 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 14 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(4\,\mathrm{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -6x & 0y & -2z \\ -2x & 2y & 0z \\ 14x & -2y & 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} -6x \quad -2z = 0 \\ -2x + 2y \quad = 0 \\ 14x - 2y + 4z = 0 \end{matrix}\right\} (6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (6) se tiene:

$-6x - 2z = 0$
$-6x = 2z$

$$x = \frac{2}{-6}z$$

$$x = -\frac{1}{3}z \longrightarrow z\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$-2x + 2y = 0$
$-2x = -2y$
$x = y$

$$y = -\frac{1}{3}z \longrightarrow z\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$14x - 2y + 4z = 0$
$14x - 2x + 4z = 0$
$12x + 4z = 0$
$4z = -12x$
$z = -3x$

$$z = -3\left(-\frac{1}{3}z\right)$$

$$z = z \longrightarrow z\,(1)$$

Comprobación de los valores obtenidos en el sistema de ecuaciones (6)

$$-6\left(-\frac{1}{3}z\right) - 2z = 0$$

$$2z - 2z = 0 \quad ✓$$

$$-2\left(-\frac{1}{3}z\right) + 2\left(-\frac{1}{3}z\right) = 0$$

$$\frac{2}{3}z - \frac{2}{3}z = 0 \quad ✓$$

$$14\left(-\frac{1}{3}z\right) - 2\left(-\frac{1}{3}z\right) + 4z = 0$$

$$-\frac{14}{3}z \quad + \quad \frac{2}{3}z \quad + 4z \quad = 0$$

$$-\frac{12}{3}z \quad + \quad 4z \qquad = 0$$

$$4z \quad - \quad 4z \qquad = 0 \; ✓$$

En consecuencia el vector propio que corresponde a $\lambda = 4$ es:

$$\mathbf{E} = s \left\{ -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad 1 \right\}$$

Comprobación de que **E** es un vector propio:

Utilizando $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -14 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 4$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -14 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{10}{3} + 2 = -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{10}{3} + \frac{6}{3} = -\frac{4}{3} \quad \checkmark$$

$$-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \quad \checkmark$$

$$\frac{14}{3} - \frac{2}{3} = 4$$

$$\frac{12}{3} = 4 \quad \checkmark$$

Todos los elementos del vector cumplen con la igualdad $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$. En consecuencia, el vector

$$E = \left\{-\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad 1\right\}$$

es un vector propio de la matriz **A**, correspondiente al vector propio $\lambda = 4$.

Capítulo 13
Aplicaciones

Objetivos:
Al terminar este capítulo, el lector:

- ✓ Podrá aplicar matrices en la solución de problemas económicos de:
  Insumo-Producto.
  Ingreso Nacional.
  Modelos de Mercado .
- ✓ Diferenciar que operación matricial usar en la solución de un problema real.

En éste capítulo, se presentan tres ejemplos tradicionales del uso del álgebra lineal y matrices en el campo de las Ciencias Sociales; el análisis de insumo-producto, el modelo de ingreso nacional, y un modelo de mercado para dos productos.

13.1 El análisis de Insumo-Producto

La matriz de *insumo-producto* desarrollada por *Wassily W. Leontief* señala las interrelaciones de oferta y demanda existentes entre los diversos sectores de una economía durante cierto periodo de tiempo.

La matriz de insumo-producto se construye con los datos obtenidos del cuadro de transacciones interindustriales, éste muestra como se interrelacionan todas las industrias, en el sentido de que cada una adquiere productos fabricados por los demás a fin de llevar a cabo su propio proceso.

Enseguida se presenta un ejemplo hipotético de una economía abierta simplificada, en la que sólo participan tres sectores, (agricultura, manufactura y servicios), complementados con la "demanda final" la cual está integrada por las familias, el gobierno, etc.

Cuadro 13.1
Transacciones interindustriales

Compras / Ventas	Demanda intermedia S1	S2	S3	Demanda final	Producción bruta
S1	200	300	400	100	1000
S2	500	600	900	200	2200
S3	300	1300	700	400	2700

Siguiendo el cuadro de transacciones interindustriales 13.1 encontramos que cada uno de los sectores aparecen en un renglón y en una columna formando lo que se conoce como demanda intermedia.

Una cuarta columna forma la demanda final cuyos asientos sumados a los totales de la demanda intermedia constituyen la producción bruta de cada uno de los sectores en un determinado periodo, (quinta columna).

Contablemente el cuadro es de doble entrada, los renglones registran las ventas, las columnas las compras. Cada registro representa el valor de los productos, normalmente están expresados en unidades monetarias a precio de mercado.

En el ejemplo, del total de la producción del sector 1; 200 unidades sirvieron de insumo al mismo sector 1, 300 pasaron al sector 2, 400 fueron vendidas al sector 3 y 100 llegaron en forma directa al sector de demanda final.

$$(200 + 300 + 400 + 100 = 1{,}000)$$

El análisis de *insumo-producto* permite estimar la producción total de cada sector si existe cambio en la demanda final; todo esto bajo el supuesto de que la estructura básica de la economía permanece *ceteris paribus*, es decir sin cambio alguno.

Este importante supuesto significa que, para cada sector, debe permanecer fija la cantidad invertida en cada uno de los insumos por cada unidad monetaria invertida.

La matriz de coeficientes técnicos de insumo-producto

Es necesario introducir la notación necesaria para simbolizar las relaciones entre producción; demanda intermedia y demanda final que resultan del cuadro 13.1 que se esta considerando.

Simbolizando con X_i la producción bruta del sector *i*, esto es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2200 \\ 2700 \end{bmatrix}$$

Con y_i; se representa la demanda final del sector *i*, así:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 200 \\ 400 \end{bmatrix}$$

X_{ij}, representarán las ventas que el sector *i* ha efectuado al sector *j*, esto es:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 300 & 400 \\ 500 & 600 & 900 \\ 300 & 1300 & 700 \end{bmatrix}$$

Debido a que la producción bruta de cada sector es igual a la suma de las ventas a demanda intermedia más las ventas a demanda final, las relaciones entre producción y demanda se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ X_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ X_3 &= x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

En término matriciales:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar la cadena de reacciones directas e indirectas que tienden a modificar todo el flujo de transacciones interindustriales, se elabora una matriz que se conoce con el nombre de *matriz de coeficientes técnicos* o *matriz de insumo producto*, en algunos textos se conoce como matriz de coeficientes de requerimientos directos por unidad de producción bruta.

Retomando el cuadro de transacciones intersectoriales se tiene que en cada transacción existen dos sectores; el sector vendedor *i* y el sector comprador *j*. Relacionando cada x_{ij} (ventas del sector *i* al sector *j*) con la producción bruta X_j, del sector comprador, efectuando el cociente x_{ij}/X_j, que define el coeficiente técnico a_{ij} el cual representa los requerimientos de insumos del sector *i* necesarios para producir una unidad de producto *j*. También los insumos que venden los sectores proveedores varían en la misma proporción en que se modifica la producción bruta del sector que los adquiere.

