FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Investigación Operativa

Ing. Miranda

Guía 1. Modelación y resolución gráfica
Guía 2. Modelación con varias variables
Guía 3. Modelación de procesos complejos
Guía 4. Método simplex
Guía 5. Modelo Dual
Guía 7. Formulación de Programación Lineal Entera

Problema 1.2

Un fabricante de bombones entrega sus productos en cajas de un kilogramo, en dos variedades, A y B.

La caja tipo A, contiene 300 gramos de bombones de licor, 500 gramos de bombones de nuez, y 200 gramos de bombones de fruta. La caja tipo B contiene 400 gramos, 200 gramos y 400 gramos de cada tipo de bombón respectivamente.

La utilidad por cada caja de tipo A es de $ 120, y por cada de tipo B es de $ 90.

El fabricante dispone de 100 kilogramos de bombones de licor, 120 kilogramos de bombones de nuez, y 100 kilogramos de bombones de fruta.

Se pide definir la cantidad de cajas de cada tipo que debe armar en esta situación, para que su beneficio sea máximo.

1.2

Empiezo por definir las variables

X_A = cantidad de cajas a preparar del tipo A

X_B = cantidad de cajas a preparar del tipo B

Sigo definiendo los recursos

L = kg de bombones de licor disponibles = 100

N = kg de bombones de nuez disponibles = 120

F = kg de bombones de fruta disponibles = 100

1.2

Incorporo las restricciones de los recursos (ojo con las unidades)

Licor) $0.3\text{kg/caja} \cdot X_A + 0.4\text{kg/caja} \cdot X_B \leq 100 \text{ kg}$

Nuez) $0.5\text{kg/caja} \cdot X_A + 0.2\text{kg/caja} \cdot X_B \leq 120 \text{ kg}$

Fruta) $0.2\text{kg/caja} \cdot X_A + 0.4\text{kg/caja} \cdot X_B \leq 100 \text{ kg}$

Y la función que tengo que maximizar es el beneficio

Beneficio) $120\$/\text{caja} \cdot X_A + 90\$/\text{caja} \cdot X_B$ **(máximo)**

Con X_A , X_B continuas positivas → **Definido el Modelo**

Programación Lineal. Formulación Gráfica

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

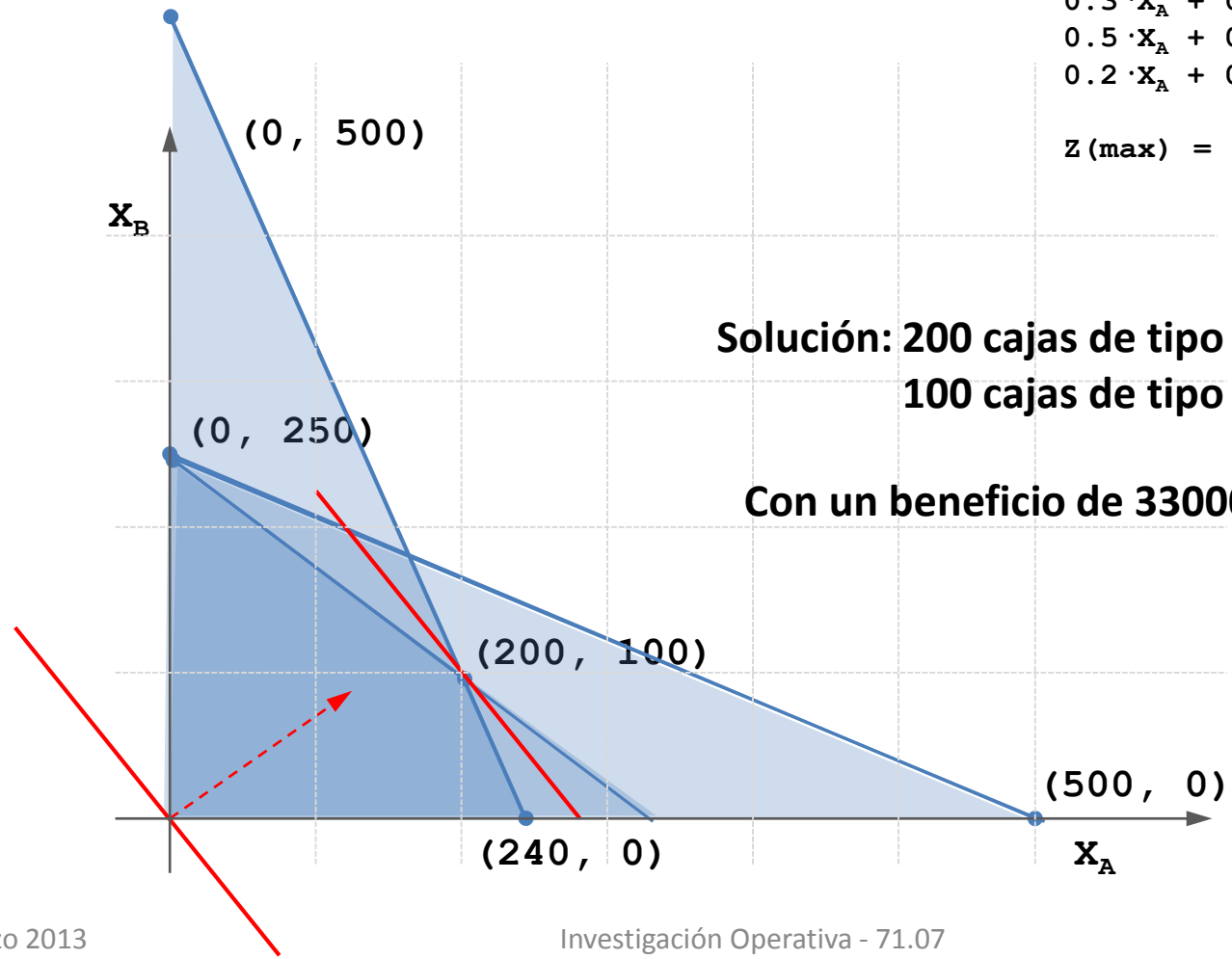
1.2

Las variables X_A , X_B me dan el espacio R_2
Las restricciones me dan el Dominio.

Modelo

$$0.3 \cdot X_A + 0.4 \cdot X_B \leq 100$$
$$0.5 \cdot X_A + 0.2 \cdot X_B \leq 120$$
$$0.2 \cdot X_A + 0.4 \cdot X_B \leq 100$$

$$Z(max) = 120 \cdot X_A + 90 \cdot X_B$$



Solución: 200 cajas de tipo A,
100 cajas de tipo B

Con un beneficio de 330000 $

Problema 1.3

Una empresa produce concreto usando los ingredientes A y B. Cada kilo de ingrediente A cuesta $ 60 y contiene 4 unidades de arena fina, 3 unidades de arena gruesa y 5 unidades de piedrecillas. Cada kilo de ingrediente B cuesta $ 100 y contiene 3 unidades de arena fina, 6 unidades de arena gruesa y 2 unidades de piedrecillas. Cada saco de concreto debe contener por lo menos 12 unidades de arena fina, 12 unidades de arena gruesa y 10 unidades de piedrecillas. Formule un modelo de programación lineal y resuélvalo gráficamente.

1.3

Empiezo por definir las variables

X_A = cantidad de kg de ingrediente A a utilizar por saco

X_B = cantidad de kg de ingrediente B a utilizar por saco

Sigo definiendo las restricciones

Arena Fina = unidades mínimas de Arena Fina por saco= 12

Arena Gruesa = unidades mínimas de Arena Gruesa por saco = 12

Piedrecillas = unidades mínimas de Piedrecillas por saco= 10

1.3

Incorporo las restricciones (ojo con las unidades)

Arena fina) $4u/kg \cdot X_A + 3u/kg \cdot X_B \geq 12\ u$

Arena gruesa) $3u/kg \cdot X_A + 6u/kg \cdot X_B \geq 12\ u$

Piedrecillas) $5u/kg \cdot X_A + 2u/kg \cdot X_B \geq 10\ u$

Y la función que tengo que minimizar es el costo

Costo) $60\$/kg \cdot X_A + 100\$/kg \cdot X_B$ **(mínimo)**

Con X_A , X_B continuas positivas → **Definido el Modelo**

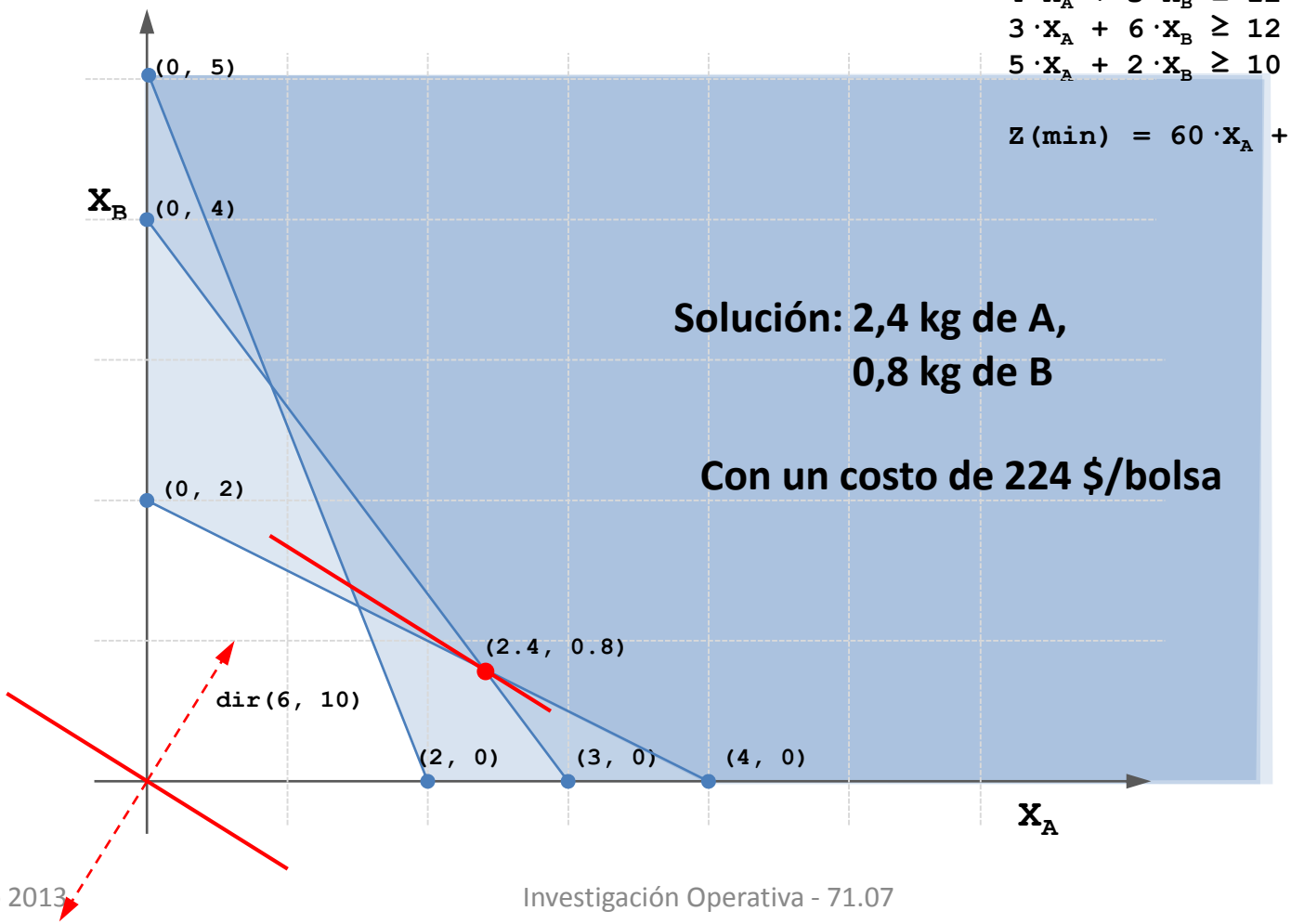
FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

1.3

Modelo

$$4 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \geq 12$$
$$3 \cdot X_A + 6 \cdot X_B \geq 12$$
$$5 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \geq 10$$

$$Z(\min) = 60 \cdot X_A + 100 \cdot X_B$$



Solución: 2,4 kg de A, 0,8 kg de B

Con un costo de 224 $/bolsa

Problema 1.7

Una empresa automotriz está equipada para producir automóviles y camiones. Su planta fabril está organizada en cuatro departamentos: Estampado, Montaje de motores, Línea de montaje de automóviles y Línea de montaje de camiones.

La capacidad de producción de cada departamento está limitada de la siguiente forma:

- Estampado: 25.000 automóviles o 40.000 camiones por año.
- Montaje de motores: 33.333 automóviles o 16.667 camiones por año.
- Línea de montaje de automóviles: 22.500 unidades por año.
- Línea de montaje de camiones: 15.000 unidades por año.

Por otra parte, se desea producir como mínimo 12.000 automóviles y 8.000 camiones por año, estimándose asimismo en 18.000 unidades la cantidad demandada máxima anual de automóviles.

El margen de beneficios es de $ 15.000 por automóvil y $ 12.500 por camión.

Se desea conocer el plan de producción que haga máximo el margen total de beneficios..

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

1.7

Empiezo por definir las variables

X_A = cantidad de autos a producir por año

X_C = cantidad de camiones a producir por año

Sigo definiendo las recursos, ojo con esto:

"Estampado: 25.000 automóviles o 40.000 camiones por año. "

"Montaje de motores: 33.333 autos o 16.667 camiones por año "

Supongo existe una capacidad de cada subproceso que voy a expresar en términos mas fáciles de entender

1.7

Defino un consumo en Ta HE/auto y Tc HE/camión entonces:

$$\text{Ta HE/auto} \cdot X_A + \text{Tc HE/camión} \cdot X_c \leq \text{HE disponibles /año}$$

también se que:

$$\text{Ta HE/auto} \cdot 25000 \text{ autos} = \text{HE disponibles /año}$$

$$\text{Tc HE/camión} \cdot 40000 \text{ camiones} = \text{HE disponibles /año}$$

reemplazo:

$$(\text{HE disp /año})/\ 25000 \text{ autos} \cdot X_A + (\text{HE disp /año})/\ 40000 \text{ camiones} \cdot X_c \leq \text{HE disp /año}$$

simplifico

$$X_A\ /\ 25000 \text{ autos} \cdot X_c\ /\ 40000 \text{ camiones} \leq 1$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

1.7

Incorporo las restricciones

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Estampado)} & (1/25000\text{aut})\cdot X_A + (1/40000\text{cam})\cdot X_C & \leq & 1 \\
\text{Montaje Mot)} & (1/33333\text{aut})\cdot X_A + (1/16667\text{cam})\cdot X_C & \leq & 1 \\
\text{Montaje Aut)} & X_A & \leq & 22500 \text{ aut} \\
\text{Montaje Cam)} & X_C & \leq & 15000 \text{ cam} \\
\text{Politica Aut)} & X_A & \geq & 12000 \text{ aut} \\
\text{Politica Cam)} & X_C & \geq & 8000 \text{ cam} \\
\text{Dem max Aut)} & X_A & \leq & 18000 \text{ aut}
\end{array}
$$

Y la función que tengo que maximizar es el beneficio

$$\text{Costo)} \quad 15000\$/\text{auto}\cdot X_A + 12500\$/\text{cam}\cdot X_C \ (\max)$$

Con X_A , X_C continuas positivas → **Definido el Modelo**

Programación Lineal. Formulación Gráfica

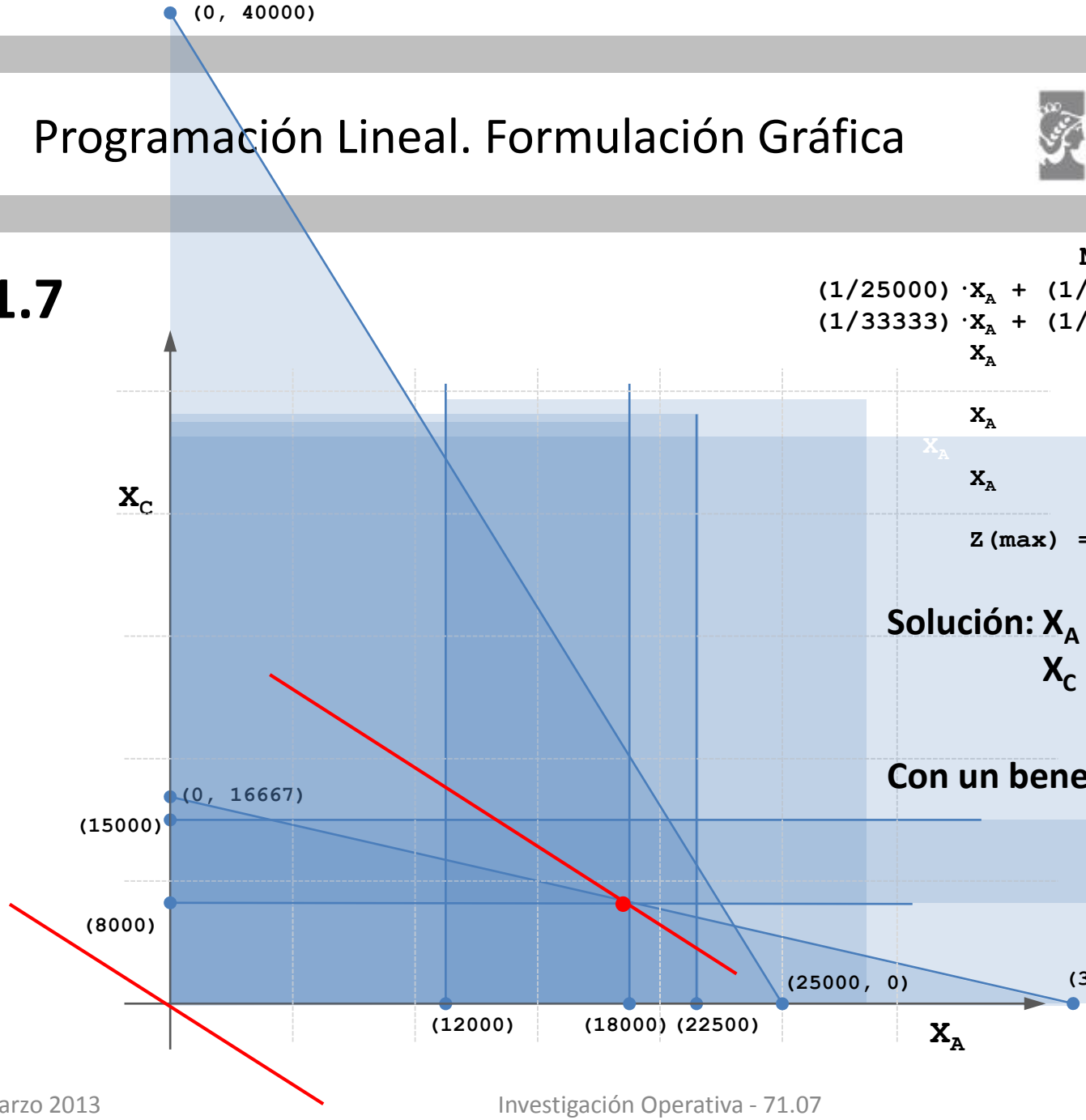
FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

1.7

Modelo

$$(1/25000)\cdot X_A + (1/40000)\cdot X_C \leq 1$$
$$(1/33333)\cdot X_A + (1/16667)\cdot X_C \leq 1$$
$$X_A \leq 22500$$
$$X_C \leq 15000 \quad \text{cam}$$
$$X_A \geq 12000 \quad \text{aut}$$
$$X_C \geq 8000 \quad \text{cam}$$
$$X_A \leq 18000 \quad \text{aut}$$

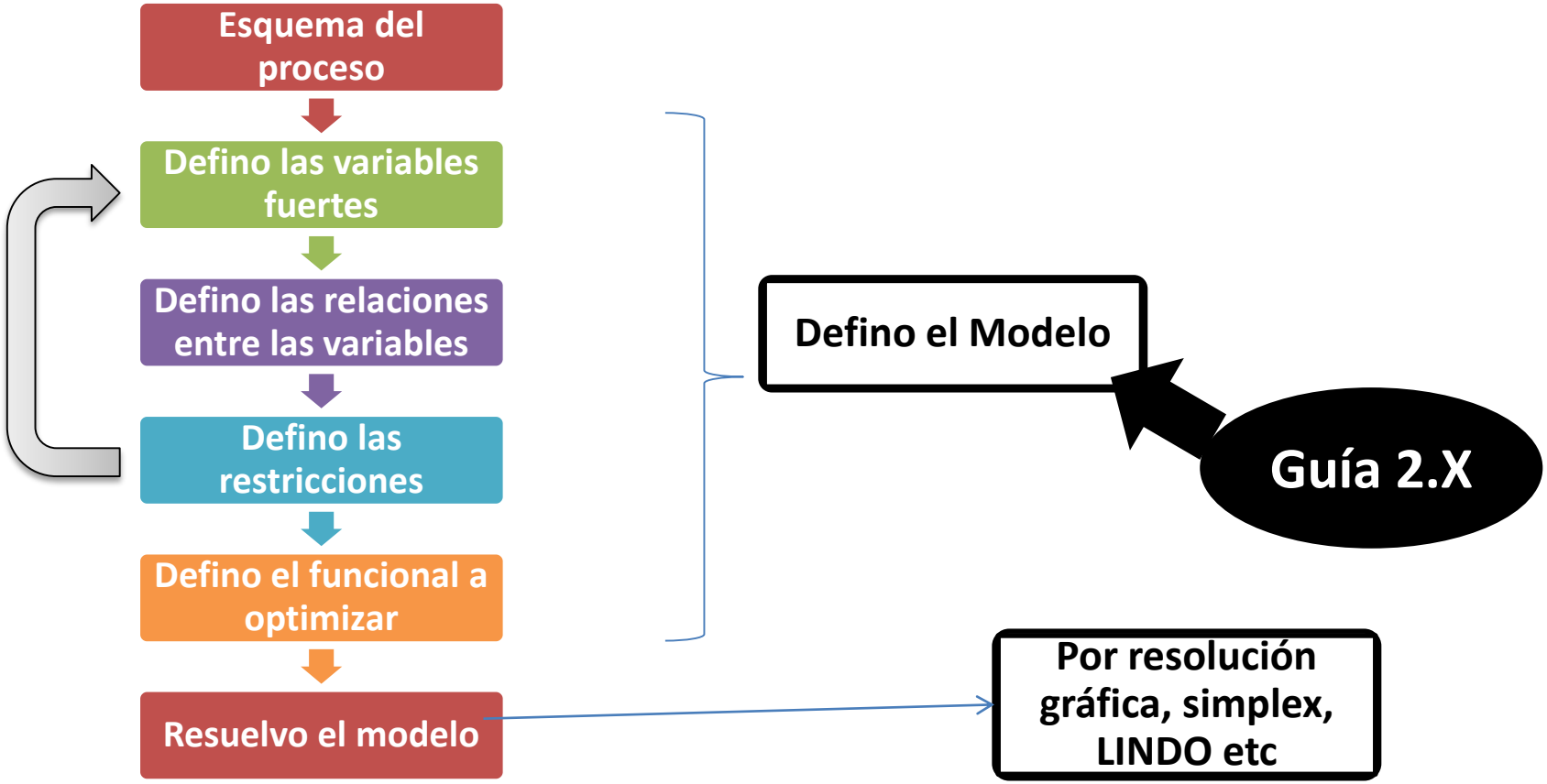
$$Z(\max) = 15000\cdot X_A + 12500\cdot X_B$$



Solución: X_A = 17333 autos
X_C = 8000 camiones

Con un beneficio de 360 M $

En general en programación lineal



Problema 2.2

Un fraccionador de whisky importa el licor en tres distintas graduaciones A, B y C. Mediante la mezcla de estos licores, de acuerdo a sus fórmulas, se obtienen los whiskies de calidades comercializables Escocés, Kilt y Tartan.

Las citadas fórmulas especifican las siguientes relaciones entre los elementos a mezclar.

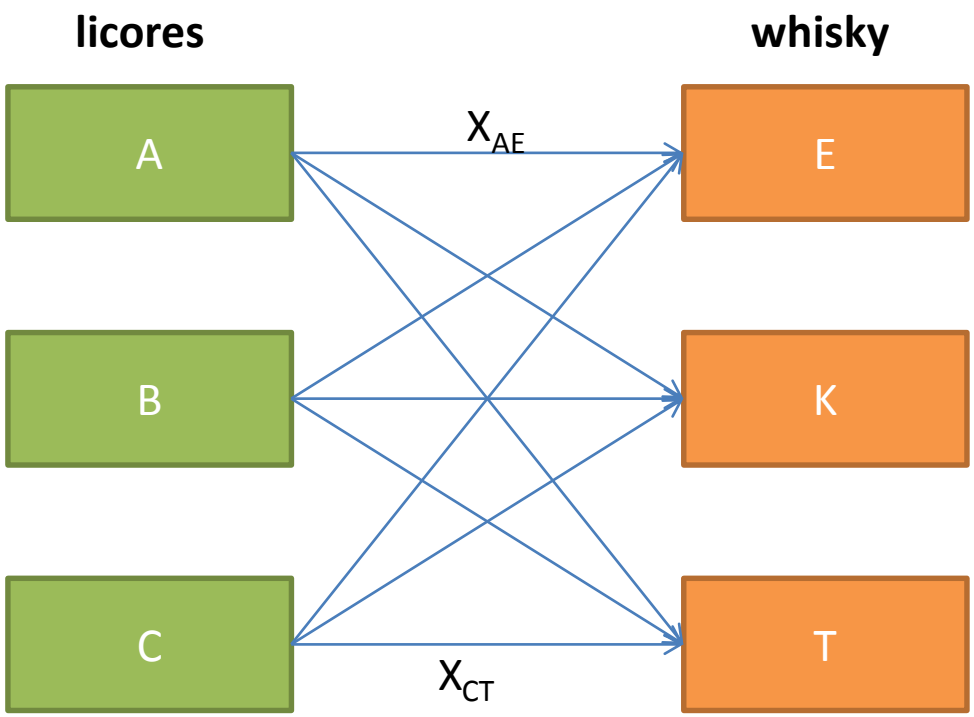
Se conocen también las disponibilidades y precios de los licores A, B y C que se indican en el siguiente cuadro. Se desea definir la composición de cada marca para maximizar el beneficio total.