Con estos supuestos se calculan los coeficientes técnicos como sigue:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{200}{1000} = 0.2$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} = \frac{500}{1000} = 0.5$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} = \frac{300}{1000} = 0.3$$

$$a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{300}{2200} = 0.136$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} = \frac{600}{2200} = 0.272$$

$$a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} = \frac{1300}{2200} = 0.591$$

$$a_{13} = \frac{x_{13}}{X_3} = \frac{400}{2700} = 0.148$$

$$a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} = \frac{900}{2700} = 0.333$$

$$a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} = \frac{700}{2700} = 0.259$$

Al fabricar productos por valor de 1,000 unidades el sector 1 (a_{11}, a_{21}, a_{31}) adquiere 200 de sus propias unidades, 500 unidades del sector 2 y 300 del sector 3. Por consiguiente, por cada unidad monetaria de producción, el sector 1 invierte 200/1000 = 0.20 = \$0.20 en compras a sí mismo; 500/1000 = 0.5 = \$0.50 en compras al sector 2, y 300/1000 = 0.3 = \$0.30 en compras del sector 3.

De esta forma se obtiene la matriz de coeficientes técnicos, a_{ij} siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.136 & 0.148 \\ 0.5 & 0.273 & 0.333 \\ 0.3 & 0.591 & 0.259 \end{bmatrix}$$

Regresando al sistema de ecuaciones (I)

$$X_1 = \sum_{J=1}^{3} x_{ij} + y_i \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \text{(II)}$$

si se reemplaza cada x_{ij} por su equivalente $a_{ij} \cdot X_j$ se tiene el sistema de ecuaciones:

$$X_I = \sum_{J=1}^{3} a_{ij} X_j + y_i \quad i = 1,2,3 \qquad \text{(III)}$$

que se puede escribir matricialmente así:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(IV)}$$

o en forma simbólica:

$$X = AX + y \qquad \text{(V)}$$

El que los coeficientes a_{ij} no varíen durante un cierto periodo de tiempo nos permite utilizar el sistema de ecuaciones (V) con el cual podemos determinar el nivel de producción bruta que se requiere en cada sector para satisfacer la demanda final prevista para el periodo siguiente. Si se supone que se requiere satisfacer un aumento en la demando final para el próximo periodo en 50 unidades en el sector 1 (agricultura), 50 unidades en el sector 2 (manufactura) y 80 unidades en el sector 3 (servicios); la pregunta a responder es: ¿Cuáles son los valores X_1, X_2 y X_3 que cubren esos incrementos?. Esto se resuelve si en el sistema de ecuaciones expresamos una relación funcional entre producción bruta y demanda final en que el vector X es la variable dependiente y el vector "y" es la variable independiente.

Operando algebraicamente sobre la expresión simbólica (V):

$$X = A \cdot X + y$$

$$X - A \cdot X = y$$

$$IX - AX = y$$

$$(I - A)X = y$$

$$(I - A)^{-1} (I - A)X = (I - A)^{-1} y$$

$$IX = (I - A)^{-1} y$$

$$X = (I - A)^{-1} y$$

La matriz (I-A) es llamada *matriz de Leontief* y la matriz $(I-A)^{-1}$ *matriz inversa de Leontief*, o "*matriz de coeficientes de requerimientos directos e indirectos por unidad de "demanda final*".

En este ejemplo, se tiene que:

$$[I-A]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.2&0.136&0.148\\0.5&0.273&0.333\\0.3&0.591&0.259\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&-0.136&-0.148\\-0.5&0.727&-0.333\\-0.3&-0.591&0.741\end{bmatrix}$$

$$[I-A]^{-1}=\begin{bmatrix}0.8&-0.136&-0.148\\-0.5&0.727&-0.333\\-0.3&-0.591&0.741\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2.566&1.416&1.150\\3.532&4.116&2.559\\3.857&3.857&3.857\end{bmatrix}$$

Esta matriz inversa se utiliza con fines de proyección después de haber verificado que los datos estén correctos para el año que se esta considerando. Por esto debe cumplirse $X^{(0)} = [I-A]^{-1}y^{(0)}$ en donde:

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix}1000\\2200\\2700\end{bmatrix}\quad ,y\quad "y"=\begin{bmatrix}100\\200\\400\end{bmatrix}$$

Al sustituir valores se tiene que:

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix}2.566&1.416&1.150\\3.532&4.116&2.559\\3.857&3.857&3.857\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}100\\200\\400\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1000\\2200\\2700\end{bmatrix}$$

comprobándose la igualdad de los valores originales.

Regresando ahora a los incrementos previstos en la demanda final se tiene que satisfacer para el año próximo:

$$y^{(1)}=\begin{bmatrix}100\\200\\400\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}50\\50\\80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150\\250\\480\end{bmatrix}$$

que sustituidos en la ecuación:

$$X^{(1)} = (I - A)^{-1} \cdot y^{(1)}$$

permiten obtener los siguientes niveles estimados:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.566 & 1.416 & 1.150 \\ 3.532 & 4.116 & 2.559 \\ 3.857 & 3.857 & 3.857 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 250 \\ 480 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1291.15 \\ 2787.13 \\ 3394.29 \end{bmatrix}$$

De aquí se deduce que para satisfacer la demanda final prevista, de 50 unidades de productos agrícolas, 50 unidades de productos manufactureros y 80 de servicios, se debe generar una producción bruta de 1291.15 unidades en el sector 1, 2787.13 unidades en el sector 2 y 3394.29 unidades en el sector 3.

Comparando el vector $X^{(1)}$ con el vector $X^{(0)}$, se obtienen las cifras del incremento de producción de cada sector necesarios para satisfacer el incremento previsto en la demanda final.

$$AX = X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1291.15 \\ 2787.13 \\ 3394.29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1000 \\ 2200 \\ 2700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 291.15 \\ 587.13 \\ 694.29 \end{bmatrix}$$

así, para satisfacer los incrementos previstos de demanda final sectorial de:

$$\Delta Y = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix}$$

debe generarse una producción bruta en el sistema de:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} 291.15 \\ 587.13 \\ 694.29 \end{bmatrix}$$

Aquí contrastamos la falta de proporcionalidad entre ambos incrementos de demanda final (Δy) y producción bruta (ΔX). Esto se debe a lo complejo de las interrelaciones entre sectores que determinan efectos indirectos de relativa importancia.

13.2 El ingreso nacional

El ingreso nacional es un modelo que permite cuantificar la producción global de un país durante un periodo de tiempo que generalmente es un año. En éste se integra y registra la producción privada, gubernamental y mixta que se realiza en una nación, así como el intercambio comercial con el exterior. También se asienta el ingreso que perciben quienes proporcionan los factores de la producción (capital, trabajo etc.) y el destino de dicho ingreso, (consumo, ahorro o inversión).

Del ingreso nacional se deducen una serie de categorías macroeconómicas básicas para entender la dinámica de la economía de un país, estas categorías son:

1. Producto Nacional Bruto (PNB)
2. Producto Interno Bruto (PIB)
3. Producto Nacional Neto (PNN)
4. Ingreso Nacional (IN)
5. Ingreso Privado (I Priv.)
6. Ingreso Personal (I Pe)
7. Ingreso Personal Disponible (I Pe D)

John Maynard Keynes, hace un análisis macroeconómico del sistema capitalista, en el que plantea un posible equilibrio económico general que existe cuando el ingreso nacional es igual al consumo nacional más el ahorro nacional.

De manera que:

$$\textit{Ingreso Nacional} = \textit{Consumo Nacional} + \textit{Ahorro Nacional}$$
$$Y = C + A$$

El *ahorro nacional (A)* es igual a la *inversión nacional (I),* por lo que:

$Y = C + I$

Se observa que el equilibrio económico existe porque:

- El ingreso es igual a la producción, es decir, a la oferta, representado por Y que a su vez es igual a la demanda, es decir, consumo más ahorro.
- Los ingresos (Y) son iguales a los "gastos" $(C + I)$.