Marca	Especificación	P. Venta $/l
Escocés	No menos del 60 % de A No más del 20 % de C	6.8
Kilt	No menos del 15 % de A No más del 60 % de C	5.7
Tartan	No más del 50 % de C	4.5

Tipo	Disponibilidad (l)	Costo $/l
A	2000	7
B	2500	5
C	1200	4

2.2

Empiezo por definir las variables



X_{ij} = cantidad de licor i en litros para usar en el whisky marca j
(9 variables)

I = cantidad total de licor I a utilizar (I= A, B, C)
(3 variables)

J = cantidad total de whisky J a preparar (J= E, K, T)
(3 variables)

2.2

Sigo con las restricciones de balance:

El total del licor que empleo de A es igual a lo que uso de A para E mas lo que uso de A para K y mas lo que uso de A para T

$$A = \sum_{j=(E,K,T)} X_{Aj}$$

$$B = \sum_{j=(E,K,T)} X_{Bj}$$

$$C = \sum_{j=(E,K,T)} X_{Cj}$$

2.2

Más restricciones de balance:

El total del whisky que produzco de E es igual a la suma de lo que uso de los licores A, B y C para el E.

$$E = \sum_{i=(A,B,C)} X_{iE}$$

$$K = \sum_{i=(A,B,C)} X_{iK}$$

$$T = \sum_{i=(A,B,C)} X_{iT}$$

2.2

Sigo con las restricciones de disponibilidad:

El licor A tiene disponibilidad de 2000 litros

$$A \leq 2000l$$

$$B \leq 2500l$$

$$C \leq 1200l$$

2.2

Sigo con las restricciones de especificación:

El escocés tiene no menos de 60% de licor A

$$X_{AE} \geq 0.6 \cdot E$$

El escocés tiene no mas de 20% de licor C

$$X_{CE} \leq 0.2 \cdot E$$

2.2

Sigo con las restricciones, de especificación:

El kilt tiene no menos de 15% de licor A

$$X_{AK} \geq 0.15 \cdot K$$

El kilt tiene no mas de 60% de licor C

$$X_{CK} \leq 0.6 \cdot K$$

El tartan tiene no mas de 50% de licor C

$$X_{CT} \leq 0.5 \cdot T$$

2.2

Y la función que tengo que maximizar es el beneficio:

PV Escocés = 6.8 $/l - Costo de A = 7 $/l

$$B = \underbrace{6.8\tfrac{\$}{l}\cdot E + 5.7\tfrac{\$}{l}\cdot K + 4.5\tfrac{\$}{l}\cdot T}_{\textbf{ingreso}} \underbrace{- 7\tfrac{\$}{l}\cdot A - 5\tfrac{\$}{l}\cdot B - 4\tfrac{\$}{l}\cdot C}_{\textbf{costo}}$$

Resumiendo…

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

2.2

VAR) $A, B, C, E, K, T, X_{AE}, X_{AK}, X_{AT}, X_{BE}, X_{BK}, X_{CE}, X_{CK}, X_{CT}$

DISP_A)	A	≤ 2000
DISP_B)	B	≤ 2500
DISP_C)	C	≤ 1200
BAL_A)	$-A + X_{AE} + X_{AK} + X_{AT}$	$= 0$
BAL_B)	$-B + X_{BE} + X_{BK} + X_{BT}$	$= 0$
BAL_C)	$-C + X_{CE} + X_{CK} + X_{CT}$	$= 0$
BAL_E)	$-E + X_{AE} + X_{BE} + X_{CE}$	$= 0$
BAL_K)	$-K + X_{AK} + X_{BK} + X_{CK}$	$= 0$
BAL_T)	$-T + X_{AT} + X_{BT} + X_{CT}$	$= 0$
AE_MIN)	$X_{AE} - 0.6 \cdot E$	≥ 0
CE_MAX)	$X_{CE} - 0.2 \cdot E$	$\leq$
AK_MIN)	$X_{AK} - 0.15 \cdot K$	$\geq$
CK_MAX)	$X_{CK} - 0.6 \cdot K$	≤ 0
CT_MAX)	$X_{CT} - 0.5 \cdot T$	≤ 0

BEN) $6.8 \cdot E + 5.7 \cdot K + 4.5 \cdot T - 7 \cdot A - 5 \cdot B - 4 \cdot C$ (máx)

Otra forma de formulación es economizando variables

$$\boxed{A = X_{AE} + X_{AK} + X_{AT}}$$

Problema 2.4

Un taller de tejido de pullovers elabora varios modelos, los que se pueden agrupar desde el punto de vista técnico-económico en tres tipos de prendas diferentes: A, B y C.

El taller posee 2 máquinas: I y II. Los pullovers A solo se pueden fabricar en la máquina I, los C en la II y los B en la I o en la II.

Las dos máquinas trabajan 2 turnos de 8 horas de lunes a viernes.

La materia prima utilizada es lana de dos calidades distintas: M se usa para los A y C, y N para los de tipo B. De la lana M es posible conseguir hasta 20 kg. por semana y de la N hasta 36 Kg. por semana.

Existe un compromiso con un importante distribuidor de entregar 10 pullovers de tipo B por semana. El objetivo del problema es maximizar los beneficios.

No es necesario que las prendas que comienzan a fabricarse en una semana se terminen durante la misma; es decir que pueden quedar pullovers a medio hacer de una semana para la próxima. Los standards de producción, standards de Materia Prima y el beneficio unitario para cada tipo de pulóver se dan en el siguiente cuadro:

Problema 2.4

	Standard de Producción (hs/pulóver)		Standard de Mat. Prima (Kg./pul.)		Beneficio unitario ($/pul.)
	I	II	M	N	
A	5	-	1.6	-	1000
B	6	4	-	1.8	1500
C	-	4	1.2	-	1800
Disp. semanal	80 hrs.	80 hrs	20 Kg.	36 Kg.	

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

2.4

Empiezo por definir las variables:

A: cantidad a fabricar de pullover A
B: cantidad a fabricar de pullover B
C: cantidad a fabricar de pullover C

B1: cantidad de pullover a fabricar en la maq. I
B2: cantidad de pullover a fabricar en la maq. II

2.4

Relaciones entre las variables:

B = B1 + B2

	Standard de Producción (hs/pulóver)		Standard de Mat. Prima (Kg./pul.)		Beneficio unitario ($/pul.)
	I	II	M	N	
A	5	-	1.6	-	1000
B	6	4	-	1.8	1500
C	-	4	1.2	-	1800
Disp. semanal	80 hrs.	80 hrs	20 Kg.	36 Kg.	

Restricciones de capacidad

$$5\frac{hs}{p}\cdot A+6\frac{hs}{p}\cdot B1\leq 80hs$$

$$4\frac{hs}{p}\cdot B2+4\frac{hs}{p}\cdot C\leq 80hs$$

2.4

Restricciones de mat. prima

$$1.6\frac{kg}{p}\cdot A+1.2\frac{kg}{p}\cdot C\leq 20kg$$

$$1.8\frac{kg}{p}\cdot B\leq 36kg$$

	Standard de Producción (hs/pulóver)		Standard de Mat. Prima (Kg./pul.)		Beneficio unitario ($/pul.)
	I	II	M	N	
A	5	-	1.6	-	1000
B	6	4	-	1.8	1500
C	-	4	1.2	-	1800
Disp. semanal	80 hrs.	80 hrs	20 Kg.	36 Kg.	

Compromiso de ventas

$$B\geq 10p$$

Beneficio máximo: $$1000\frac{\$}{p}\cdot A+1500\frac{\$}{p}\cdot B+1800\frac{\$}{p}\cdot C$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

2.4

```
VAR) A, B, B1, B2, C

BAL)    B1 + B2 − B     = 0
MAQ1)   5·A + 6·B1      ≤ 80
MAQ2)   4·B2 + 4·C      ≤ 80
LANAM)  1.6·A + 1.2·C   ≤ 20
LANAN)  1.8·B           ≤ 36
REQB)   B               ≥ 10

        BEN = 1000·A + 1500·B + 1800·C (máx)
```

Otra forma de formulación es economizando variables

$B = B1 + B2$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.6

Cuatro fábricas envían sus productos a igual número de almacenes. Las capacidades de las fábricas y los costos de producción por unidad de producto en cada una de ellas se indican en la primera tabla.

Los costos de transporte (dados en $/u) de cada fábrica a cada almacén se muestran en la segunda tabla.

Las cantidades requeridas por cada almacén están dadas en toneladas.

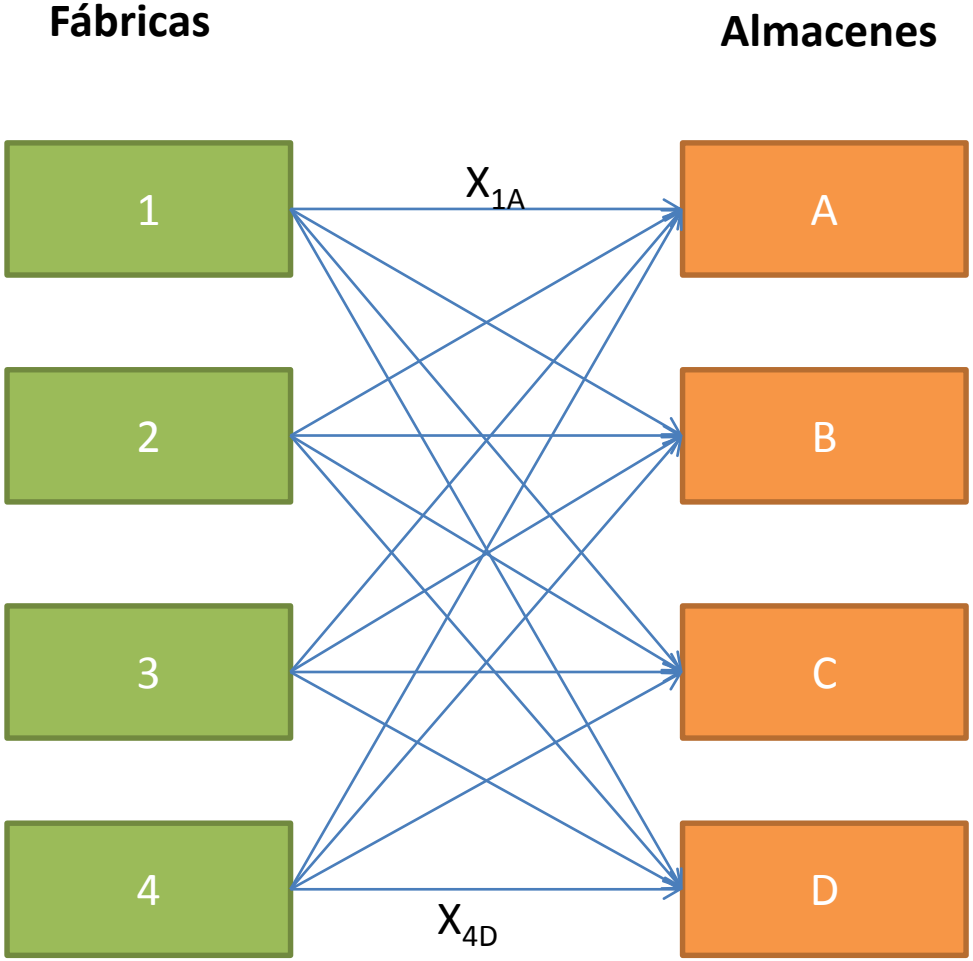
Se desea establecer el programa de distribución que minimice el costo total

Fábrica	Capacidad (u)	Costo ($/u)
1	140	60
2	260	72
3	360	48
4	220	60

	Almacén			
Fab	A	B	C	D
1	28	40	36	38
2	18	28	24	30
3	42	54	52	54
4	36	48	40	46
Req	180	280	150	200

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

2.6



X_{ij} = cantidad de producto fabricado en i (1,2,3,4) para enviar al almacén j (A,B,C,D) (16 variables)

I = cantidad total de producción de la fábrica I (1,2,3,4) (4 variables)

J = cantidad total de producción que llega al almacén (A,B,C,D) (4 variables)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

2.6 Restricciones:

Capacidad fábrica 1,2,3 y 4
Requerimiento de los almacenes A, B, C y D

Minimizar el costo de producción y el costo del transporte sumados

Tarea para el hogar: resolver economizando variables

Problema 2.7

Una empresa fabrica y vende dos productos A y B, cuyo diagrama de proceso es el siguiente:

El producto A puede seguir cualquiera de los dos procesos alternativos de producción, mientras que para el producto B existe un único procedimiento de fabricación.

Las características y rendimiento de los productos según sus procesos están dados en las siguientes tablas:

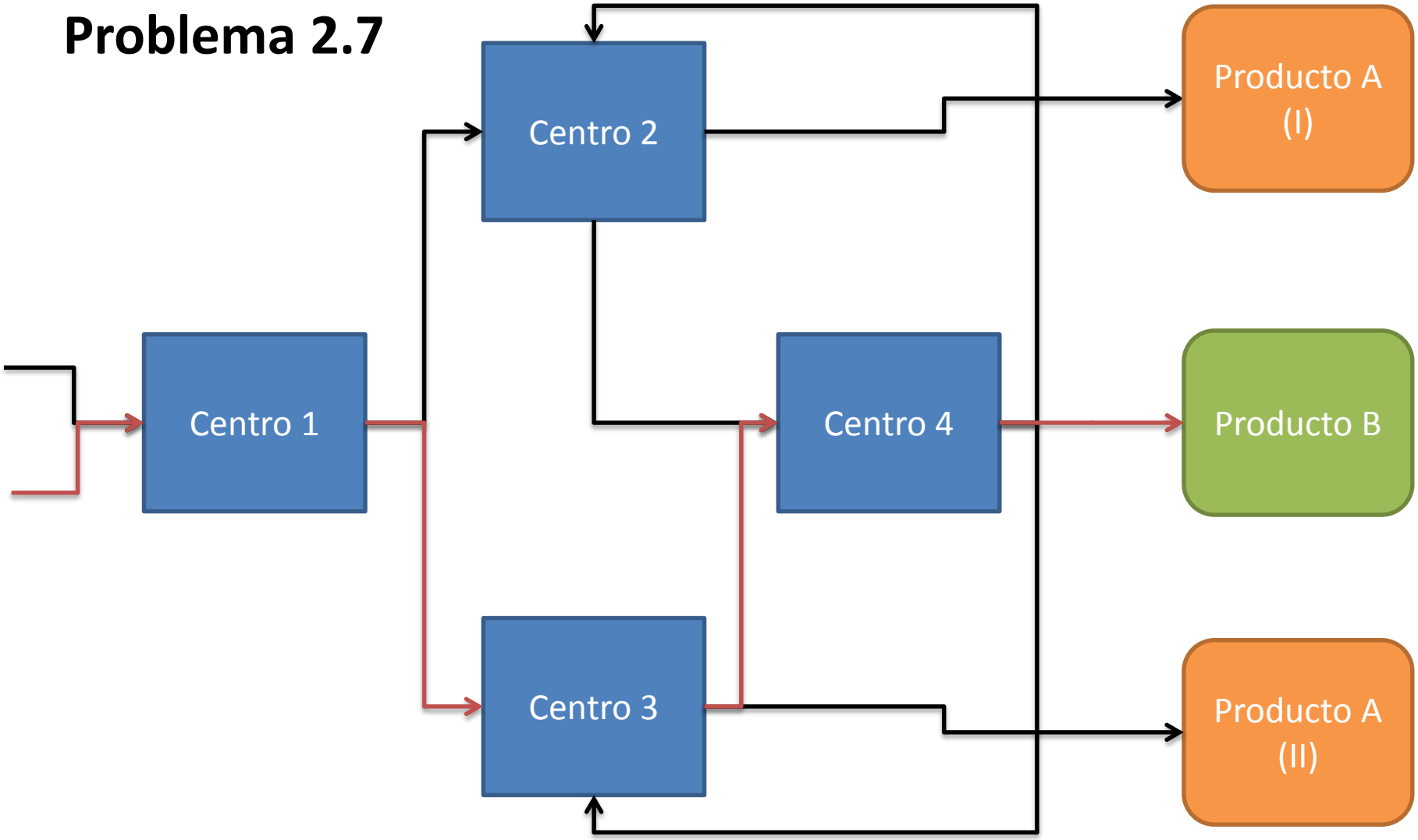
Al realizarse el estudio se verificó que los centros 1 y 4 pueden funcionar como máximo 16 horas por día y los centros 2 y 3, solamente 12 horas netas por día.

Los medios de despacho de la empresa están limitados a una capacidad conjunta para A y B de 2500 litros diarios. Se deben producir al menos 600 litros por día de A.

Se pide determinar la mezcla de ventas que maximice el margen de beneficios.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

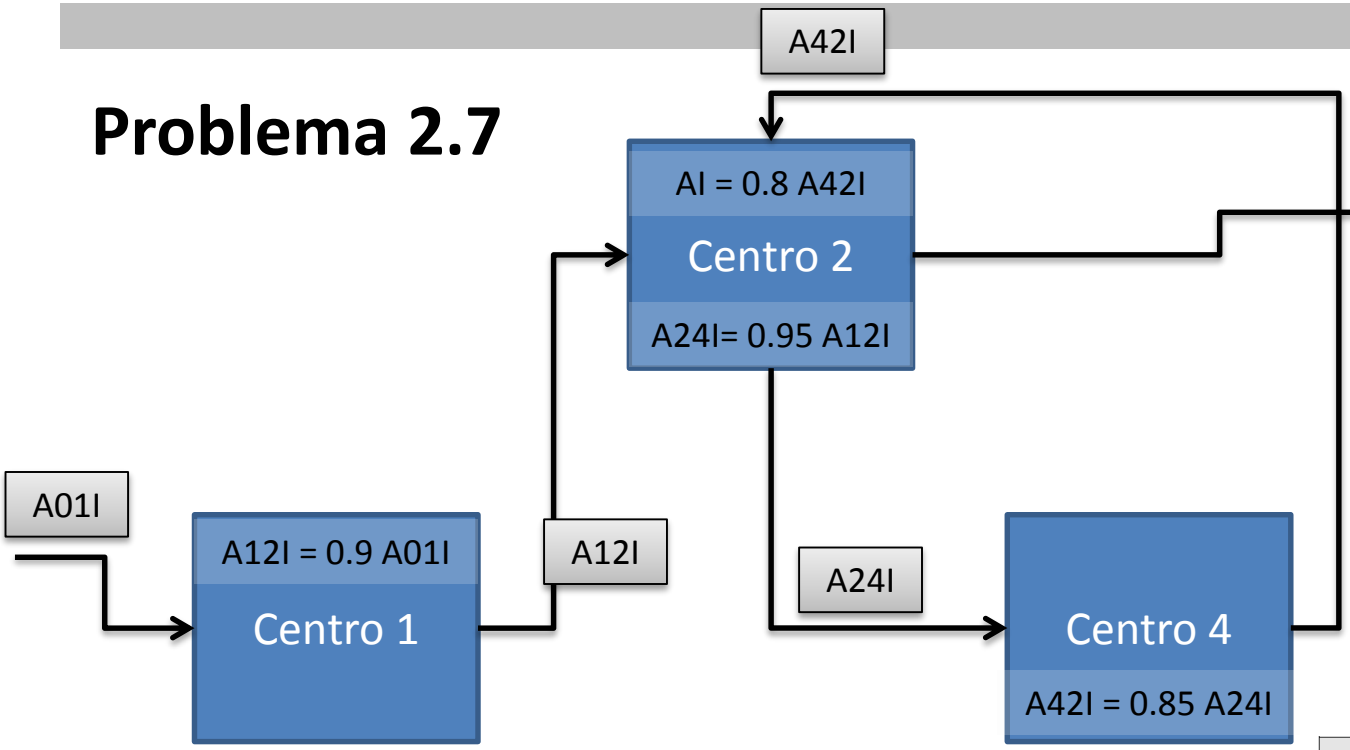
Problema 2.7



Programación Lineal. Formulación con varias variables

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.7



AI: cantidad de producto A en litros por día mediante el método I

Producto	Centros	Tasa de procesamiento (litros/hora)	Rendimiento (%)
A	1	300	90
	2(1ª vez)	450	95
	4	250	85
	2 (2ª vez)	400	80
	3	350	75
B	1	500	90
	3	480	85
	4	400	80

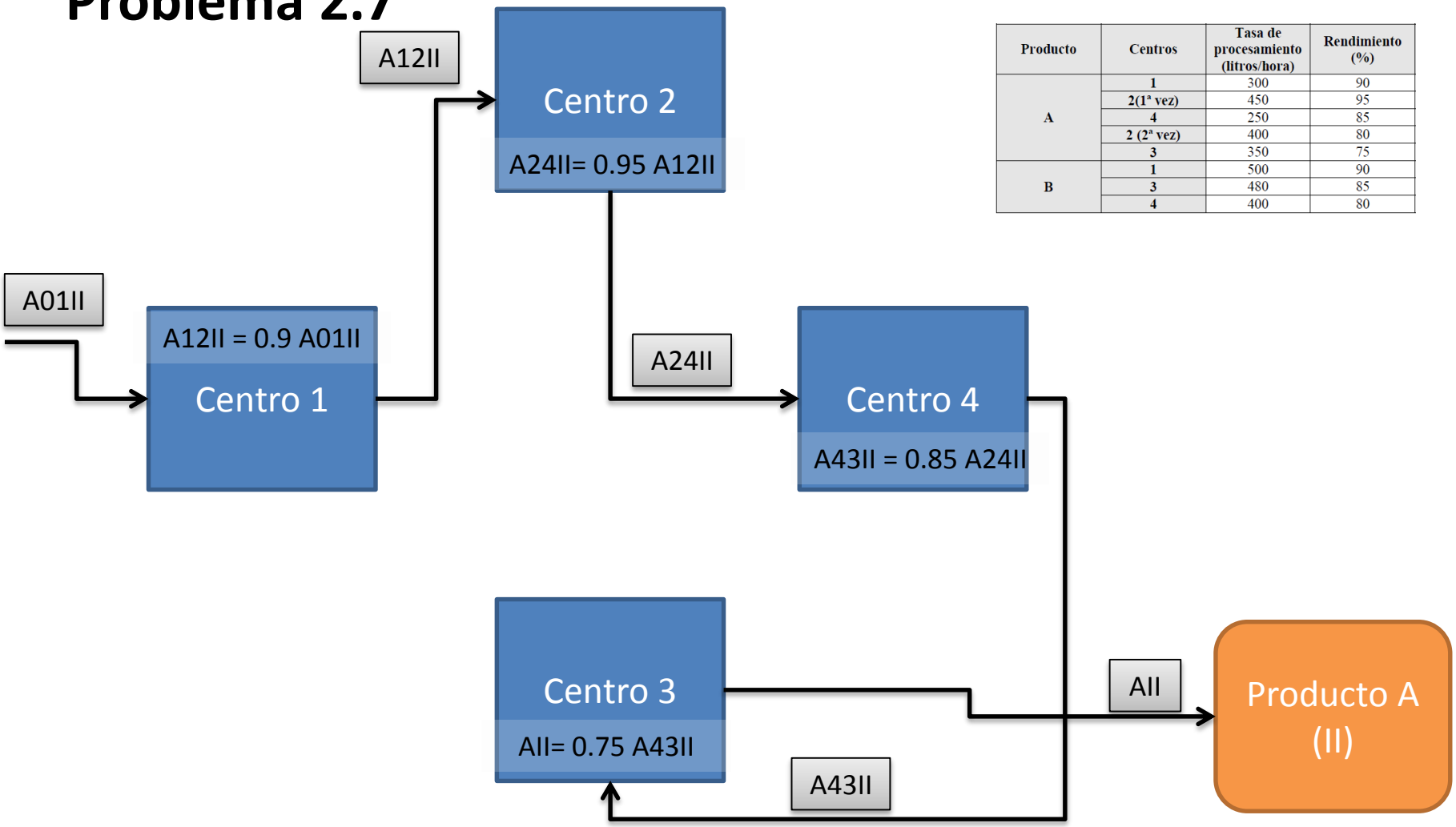
Lo que mas me conviene es definir muchas variables

AJKM: producto que salió del centro J, que se asigna al centro K para fabricar el producto A según el método M

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

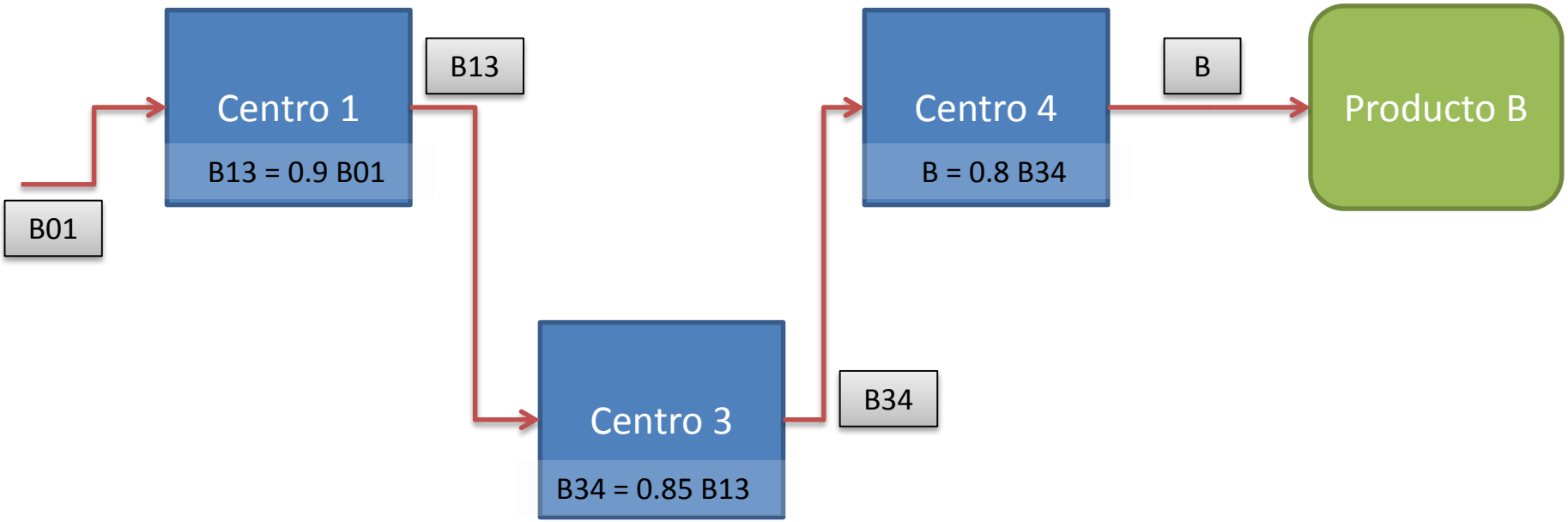
Problema 2.7

Producto	Centros	Tasa de procesamiento (litros/hora)	Rendimiento (%)
A	1	300	90
	2(1ª vez)	450	95
	4	250	85
	2 (2ª vez)	400	80
	3	350	75
B	1	500	90
	3	480	85
	4	400	80