Si el Ingreso Nacional se incrementa tiene que aumentar el Consumo y la Inversión, de manera que:

$\Delta Y = \Delta C + \Delta I$

Para Keynes uno de los factores básicos de la dinámica económica es la inversión, por lo que es necesario incrementarla e impulsarla ya que lleva consigo un efecto multiplicador en la economía.

El multiplicador de la inversión expuesto por Keynes es igual al recíproco de la propensión a la inversión, lo que provoca que los efectos de una inversión inicial sean mayores a ésta en un múltiplo de ella que es precisamente el multiplicador. Esto se debe a que una inversión inicial incrementa la producción, ésta a su vez al empleo y por lo tanto la demanda, lo que provoca el incremento de la producción y nuevamente se incrementan el empleo y con el la demanda. Este ciclo (Inversión, producción, empleo y demanda) se activa através del multiplicador teniendo como límite el que éste señala.

La forma del multiplicador es:

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{I}{I - \Delta C}$$

La inversión depende de lo que se gaste en cosumo (propensión al consumo), ésto también determina al multiplicador, ejemplo:

Supongamos que el ingreso *(Y)* es igual a 100, que el consumo *(C)* es igual a 80 y que la inversión *(I)* es igual a 20

Si $Y = C + I$, entonces $100 = 80 + 20$

En este caso, la propensión al consumo es de 80%, lo que quiere decir que de cada $100 de ingreso se destinan $80 (80%) al consumo y $20 (20%) a la inversión.

Si el multiplicador es el inverso de la propensión a la inversión que es de 20% entonces K= 5. Manteniéndo la misma propensión al consumo y a la inversión, con el multiplicador de 5 el ingreso se incrementa a 500 el consumo a 400 y la inversión a 100, por lo que el nuevo equilibrio general queda como:

$$Y(500) = C(400) + I(100)$$

Un modelo simple del ingreso nacional Keynesiano puede ser resuelto mediante el empleo de la regla de Cramer. Con ésta se obtienen los valores de equilibrio para el ingreso ($\bar{Y}$) y el Consumo ($\bar{C}$).

Suponga el modelo de dos ecuaciones simultáneas.

$$Y = C + Io + Go$$
$$C = a + by$$

Donde los párametros
$$\left\{ \begin{array}{l} Go = \text{Gasto del Gobierno (variable exógena).} \\ Io = \text{Inversión determinada exógenamente} \end{array} \right.$$

Párametros independientes y compatibles

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \text{Consumo autónomo.} \\ b = \text{Propensión marginal al consumo.} \\ a > o \quad y \quad o < b < 1 \end{array} \right.$$

Definidos los parámentros y las variables exógenas *(Io, Go, a y b)* así como las restricciones para *a* y *b*. El sistema de ecuaciones puede ser planteado de las siguiente forma:

$$Y - C = Io + Go$$
$$-bY + C = a$$

De esta forma las variables endógenas *Y* y *C* aparecen únicamente en el primer miembro de las igualdades, en tanto que las variables exógenas y los parámetros independientes aparecen sólo en el segundo miembro.

La matriz de coeficientes toma ahora la forma:

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$ y el vector columna de las constantes (datos) $\begin{bmatrix} Io+Go \\ a \end{bmatrix}$

La suma de *Io + Go* se considera como una entidad única, es decir, un elemento simple del vector de constantes.

La regla de Cramer conduce a la solución siguiente:

$$\overline{Y} = \frac{\begin{vmatrix} (Io+Go) & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(Io+Go)+a}{1-b} \qquad \text{siempre que } b \neq 1$$

$$\overline{C} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (Io+Go) \\ -b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + b(Io+Go)}{1-b} \quad \text{siempre que } b \neq 1$$

Otra forma de resolver los valores de equilibrio de $\overline{C}$ e $\overline{Y}$ es mediante la inversa de la matriz de coeficientes. Dado que la matriz es:

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$ su matriz de cofactores será $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ de manera que:

la adj $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ y la matriz inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ adj A , $A^{-1}=\frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

De esta manera el sistema de ecuaciones $Ax = d$ se soluciona como:

$x = A^{-1}d$ Donde $x = \begin{bmatrix} \overline{Y} \\ \overline{C} \end{bmatrix}$ y $d = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}$

con lo cual el presente modelo se resuelve haciendo:

$$\begin{bmatrix} \overline{Y} \\ \overline{C} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Io + Go \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} (Io + Go) + a \\ b(Io + Go) + a \end{bmatrix}$$

Obteniéndo los valores de equilibrio $\overline{Y}$ y $\overline{C}$.

$$\overline{Y} = \frac{(Io + Go) + a}{1-b}$$

siempre que $b \neq 1$

$$\overline{C} = \frac{b(Io + Go) + a}{1 - b}$$

Mismos valores obtenidos por medio de la regla de Cramer.

Un ejemplo numérico

Consideramos ahora los datos siguientes:

$$\begin{aligned} Io &= 40 \\ Go &= 100 \\ a &= 5 \\ b &= 0.60 \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y &= C + Io + Go \\ C &= a + by \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

hacemos:

$$\begin{aligned} Y - C &= Io + Go \\ -by + C &= a \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Sustituyendo valores en (II)

$$\begin{aligned} Y - C &= 400 + 100 \\ -.60Y + C &= 5 \end{aligned}$$

Construyendo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -.60 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el ingreso de equilibrio ($\overline{Y}$) de manera que:

$$\overline{Y} = \frac{\begin{vmatrix} 140 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -.60 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{140 + 5}{1 - .60} = \frac{145}{.40} = 362.5$$

$$\text{y} \quad \overline{C} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 140 \\ -.60 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -.60 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5 + 84}{1 - .60} = \frac{89}{.40} = 222.5$$

Sustituyendo $\overline{Y}$ y $\overline{C}$ en las ecuaciones del sistema 1

$$\overline{Y} = 362.5 = 222.5 + 40 + 100$$
$$= 362.5 = 362.5$$

$$\overline{C} = 222.5 = 5 + .60(362.5)$$
$$222.5 = 5 + 217.5$$
$$222.5 = 222.5$$

también en el sistema II sustituimos $\overline{Y}$ y $\overline{C}$

$$362.5 - 222.5 = 40 + 100$$
$$140 = 140$$

$$-.60(362.5) + 222.5 = 5$$
$$-217.5 + 222.5 = 5$$
$$5 = 5$$

Cumpliendo de esta manera los valores de equilibrio de $\overline{C}$ y $\overline{Y}$ en el sistema.