Problema 2.7

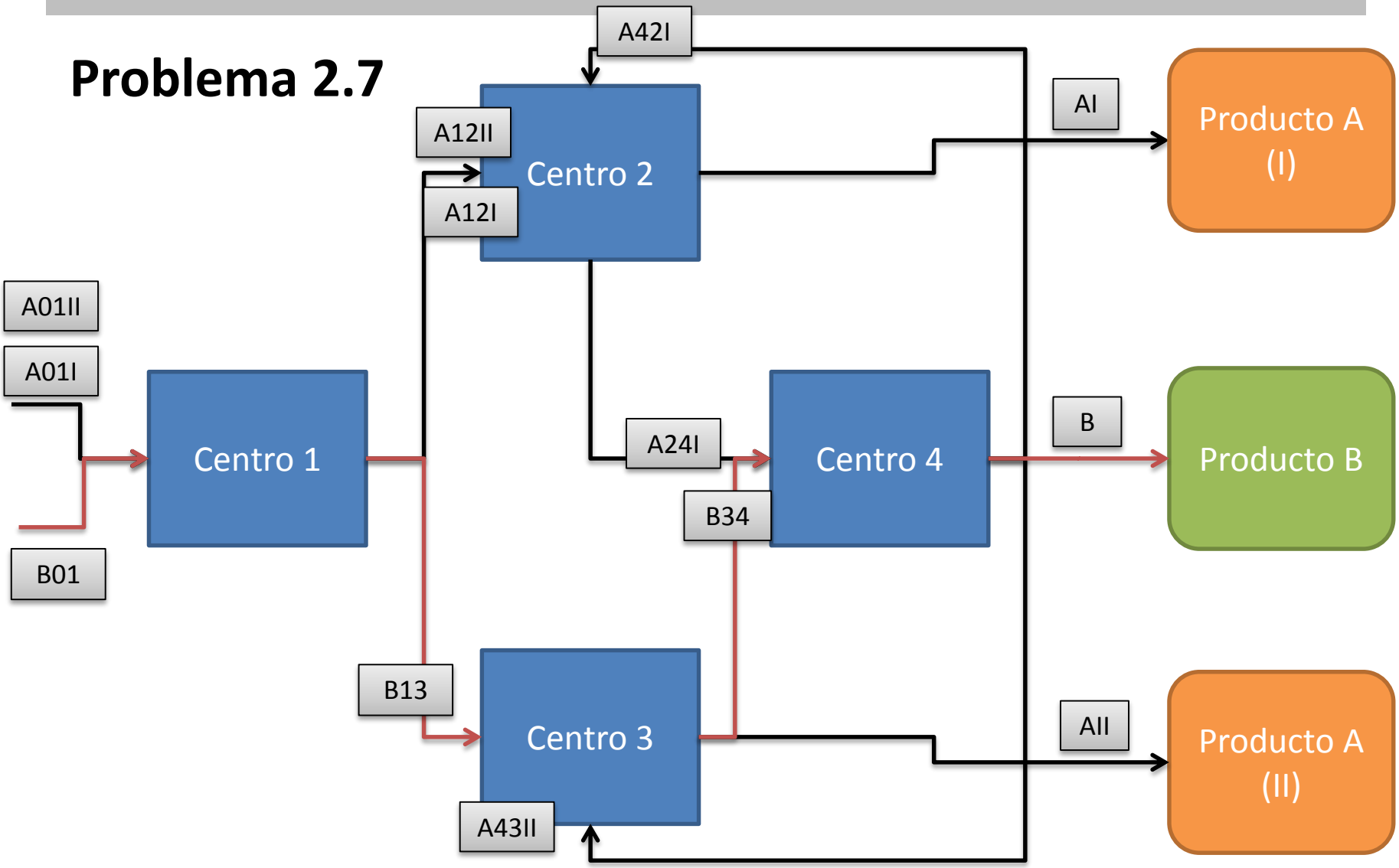
Producto	Centros	Tasa de procesamiento (litros/hora)	Rendimiento (%)
A	1	300	90
	2(1ª vez)	450	95
	4	250	85
	2 (2ª vez)	400	80
	3	350	75
B	1	500	90
	3	480	85
	4	400	80



Programación Lineal. Formulación con varias variables

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.7



Problema 2.7

Hasta ahora tengo variables:

A, B, AI, AII, A01I, A01II, B01, A12I, A12II, A42I, B13, A43II, A42I, B34

A = AI + AII

AI = 0.8 A42I

AII= 0.75 A43II

A42I = 0.85 A24I

A43II = 0.85 A24II

A24I= 0.95 A12I

A24II= 0.95 A12II

A12I = 0.9 A01I

A12II = 0.9 A01II

B = 0.8 B34

B34 = 0.85 B13

B13 = 0.9 B01

Problema 2.7

Restricciones:

Demanda máxima de A y B en de 1750 y 1500 l/día

$A \leq 1750$ l/d
$B \leq 1500$ l/d

Producir al menos 600 l/día de A

$A \geq 600$ l/d

Capacidad conjunta de 2500 l diarios

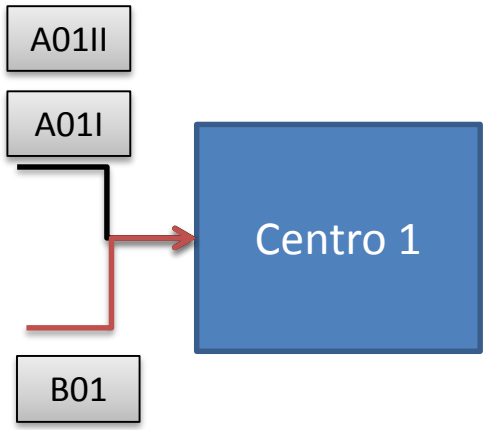
$A + B \leq 2500$ l/d

Problema 2.7

Restricciones:

Tasa de procesamiento del centro 1 es de 300 l/hora para A o 500 l/ hora para B. Y el centro 1 funciona 16 horas por día.

$$\frac{(A01I + A01II)}{300\frac{l}{h}} + \frac{B01}{500\frac{l}{h}} \leq 16\frac{h}{d}$$

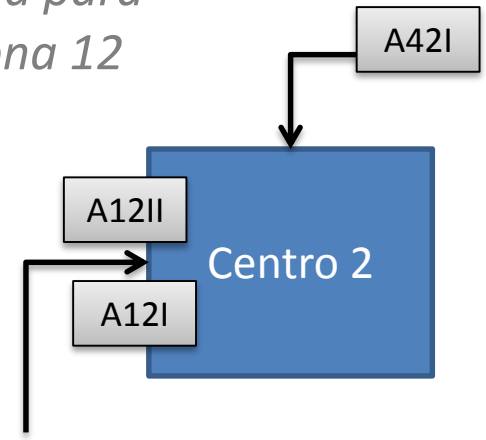


Problema 2.7

Restricciones:

Tasa de procesamiento del centro 2 es de 450 l/hora para A (1era vez) y de 400 (2da vez). Y el centro 2 funciona 12 horas por día.

$$\frac{(A12I + A12II)}{450\frac{l}{h}} + \frac{A42I}{400\frac{l}{h}} \leq 12\frac{h}{d}$$

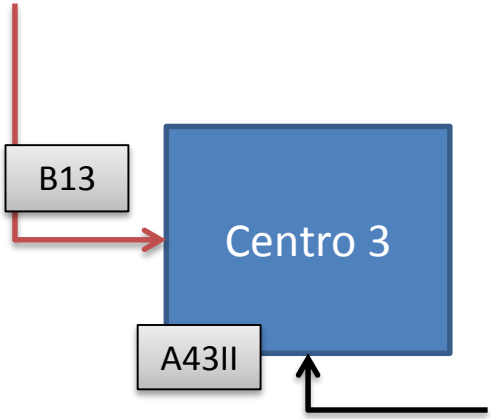


Problema 2.7

Restricciones:

Tasa de procesamiento del centro 3 es de 350 l/hora para A y de 480 para B. Y el centro 2 funciona 12 horas por día.

$$\frac{A43II}{350\frac{l}{h}} + \frac{B13}{480\frac{l}{h}} \leq 12\frac{h}{d}$$

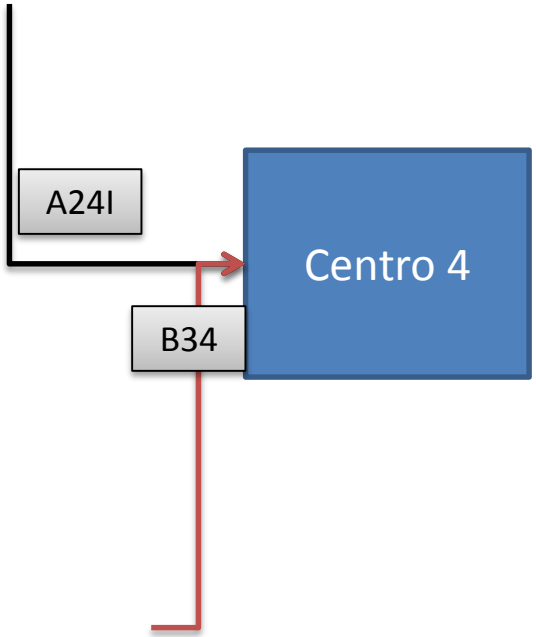


Problema 2.7

Restricciones:

Tasa de procesamiento del centro 4 es de 250 l/hora para A y de 400 para B. Y el centro 4 funciona 16 horas por día.

$$\frac{A24I}{250\frac{l}{h}} + \frac{B34}{400\frac{l}{h}} \leq 16\frac{h}{d}$$



Problema 2.7

Funcional:

Maximizar el beneficio

$$B\left[\frac{\$}{día}\right] = \underbrace{60\frac{\$}{l}A + 180\frac{\$}{l}B}_{\text{Precio de venta}} - \underbrace{\left(50\frac{\$}{l}A01I + 50\frac{\$}{l}A01II + 60\frac{\$}{l}B01\right)}_{\text{Costo de materia prima}} - (CostoCentros)$$

$$CostoCentros = CostoC1 + CostoC2 + CostoC3 + CostoC4$$

Producto	Costo materia prima ($/litro)	Precio de venta ($/litro)
A	50	60
B	60	180

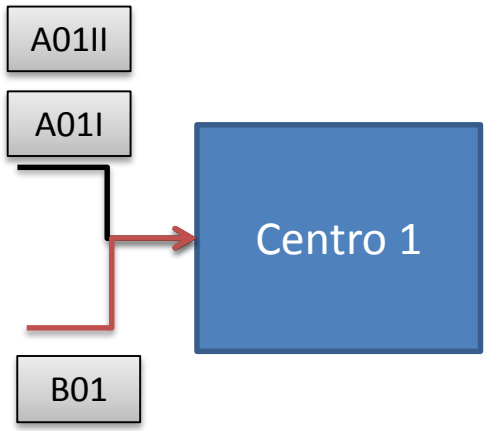
Problema 2.7

Los costos están dados en $/h para cada centro para cada producto. La tasa de procesamiento del centro 1 es de 300 l/hora para A o 500 l/ hora para B. El centro 1 cuesta operarlo 1500$/h para el A y 3000$/h para el B

$$CostoC1 = A01I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{1500\frac{\$}{h}}{300\frac{l}{h}} + A01II\left[\frac{l}{día}\right]\frac{1500\frac{\$}{h}}{300\frac{l}{h}} + B01\left[\frac{l}{día}\right]\frac{3000\frac{\$}{h}}{500\frac{l}{h}}$$

Producto	Centros	Tasa de procesamiento (litros/hora)	Rendimiento (%)	Costo proceso ($/hora)
A	1	300	90	1500
	2(1ª vez)	450	95	2000
	4	250	85	1800
	2 (2ª vez)	400	80	2200
	3	350	75	2500
B	1	500	90	3000
	3	480	85	2500
	4	400	80	2400

$$A01It\left[\frac{h}{día}\right] = \frac{A01I\left[\frac{l}{día}\right]}{300\frac{l}{h}}$$

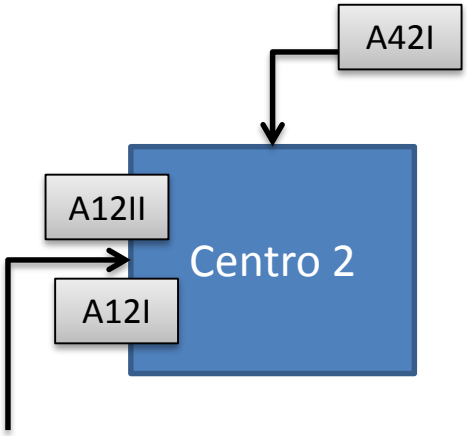


Problema 2.7

Los costos están dados en $/h para cada centro para cada producto.

$$CostoC2 = A12I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2000\frac{\$}{h}}{450\frac{l}{h}} + A12II\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2000\frac{\$}{h}}{450\frac{l}{h}} + A42I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2200\frac{\$}{h}}{400\frac{l}{h}}$$

Producto	Centros	Tasa de procesamiento (litros/hora)	Rendimiento (%)	Costo proceso ($/hora)
A	1	300	90	1500
	2(1ª vez)	450	95	2000
	4	250	85	1800
	2 (2ª vez)	400	80	2200
	3	350	75	2500
B	1	500	90	3000
	3	480	85	2500
	4	400	80	2400

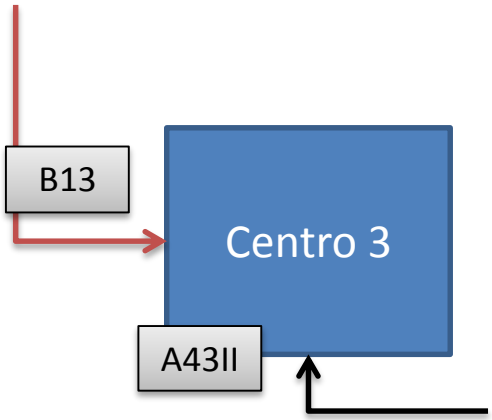


Problema 2.7

Los costos están dados en $/h para cada centro para cada producto.

$$CostoC3 = A43II\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2500\frac{\$}{h}}{350\frac{l}{h}} + B13\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2500\frac{\$}{h}}{480\frac{l}{h}}$$

Producto	Centros	Tasa de procesamiento (litros/hora)	Rendimiento (%)	Costo proceso ($/hora)
A	1	300	90	1500
	2(1ª vez)	450	95	2000
	4	250	85	1800
	2 (2ª vez)	400	80	2200
	3	350	75	2500
B	1	500	90	3000
	3	480	85	2500
	4	400	80	2400

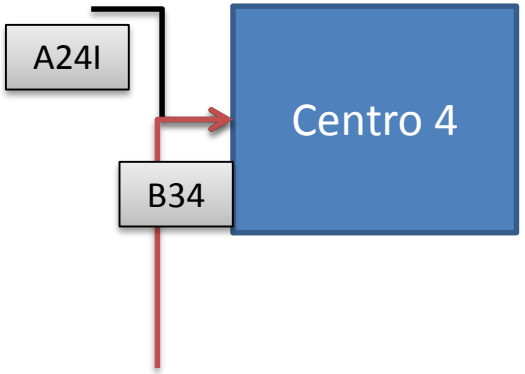


Problema 2.7

Los costos están dados en $/h para cada centro para cada producto.

$$CostoC4 = A24I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{1800\frac{\$}{h}}{250\frac{l}{h}} + B34\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2400\frac{\$}{h}}{400\frac{l}{h}}$$

Producto	Centros	Tasa de procesamiento (litros/hora)	Rendimiento (%)	Costo proceso ($/hora)
A	1	300	90	1500
	2(1ª vez)	450	95	2000
	4	250	85	1800
	2 (2ª vez)	400	80	2200
	3	350	75	2500
B	1	500	90	3000
	3	480	85	2500
	4	400	80	2400



Problema 2.7 MODELO

A, B, AI, AII, A01I, A01II, B01, A12I, A12II, A42I, B13, A43II, A42I, B34

$$\frac{(A01I + A01II)}{300\frac{l}{h}} + \frac{B01}{500\frac{l}{h}} \leq 16\frac{h}{d}$$

$$\frac{(A12I + A12II)}{450\frac{l}{h}} + \frac{A42I}{400\frac{l}{h}} \leq 12\frac{h}{d}$$

$$\frac{A43II}{350\frac{l}{h}} + \frac{B13}{480\frac{l}{h}} \leq 12\frac{h}{d}$$

$$\frac{A24I}{250\frac{l}{h}} + \frac{B34}{400\frac{l}{h}} \leq 16\frac{h}{d}$$

A = AI + AII

AI = 0.8 A42I

AII= 0.75 A43II

A42I = 0.85 A24I

A43II = 0.85 A24II

A24I= 0.95 A12I

A24II= 0.95 A12II

A12I = 0.9 A01I

A12II = 0.9 A01II

B = 0.8 B34

B34 = 0.85 B13

B13 = 0.9 B01

A ≤ 1750 l/d
B ≤ 1500 l/d
A ≥ 600 l/d
A + B ≤ 2500 l/d

Problema 2.7 MODELO

$$B\left[\frac{\$}{día}\right] = 60\frac{\$}{l}A + 180\frac{\$}{l}B - \left(50\frac{\$}{l}A01I + 50\frac{\$}{l}A01II + 60\frac{\$}{l}B01\right) - \left(CostoCentros\right)$$

$$CostoCentros = CostoC1 + CostoC2 + CostoC3 + CostoC4$$

CostoCentros puede ser definida o no como variable según aporte claridad al modelo, también ***CostoC1***, etc.

TAREA PARA EL HOGAR: pasar todas las ecuaciones e inecuaciones a la forma nominal de la programación lineal

$$CostoC1 = A01I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{1500\frac{\$}{h}}{300\frac{l}{h}} + A01II\left[\frac{l}{día}\right]\frac{1500\frac{\$}{h}}{300\frac{l}{h}} + B01\left[\frac{l}{día}\right]\frac{3000\frac{\$}{h}}{500\frac{l}{h}}$$

$$CostoC2 = A12I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2000\frac{\$}{h}}{450\frac{l}{h}} + A12II\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2000\frac{\$}{h}}{450\frac{l}{h}} + A42I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2200\frac{\$}{h}}{400\frac{l}{h}}$$

$$CostoC3 = A43II\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2500\frac{\$}{h}}{350\frac{l}{h}} + B13\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2500\frac{\$}{h}}{480\frac{l}{h}}$$

$$CostoC4 = A24I\left[\frac{l}{día}\right]\frac{1800\frac{\$}{h}}{250\frac{l}{h}} + B34\left[\frac{l}{día}\right]\frac{2400\frac{\$}{h}}{400\frac{l}{h}}$$

Problema 2.8 (bis)

Un hotel planea recibir a los participantes de una convención que dura una semana. Para los banquetes previstos, la empresa organizadora de la convención solicitó que se utilizaran manteles de un color especial. El costo de dichos manteles es de 250 $/mantel. El lavado de dichos manteles toma normalmente 2 días; es decir un mantel sucio, enviado a lavar inmediatamente después de ser utilizado el día 2, es regresado a tiempo para ser utilizado el día 5.

Sin embargo, la lavandería tiene también un servicio de mayor costo que regresa los manteles en 1 día. Los gastos de lavandería son de 100 $/mantel y de 150 $/mantel respectivamente.

Debe considerarse además, que el hotel no desea (por las características de estos manteles), comprar más manteles que los necesarios para el día, ni enviar manteles a lavar si no van a ser utilizados durante esta convención. Plantear un modelo que permita calcular como el hotel satisface sus necesidades minimizando gastos.

Día (i)	1	2	3	4	5	6	7
Manteles necesarios	5	6	7	8	7	9	10

Problema 2.8 (bis)

	Día	1	2	3	4	5	6	7
Xi	compro manteles nuevos	5						
Bi	busco lavanderia				5			
Dmi	Disp manteles limpios antes	5						
Ui	uso	5	6	7	8	7	9	10
Dmsi	Disponibilidad manteles sucios	5						
MLPi	Mando a lavar premium							
MLNi	Mando a lavar normal	5						
DMLsi	Disp manteles limpios que sobran							
DMSsi	Disp manteles sucios que sobran							

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.8 (bis)

	Día	1	2	3	4	5	6	7
Xi	compro manteles nuevos	6		4				
Bi	busco lavanderia			3				
Dmi	Disp manteles limpios antes	6		7				
Ui	uso	5	6	7	8	7	9	10
Dmsi	Disponibilidad manteles sucios	5						
MLPi	Mando a lavar premium	3						
MLNi	Mando a lavar normal							
DMLsi	Disp manteles limpios que sobran	1						
DMSsi	Disp manteles sucios que sobran	2						

Problema 2.8 (bis)

	Día	1	2	3	4	5	6	7
Xi	compro manteles nuevos							
Bi	busco lavanderia							
Dmi	Disp manteles limpios antes							
Ui	uso	5	6	7	8	7	9	10
Dmsi	Disponibilidad manteles sucios							
MLPi	Mando a lavar premium							
MLNi	Mando a lavar normal							
DMLsi	Disp manteles limpios que sobran							
DMSsi	Disp manteles sucios que sobran							

```
COSTO(min) = 250X1 + 250X2 + 250X3 + 250X4 + 250X5 + 250X6 + 250X7
           + 150MLP1 + 150MLP2 + 150MLP3 + 150MLP4 + 150MLP5
           + 100MLN1 + 100MLN2 + 100MLN3 + 100MLN4
```

Problema 2.8 (bis)

	Día	1	2	3	4	5	6	7
Xi	compro manteles nuevos							
Bi	busco lavanderia							
Dmi	Disp manteles limpios antes							
Ui	uso	5	6	7	8	7	9	10
Dmsi	Disponibilidad manteles sucios							
MLPi	Mando a lavar premium							
MLNi	Mando a lavar normal							
DMLsi	Disp manteles limpios que sobran							
DMSsi	Disp manteles sucios que sobran							

```
-B3 + MLP1 = 0
-B4 + MLP2 + MLN1=0
-B5 + MLP3 + MLN2=0
-B6 + MLP4 + MLN3=0
-B7 + MLP5 + MLN4=0
```

```
-Dm1 + X1=0
-Dm2 + X2 + DMLs1=0
-Dm3 + X3 + DMLs2 + B3=0
-Dm4 + X4 + DMLs3 + B4=0
-Dm5 + X5 + DMLs4 + B5=0
-Dm6 + X6 + DMLs5 + B6=0
-Dm7 + X7 + DMLs6 + B7=0
```

Problema 2.8 (bis)

	Día	1	2	3	4	5	6	7
Xi	compro manteles nuevos							
Bi	busco lavanderia							
Dmi	Disp manteles limpios antes							
Ui	uso	5	6	7	8	7	9	10
Dmsi	Disponibilidad manteles sucios							
MLPi	Mando a lavar premium							
MLNi	Mando a lavar normal							
DMLsi	Disp manteles limpios que sobran							
DMSsi	Disp manteles sucios que sobran							

```
Dm1 - U1>=0
Dm2 - U2>=0
Dm3 - U3>=0
Dm4 - U4>=0
Dm5 - U5>=0
Dm6 - U6>=0
Dm7 - U7>=0
```

```
-Dms1 + U1 =0
-Dms2 + U2 + DMSs1=0
-Dms3 + U3 + DMSs2=0
-Dms4 + U4 + DMSs3=0
-Dms5 + U5 + DMSs4=0
-Dms6 + U6 + DMSs5=0
-Dms7 + U7 + DMSs6=0
```

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.8 (bis)

	Día	1	2	3	4	5	6	7
Xi	compro manteles nuevos							
Bi	busco lavanderia							
Dmi	Disp manteles limpios antes							
Ui	uso	5	6	7	8	7	9	10
Dmsi	Disponibilidad manteles sucios							
MLPi	Mando a lavar premium							
MLNi	Mando a lavar normal							
DMLsi	Disp manteles limpios que sobran							
DMSsi	Disp manteles sucios que sobran							

```
-DMLs1 + Dm1 - U1=0
-DMLs2 + Dm2 - U2=0
-DMLs3 + Dm3 - U3=0
-DMLs4 + Dm4 - U4=0
-DMLs5 + Dm5 - U5=0
-DMLs6 + Dm6 - U6=0
-DMLs7 + Dm7 - U7=0
```

```
-DMSs1 + Dms1 - MLP1 - MLN1=0
-DMSs2 + Dms2 - MLP2 - MLN2=0
-DMSs3 + Dms3 - MLP3 - MLN3=0
-DMSs4 + Dms4 - MLP4 - MLN4=0
-DMSs5 + Dms5 - MLP5 =0
-DMSs6 + Dms6 =0
-DMSs7 + Dms7 =0
```

Problema 2.8

Un granjero tiene 100 acres de campo que puede utilizar indistintamente para sembrar trigo o maíz. Los rendimientos anuales son de 60 bushel por acre de trigo y 95 bushels por acre de maíz.

Los requerimientos de mano de obra son de cuatro horas anuales por acre, con un adicional de 0.15 horas por bushel de trigo y 0.70 horas por bushel de maíz.

El costo de las semillas y fertilizantes es de 0.20 dólares por bushel de trigo y 0.12 dólares por bushel de maíz. El trigo se vende a 1.75 dólares por bushel y el maíz a 0.95 dólares por bushel.

A su vez, el trigo y el maíz pueden comprarse a 2.50 dólares y 1,50 dólares por bushel respectivamente.

El granjero puede dedicarse también a criar cerdos y/o pollos. Los cerdos se venden a 40 dólares cuando tienen un año de edad. Para los pollos se utiliza como unidad de medida la cantidad equivalente a un cerdo (es decir, el número de pollos necesarios para obtener un ingreso de 40 dólares en un año).

Los requerimientos alimenticios de un cerdo son de 25 bushels de trigo o 20 bushels de maíz por año (o una combinación), requiriendo de 25 horas de trabajo y ocupando 25 pies cuadrados de espacio cubierto. Una cantidad de pollos equivalentes requiere 25 bushels de trigo o 10 bushels de maíz (o su combinación), 40 horas de trabajo y 15 pies cuadrados de espacio cubierto.

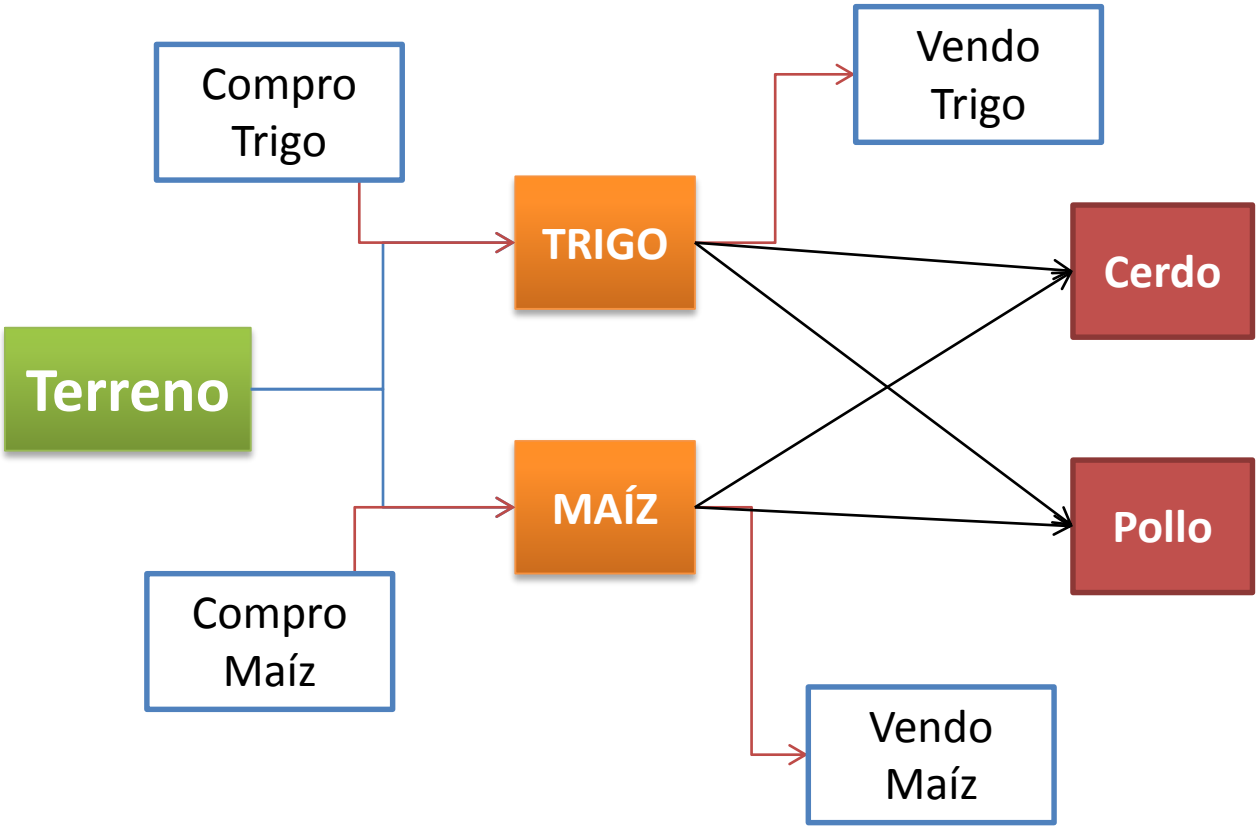
El granjero dispone de 10000 pies cuadrados de espacio cubierto y puede utilizar 2000 horas anuales propias y 2000 horas anuales de su familia. Puede contratar personal a 1.50 dólares la hora, debiendo dedicar en este caso 0,15 horas de su tiempo a tareas de supervisión de cada hora contratada.

Averiguar cuál será la distribución de recursos del granjero que maximice sus beneficios y la consiguiente cantidad de acres sembrados de cada producto y la producción anual de cerdos y pollos.

Problema 2.8

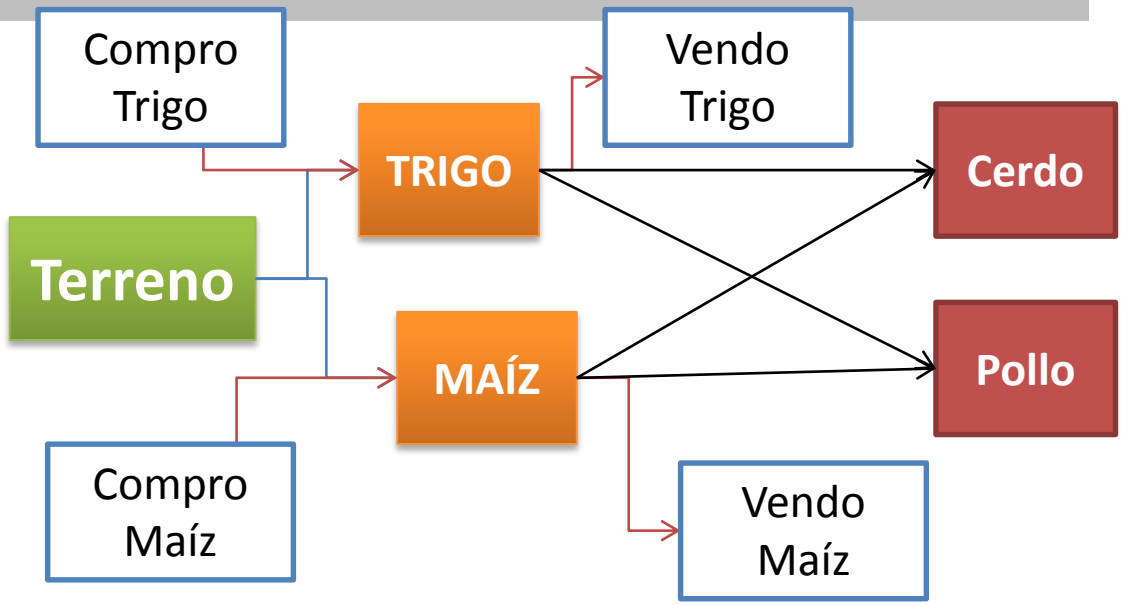
Bushel = medida de volumen equivalente a 35.2 litros

Variables:



FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.8



Variables:

Tp: bushels de trigo producido
Tc: bushels de trigo comprado
Mp: bushels de maíz producido
Mc: bushels de maíz comprado

Tv: bushels de trigo vendido
Tac: bushels de trigo p/cerdos
Tap: bushels de trigo p/pollos

Mv: bushels de maíz vendido
Mac: bushels de maíz p/cerdos
Map: bushels de maíz p/pollos

Problema 2.8

Ecuaciones de balance:

Tp + **Tc** = **Tv** + **Tac** + **Tap**

Mp + **Mc** = **Mv** + **Mac** + **Map**

Restricciones de terreno:

tiene 100 acres de terreno. Los rendimientos anuales son de 60 bushel por acre de trigo y 95 bushels por acre de maíz.

$$\frac{Tp\left[bushels\right]}{60\left[\frac{bushels}{acre}\right]} + \frac{Mp\left[bushels\right]}{95\left[\frac{bushels}{acre}\right]} \leq 100\left[acres\right]$$

Problema 2.8

Variables nuevas:

CC: cerdos criados por año
PC: pollos criados por año

De acuerdo a:

Los requerimientos alimenticios de un cerdo son de 25 bushels de trigo o 20 bushels de maíz por año (o una combinación)

$$\frac{Tac\left[bushels_t\right]}{25\left[\frac{bushels_t}{cerdo}\right]}+\frac{Mac\left[bushels_m\right]}{20\left[\frac{bushels_m}{cerdo}\right]}=CC\left[cerdo\right]$$

Problema 2.8

También el balance de los pollos:

Una cantidad de pollos equivalentes requiere 25 bushels de trigo o 10 bushels de maíz (o su combinación)

$$\frac{Tap\left[bushels_t\right]}{25\left[\frac{bushels_t}{cerdo.eq}\right]}+\frac{Map\left[bushels_m\right]}{10\left[\frac{bushels_m}{cerdo.eq}\right]}=PC\left[cerdo.eq\right]$$

Restricción de espacio:

El granjero dispone de 10000 pies cuadrados de espacio cubierto. Cerdos 25 pies cuadrados y pollos 15

$$25\left[\frac{p^2}{cerdo}\right]CC\left[cerdo\right]+15\left[\frac{p^2}{cerdo.eq}\right]PC\left[cerdo.eq\right]\leq 10000\left[p^2\right]$$

Problema 2.8

Variables nuevas:

HH: Horas anuales totales dedicadas a la producción
HTotG: Horas anuales totales dedicadas por el granjero Sup. + Prod.
HF: Horas anuales totales dedicadas por su familia
HC: Horas anuales totales contratadas

De acuerdo a:

El granjero puede utilizar 2000 horas anuales propias y 2000 horas anuales de su familia. Puede contratar personal a 1.50 dólares la hora. En este caso 0,15 horas de su tiempo a tareas de supervisión.

HH = HTG + HF + HC
HTotG = HSG + HTG
HSG = 0.15 HC

HTG: Horas anuales totales dedicadas por el granjero a la producción
HSG: Horas anuales totales dedicadas por el granjero a la supervisión

Problema 2.8

Requerimiento de mano de obra:

HH: Horas anuales totales dedicadas a la producción

Los requerimientos de mano de obra son de cuatro horas anuales por acre, con un adicional de 0.15 horas por bushel de trigo y 0.70 horas por bushel de maíz. Requerimientos del cerdo son de 25 horas y de 40 horas los del pollo.

$$HH = \left[4\frac{h}{acre}\frac{Tp[bushel]}{60\left[\frac{bushel}{acre}\right]} + 4\frac{h}{acre}\frac{Mp[bushel]}{90\left[\frac{bushel}{acre}\right]} + 0.15\frac{h}{bushel}Tp[bushel] + 0.7\frac{h}{bushel}Mp[bushel] \right]$$

$$+25\frac{h}{cerdo}\cdot CC[cerdo] + 40\frac{h}{cerdo.eq}\cdot PC[cerdo.eq]$$

Problema 2.8

Disponibilidades de MH:

2000 horas anuales propias y 2000 horas anuales de su familia.

HTotG ≤ 2000 h
HF ≤ 2000 h

Problema 2.8

Funcional, maximizar beneficios:

El costo de las semillas y fertilizantes es de 0.20 dólares por bushel de trigo y 0.12 dólares por bushel de maíz. El trigo se vende a 1.75 dólares por bushel y el maíz a 0.95 dólares por bushel. A su vez, el trigo y el maíz pueden comprarse a 2.50 dólares y 1,50 dólares por bushel respectivamente. Los cerdos se venden a 40 dólares. Los pollos igual. Puede contratar personal a 1.50 dólares la hora

$$Ben = -0.2\frac{\$}{bushel}Tp[bushel] - 0.12\frac{\$}{bushel}Mp[bushel] + 1.75\frac{\$}{bushel}Tv[bushel] + 0.95\frac{\$}{bushel}Mv[bushel]$$

$$-2.5\frac{\$}{bushel}Tc[bushel] - 1.5\frac{\$}{bushel}Mc[bushel] + 40\frac{\$}{cerdo}CC[cerdo] + 40\frac{\$}{cerdo.eq}PC[cerdo.eq]$$

$$-1.5\frac{\$}{h}HC[h]$$

Problema 2.10

Una empresa tiene actualmente K$10000 y desea maximizar su activo financiero total en 10 años. Al comenzar cada año, esta persona tiene cinco oportunidades de inversión. La inversión A tiene una rentabilidad de 12% luego de 2 años (p.ej., si se invierten K$4000 en A al comienzo del año 5, se tendrán K$4400 al comienzo del año 7). La inversión B tiene una rentabilidad de 17% luego de **3** años. La inversión C tiene una rentabilidad de 35% luego de 5 años. La inversión D tiene una rentabilidad de 52% luego de 7 años. La inversión E tiene una rentabilidad de 70% luego de 9 años. Dado que el objetivo es maximizar el activo financiero en exactamente 10 años, no se deben hacer inversiones que generen rentabilidad luego del período de 10 años. Por ejemplo, la inversión D al comienzo del año 5 no genera retorno hasta el comienzo del año 12 (o fin del año 11), lo que no debe ocurrir. Entonces, las únicas oportunidades para la alternativa de inversión D son al comienzo de los primeros cuatro años. Las inversiones en las alternativas B y D están limitadas a K$5000 por año, y la inversión en C está limitada a K$2500 por año. Desarrollar un modelo de programación lineal que permita determinar el monto de dinero a colocar en cada inversión al comienzo de cada año de manera tal de maximizar el activo financiero total al finalizar los 10 años.

Problema 2.10

Esquema

Comienzo a invertir

Me llevo la plata

Inv	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Int	T
A	IA1		RA3								12%	2
B											17%	3
C											35%	5
D											52%	7
E											70%	9

IA1: Inversión en A en $ a comienzos del periodo 1

RA3: Retorno que obtengo de A en $ a comienzos del período 3

RA3 = IA1. 1.12

Problema 2.10

Esquema

Comienzo a invertir

Me llevo la plata

Inv	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Int	T
A	IA1		RA3								12%	2
B			IB3			RB6					17%	3
C						IC6					RC11	5
D						ID[illegible]					52%	7 RC[illegible]
E											70%	9

Problema 2.10

Esquema

Comienzo a invertir

Me llevo la plata

Inv	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Int	T
A	IA1	IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9		12%	2
B	IB1	IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8			17%	3
C	IC1	IC2	IC3	IC4	IC5	IC6					35%	5
D	ID1	ID2	ID3	ID4							52%	7
E	IE1	IE2									70%	9

9 años

IE2: Inversión en E en $ a comienzos del periodo 2

RE11 = IE2.1.7

Problema 2.10

Esquema

Comienzo a invertir

Me llevo la plata

Inv	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Fin	Int	T
A			RA3	RA4	RA5	RA6	RA7	RA8	RA9	RA10	RA11	12%	2
B				RB4	RB5	RB6	RB7	RB8	RB9	RB10	RB11	17%	3
C						RC6	RC7	RC8	RC9	RC10	RC11	35%	5
D								RD8	RD9	RD10	RD11	52%	7
E										RE10	RE11	70%	9

Problema 2.10

Vinculo las variables

A

RA3=1.12 IA1
RA4=1.12 IA2
RA5=1.12 IA3
RA6=1.12 IA4
RA7=1.12 IA5
RA8=1.12 IA6
RA9=1.12 IA7
RA10=1.12 IA8
RA11=1.12 IA9

B

RB4=1.17 IB1
RB5=1.17 IB2
RB6=1.17 IB3
RB7=1.17 IB4
RB8=1.17 IB5
RB9=1.17 IB6
RB10=1.17 IB7
RB11=1.17 IB8

C

RC6=1.35 IC1
RC7=1.35 IC2
RC8=1.35 IC3
RC9=1.35 IC4
RC10=1.35 IC5
RC11=1.35 IC6

D

RD8=1.52 ID1
RD9=1.52 ID2
RD10=1.52 ID3
RD11=1.52 ID4

E

RE10=1.70 IE1
RE11=1.70 IE2

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.10 Mas ecuaciones de balance

Periodo 01

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A	IA1	IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9	
B	IB1	IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8		
C	IC1	IC2	IC3	IC4	IC5	IC6				
D	ID1	ID2	ID3	ID4						
E	IE1	IE2								

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
A			RA3	RA4	RA5	RA6	RA7	RA8	RA9	RA10	RA11
B				RB4	RB5	RB6	RB7	RB8	RB9	RB10	RB11
C						RC6	RC7	RC8	RC9	RC10	RC11
D								RD8	RD9	RD10	RD11
E										RE10	RE11

G2: monto en $ que guardo sin invertir a princípios del período 1 para el período 2

P01) 10000 = IA1 + IB1 +IC1 + ID1 + IE1 + G2

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.10 Mas ecuaciones de balance

Periodo 12

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A	IA1	IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9	
B	IB1	IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8		
C	IC1	IC2	IC3	IC4	IC5	IC6				
D	ID1	ID2	ID3	ID4						
E	IE1	IE2								

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
A			RA3	RA4	RA5	RA6	RA7	RA8	RA9	RA10	RA11
B				RB4	RB5	RB6	RB7	RB8	RB9	RB10	RB11
C						RC6	RC7	RC8	RC9	RC10	RC11
D								RD8	RD9	RD10	RD11
E										RE10	RE11

G3: monto en $ que guardo sin invertir a princípios del período 2 para el período 3

P12) $G2 = IA2 + IB2 + IC2 + ID2 + IE2 + G3$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.10 Mas ecuaciones de balance

Periodo 23

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A	IA1	IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9	
B	IB1	IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8		
C	IC1	IC2	IC3	IC4	IC5	IC6				
D	ID1	ID2	ID3	ID4						
E	IE1	IE2								

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
A			RA3	RA4	RA5	RA6	RA7	RA8	RA9	RA10	RA11
B				RB4	RB5	RB6	RB7	RB8	RB9	RB10	RB11
C						RC6	RC7	RC8	RC9	RC10	RC11
D								RD8	RD9	RD10	RD11
E										RE10	RE11

G4: monto en $ que guardo sin invertir a princípios del período 3 para el período 4

P23) G3 + RA3 = IA3 + IB3 +IC3 + ID3 + G4

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.10 Mas ecuaciones de balance

Periodo 34

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A	IA1	IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9	
B	IB1	IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8		
C	IC1	IC2	IC3	IC4	IC5	IC6				
D	ID1	ID2	ID3	ID4						
E	IE1	IE2								

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
A			RA3	RA4	RA5	RA6	RA7	RA8	RA9	RA10	RA11
B				RB4	RB5	RB6	RB7	RB8	RB9	RB10	RB11
C						RC6	RC7	RC8	RC9	RC10	RC11
D								RD8	RD9	RD10	RD11
E										RE10	RE11

G5: monto en $ que guardo sin invertir a princípios del período 4 para el período 5

P34) $G4 + RA4 + RB4 = IA4 + IB4 + IC4 + ID4 + G5$

Problema 2.10 Mas ecuaciones de balance

Periodo 45

Periodo 56

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A	IA1	IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9	
B	IB1	IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8		
C	IC1	IC2	IC3	IC4	IC5	IC6				
D	ID1	ID2	ID3	ID4						
E	IE1	IE2								

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
A			RA3	RA4	RA5	RA6	RA7	RA8	RA9	RA10	RA11
B				RB4	RB5	RB6	RB7	RB8	RB9	RB10	RB11
C						RC6	RC7	RC8	RC9	RC10	RC11
D								RD8	RD9	RD10	RD11
E										RE10	RE11

P45) G5 + RA5 + RB5 = IA5 + IB5 +IC5 + G6

P56) G6 + RA6 + RB6 + RC6 = IA6 + IB6 +IC6 + G7

P67) G7 + RA7 + RB7 + RC7 = IA7 + IB7 + G8

Problema 2.10 Mas ecuaciones de balance

Lo que gané en el año 9 que se me liquida a principios del año 10 no puedo invertirlo, tengo que guardarlo todo
-> G11

		P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
		IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9	
		IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8		
		IC2	IC3	IC4	IC5	IC6				
		ID2	ID3	ID4						
E	IE1	IE2								

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
A			RA3	RA4	RA5	RA6	RA7	RA8	RA9	RA10	RA11
B				RB4	RB5	RB6	RB7	RB8	RB9	RB10	RB11
						RC6	RC7	RC8	RC9	RC10	RC11
D								RD8	RD9	RD10	RD11
										RE10	RE11

P78) G8 + RA8 + RB8 + RC8 + RD8 = IA8 + IB8 +G9

P89) G9 + RA9 + RB9 + RC9 + RD9 = IA9 + G10

P910) G10 + RA10 + RB10 + RC10 +RD10 + RE10 = G11

FUNCIONAL) G11 + RA11 + RB11 + RD11 + RC11 + RE11

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 2.10 Más ecuaciones de balance

Las inversiones en las alternativas B y D están limitadas a K$5000 por año, y la inversión en C está limitada a K$2500 por año.

IB1 <=5000
IB2 <=5000
IB3 <=5000
IB4 <=5000
IB5 <=5000
IB6 <=5000
IB7 <=5000
IB8 <=5000

ID1 <=5000
ID2 <=5000
ID3 <=5000
ID4 <=5000

IC1 <=2500
IC2 <=2500
IC3 <=2500
IC4 <=2500
IC5 <=2500
IC6 <=2500

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A	IA1	IA2	IA3	IA4	IA5	IA6	IA7	IA8	IA9	
B	IB1	IB2	IB3	IB4	IB5	IB6	IB7	IB8		
C	IC1	IC2	IC3	IC4	IC5	IC6				
D	ID1	ID2	ID3	ID4						
E	IE1	IE2								

DEFINIDO EL MODELO

Problema 2.10 Resolución

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	I
A									924		1035
B	4859			5685				5000			5850
C	1852			685		2500 2500			924		3375
D	3289			5000				5000			7600
E											

10000

17860

Problema 3.2

Una empresa lechera elabora leche (LE), leche descremada (LD) y crema (CR) a partir de leche cruda obtenida de dos regiones: A, B y C. Los precios, los contenidos de grasa butirométrica y las propiedades de separación de los tres tipos de leche cruda difieren para cada región. Los datos para un día son los siguientes: (ver enunciado)

Una vez que la leche cruda es adquirida y recibida en la planta, se purifica en una máquina que tiene una velocidad de purificación diferente para cada tipo de leche: 1000 litros/hora, 833.33 litros/hora y 769.23 litros/hora para LA, LB y LC, respectivamente. Se puede despreciar el tiempo y el costo de set-up entre el procesamiento de un tipo de leche y otro, ya que es una operación muy rápida y no implica lavado o preparación previa de tanques o líneas. La purificadora puede trabajar las 24 horas y el costo es de $200 por hora de operación.

Las leches purificadas se pueden mezclar directamente, o separar primero y mezclar después. Por ejemplo, parte de la leche de la región A puede enviarse directamente a la mezcla de crema (LACR), otra parte a la mezcla de leche entera (LALE), otra a la mezcla de la lecha descremada (LADE), y la otra parte pasa primero por el proceso de separación (LASM).

Los procesos de separación se realizan en una misma unidad, de manera que primero se procesa una leche purificada y luego las otras. La velocidad de procesamiento de separación de la leche de la región A es de 300 litros por hora, de la leche de la región B de 400 litros por hora y de la leche de la región C de 350 litros por hora. La unidad está disponible las 24 horas.

Las leches que salen del proceso de separación van a los tanques de mezcla. Así, por ejemplo, una parte de la leche separada de tipo 1 va a la mezcla de leche entera (L1LE), otra a la de la leche descremada (L1DE) y la otra parte va a la mezcla de crema (L1CR).

Los procesos de las mezclas que se realizan para cumplir con las especificaciones comerciales de las leches y de la crema se hacen en tanques separados y se pueden suponer sin costo.

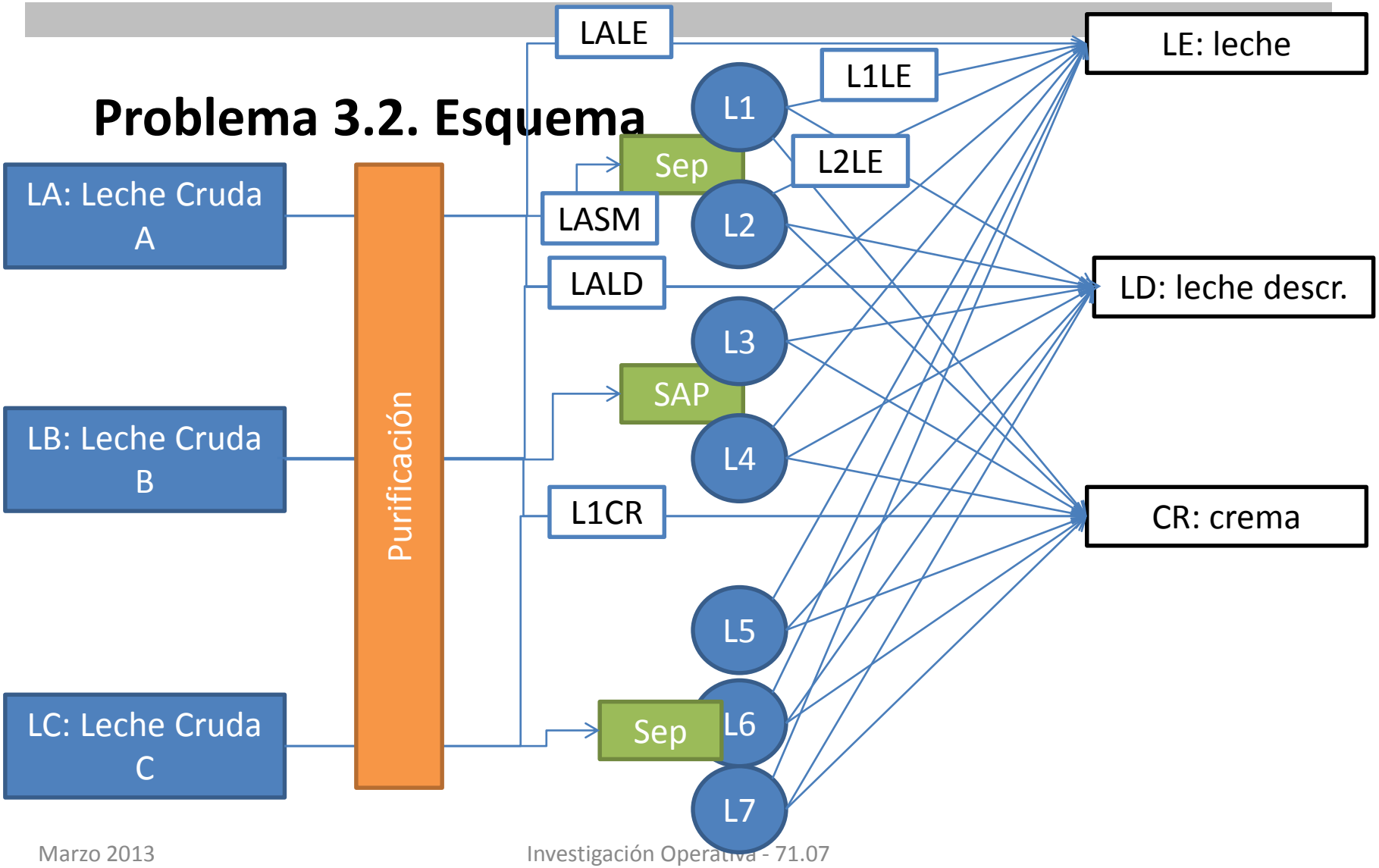
Toda la crema procesada debe tener por lo menos un 40% de grasa butirométrica, se vende a $9 el litro, y tiene una demanda de 750 litros.

Toda la leche entera procesada debe tener por lo menos un 20% de grasa butirométrica, se vende a $4 el litro, y tiene una demanda de 4.000 litros. La lecha entera debe tener entre 10% y 20% de grasa, se vende también a $4 y tiene un demanda de 4.500 litros.

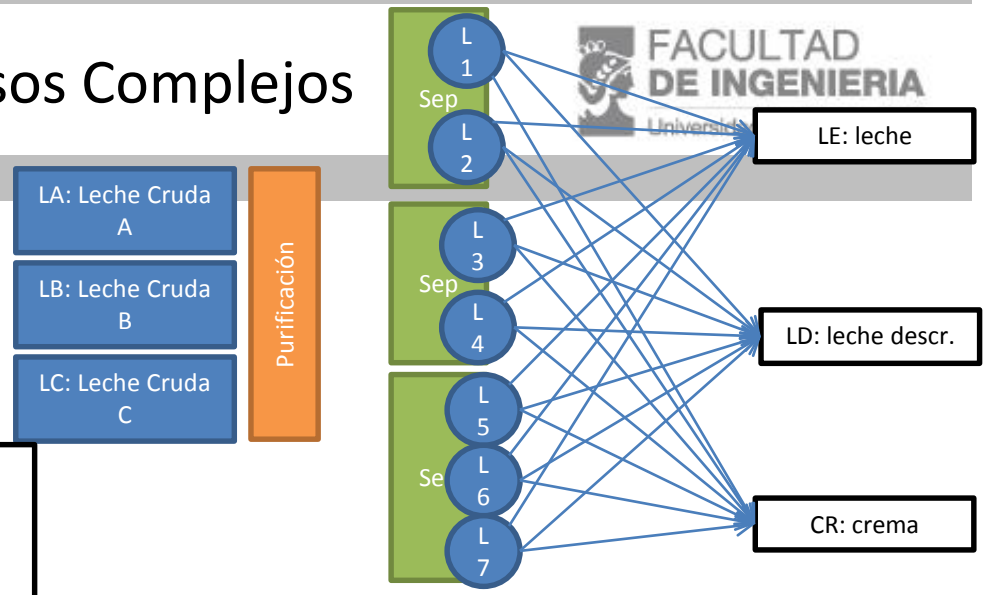
Formular un modelo de programación lineal para maximizar las utilidades diarias.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 3.2. Esquema



Modelización de Procesos Complejos



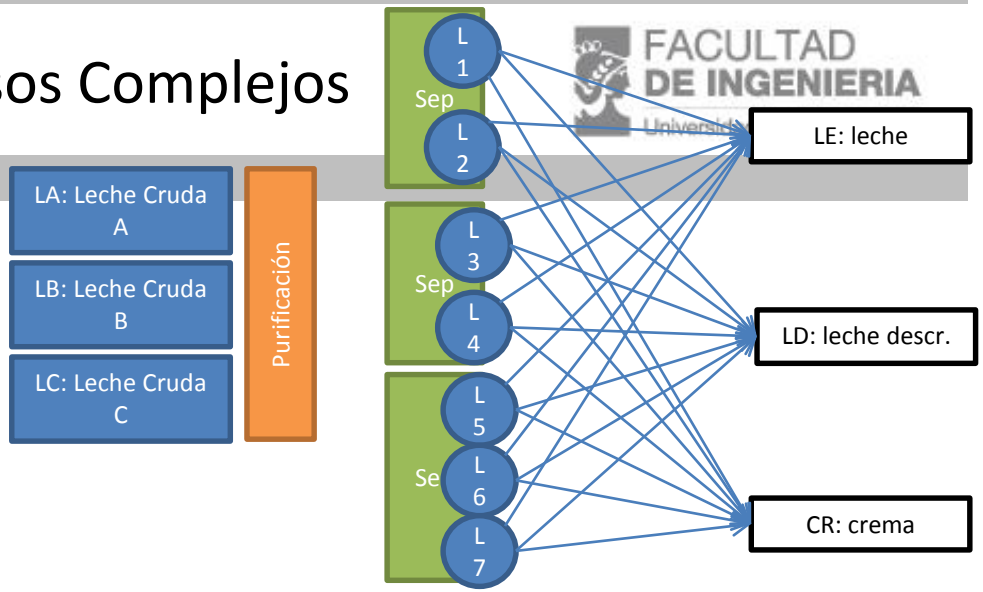
0.0012 = 1 / 833.33

Purificador: 1000 litros/h 833.33 litros/hora y 769.23 litros/hora para LA, LB y LC, respectivamente. Pue rabajar las 24 horas y el costo es de $200 por hora de operación.