Ahora obtenemos $\overline{C}$ y $\overline{Y}$ mediante la matriz inversa

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -.60 & 1\end{bmatrix} \text{ su matriz de coeficientes es } \begin{bmatrix}1 & .60\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

de manera que la adj $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ .60 & 1\end{bmatrix}$ y su matriz inversa es

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}A$$

de esta manera el sistema de ecuaciones Ax = d, donde

$$x=\begin{bmatrix}\overline{Y}\\ \overline{C}\end{bmatrix} \quad y \quad d=\begin{bmatrix}I_0+G_0\\ a\end{bmatrix}$$

se soluciona como

$$\begin{bmatrix}\overline{Y}\\ \overline{C}\end{bmatrix}=\frac{1}{1-.60}\begin{bmatrix}1 & 1\\ .60 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\ 5\end{bmatrix}=\frac{1}{.40}\begin{bmatrix}140+5\\ .60(140)+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{145}{.40}\\ \frac{89}{.40}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}362.5\\ 222.5\end{bmatrix}$$

de manera que $\overline{Y}=362.5$
$\overline{C}=222.5$

Mismos valores obtenidos mediante el método de Cramer

13.3 Modelo de mercado con dos bienes

Es necesario mencionar que operamos con un modelo en equilibrio donde los bienes tienen sustitutos cercanos de manera que la cantidad (Q_i) y el precio (P_i) de un bien afectan la cantidad y el precio del otro bien; no existe excedente por lo cual la oferta es igual a la demanda. Bajo estas condiciones el equilibrio se da cuando $Qd_i = Qs_i$. Así dicho equilibrio en el modelo de mercado con *n* mercancías comprenderá *n* ecuaciones; una para cada mercacía, de modo que

$$E_i \equiv Qd_i = Qs_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots., n)$$

Si hay una solución, tendremos un conjunto de precios $\overline{P_i}$ * y sus correspondientes cantidades $\overline{Q_i}$ de manera que se satisfarán de forma simultánea todas las *n* ecuciones de las condiciones de equilibrio.

Al plantear el modelo simplificamos las funciones de demanda y oferta de ambas mercancías haciendolas lineales. Con términos paramétricos el modelo puede escribirse como:

(1) $Qd_i - Qs_i = 0$

(2) $Qd_i = a_o + a_1P_1 + a_2P_2$

(3) $Qs_i = b_o + b_1P_1 + b_2P_2$

(4) $Qd_z - Qs_z = 0$

(5) $Qd_z = \phi_0 + \phi_1P_1 + \phi_2 P_2$

(6) $Qs_z = \delta_0 + \delta_1P_1 + \delta_2 P_2$

Donde Q_i y P_i son variables endógenas

Además a,b,ϕ y δ son coeficientes de demanda y oferta.

Un primer paso en la solución de este modelo consiste en la eliminación de variables. Sustituyendo las ecuaciones segunda y tercera en la primera (del primer bien), y la quinta y sexta en la cuarta (del segundo bien), el modelo se simplifica a dos ecuaciones de dos variables.

* Donde $\overline{P_i}$ $\overline{Q_i}$ se refieren a precio y cantidad de equilibrio para el bien de i.

Con esto, los precios de equilibrio son:

$$\overline{P_1} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{e_2\alpha_0 - e_0\alpha_2}{e_1\alpha_2 - \alpha_1 e_2} \qquad \overline{P_2} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{e_0\alpha_1 - e_1\alpha_0}{e_1\alpha_2 - \alpha_1 e_2}$$

Ejemplo numérico

Sean las funciones de oferta y demanda:

$$Qd_1 = 6 - 3P_1 + 2P_2$$

$$Qs_1 = -4 + 5P_1$$

$$Qd_2 = 13 + 2P_1 - 8P_2$$

$$Qs_2 = -1 \qquad + 4P_2$$

Obtener las cantidades de equilibrio $(\overline{Q_i})$ y los precios de equilibrio $(\overline{P_i})$.

Antes de iniciar las operaciones, procedamos a analizar los coeficientes numéricos. En cada bien, Qs_1 depende sólo de P_1, pero Qd_1 se presenta como una función de ambos precios. Se señala que mientras P_1 tiene un coeficiente negativo en Qd_1, como cabría esperar, el coeficiente P_2 es positivo. El hecho de que un aumento en P_2 tienda a aumentar Qd_1 sugiere que los dos artículos tienen una relación mutua de sustitución. La función de P_1 en Qd_2 tiene una interpretación similar.

Con los coeficientes del sistema de ecuaciones, los valores de los simplificadores son:

$e_0 = 6 - (-4) \quad = 10 \qquad e_1 = -3 - (5) = -8 \qquad e_2 = 2 - 0 = 2$

$\alpha_0 = 13 - (-1) \quad = 14 \qquad \alpha_1 = 2 - 0 = 2 \qquad \alpha_2 = -8 - 4 = -12$

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)P_1 + (a_2 - b_2)P_2 = 0$$

$$(\phi_0 - \delta_0) + (\phi_1 - \delta_1)P_1 + (\phi_2 - \delta_2)P_2 = 0$$

Aquí se presenta la versión de dos mercancías, luego que se han sustituido las funciones de oferta y demanda en las dos ecuaciones de la condición de equilibrio. Este sistema de sólo dos ecuaciones, contiene no menos de 12 parámetros, lo cual hace muy ardua la manipulación algebraica a menos que propongamos algún tipo de simplificación. Así definimos los símbolos simplificadores.

$$e_i \equiv a_i - b_i$$

$$\alpha_i \equiv \phi_i - \delta i \qquad (i = 0,1,2)$$

De esta manera se tiene, después de despejar e_0 y α_0 al lado derecho de la igualdad

$$e_1P_1 + e_2P_2 = -e_0$$

$$\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 = -\alpha_0$$

Planteado así, el sistema de ecuaciones para los precios de equilibrio puede resolverse por el método de Cramer .

Para ello es necesario obtener los tres determinantes ($|A|$, $|A_1|$ y $|A_2|$) tomando los valores siguientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = e_1\alpha_2 - \alpha_1 e_2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -e_0 & e_2 \\ -\alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = -e_0\alpha_2 + e_2\alpha_0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} e_1 & -e_0 \\ \alpha_1 & -\alpha_0 \end{vmatrix} = -e_1\alpha_0 + e_0\alpha_1$$

Al sustituir los valores de e_i y α_1 en $|A|$, $|A_1|$ y $|A_2|$ tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} = (-8)(-12) - (2)(2) = 96 - 4 = 92$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ -14 & -12 \end{vmatrix} = (-10)(-12) - (-14)(2) = 120 + 28 = 148$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ 2 & -14 \end{vmatrix} = (-8)(-14) - (2)(-10) = 112 + 20 = 132$$

Luego, los precios de equilibrio son:

$$\overline{P_1} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{148}{92} = \frac{37}{23}$$

$$\overline{P_2} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{132}{92} = \frac{33}{23}$$

Sustituyendo $\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ en Qd_1 y Qs_1 para obtener $\overline{Q_1}$

$$Qd_1 = 6 - 3\left(\frac{37}{23}\right) + 2\left(\frac{33}{23}\right)$$

$$= \frac{138}{23} - \frac{111}{23} + \frac{66}{23} = \frac{93}{23} = 4\frac{1}{23}$$

$$Qs_1 = -4 + 5\left(\frac{37}{23}\right) = -\frac{92}{23} + \frac{185}{23} = \frac{93}{23} = 4\frac{1}{23}$$

luego la cantidad ofertada y demandada de equilibrio $\overline{Q_1}$ es igual a $4\frac{1}{23}$

Ahora para obtener la cantidad de equilibrio $\overline{Q_2}$ sustituimos $\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ en Qd_2 y Qs_2

$$Qd_2 = 13 + 2\overline{P_1} - 8\overline{P_2}$$

$$= 13 + 2\left(\frac{37}{23}\right) - 8\left(\frac{33}{23}\right)$$

$$= \frac{299}{23} + \frac{74}{23} - \frac{264}{23} = \frac{109}{23} = 4\frac{17}{23}$$

$$Qs_2 = -1 + 4\left(\frac{33}{23}\right) = \frac{-23}{23} + \frac{132}{23} = \frac{109}{23} = 4\frac{17}{23}$$

Luego $\overline{Q_2} = 4\frac{17}{23}$

En conjunto los precios y las cantidades de equilibrio en el modelo de dos bienes son:

$$\overline{P_1} = 1\frac{14}{23} \qquad \overline{P_2} = 1\frac{10}{23} \qquad \overline{Q_1} = 4\frac{1}{23} \qquad \overline{Q_2} = 4\frac{17}{23}$$

Podemos también obtener los precios y las cantidades de equilibrio ($\overline{P_1}$ y $\overline{Q_1}$) al sustituir la inversa de una matriz, de manera que si

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \qquad y \qquad d = \begin{bmatrix} -e_0 \\ -\alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}A = d$$

entonces: $\bar{x} = A^{-1}d$

Siendo la matriz de coeficientes de nuestro sistema ecuacional

$A = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$ su matriz de cofactores será $\begin{bmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

y la de Adj A= $\begin{bmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$ en donde la matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A = \frac{1}{(-8)(-12)-(2)(2)}\begin{bmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{92}\begin{bmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

De esta forma obtenemos $\overline{P_1}$ y $\overline{Q_1}$ resolviendo

$$\begin{bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{92}\begin{bmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 \\ -14 \end{bmatrix} = \frac{1}{92}\begin{bmatrix} 120+28 \\ 20+112 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{148}{92} \\ \frac{132}{92} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{23} \\ \frac{33}{23} \end{bmatrix}$$

Con esto $\overline{P_1} = 1\frac{14}{23}$ y $\overline{P_2} = 1\frac{10}{23}$

Mismos valores obtenidos mediante el método de Cramer.

Los valores de $\overline{Q_1}$ y $\overline{Q_2}$ se obtienen de la forma ya antes expuesta.

Capítulo 14
Cálculo de la matriz insumo-producto con Excel

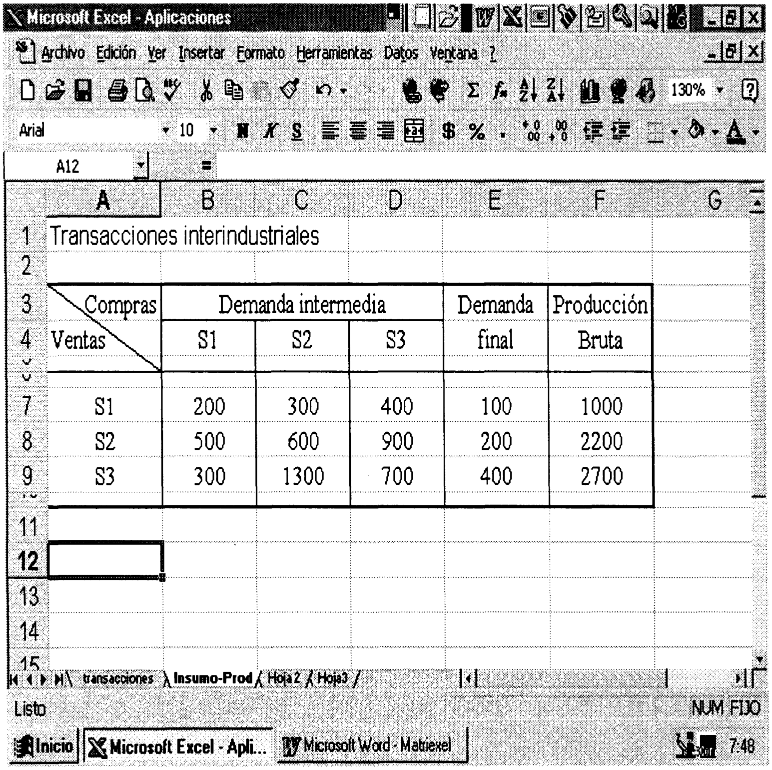
Objetivos:
Al terminar este capítulo:
✓ El lector será capaz de calcular la matriz de Insumo-Producto utilizando Excel.

En éste capítulo, se describe el cálculo de la matriz Insumo-Producto, utilizando la hoja de cálculo electrónica de Excel. El proceso es el siguiente:

14.1 Cálculo de las matrices de transacciones interindustriales y coeficientes técnicos

1) Se despliega una hoja de cálculo
2) Se captura la tabla de transacciones interindustriales. (Ver imagen 14.1)

Imagen 14.1
Captura de transacciones interindustriales

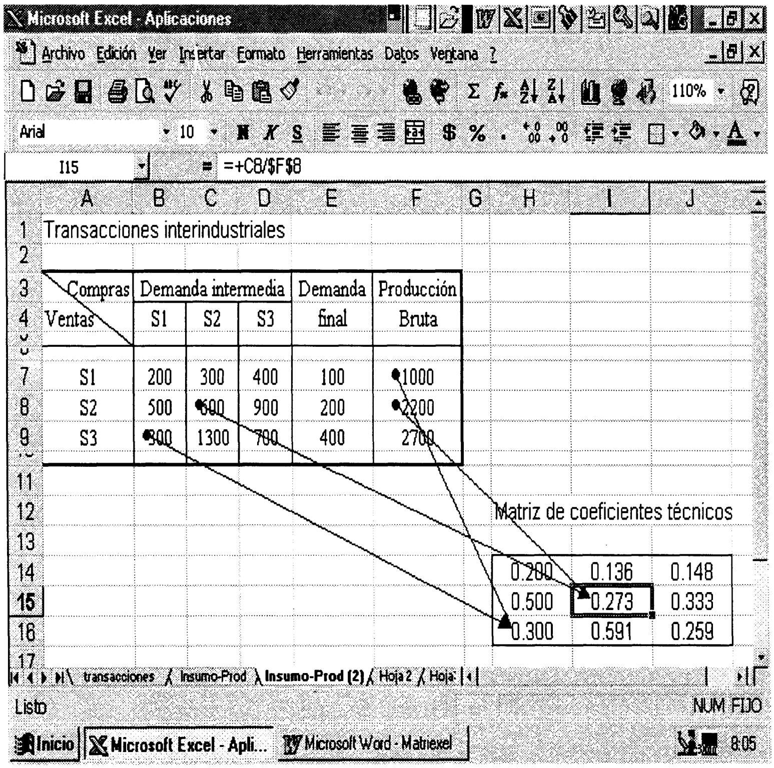


Transacciones interindustriales

Compras / Ventas	Demanda intermedia S1	Demanda intermedia S2	Demanda intermedia S3	Demanda final	Producción Bruta
S1	200	300	400	100	1000
S2	500	600	900	200	2200
S3	300	1300	700	400	2700

3) Se genera la matriz de *coeficientes técnicos*; para esto se divide cada valor de la *Demanda intermedia* de los sectores entre su correspondiente valor de *producción bruta*. En la imagen 14.2, se muestra la celda I15, en la barra de edición de fórmulas aparece =+C8/F8, esto indica que el coeficiente de requerimientos directos por unidad de producción bruta del sector dos al sector dos (a_{22}), es igual a 0.273 unidades (600 / 2200). El requerimiento del sector uno al sector tres (a_{31}), es de 0.3 unidades, es decir; a_{31} = B9 / F7 = 300 / 1000 = 0.3

Imagen 14.2
Calculo de la matriz de coeficientes técnicos

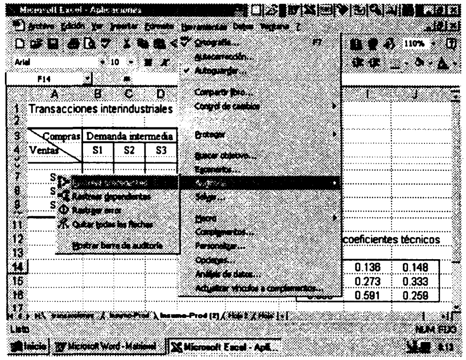


Si desea ver la fórmula de cada coeficiente técnico, bastará con seleccionar la celda correspondiente, y en la barra de funciones aparecerá la fórmula respectiva, si además se requiere visualizar las celdas involucradas en los cálculos como en la imagen 14.2, debe pulsar:

<Herramientas><Auditoría><Rastrear procedentes>

En la imagen 14.3 se muestra ese menú.