USO_PU) 0.001 LA + 0.0012 LB + 0.0013 LC – HP = 0

DISP_PU) HP < 24

Modelización de Procesos Complejos



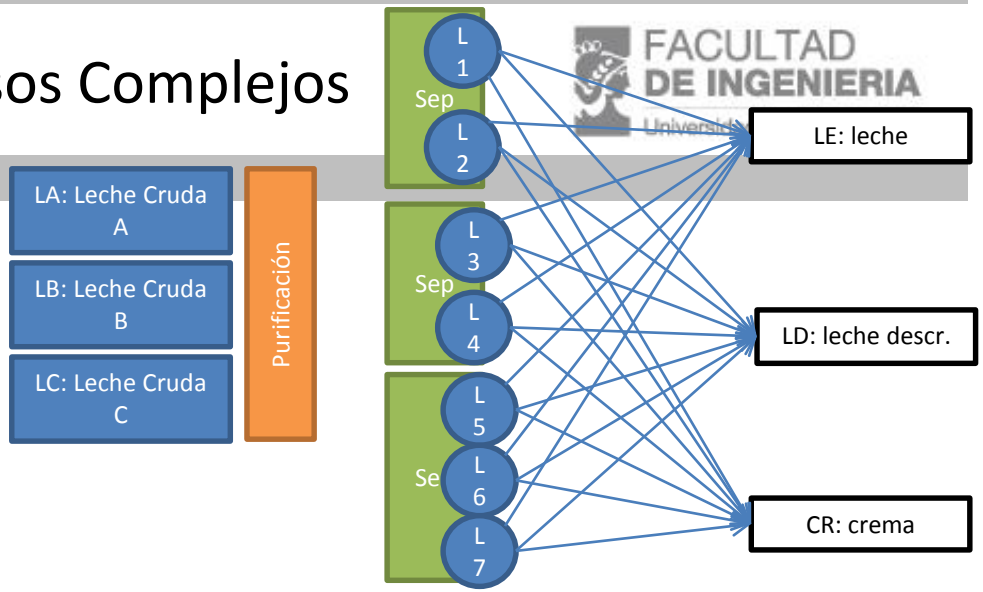
Leche cruda de la región A (LA):
Costo: $0,54 por litro los primeros 2.000 litros y $0,58 por litro por cada litro excedente a los 2.000. Por ejemplo, adquirir 2.500 litros costaría 2.000 x 0,54 + 500 x 0,58. Disponibilidad 3000 LA.

Balance de A:

LA1 la cantidad que compro a 0,54
BAL_LAC) - LA + LA1 + LA2 = 0
DISP_LA1) LA1 < 2000
DISP_LA2) LA2 < 1000

LA va a la leche entera, a la descremada a la crema o a la separación. Sep 0.2 y 0.8
BAL_LA) - LA + LACR + LALE + LALD + LASM = 0
BAL_L1) - L1LE – L1LD – L1CR + 0.20 LASM = 0
BAL_L2) - L2LE – L2LD – L2CR + 0.80 LASM = 0

Modelización de Procesos Complejos



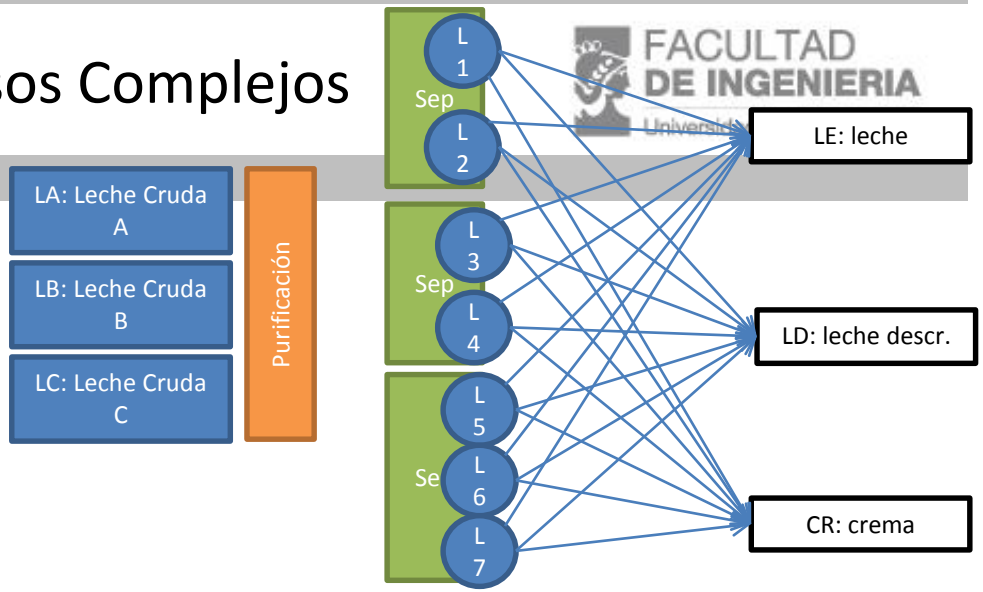
Leche cruda de la región B (LB):
Costo: $0,42 por litro si se adquiere menos de 1.800 litros, pero $0,45 por litro si se adquiere más de 1.800. Disponibilidad diaria: 3500 litros

Balance de B:

BAL_LBC) - LB + LB1 + LB2 = 0
DISP_LB1) LB1 < 1800
DISP_LB2) LB2 < 1700

LB va a la leche entera, a la descremada a la crema o a la separación. Sep: 0.1 y 0.9
BAL_LB) - LB + LBCR + LBLE + LBLD + LBSM = 0
BAL_L3) - L3LE – L3LD - L3CR + 0.10 LBSM = 0
BAL_L4) - L4LE – L4LD - L4CR + 0.90 LBSM = 0

Modelización de Procesos Complejos



Leche cruda de la región B (LB):
Costo: $0,42 por litro si se adquiere menos de 1.800 litros, pero $0,45 por litro si se adquiere más de 1.800. Disponibilidad diaria: 3500 litros

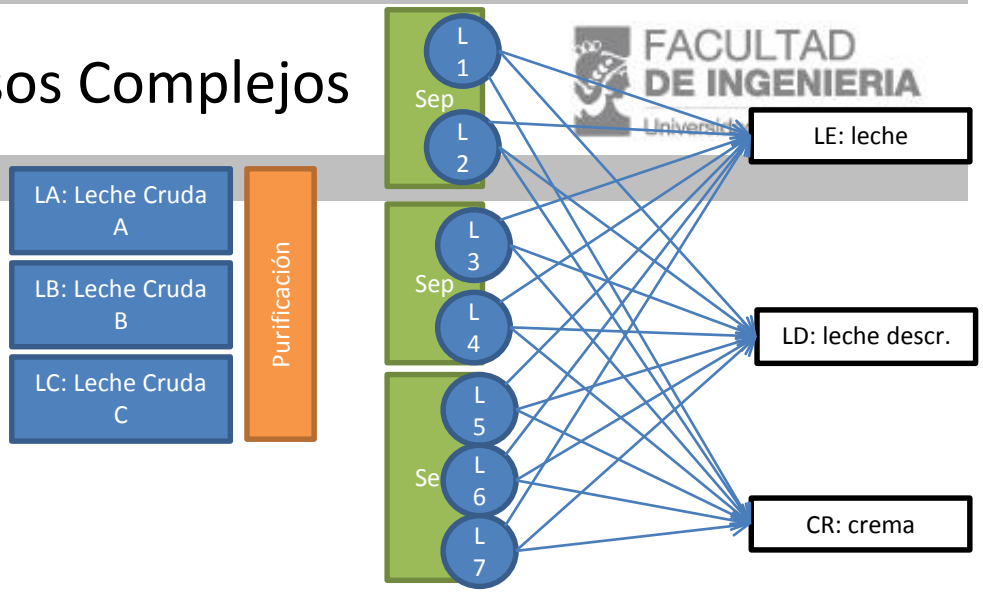
Balance de C:

DISP_LC) LC < 1500

LC va a la leche entera, a la descremada a la crema o a la separación. Sep: 0.1 y 0.9
BAL_LC) - LC + LCCR + LCLE + LCLD + LCSM = 0

Se separan 0.05 , 0.1 y 0.85
BAL_L5) - L5LE – L5LD – L5CR + 0.05 LCSM = 0
BAL_L6) - L6LE – L6LD – L6CR + 0.10 LCSM = 0
BAL_L7) - L7LE – L7LD – L7CR + 0.85 LCSM = 0

Modelización de Procesos Complejos



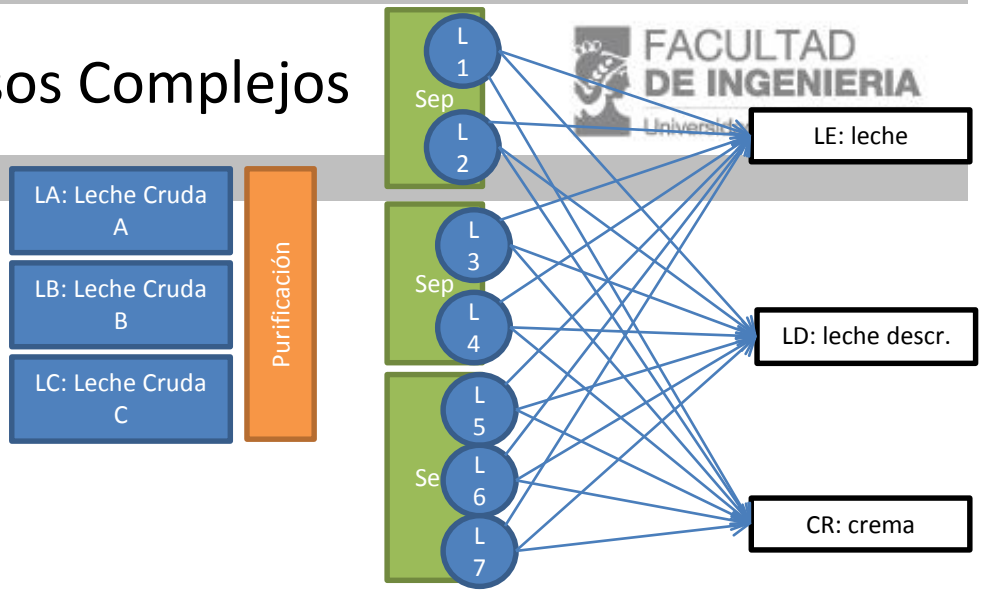
La velocidad de procesamiento de separación de la leche de la región A es de 300 litros por hora, de la leche de la región B de 400 litros por hora y de la leche de la región C de 350 litros por hora. La unidad está disponible las 24 h.

0.003333 = 1/300

Disponibilidad del Separador:

DISP_SEP) 0.003333 LASM + 0.0025 LBSM + 0.0029 LCSM < 24

Modelización de Procesos Complejos



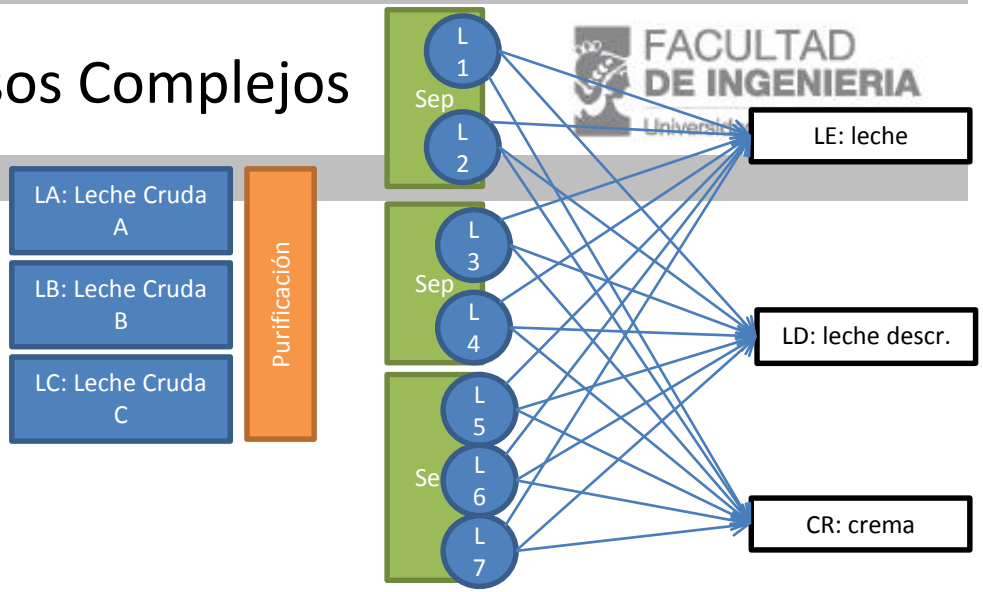
Balance de Prod Finales:

BAL_LE) - LE + LALE + LBLE + LCLE + L1LE + L2LE + L3LE + L4LE + L5LE + L6LE + L7LE = 0

BAL_CR) - CR + LACR + LBCR + LCCR + L1CR + L2CR + L3CR + L4CR + L5CR + L6CR + L7CR = 0

BAL_LD) - LD + LALD + LBLD + LCLD + L1LD + L2LD + L3LD + L4LD + L5LD + L6LD + L7LD = 0

Modelización de Procesos Complejos

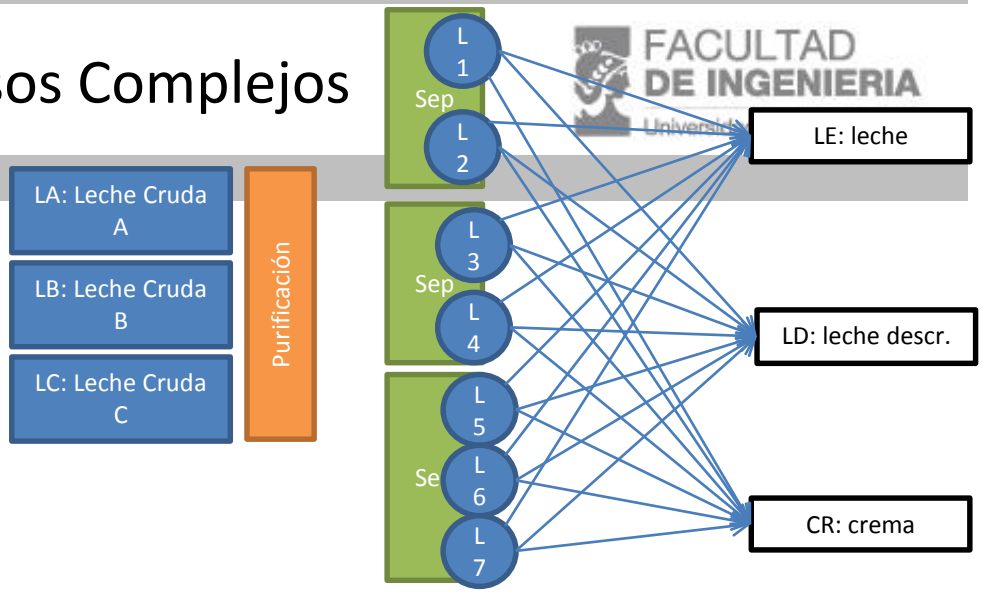


Requerimiento de grasa biturométrica para la crema:

REQ_CR) - 0.4 CR + 0.25 LACR + 0.15 LBCR + 0.20 LCCR + 0.41 L1CR + 0.12 L2CR + 0.43 L3CR + 0.05 L4CR + 0.45 L5CR + 0.40 L6CR + 0.06 L7CR > 0

Toda la crema procesada debe tener por lo menos un 40% de grasa butirométrica, se vende a $9 el litro, y tiene una demanda de 750 litros.
Toda la leche entera procesada debe tener por lo menos un 20% de grasa butirométrica, se vende a $4 el litro, y tiene una demanda de 4.000 litros. La lecha entera debe tener entre 10% y 20% de grasa, se vende también a $4 y tiene un demanda de 4.500 litros.

Modelización de Procesos Complejos

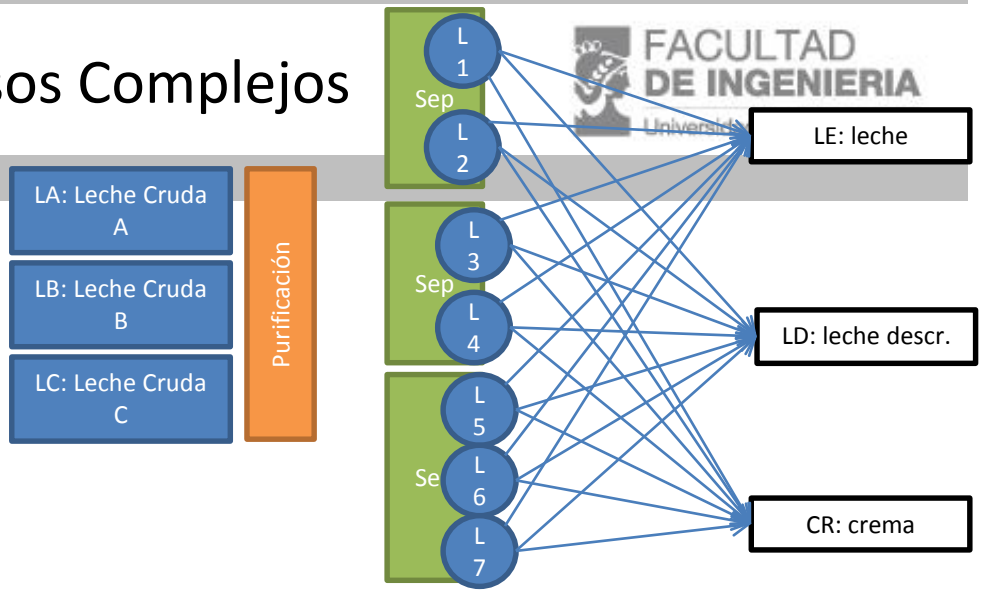


Requerimiento de grasa biturométrica para la leche entera:

REQ_LE) - 0.2 LE + 0.25 LALE + 0.15 LBLE + 0.41 L1LE +0.12 L2LE + 0.43 L3LE + 0.05 L4LE + 0.05 L4LE + 0.45 L5LE + 0.40 L6LE + 0.06 L7LE > 0

Toda la crema procesada debe tener por lo menos un 40% de grasa butirométrica, se vende a $9 el litro, y tiene una demanda de 750 litros.
Toda la leche entera procesada debe tener por lo menos un 20% de grasa butirométrica, se vende a $4 el litro, y tiene una demanda de 4.000 litros. La lecha entera debe tener entre 10% y 20% de grasa, se vende también a $4 y tiene un demanda de 4.500 litros.

Modelización de Procesos Complejos



Requerimiento de grasa biturométrica para la leche descremada:

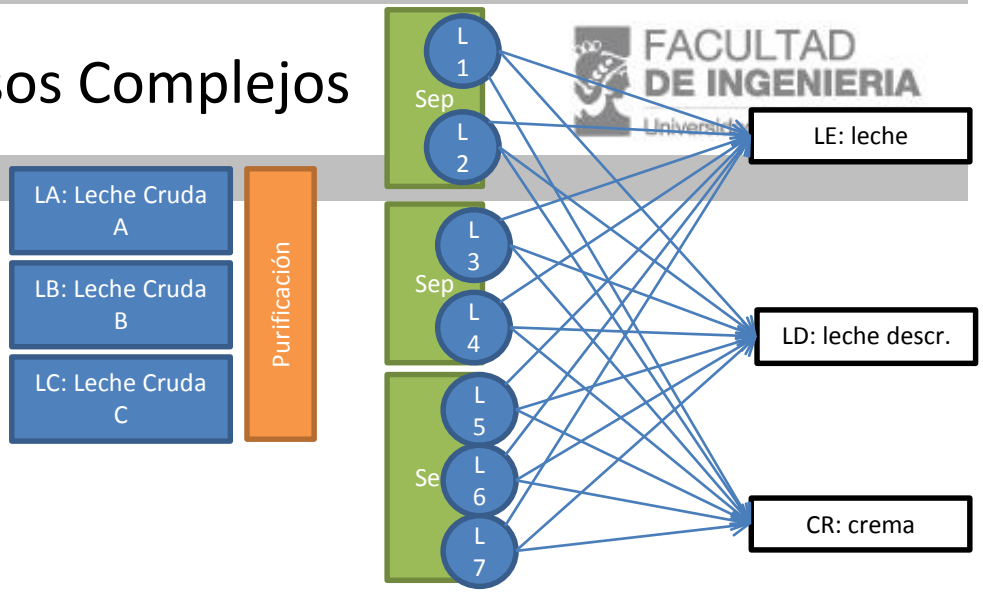
REQN_LD) - 0.1 LD + 0.25 LALD + 0.15 LBLD + 0.41 L1LD +0.12 L2LD + 0.43 L3LD + 0.05 L4LD + 0.05 L4LD + 0.45 L5LD + 0.40 L6LD + 0.06 L7LD > 0

REQX_LD) - 0.2 LD + 0.25 LALD + 0.15 LBLD + 0.41 L1LD +0.12 L2LD + 0.43 L3LD + 0.05 L4LD + 0.05 L4LD + 0.45 L5LD + 0.40 L6LD + 0.06 L7LD < 0

Toda la crema procesada debe tener por lo menos un 40% de grasa butirométrica, se vende a $9 el litro, y tiene una demanda de 750 litros.

Toda la leche entera procesada debe tener por lo menos un 20% de grasa butirométrica, se vende a $4 el litro, y tiene una demanda de 4.000 litros. La lecha entera debe tener entre 10% y 20% de grasa, se vende también a $4 y tiene un demanda de 4.500 litros.

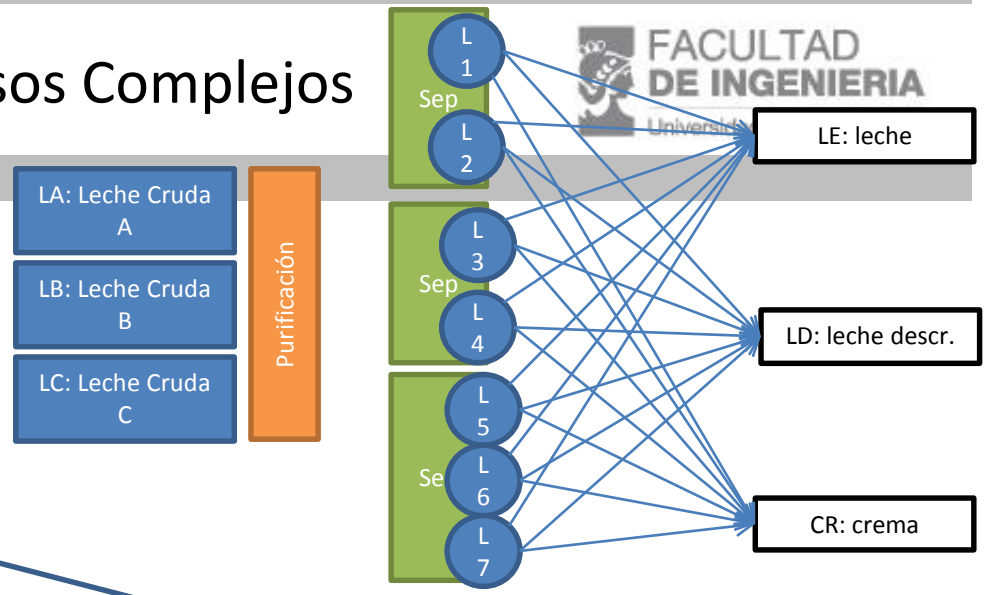
Modelización de Procesos Complejos



Demandas máximas:
DEM_CR) CR < 750
DEM_LE) LE < 4000
DEM_LD) LD < 4500

Toda la crema procesada debe tener por lo menos un 40% de grasa butirométrica, se vende a $9 el litro, y tiene una demanda de 750 litros.
Toda la leche entera procesada debe tener por lo menos un 20% de grasa butirométrica, se vende a $4 el litro, y tiene una demanda de 4.000 litros. La lecha entera debe tener entre 10% y 20% de grasa, se vende también a $4 y tiene un demanda de 4.500 litros.