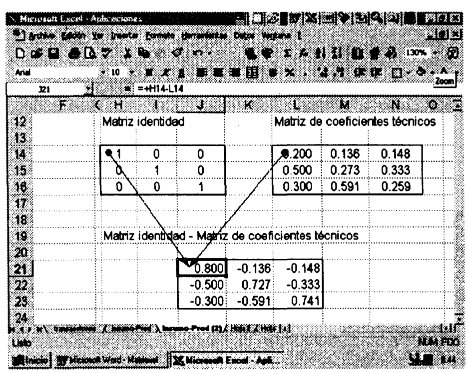
Imagen 14.3
Menú de auditoría



14.2 Cálculo de la matriz de Leontief y su inversa

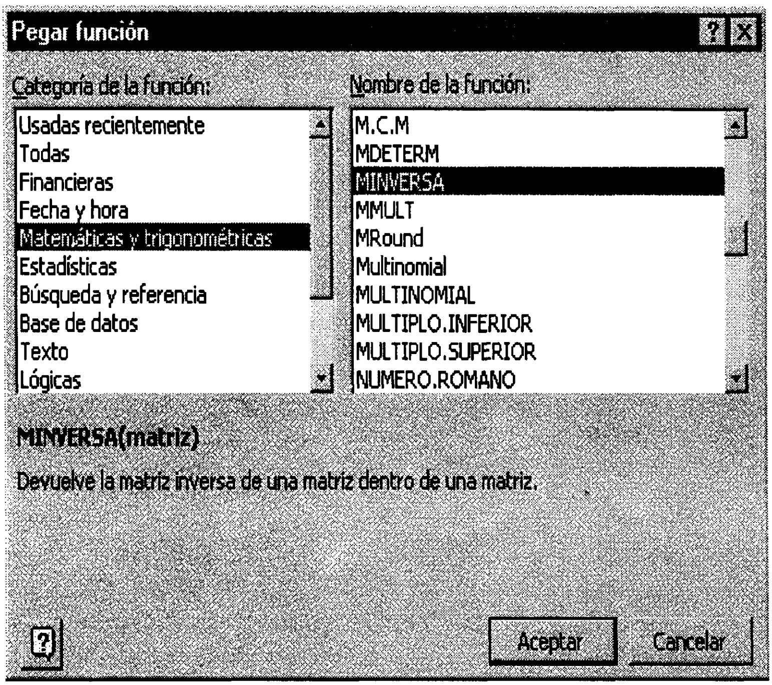
4) Se calcula la diferencia de la matriz identidad menos la matriz de coeficientes técnicos. Para esto se captura la matriz identidad (la cual debe ser de igual dimensión **m** x **n** que la matriz de coeficientes técnicos), en seguida se le restan los valores de la matriz de coeficientes técnicos ver imagen 14.4.

Imagen 14.4
Diferencia: matriz identidad - matriz de coeficientes técnicos



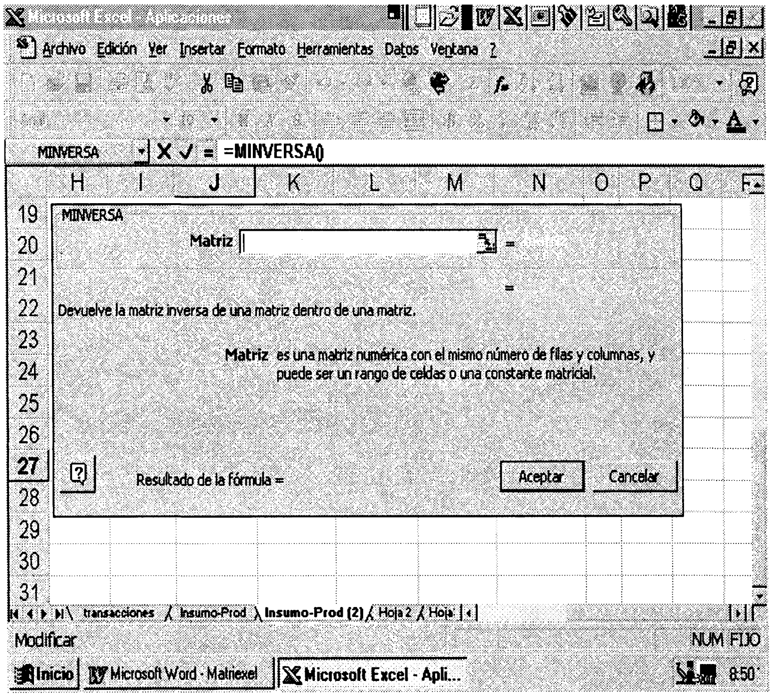
5) Se calcula la inversa de la diferencia matriz identidad - matriz de coeficientes técnicos. Para esto se pulsa el ícono *fx,* en seguida aparece una ventana de procedimiento, en ésta se selecciona la función <Matemáticas y Trigonométricas> <MINVERSA>, ver imagen 14.5.

Imagen 14.5
La función MINVERSA



Al pulsar MINVERSA aparecerá una ventana de proceso que indica la operación a realizar (inversa de matriz), también presenta un área de captura en donde se anota la ubicación de la matriz a invertir, en este ejemplo la ubicación es J21:L23, ver imágenes 14.6 y 14.7

Imagen 14.6
Ventana de captura para MINVERSA



Una vez anotada la ubicación de la matriz que se busca invertir se pulsa *Aceptar,* en seguida aparece el resultado de la posición 1,1 (primera fila, primera columna) dado que requerimos todos los elementos de la inversa, hay que copiar la formula matricial. Para esto se ubica el cursor en la celda que contiene la fórmula matricial a copiar, en seguida se selecciona, el área donde se desea copiar la fórmula, una vez hecho esto se activan las funciones matemáticas oprimiendo la tecla F2 (ver imagen 14.7), finalmente se pulsan simultaneamente las teclas <Shift><Control><Enter>, y la inversa de la matriz (I-A) = $(I\text{-}A)^{-1}$ o inversa de la matriz de Leontief aparecerá automaticamente (ver imagen 14.8).

Imagen 14.7
Copiado de una fórmula matricial

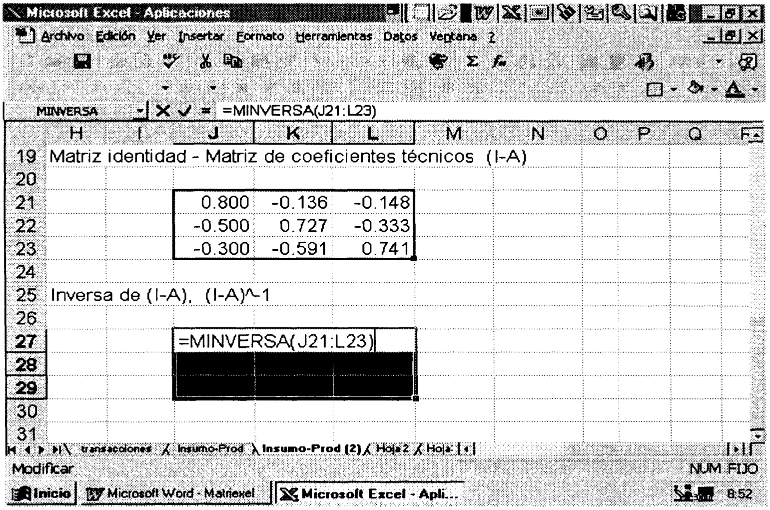
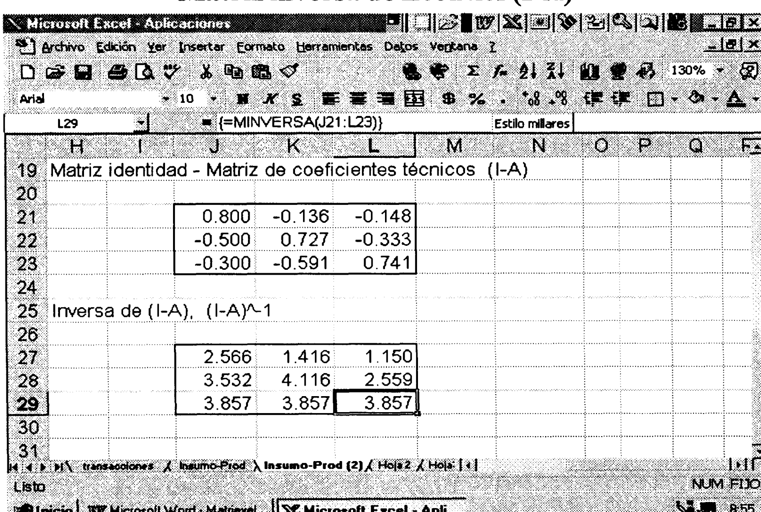


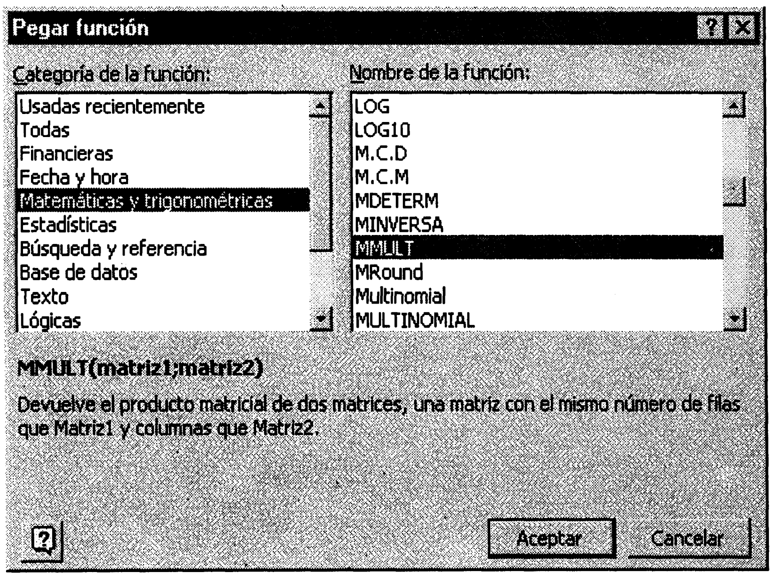
Imagen 14.8
Matriz inversa de Leontief $(I-A)^{-1}$



14.3 Cálculo del incremento en la producción bruta

6) Se calcula el producto de la matriz inversa de Leontief, $(I\text{-}A)^{-1}$, por la matriz de demanda final (Y). Es decir el producto $(I\text{-}A)^{-1}$ Y, esto permite probar que la matriz inversa de Leontief por la demanda final es igual a la producción bruta.
El producto de matrices se obtiene en forma automática pulsando el ícono *fx* y seleccionando las opciones <Matemáticas y trigonométricas><MMULT>, (ver imagen 14.9)

Imagen 14.9
La función MMULT



Enseguida aparece una ventana de proceso (ver imagen 14.10), en ésta se capturan los valores de las matrices 1 y 2, es decir las matrices $(I\text{-}A)^{-1}$y Y. La captura se hace directamente al seleccionar con el mause el área de las matrices; por ejemplo para $(I\text{-}A)^{-1}$ es J27:L29 y para Y es N27:N29, ver imágenes 14.10 y 14.11

Imagen 14.10
Ventana de captura para MMULT

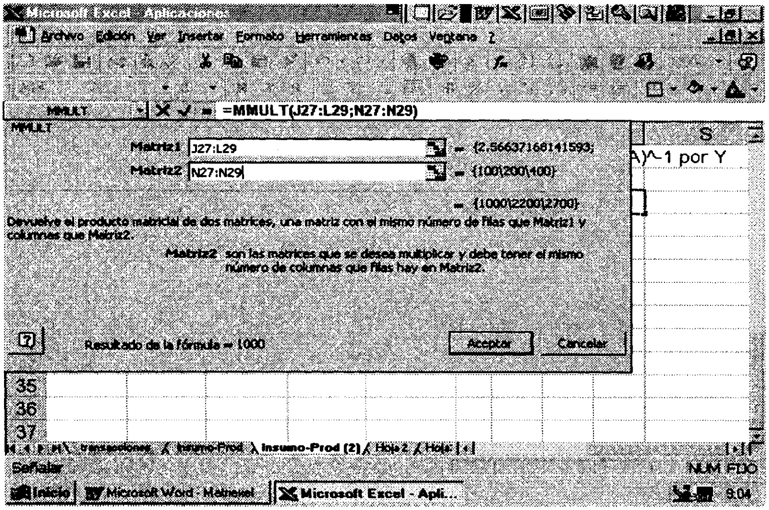
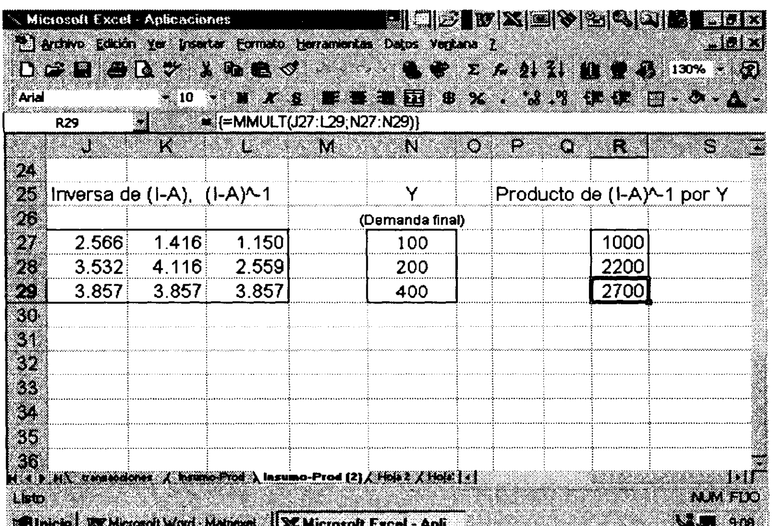
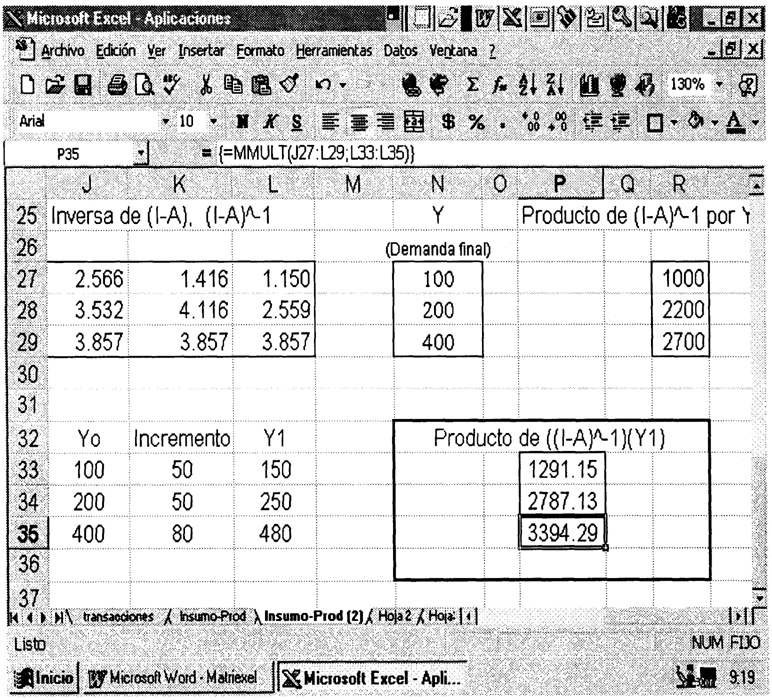