Modelización de Procesos Complejos



Funcional (max):

9 CR + 4 LE + 4 LD

– 0.54 LA1 – 0.58 LA2

– 0.0125 LASM

– 0.42 LB1 – 0.45 LB2

– 0.0175 LBSM

– 0.5 LC

– 0.018 LCSM

– 200 HP

Ingreso de venta

Costo de MPA

Costo de Sep de A

Costo de MPB

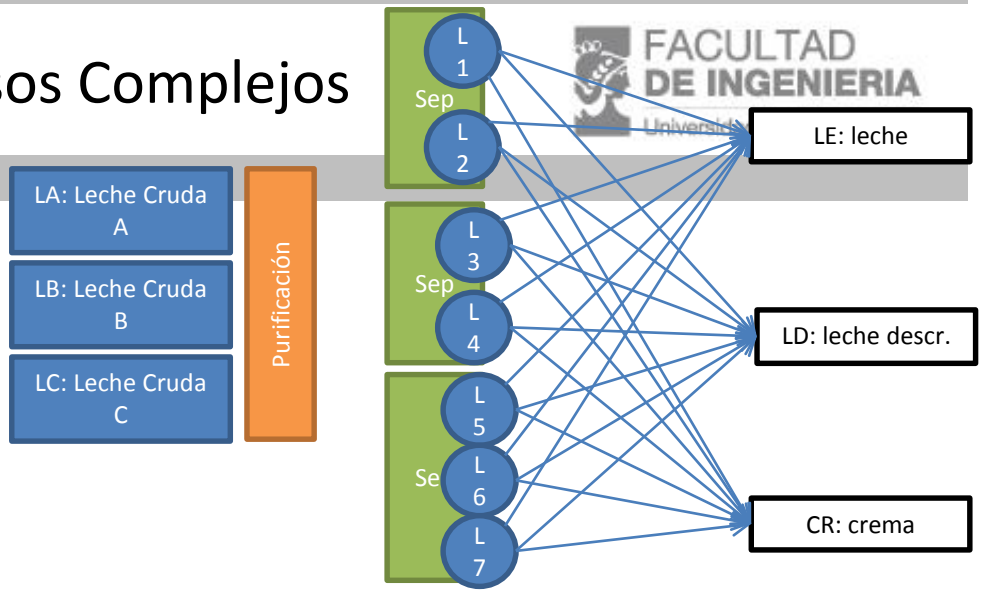
Costo de Sep de B

Costo de MPC

Costo de Sep de C

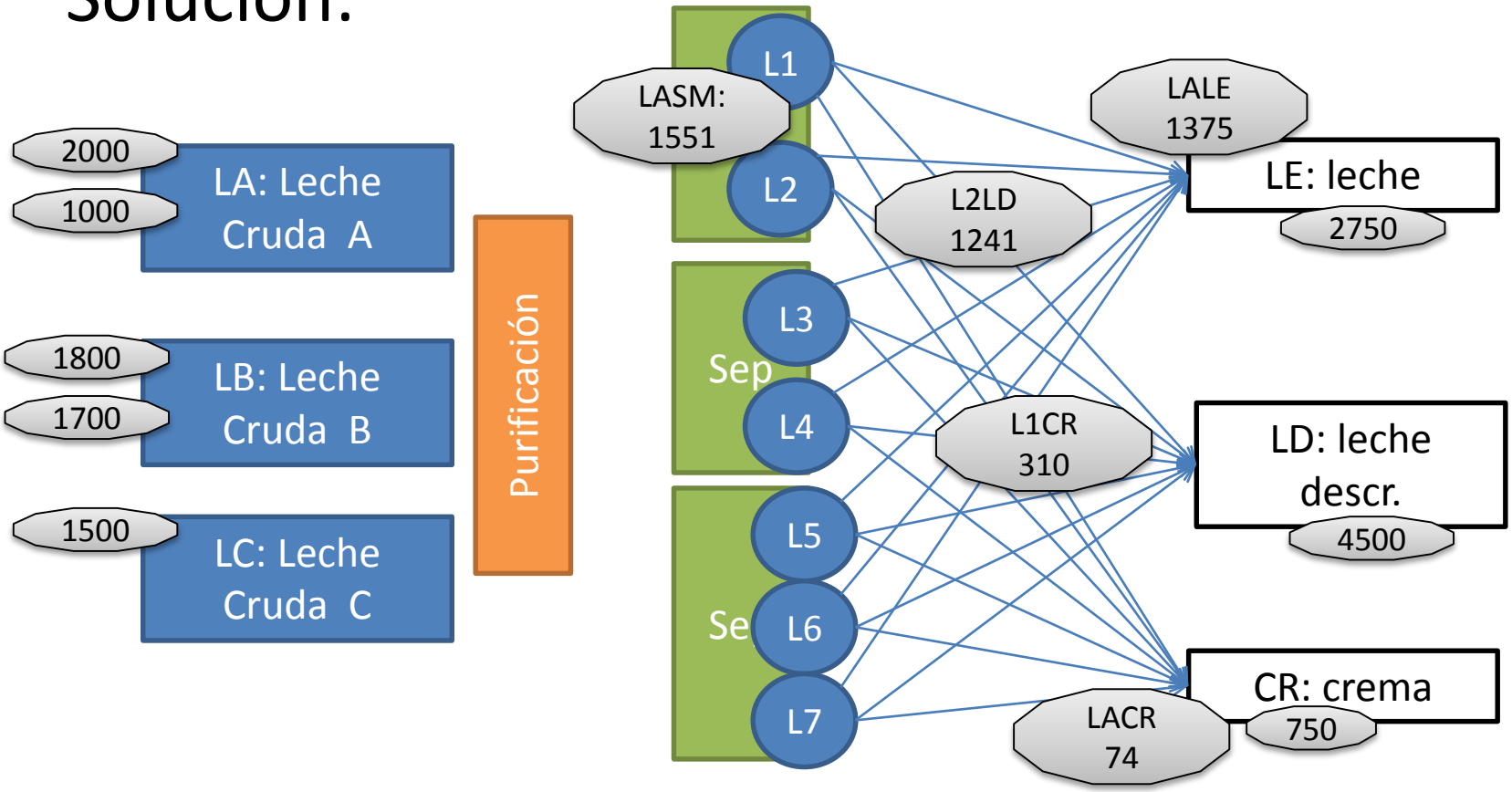
Costo de Purificación

Modelización de Procesos Complejos



Definido el Modelo!
Resuelvo en el lindo

Solución:


2000
1000
LA: Leche Cruda A
1800
1700
LB: Leche Cruda B
1500
LC: Leche Cruda C
Purificación
LASM: 1551
L1
L2
Sep
L3
L4
Se
L5
L6
L7
L2LD 1241
L1CR 310
LACR 74
LALE 1375
LE: leche
2750
LD: leche descr.
4500
CR: crema
750

Problema 4.1

$$
\begin{aligned}
x1 \quad\quad\quad\quad &<= 3 \\
x2 \quad &<= 6 \\
6x1 + 4x2 &<= 36
\end{aligned}
$$

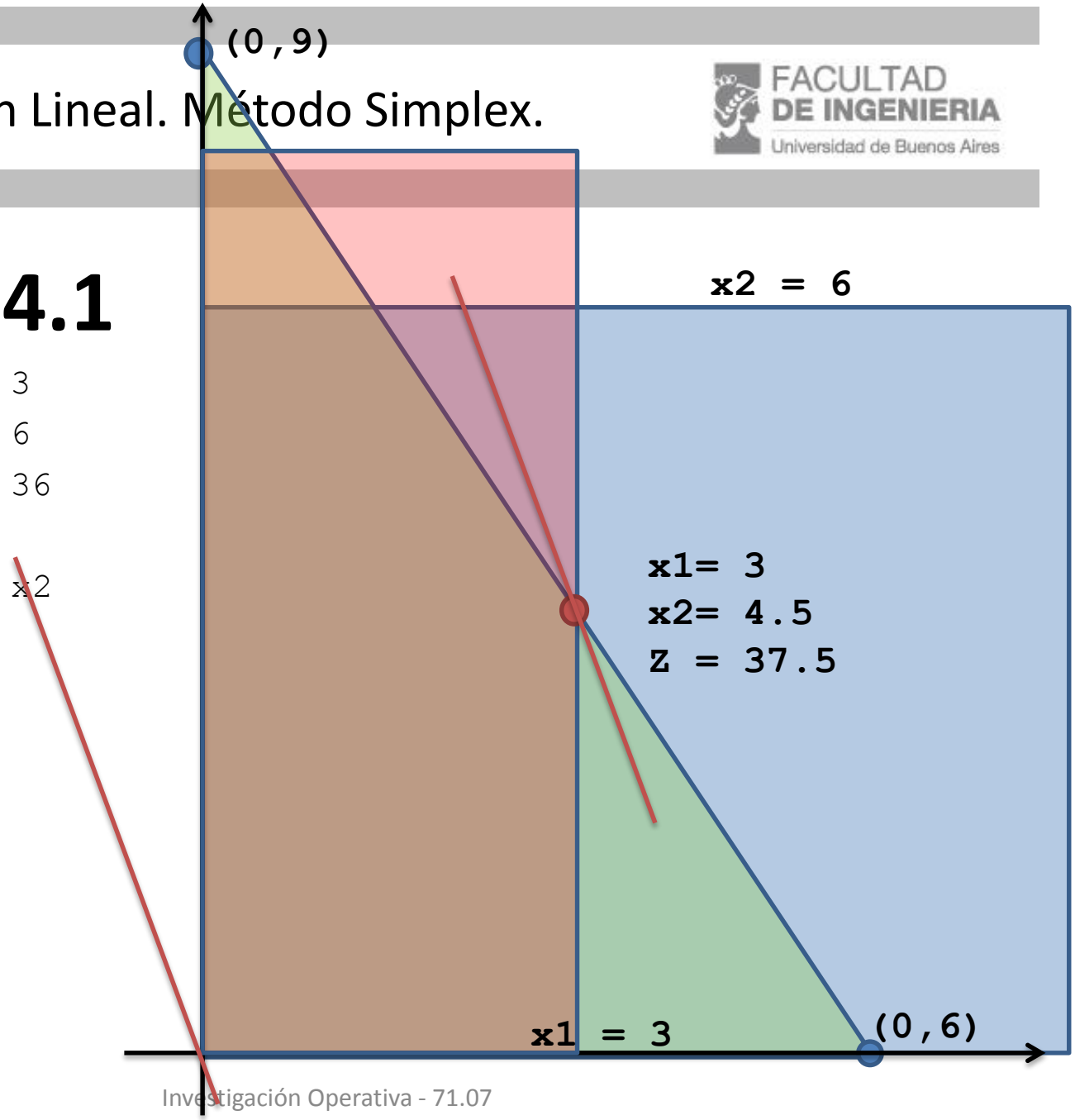
$$\text{MAX: } Z = 8\ x1 + 3\ x2$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.1

```
   x1            <= 3
        x2       <= 6
6x1 + 4x2        <= 36

MAX: Z = 8 x1 + 3 x2
```



Problema 4.1

Lindo

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

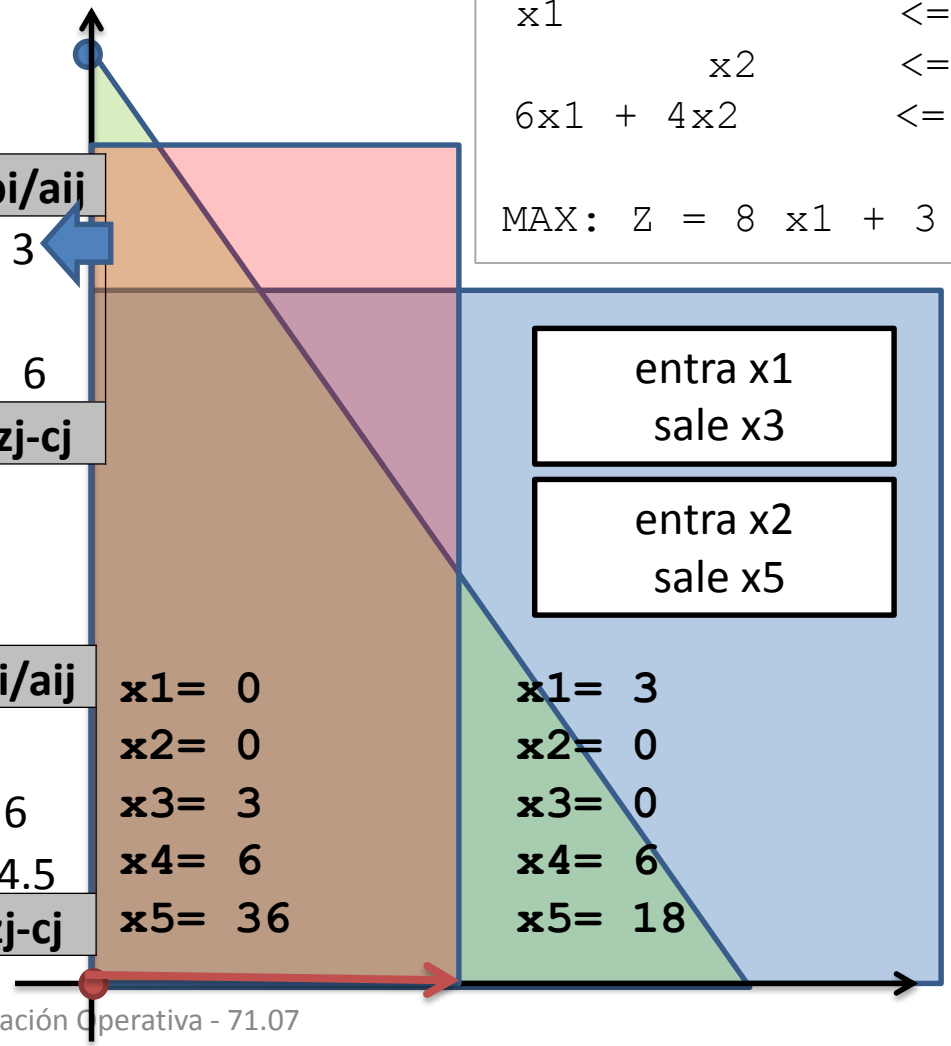
Problema 4.1

		cj	8	3	0	0	0	
ck	**xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
0	x3	3	1		1			3
0	x4	6		1		1		
0	x5	36	6	4			1	6
Z=	0		-8	-3				**zj-cj**

		cj	8	3	0	0	0	
ck	**xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
8	x1	3	1		1			
0	x4	6		1		1		6
0	x5	18		4	-6		1	4.5
Z=	24			-3	8			**zj-cj**

```
x1                  <= 3
        x2          <= 6
6x1 + 4x2           <= 36

MAX: Z = 8 x1 + 3 x2
```



FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.1

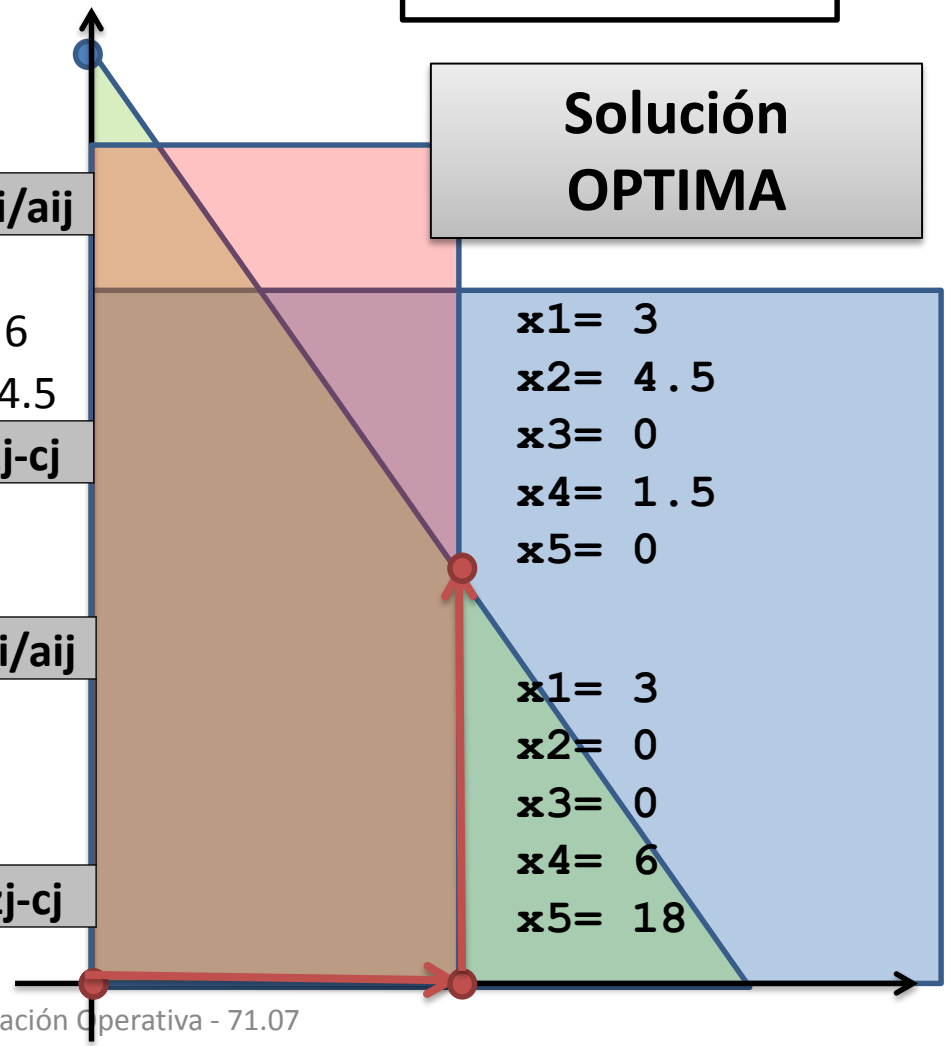
		cj	8	3	0	0	0	
ck	**xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
8	x1	3	1		1			
0	x4	6		1		1		6
0	x5	18		4	-6		1	4.5
Z=	24			-3	8			**zj-cj**

		cj	8	3	0	0	0	
ck	**xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
8	x1	3	1		1			
0	x4	1.5			1.5	1	-0.25	
3	x2	4.5		1	-1.5		0.25	
Z=	37.5				3.5		0.75	**zj-cj**

positivos

No entra ninguna variable

Solución OPTIMA



x1= 3
x2= 4.5
x3= 0
x4= 1.5
x5= 0

x1= 3
x2= 0
x3= 0
x4= 6
x5= 18

Problema 4.2

$$
\begin{aligned}
x1 + 2\,x2 + x3 &\leq 430 \\
3\,x1 + 2\,x3 &\leq 460 \\
x1 + 4\,x2 &\leq 420
\end{aligned}
$$

$$\text{MAX: } Z = 3\,x1 + 2\,x2 + 5\,x3$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.2

$$\text{MAX: } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 &= 420 \end{aligned}$$

Coeficientes del funcional para variables de la base

Variables slack: solución inicial

Coeficientes del funcional

		Cj	3	2	5				
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
0	X4	430	1	2	1	1			
0	X5	460	3		2		1		
0	X6	420	1	4				1	
Z = 0									

Valor del funcional con estas variables

Restricciones

Problema 4.2

$$\text{MAX: } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 &= 420 \end{aligned}$$

Que variable entra?:
Min (zj – cj)

Que variable sale?:
Min (bi/aij)

		Cj	3	2	5				
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
0	X4	430	1	2	1	1			430
0	X5	460	3		2		1		230
0	X6	420	1	4				1	
Z = 0			-3	-2	-5				zj - cj

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.2

$$\text{MAX: } Z = 3x1 + 2x2 + 5x3$$

$$\begin{aligned} x1 + 2x2 + x3 + x4 &= 430 \\ 3x1 + 2x3 + x5 &= 460 \\ x1 + 4x2 + x6 &= 420 \end{aligned}$$

		Cj	3	2	5				
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
0	X4	430	1	2	1	1			430
0	X5	460	3		2		1		230
0	X6	420	1	4				1	
Z = 0			-3	-2	-5				zj - cj

Entra x3, sale x5

Entra x2, sale x4

200 = 430 – 460.1 /2

		Cj	3	2	5				
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
0	X4	200	-0.5	2		1	-0.5		100
5	X3	230	1.5		1		0.5		
0	X6	420	1	4				1	105
Z = 230.5 = 1150			4.5	-2			2.5		zj - cj

-0.5 = 1 – 3.1/2

Divido toda la fila por el pivote

105 = 420 /4

Problema 4.2

$$\text{MAX: } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 &= 420 \end{aligned}$$

		Cj	3	2	5				
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
0	X4	200	-0.5	2		1	-0.5		100
5	X3	230	1.5		1		0.5		
0	X6	420	1	4				1	105
Z = 1150			4.5	-2			2.5		zj – cj

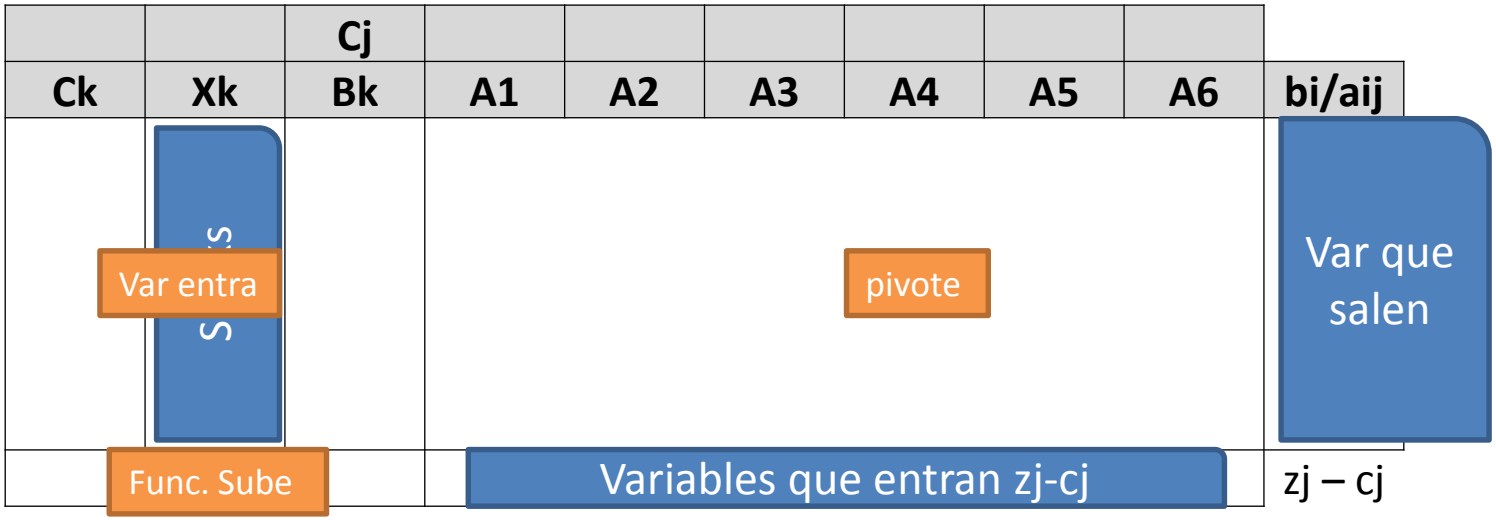
		Cj	3	2	5				
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
2	X2	100	-0.25	1		0.5	-0.25		
5	X3	230	1.5		1		0.5		
0	X6	20	2			-2	1	1	
Z = 1350			4			1	2		zj – cj

Todos positivos, no sale ninguna variable. Encontré la solución!

Problema 4.2

En general los pasos son:

1. Se parte de una solución posible, variables slack > 0
2. Me fijo que variables entran, aquellas que hacen subir mas el funcional Min (zj – cj)
3. Me fijo que variables salen, aquellas que tengan un Min (bi/aij)
4. Cambio la base . Entra la variable que encontre en 2, sale la variable que encontre en 3 y calculo los nuevos coeficientes.
5. Es el optimo? NO? Entonces vuelvo a 2.



Problema 4.4

$$
\begin{aligned}
3\,x1 + x2 &\geq 3 \\
4\,x1 + 3\,x2 &\geq 6 \\
x1 + 2\,x2 &\geq 2
\end{aligned}
$$

MIN: $Z = 2\,x1 + x2$

FORMA ESTÁNDAR PARA SIMPLEX

$$\text{MIN } Z = 2\,x1 + x2 + M.mu3 + M.mu4 + M.mu5$$

$$
\begin{aligned}
3\,x1 + x2 - x3 + mu3 &= 3 \\
4\,x1 + 3\,x2 - x4 + mu4 &= 6 \\
x1 + 2\,x2 - x5 + mu5 &= 2
\end{aligned}
$$

Problema 4.4

$$\text{MIN } Z = 2x_1 + x_2 + M.mu_3 + M.mu_4 + M.mu_5$$

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 + mu_3 &= 3\\
4x_1 + 3x_2 - x_4 + mu_4 &= 6\\
x_1 + 2x_2 - x_5 + mu_5 &= 2
\end{aligned}$$

		Cj	2	1				M	M	M	
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**mu3**	**mu4**	**mu5**	**bi/aij**
M	mu3	3	3	1	-1			1			1
M	mu4	6	4	3		-1			1		1.5
M	mu5	2	1	2			-1			1	2
Z=	11M		8M-2	6M-1	-M	-M	-M	0	0	0	**zj-cj**

		Cj	2	1				M	M	M	
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**mu3**	**mu4**	**mu5**	**bi/aij**
2	X1	1	1	1/3	-1/3			1/3			3
M	mu4	2		5/3	4/3	-1		-4/3	1		6/5
M	mu5	1		5/3	1/3		-1	-1/3		1	3/5
Z=	2 + 3M			-1/3+ 10/3M	-2/3+ 3M	-M	-M	2/3 - 4M			**zj-cj**

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.4

```
MIN Z = 2 x1 + x2 + M.mu3 + M.mu4 + M.mu5

3 x1 + x2              - x3              + mu3              = 3
4 x1 + 3 x2                  - x4              + mu4        = 6
x1 + 2 x2                           - x5              + mu5 = 2
```

		Cj	2	1				M	M	M	
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**mu3**	**mu4**	**mu5**	**bi/aij**
2	X1	1	1	1/3	-1/3			1/3			3
M	mu4	2		5/3	4/3	-1		-4/3	1		6/5
M	mu5	1		5/3	1/3		-1	-1/3		1	3/5
Z=	2 + 3M			-1/3+ 10/3M	-2/3+ 3M	-M	-M	2/3 - 4M			**zj-cj**

		Cj	2	1				M	M	M	
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**mu3**	**mu4**	**mu5**	**bi/aij**
2	X1	4/5	1		-2/5		1/5	2/5		-0.2	4
M	mu4	1			1	-1	1	-1	1	-1	1
1	X2	3/5		1	1/5		-3/5	-1/5		3/5	-1
Z=	11/5 + M				-3/5 +M	-M	-1/5 +M	3/5 -M		1/5 -2M	**zj-cj**

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.4

```
MIN Z = 2 x1 + x2 + M.mu3 + M.mu4 + M.mu5

3 x1 + x2              - x3              + mu3              = 3
4 x1 + 3 x2                  - x4              + mu4        = 6
x1 + 2 x2                           - x5              + mu5 = 2
```

		Cj	2	1				M	M	M	
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**mu3**	**mu4**	**mu5**	**bi/aij**
2	X1	4/5	1		-2/5		1/5	2/5		-1/5	4
M	mu4	1			1	-1	1	-1	1	-1	1
1	X2	3/5		1	1/5		-3/5	-1/5		3/5	-1
Z=	11/5 + M				-3/5 +M	-M	-1/5 +M	3/5 -M		1/5 -2M	**zj-cj**

		Cj	2	1				M	M	M	
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**l3**	**l4**	**l5**	**bi/aij**
2	X1	3/5	1		-3/5	1/5		3/5	-1/5		
	X5	1			1	-1	1	-1	1	-1	
1	X2	6/5		1	4/5	-3/5		-4/5	3/5		
Z=	2.4				-2/5	-1/5		algo –M	algo –M	algo –M	**zj-cj**

Solución Optima

Problema 4.5

```
Max Z = 6 x1 + 2 x2 + 3 x3

    x1 +   x2                <= 300
 2.5x1 + 4 x2 + 5 x3         <= 1000
          x2 + x3            = 200
    x1                       <= 200
```

FORMA ESTÁNDAR PARA SIMPLEX

```
Max Z = 6 x1 + 2 x2 + 3 x3 -M.l6

    x1 +   x2        + x4                  = 300
 2.5x1 + 4 x2 + 5 x3      + x5             = 1000
          x2 +   x3           + l6        = 200
    x1                                + x7 = 200
```

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.5

$$\text{Max } Z = 6x1 + 2x2 + 3x3 - M.l6$$

$$\begin{aligned} x1 + x2 + x4 &= 300 \\ 2.5x1 + 4x2 + 5x + x5 &= 1000 \\ x2 + x3 + l6 &= 200 \\ x1 + x7 &= 200 \end{aligned}$$

		Cj	6	2	3			-M		
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**bi/aij**
0	x4	300	1	1		1				
0	x5	1000	2.5	4	5		1			200
-M	l6	200		1	1			1		200
0	x7	200	1						1	
Z=	-M200		-6	-M-2	-M-3					**zj-cj**

Empate: base degenerada

x5	1000	2.5	4	5		1		
l6	200		1	1			1	

Se toman las dos filas y se dividen por su pivote. 5 para x5 y 1 para l6

x5	200	0.5	0.8	1		0.2		
l6	200		1	1			1	

0 es menor a 0.5 sale l6

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.5

$$\text{Max } Z = 6x1 + 2x2 + 3x3 - M.l6$$

$$\begin{aligned}
x1 + x2 + x4 &= 300 \\
2.5x1 + 4x2 + 5x + x5 &= 1000 \\
x2 + x3 + l6 &= 200 \\
x1 + x7 &= 200
\end{aligned}$$

		Cj	6	2	3			-M		
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**bi/aij**
0	x4	300	1	1		1				
0	x5	1000	2.5	4	5		1			200
-M	l6	200		1	1			1		200
0	x7	200	1						1	
Z=	-M200		-6	-M-2	-M-3			M		**zj-cj**