Imagen 14.11
Producto de $(I\text{-}A)^{-1}$ Y



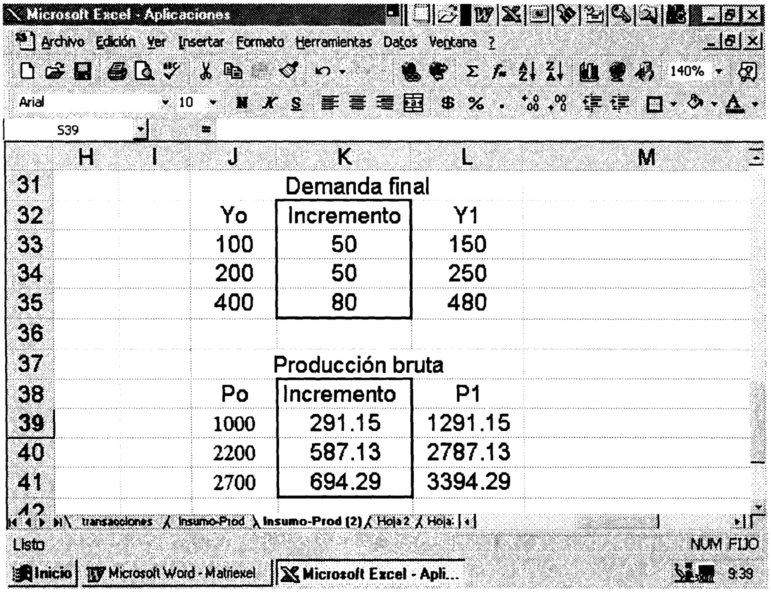
7) Cálculo de la producción bruta con incrementos en la demanda final.
En este paso se multiplica la matriz inversa de Leontief por la demanda incrementada utilizando la función MMULT y procediendo como en el punto anterior (6), ver imagen 14.12.

Imagen 14.12
Producto de $(I-A)^{-1}$ Y incrementada



8) Cálculo del incremento en la producción bruta para satisfacer la variación de la demanda final.
El incremento en la producción bruta se obtiene mediante la diferencia de P_1-P_0 (ver imagen 14.13), los cálculos se hacen con fórmulas manuales.

Imagen 14.13
Cálculo del incremento en producción bruta



	H	I	J	K	L	M
31				Demanda final		
32			Yo	Incremento	Y1	
33			100	50	150	
34			200	50	250	
35			400	80	480	
36						
37				Producción bruta		
38			Po	Incremento	P1	
39			1000	291.15	1291.15	
40			2200	587.13	2787.13	
41			2700	694.29	3394.29	

Bibliografía

MICROSOFT Excel Versión 5, *Manual del Usuario*, Microsoft Corporation 1994.

MICROSOFT Excel Versión 7, ***Manual del Usuario,*** Microsoft Corporation 1996.

MICROSOFT Windows Versión 3.1 ***User´S Guide***, Microsoft Corporation 1993.

ANTON H. & RORRES, ***Aplicaciones de Álgebra Lineal***, Ed. Limusa, México 1994.

ANTON H. ***Introducción Al Álgebra Lineal***, Ed. Limusa, México 1992.

CHIANG A. ***Métodos Fundamentales de Economía y Administración***, Ed Mc Graw Hill, México 1994.

GROSSMAN S. I. ***Álgebra Lineal***, Ed. Grupo Editorial Iberoamericana, México 1994.

GROSSMAN S. I. ***Aplicaciones de Álgebra Lineal***, Ed. Grupo Editorial Iberoamericana, México 1993.

KLEIMAN A. ***Matrices: Aplicaciones Matemáticas en Economía y Administración***, Ed. Limusa, México 1990.

STRANG G. ***Álgebra Lineal y sus Aplicaciones,*** Ed. Interamericana, México 1989.

WEBER J. ***Matemáticas para Administración y Economía,*** Ed. Harla, México 1984.

HARVEY G. ***Álgebra Lineal,*** Ed. Grupo Editorial Iberoamericana, México 1992.

WILLIAM L. P. ***Álgebra Lineal con aplicaciones,*** Ed. Mc Graw Hill, México 1990.

FRANK S. B. ***Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales,*** Tercera edición, Ed. Mc Graw Hill, México 1990.

ERNEST F. H. Jr. RICHARD S. ***Matemáticas para administración y economía,*** Segund edición, Ed. Grupo Editorial Iberoamericana, México 1992.

Introducción al álgebra lineal y de matrices.
Aplicaciones con Excel
se terminó de imprimir en los talleres de
Jason's Editores, S.A. de C.V.,
Mar Mediterráneo 211, Col. Popotla,
México, D. F.
La edición consta de 500 ejemplares
más sobrantes para reposición.

Las matemáticas constituyen una parte fundamental en la formación de los estudiantes y profesionistas de las Ciencias Sociales. Esto se hace más evidente para los que se encuentran en áreas en donde es necesario resolver problemas relacionados con la producción, la organización, la toma de decisiones, etc.

Este libro Introducción al Álgebra Lineal y de Matrices, está dirigido a los que estudian y/o laboran en las áreas de Administración, Economía, y Política y Gestión Social. Su objetivo es explicar las partes esenciales del Álgebra Lineal, de manera clara, comprensiva y precisa, abordando la solución de problemas aplicados, y el uso de la computadora. Esto último, es imprescindible debido a las exigencias del competitivo mundo actual que demanda la solución rápida, y prácticamente inmediata de problemas. Así, esta obra busca integrar la enseñanza del álgebra lineal y el uso de la computadora mediante el manejo de la hoja de cálculo electrónica Excel.

El libro consta de catorce capítulos en los que se presentan ejemplos que ayudan a comprender los temas tratados. Al principio de cada uno se encuentra una lista de objetivos que indican al lector el propósito del mismo. El libro abarca desde el modelo lineal con dos incógnitas, hasta el cálculo de la Matriz Insumo-Producto en forma manual y utilizando la hoja de cálculo. Otros temas importantes son: propiedades y operaciones entre vectores, matrices, representaciones gráficas, transformaciones lineales, cálculo de los valores y vectores propios, entre otros.

La presente obra permite comprender y resolver los problemas de Álgebra Lineal y de Matrices que enfrentan los estudiosos de las Ciencias Sociales.