		Cj	6	2	3			-M		
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**bi/aij**
0	x4	300	1	1		1				300
0	x5	0	2.5	-1			1	-5		0+
3	x3	200		1	1			1		Inf
0	x7	200	1						1	200
Z=	600		-6	1				3+M		**zj-cj**

Problema 4.5

$$\text{Max } Z = 6x1 + 2x2 + 3x3 - M.16$$

$$\begin{aligned}
x1 + x2 + x4 &= 300 \\
2.5x1 + 4x2 + 5x + x5 &= 1000 \\
x2 + x3 + 16 &= 200 \\
x1 + x7 &= 200
\end{aligned}$$

		Cj	6	2	3			-M		
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**bi/aij**
0	x4	300	1	1		1				300
0	x5	0	2.5	-1			1	-5		0+
3	x3	200		1	1			1		Inf
0	x7	200	1						1	200
Z=	600		-6	1				3+M		**zj-cj**

		Cj	6	2	3			-M		
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**bi/aij**
0	x4	300		1.4		1	-0.4	2		214
6	x1	0	1	-0.4			0.4	-2		0-
3	x3	200		1	1		0	1		200
0	x7	200		0.4			-0.4	2	1	750
Z=	600			-1.4			2.4	3+M		**zj-cj**

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.5

$$\text{Max } Z = 6x1 + 2x2 + 3x3 - M.16$$

$$\begin{aligned}
x1 + x2 + x4 &= 300 \\
2.5x1 + 4x2 + 5x + x5 &= 1000 \\
x2 + x3 + 16 &= 200 \\
x1 + x7 &= 200
\end{aligned}$$

		Cj	6	2	3			-M		
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**bi/aij**
0	x4	300		1.4		1	-0.4	2		214
6	x1	0	1	-0.4			0.4	-2		0-
3	x3	200		1	1			1		200
0	x7	200		0.4			-0.4	2	1	750
Z=	600			-1.4			2.4	3+M		**zj-cj**

		Cj	6	2	3			-M		
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**bi/aij**
0	x4	20			-1.4	1	-0.4	0.6		
6	x1	80	1		0.4		0.4	-1.6		
2	x2	200		1	1			1		
0	x7	120					-0.4	2	1	
Z=	880				1.4		2.4	-7.6+M		**zj-cj**

Solución Optima

Problema 4.8

```
Max Z = 4 x1 + 4 x2

x1        <= 6
x1 +   x2 <= 8
x1 + 2 x2 <= 12
```

FORMA ESTÁNDAR PARA SIMPLEX

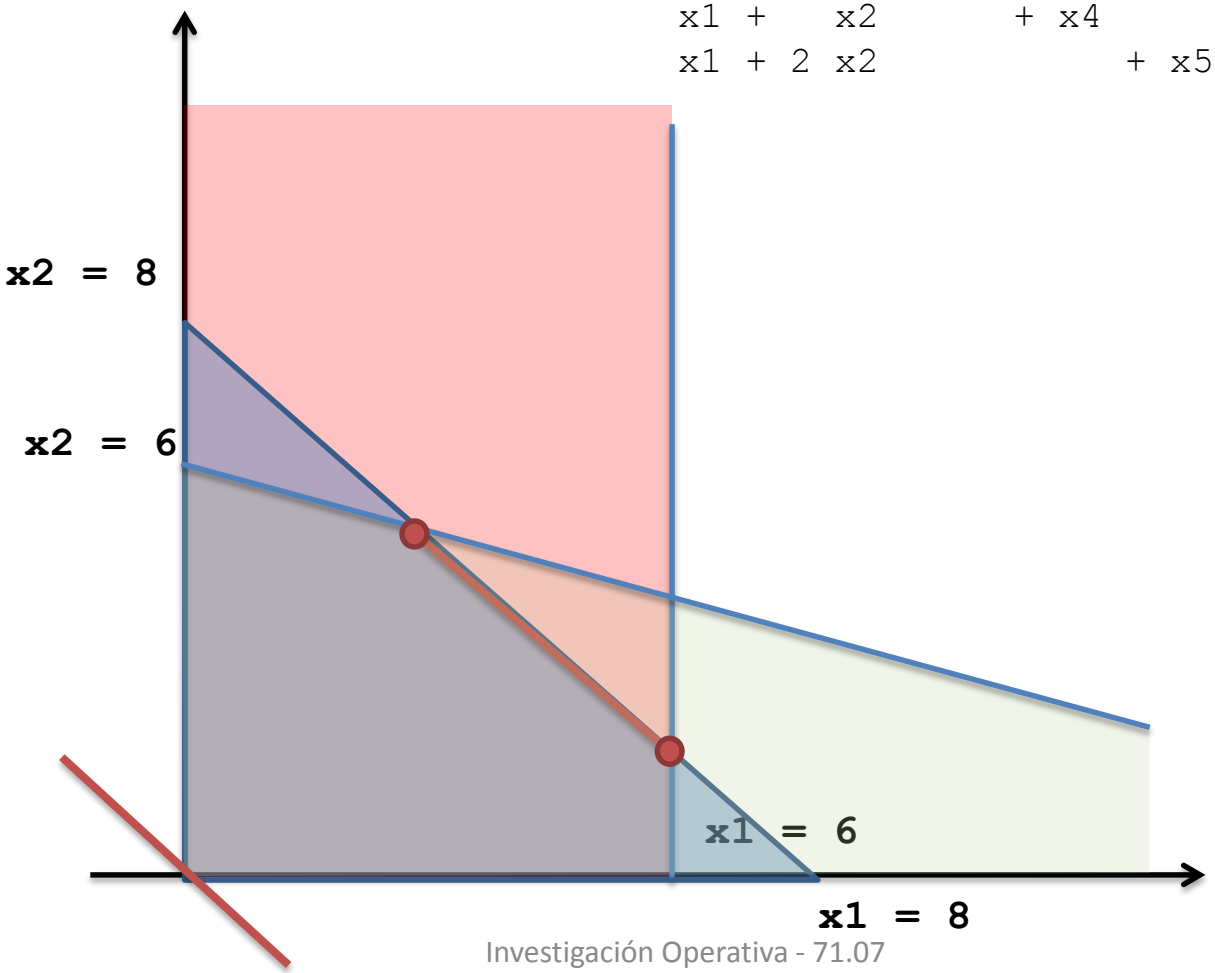
```
 Max Z = 4 x1 + 4 x2

x1        + x3            = 6
x1 +   x2      + x4      = 8
x1 + 2 x2           + x5 = 12
```

Problema 4.8

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 12 \end{aligned}$$



FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

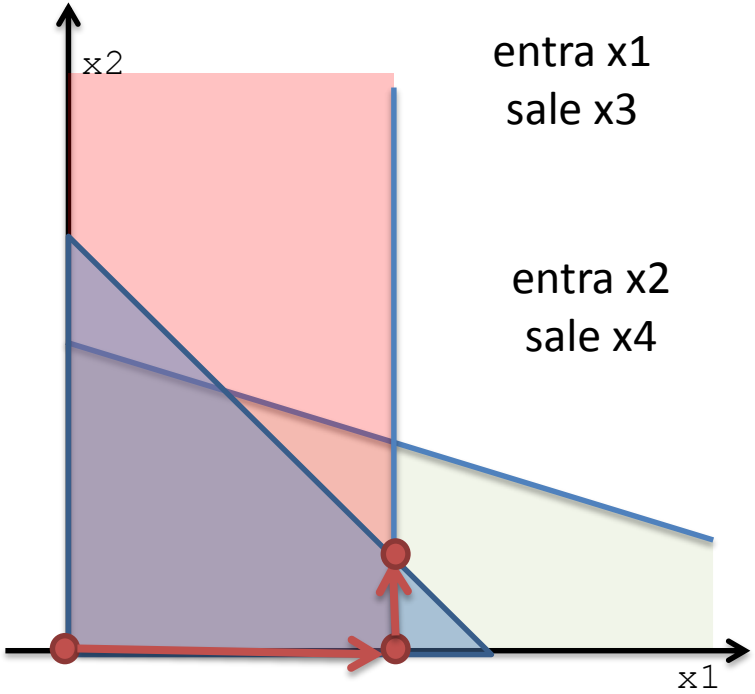
Problema 4.8

$$\text{Max } Z = 4\,x1 + 4\,x2$$

$$\begin{aligned} x1 \quad\quad\quad + x3 \quad\quad\quad\quad &= 6 \\ x1 + x2 \quad\quad + x4 \quad\quad &= 8 \\ x1 + 2\,x2 \quad\quad\quad\quad + x5 &= 12 \end{aligned}$$

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
0	x3	6	1		1			6
0	x4	8	1	1		1		8
0	x5	12	1	2			1	3
Z=		0	-4	-4				**zj-cj**

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
4	x1	6	1		1			
0	x4	2		1	-1	1		2
0	x5	6		2	-1		1	3
Z=		24	0	-4	4			**zj-cj**



entra x1
sale x3

entra x2
sale x4

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

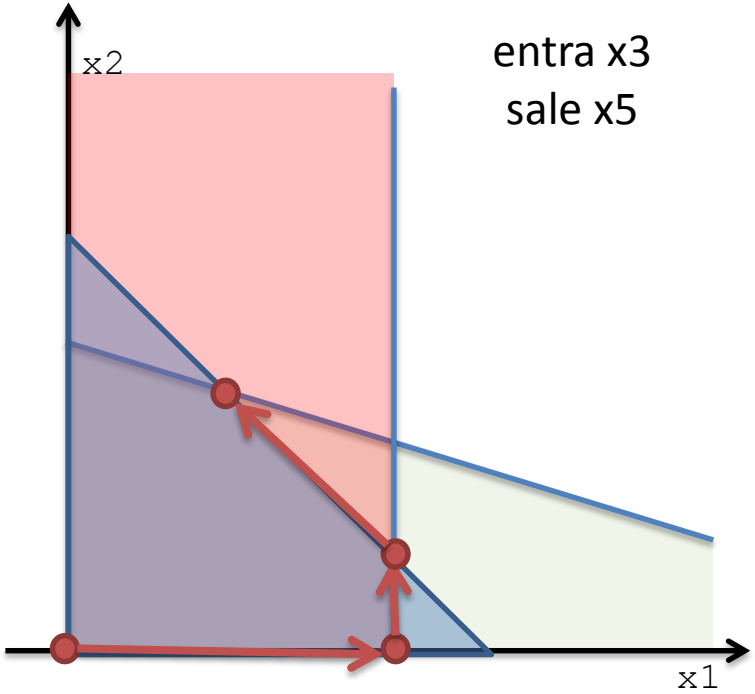
Problema 4.8

$$\text{Max } Z = 4\,x1 + 4\,x2$$

$$\begin{aligned} x1 \quad\quad\quad + x3 \quad\quad\quad &= 6 \\ x1 + x2 \quad\quad + x4 \quad\quad &= 8 \\ x1 + 2\,x2 \quad\quad\quad + x5 &= 12 \end{aligned}$$

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
4	x1	6	1		1			
0	x4	2		1	-1	1		2
0	x5	6		2	-1		1	3
Z=	24		0	-4	4			**zj-cj**

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
4	x1	6	1		1			6
4	x2	2		1	-1	1		
0	x5	2			1	-2	1	2
Z=	32				0*	4		**zj-cj**



entra x3
sale x5

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

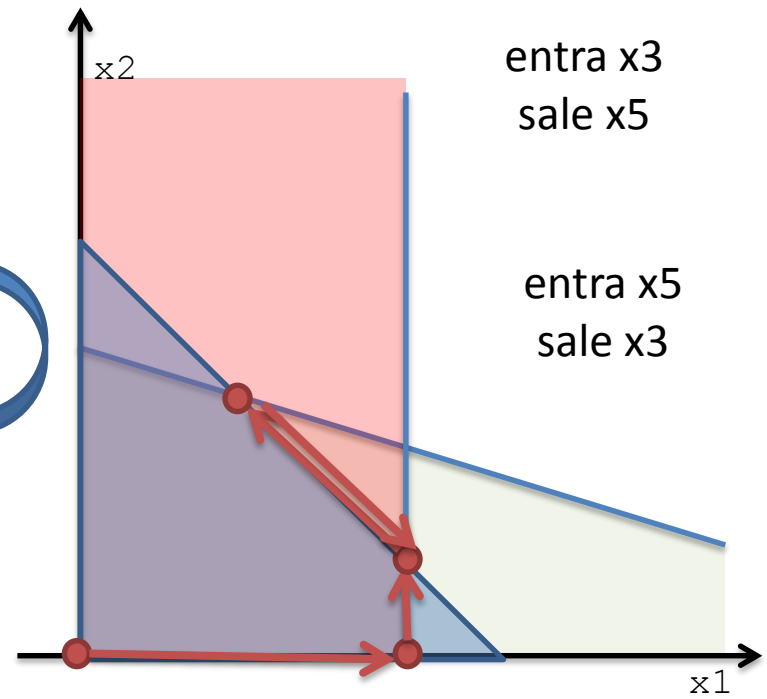
Problema 4.8

$$\text{Max } Z = 4\,x1 + 4\,x2$$

$$\begin{aligned} x1 \quad\quad\quad + x3 \quad\quad\quad\quad &= 6 \\ x1 + x2 \quad\quad + x4 \quad\quad &= 8 \\ x1 + 2\,x2 \quad\quad\quad\quad + x5 &= 12 \end{aligned}$$

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
4	x1	6	1		1			6
4	x2	2		1	-1	1		
0	x5	2			1	-2	1	2
Z=	32				0*	4		**zj-cj**

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
4	x1	4	1			1	-1	6
4	x2	4		1		1	1	
0	x3	2			1		1	2
Z=	32					4	0*	**zj-cj**



FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.8

```
Max Z = 4 x1 + 4 x2

x1          + x3              = 6
x1 +   x2        + x4        = 8
x1 + 2 x2              + x5 = 12
```

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
4	x1	6	1		1			6
4	x2	2		1	-1	1		
0	x5	2			1	-2	1	2
Z=	32				0*	4		**zj-cj**

		Cj	4	4				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
4	x1	4	1			1	-1	6
4	x2	4		1		1	1	
0	x3	2			1		1	2
Z=	32					4	0*	**zj-cj**

Solución alternativa

$$X=\alpha\begin{pmatrix}6\\2\\0\\0\\2\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}4\\4\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ejemplo x= (5, 3, 1, 0, 1)
es solución

Problema 4.13

```
  Max Z = 3 x1 +  x2

  x1 +   x2 <= 6
2 x1 +   x2 <= 1
- x1 + 2 x2 >= 8
```

FORMA ESTÁNDAR PARA SIMPLEX

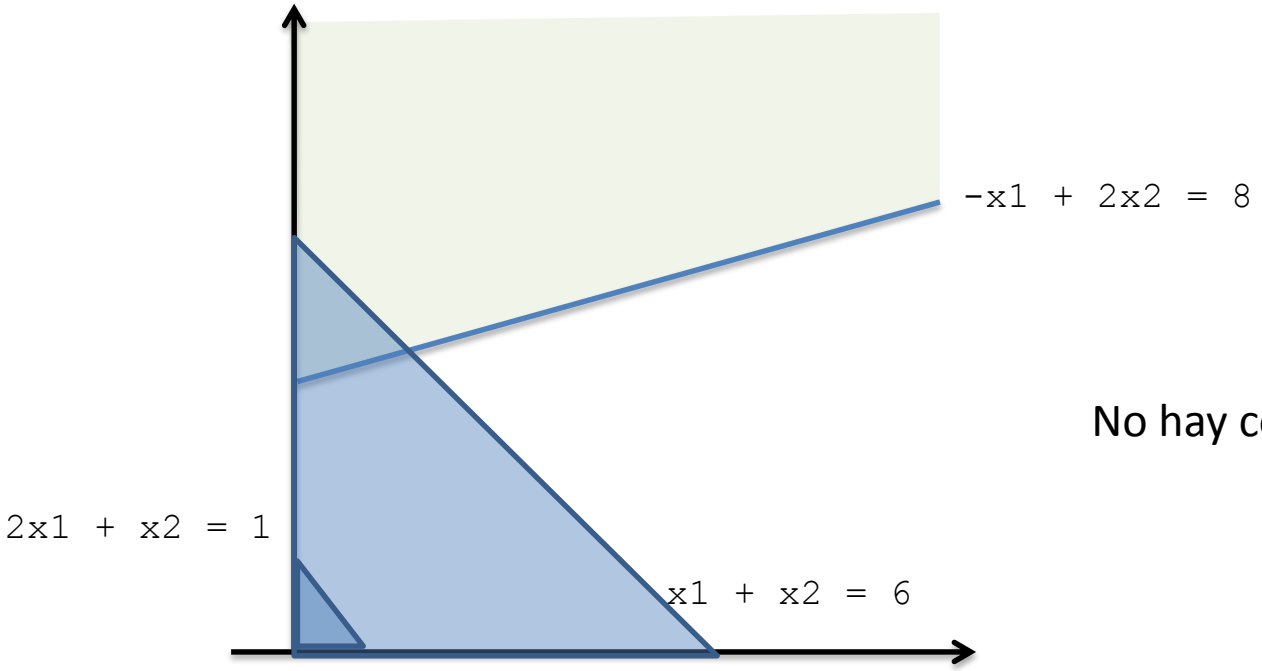
```
   Max Z = 3 x1 +  x2 - M.mu

  x1 +   x2 + x3                 = 6
2 x1 +   x2      + x4            = 1
- x1 + 2 x2           - x5 + mu = 8
```

Problema 4.13

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 - M.\mu$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_5 + \mu &= 8 \end{aligned}$$



No hay convexo!!

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 4.13

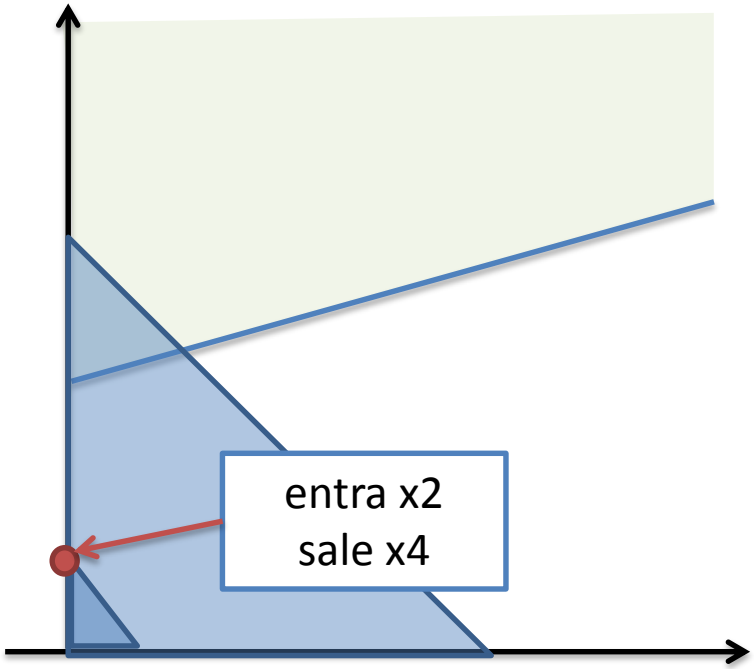
$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 - M.mu$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_5 + mu &= 8 \end{aligned}$$

		Cj	3	1				-M	
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**mu**	**bi/aij**
0	x3	6	1	1	1				6
0	x4	1	2	1		1			1
-M	I	8	-1	2			-1	1	4
Z=	-8M		M-3	-2M-1			M		**zj-cj**

		Cj	3	1				-M	
Ck	**Xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**mu**	**bi/aij**
0	X3	5	-1		1	-1			
1	X2	1	2	1		1			
-M	mu	6	-5			-2	-1	1	
Z=	-6M+1		5M-1			2M+1	M		**zj-cj**

Todos positivos

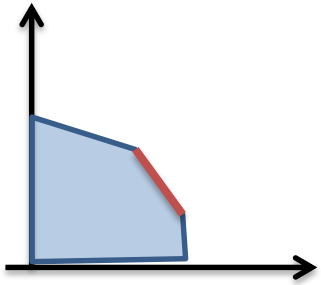


Casos particulares - Resumen

		Cj							
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
Z									**zj – cj**

Soluciones alternativas

zj – cj igual a 0* para una variable no básica

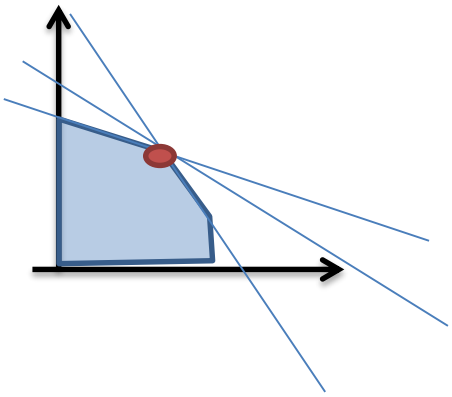


Casos particulares - Resumen

Base degenerada

		Cj							
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
Z									**zj – cj**

Empate de bj/aij
Riesgo de Loop

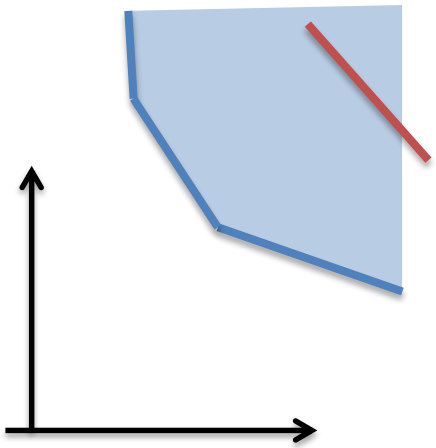


Casos particulares - Resumen

Polígono abierto

		Cj							
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
Z									**zj – cj**

No existe bj/aij positivo

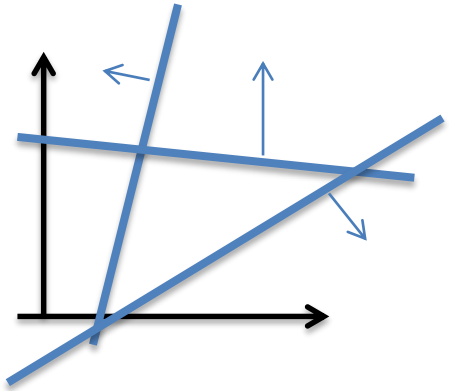


Casos particulares - Resumen

		Cj							
Ck	**Xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
Z									**zj – cj**

Solución incompatible

Todos zj-cj positivos y aun existen variables artificiales en la base



FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema directo

Forma Canónica
$A \cdot X <= B$
$X >= 0$
$Z = C \cdot X$ Máx

Forma Canónica
$A \cdot X >= B$
$X >= 0$
$Z = C \cdot X$ Mín

Forma Standard
$A \cdot X = B$
$X >= 0$
$Z = C \cdot X$ Máx

Forma Standard
$A \cdot X = B$
$X >= 0$
$Z = C \cdot X$ Mín

Forma Canónica
$A^t \cdot Y >= C$
$Y >= 0$
$Z = B \cdot Y$ Mín

Forma Canónica
$A^t \cdot Y <= C$
$Y >= 0$
$Z = B \cdot Y$ Máx

Forma Standard
$A^t \cdot Y >= C$
~~$Y >= 0$~~
$Z = B \cdot Y$ Mín

Forma Standard
$A^t \cdot Y <= C$
~~$Y >= 0$~~
$Z = B \cdot Y$ Máx

Transformación simétrica

Transformación asimétrica

Problema dual

5.2 Formule el programa dual del siguiente problema directo, mediante la transformación simétrica.

DIRECTO

Max: $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 48 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 36 \\
x_1 + x_3 &\geq 6 \\
\mathbf{x_i} &\mathbf{\geq 0}
\end{aligned}
$$

CANÓNICA

Max: $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 48 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 36 \\
-x_1 - x_3 &\leq -6 \\
\mathbf{x_i} &\mathbf{\geq 0}
\end{aligned}
$$

DUAL

Min: $Z' = 48y_1 + 36y_2 - 6y_3$

$$
\begin{aligned}
6y_1 + y_2 - y_3 &\geq 2 \\
3y_1 + y_2 &\geq 3 \\
4y_1 + y_2 - y_3 &\geq 1 \\
\mathbf{y_i} &\mathbf{\geq 0}
\end{aligned}
$$

5.3 Formule el programa dual del siguiente problema directo, mediante la transformación simétrica.

DIRECTO

$$\text{Min: } Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\geq 25 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 15 \\ x_1 + x_3 &\geq 6 \\ \mathbf{x_i} &\mathbf{\geq 0} \end{aligned}$$

CANÓNICA

$$\text{Min: } Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\geq 25 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &\geq -15 \\ x_1 + x_3 &\geq 6 \\ \mathbf{x_i} &\mathbf{\geq 0} \end{aligned}$$

DUAL

$$\text{Max: } Z' = 25y_1 - 15y_2 + 6y_3$$

$$\begin{aligned} 5y_1 + y_2 + y_3 &\leq 2 \\ -3y_1 + y_2 &\geq 3 \\ -4y_1 - y_2 + y_3 &\leq 1 \\ \mathbf{y_i} &\mathbf{\geq 0} \end{aligned}$$

DUAL CANONICA

$$\text{Max: } Z' = 25y_1 - 15y_2 + 6y_3$$

$$\begin{aligned} 5y_1 - y_2 + y_3 &\leq 2 \\ 3y_1 - y_2 &\leq -3 \\ -4y_1 - y_2 + y_3 &\leq 1 \\ \mathbf{y_i} &\mathbf{\geq 0} \end{aligned}$$

5.4 Formule el programa dual del siguiente problema directo, mediante la transformación Asimétrica.

```
DIRECTO
Min: 2 x1 - 3 x2 + 3 x3
     4 x1 + 5 x2 - 3 x3 >= 20
       x1 +   x2 +   x3 =  15
       x1 +          x3 >=  6
                                  xi >= 0
```

```
DIRECTO: formulación standard
Min: 2 x1 - 3 x2 + 3 x3
     4 x1 + 5 x2 - 3 x3 -   x4        = 20
       x1 +   x2 +   x3               = 15
       x1 +          x3        -  x6 =  6
                                  xi >= 0
```

5.4 Formule el programa dual del siguiente problema directo, mediante la transformación Asimétrica.

```
DUAL: transformación asimétrica
Max:20 y1 + 15 y2 + 6 y3
     4 y1 +   y2 +   y3  <= 2
     5 y1 +   y2         <= -3
    -3 y1 +   y2 +   y3  <= 3
      -y1                <= 0
                    -y3  <= 0
```

y2 irrestricta!

```
DIRECTO: formulación standard
Min: 2 x1 - 3 x2 + 3 x3
     4 x1 + 5 x2 - 3 x3 -   x4        = 20
       x1 +   x2 +   x3               = 15
       x1 +          x3        -  x6 =  6
```

xi >= 0

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra Formule problema dual y resuelva el ejercicio 4.1

```
MAX:      8 x1 + 3 x2
            x1          <= 3
                   x2   <= 6
          6x1 + 4 x2    <= 36
```

		cj	8	3	0	0	0	
ck	**xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
0	x3	3	1		1			3
0	x4	6		1		1		
0	x5	36	6	4			1	6
Z=	0		-8	-3				**zj-cj**

		cj	8	3	0	0	0	
ck	**xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
8	x1	3	1		1			
0	x4	1.5			1.5	1	-0.25	
3	x2	4.5		1	-1.5		0.25	
Z=	37.5				3.5		0.75	**zj-cj**

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra Formule problema dual y resuelva el ejercicio 4.1

```
MAX:      8 x1 + 3 x2
            x1          <= 3
                   x2 <= 6
           6x1 + 4 x2 <= 36
```

Resuelvo por simplex

```
MIN:     3 y1 + 6 y2 + 36 y3
         y1            6 y3 >= 8
            +   y2 +   4 y3 >= 3
```

```
MIN:     3 y1 + 6 y2 + 36 y3
         y1            6 y3 - y4 + mu4              = 8
            +   y2 +   4 y3             - y5 + mu5 = 3
```

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra Formule problema dual y resuelva el ejercicio 4.1

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
M	mu4	8	1		6	-1	1			4/3
M	mu5	3		1	**4**			-1	1	3/4
Z=	11M		M-3	M-6	10M-36	-M		-M		**zj-cj**

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
M	mu4	3.5	1	-1.5		-1	1	**1.5**	-1.5	7/3
36	y3	0.75		0.25	1			-0.25	0.25	-3
Z=	3.5M		M-3	-1.5 M		-M		1.5 M	- 0.5M	**zj-cj**

```
MIN:     3 y1 + 6 y2 + 36 y3
           y1              6 y3 - y4 + mu4              = 8
               +    y2 +   4 y3              - y5 + mu5 = 3
```

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra Formule problema dual y resuelva el ejercicio 4.1

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
0	y5	7/3	2/3	-1		-2/3	2/3	1	-1	7/2
36	y3	4/3	**1/6**		1	-1/6	1/6			3/2
Z=	48		3	-6		-6	6-M		-M	**zj-cj**

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
M	mu4	3.5	1	-1.5		-1	1	**1.5**	-1.5	7/3
36	y3	0.75		0.25	1			-0.25	0.25	-3
Z=	3.5M		M-3	-1.5 M		-M		1.5 M	- 0.5M	**zj-cj**

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcr}
\text{MIN:} & 3\ y1 & + & 6\ y2 & + & 36\ y3 & & & & & & & & & & & & \\
 & y1 & & & & 6\ y3 & - & y4 & + & mu4 & & & & & & & = & 8 \\
 & & + & y2 & + & 4\ y3 & & & & & - & y5 & + & mu5 & & & = & 3
\end{array}
$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra Formule problema dual y resuelva el ejercicio 4.1

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
0	y5	7/3	**2/3**	-1		-2/3	2/3	1	-1	7/2
36	y3	4/3	1/6		1	-1/6	1/6			8
Z=	48		3	-6		-6	6-M		-M	**zj-cj**

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
3	y1	3.5	1	-1.5		-1	1	1.5	-1.5	
36	y3	0.75		0.25	1		0	-0.25	0.25	
Z=	37.5			-1.5		-3		-4.5		**zj-cj**

```
MIN:     3 y1 + 6 y2 + 36 y3
           y1            6 y3 - y4 + mu4              = 8
               +    y2 +   4 y3              - y5 + mu5 = 3
```

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra Formule problema dual y resuelva el ejercicio 4.1

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
0	y5	7/3	**2/3**	-1		-2/3	2/3	1	-1	7/2
36	y3	4/3	1/6		1	-1/6	1/6			8
Z=	48		3	-6		-6	6-M		-M	**zj-cj**

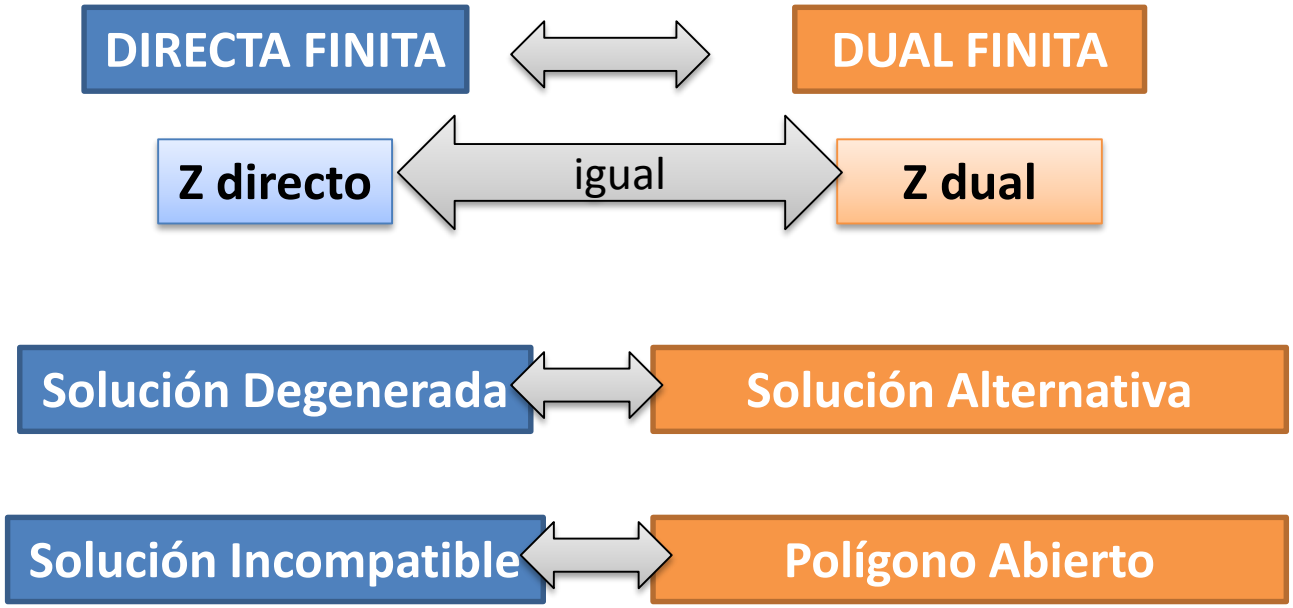
Tabla óptima

		Cj	3	6	36		M		M	
ck	**xk**	**B**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**Y4**	**mu4**	**Y5**	**mu5**	**bi/aij**
3	Y1	3.5	1	-1.5		-1	1	1.5	-1.5	
36	Y3	0.75		0.25	1		0	-0.25	0.25	
Z=	37.5			-1.5		-3		-4.5		**zj-cj**

		cj	8	3	0	0	0	
ck	**xk**	**Bk**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**bi/aij**
8	X1	3	1		1			
0	X4	1.5			1.5	1	-0.25	
3	X2	4.5		1	-1.5		0.25	
Z=	37.5				3.5		0.75	**zj-cj**

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra Teorema fundamental de la dualidad



FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.6 Pasaje de tablas de directo a dual y viceversa

Problema directo:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 430 \\
3x_1 + 2x_3 &\le 460 \\
x_1 + 4x_2 &\le 420 \\
\text{Max: } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3
\end{aligned}
$$

Problema dual:

$$
\begin{aligned}
y_1 + 3y_2 + y_3 &\ge 3 \\
2y_1 + 4y_3 &\ge 2 \\
y_1 + 2y_2 &\ge 5 \\
\text{Min: } Z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3
\end{aligned}
$$

Dir	Dual
X1	Y4
X2	Y5
X3	Y6
X4	Y1
X5	Y2
X6	Y3

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.6 Pasaje de tablas optimas de directo a dual y viceversa

		Cj	3	2	5				
ck	**xk**	**B**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**bi/aij**
2	x2	100	-0.25	1		0.5	-0.25		
5	x3	230	1.5		1		0.5		
0	x6	200	2			-2	1	1	
Z=		1350	4			1	2		

Variables en la base

Variables fuera de la base

Tabla problema directo

		Cj	430	460	420				
Ck	**xk**	**B**	**A1'**	**A2'**	**A3'**	**A4'**	**A5'**	**A6'**	**bi/aij**
0	Y4	4			-2	1	0.25	-1.5	
430	Y1	1	1		2		-0.5	0	
460	Y2	2		1	-1		0.25	-0.5	
Z=		1350			-20		-100	-230	

Tabla problema dual

Dir	Dual
X1	Y4
X2	Y5
X3	Y6
X4	Y1
X5	Y2
X6	Y3

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.9 Pasaje de tablas de directo a dual y viceversa

Problema directo:

```
  x1          >= 2
2 x1 +   x2 <= 10
  x1 + 2 x2 <= 8
         x2 >= 1
Min Z = x1 - 2 x2
```

Problema directo en forma canónica:

```
  x1          >= 2
-2x1 -   x2 >= -10
 -x1 - 2 x2 >= -8
         x2 >= 1
Min Z = x1 - 2 x2
```

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.9 Pasaje de tablas de directo a dual y viceversa

Problema dual en forma canónica:

```
Max Z = 2 y1 - 10 y2 - 8 y3 + y4
          y1 -  2 y2 -   y3       <= 1
             -    y2 - 2 y3 + y4 <= -2
yi >= 0
```

Problema directo en forma canónica:

```
  x1          >= 2
-2x1 -   x2 >= -10
 -x1 - 2 x2 >= -8
         x2 >= 1
Min Z = x1 - 2 x2
```

	Dir	Dual	
Fuertes	X1	Y5	Slacks
	X2	Y6	
Slacks	X3	Y1	Fuertess
	X4	Y2	
	X5	Y3	
	X6	Y4	

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.9 Pasaje de tablas de directo a dual y viceversa

Problema dual en forma canónica:

```
Max Z = 2 y1 - 10 y2 - 8 y3 + y4
          y1 -  2 y2 -   y3       <= 1
             -    y2 - 2 y3 + y4 <= -2
yi >= 0
```

Problema dual en forma standar:

```
Max Z = 2 y1 - 10 y2 - 8 y3 + y4
          y1 -  2 y2 -   y3       <= 1
                 y2 + 2 y3 - y4 >= 2
yi >= 0
```

Dir	Dual
X1	Y5
X2	Y6
X3	Y1
X4	Y2
X5	Y3
X6	Y4

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.9 Pasaje de tablas de directo a dual y viceversa

min

		Cj	1	-2					
ck	**xk**	**B**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**bi/aij**
1	x1	2	1		-1		0		
0	x4	3			1.5	1	-0.5		
0	x6	2			0.5		0.5	1	
-2	x2	3		1	0.5		0.5		
Z=	-4				-2		-1		

max

		Cj	2	-10	-8	1			
ck	**Xk**	**B**	**y1**	**y2**	**Y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**bi/aij**
2	y1	2	1	-1.5		-0.5	1	-0.5	
-8	y3	1		0.5	1	-0.5	0	-0.5	
Z=	-4			3		2	2	3	**zj-cj**

Dir	Dual
X1	Y5
X2	Y6
X3	Y1
X4	Y2
X5	Y3
X6	Y4

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5.extra En general REGLA

min

		Cj	1	-2					
ck	**xk**	**B**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**bi/aij**
1	x1	2	1		-1		0		
0	x4	3			1.5	1	-0.5		
0	x6	2			0.5		0.5	1	
-2	x2	3		1	0.5		0.5		
Z=	-4				-2		-1		

min → max

max

		Cj		-10	-8	1			
ck	**Xk**	**B**		**y2**	**Y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**bi/aij**
2	y1	2	1	-1.5		-0.5	1	-0.5	
-8	y3	1		0.5	1	-0.5	0	-0.5	
Z=	-4			3		2	2	3	**zj-cj**

Problema 6.2

Un establecimiento que fabrica dos productos A y B desea planificar su producción haciendo máximo el margen de contribución a gastos generales. Las restricciones con que cuenta son:

- Capacidad de despacho: 8000 u. máximo a despachar en conjunto de A y B.
- Capacidad de máquina: 540 hs. disponibles
- Utilización estándar de máquina de A: 0.09 hs/u.
- Utilización estándar de máquina de B: 0.06 hs/u.
- Producción mínima: 3000 u. como mínimo en conjunto entre A y B.
- Cantidad demandada Máxima: 5000 u de A. y 6000 u de B.

Los márgenes de contribución unitarios son 60 $/u y 120 $/u para los productos A y B respectivamente.

Problema 6.2

1. Resolver el problema gráficamente

   Modelo:

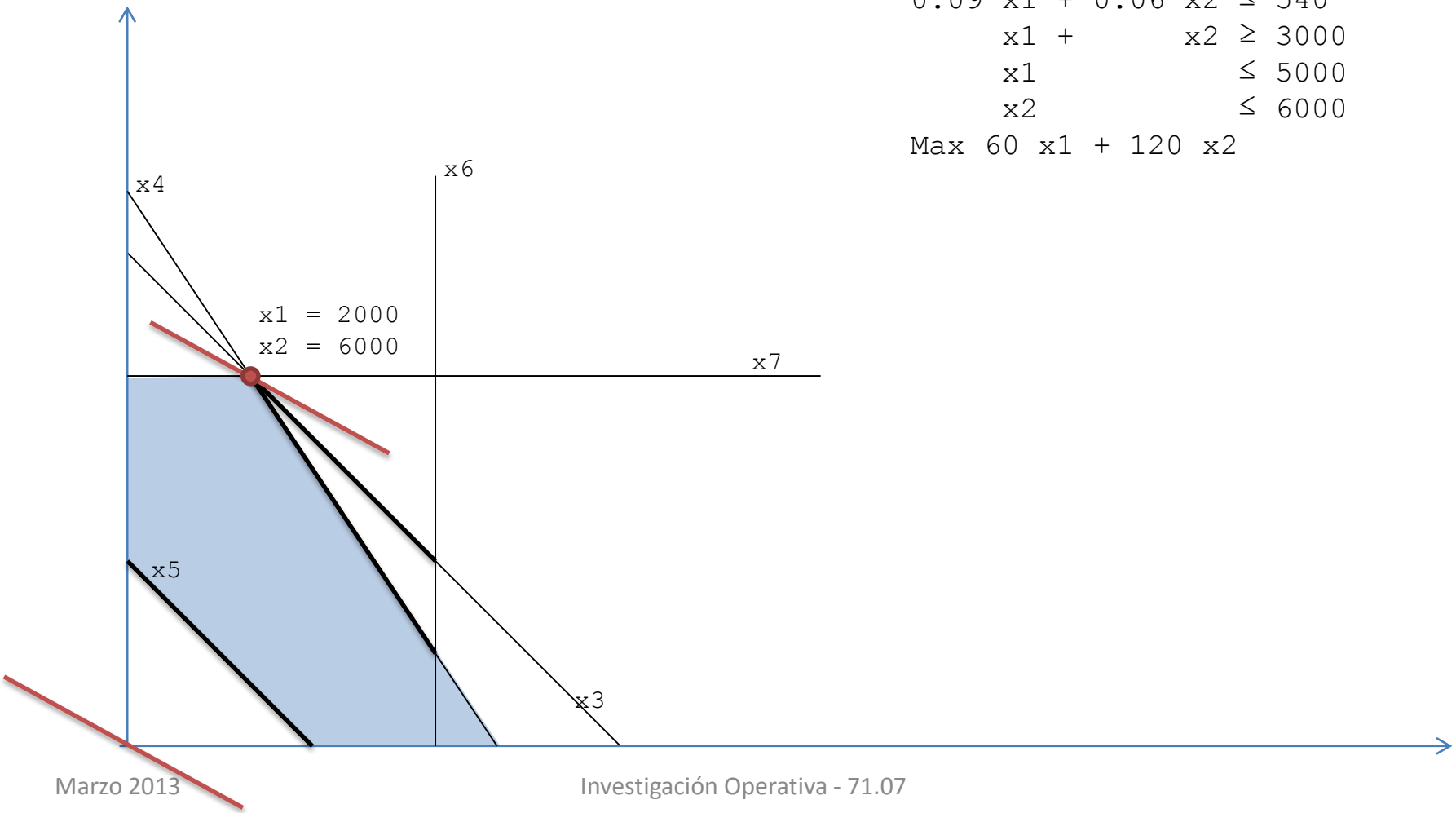
   Xi: cantidad de fabricar del producto i(1,2) (a,b)

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000
\end{aligned}
$$

   Max 60 x1 + 120 x2

Problema 6.2

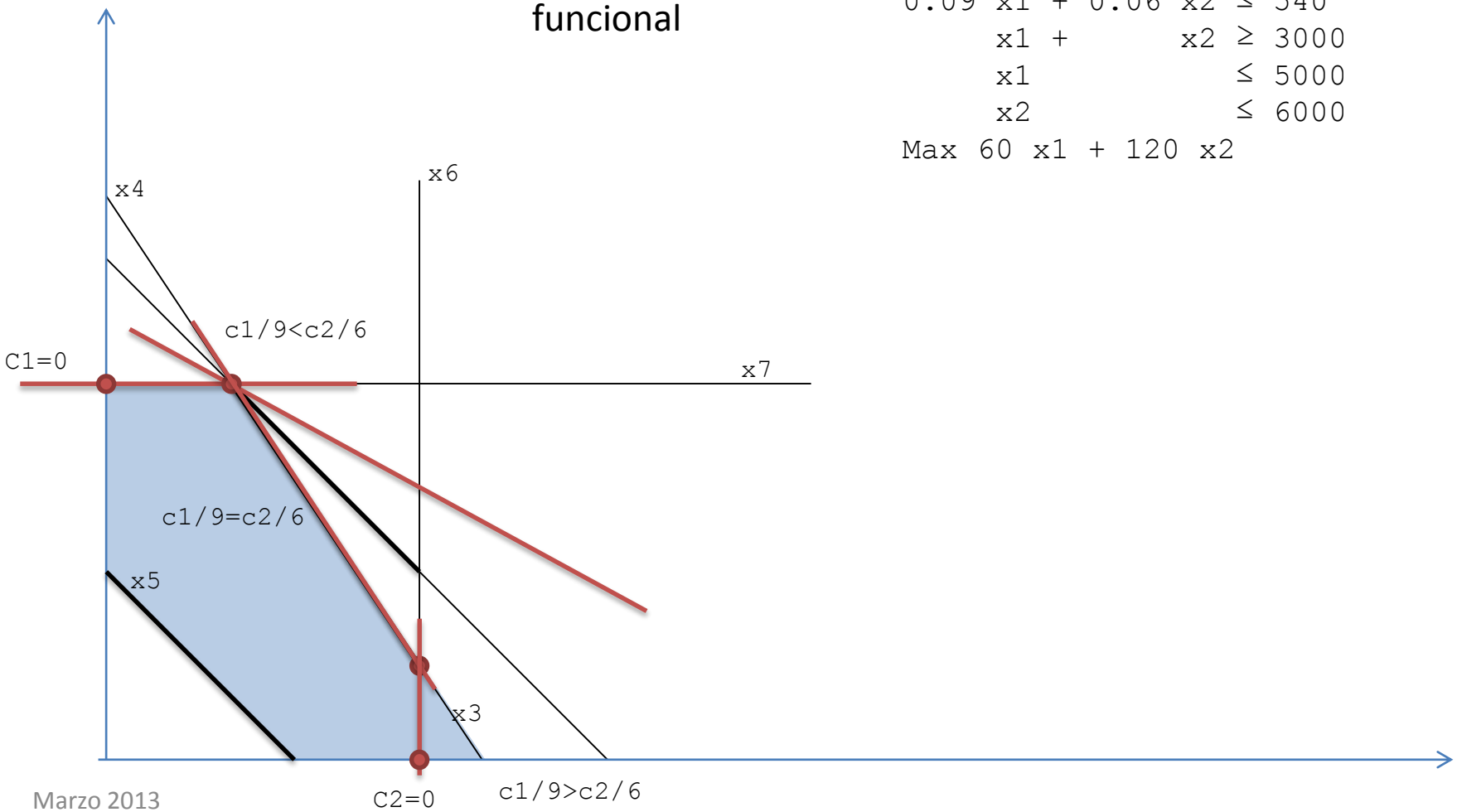
$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000 \\
\text{Max } 60\,x1 + 120\,x2
\end{aligned}
$$



Problema 6.2

2. Graficar las variaciones del: funcional

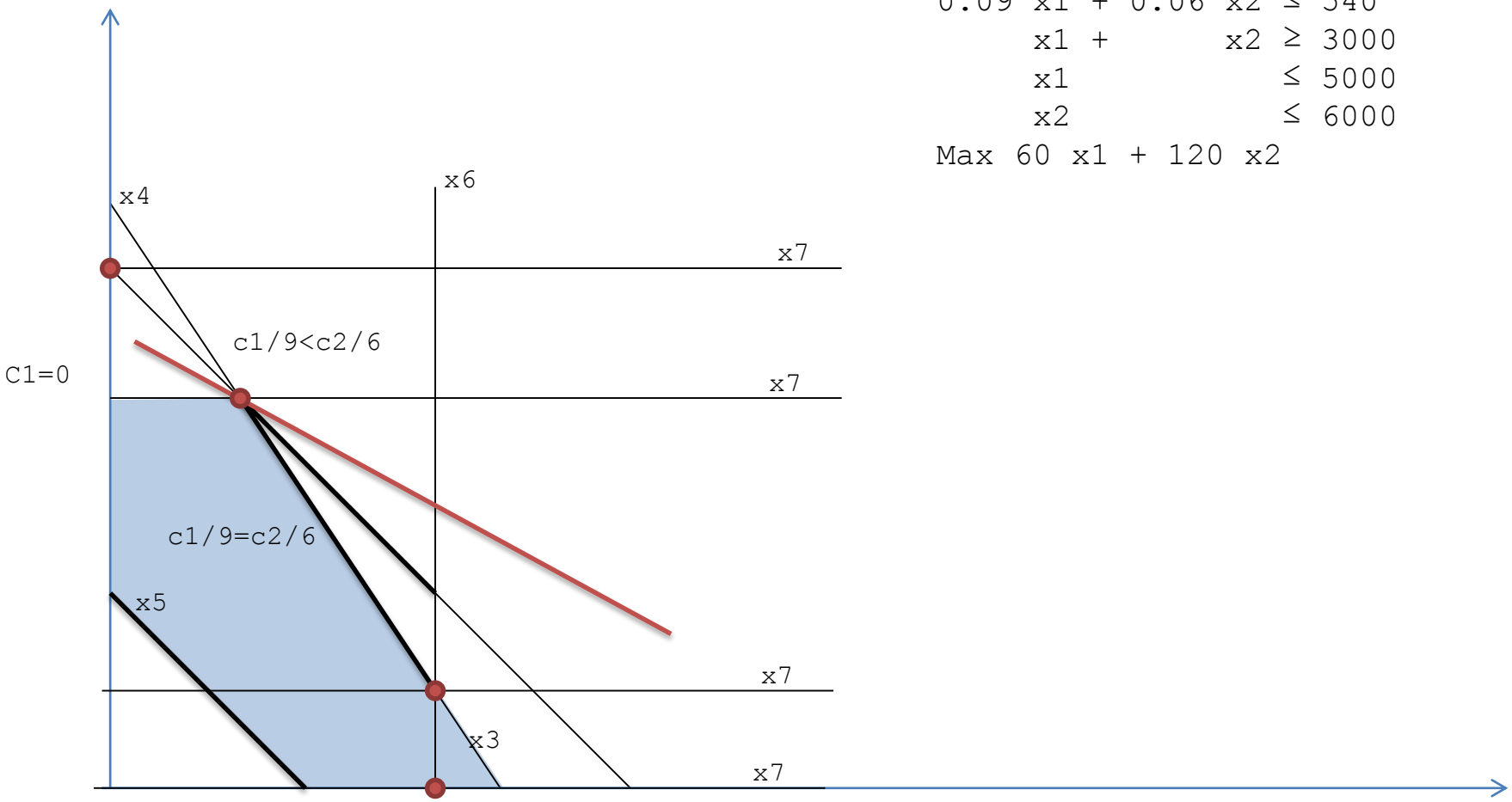
$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000 \\
\text{Max } 60\,x1 + 120\,x2
\end{aligned}
$$



Problema 6.2

3. Producción de B

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000 \\
\text{Max } 60\,x1 + 120\,x2
\end{aligned}
$$

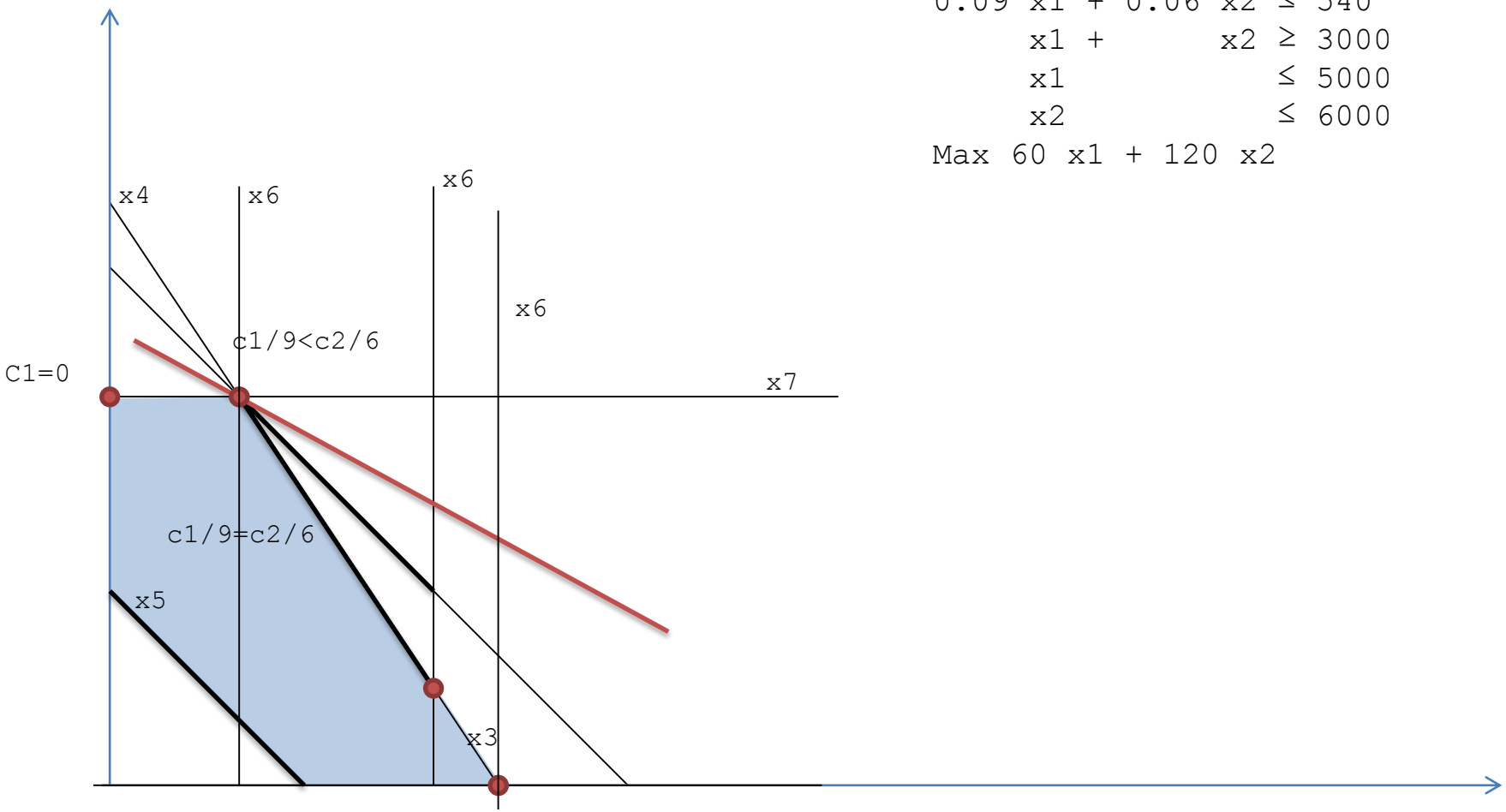


FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 6.2

3. Producción de A

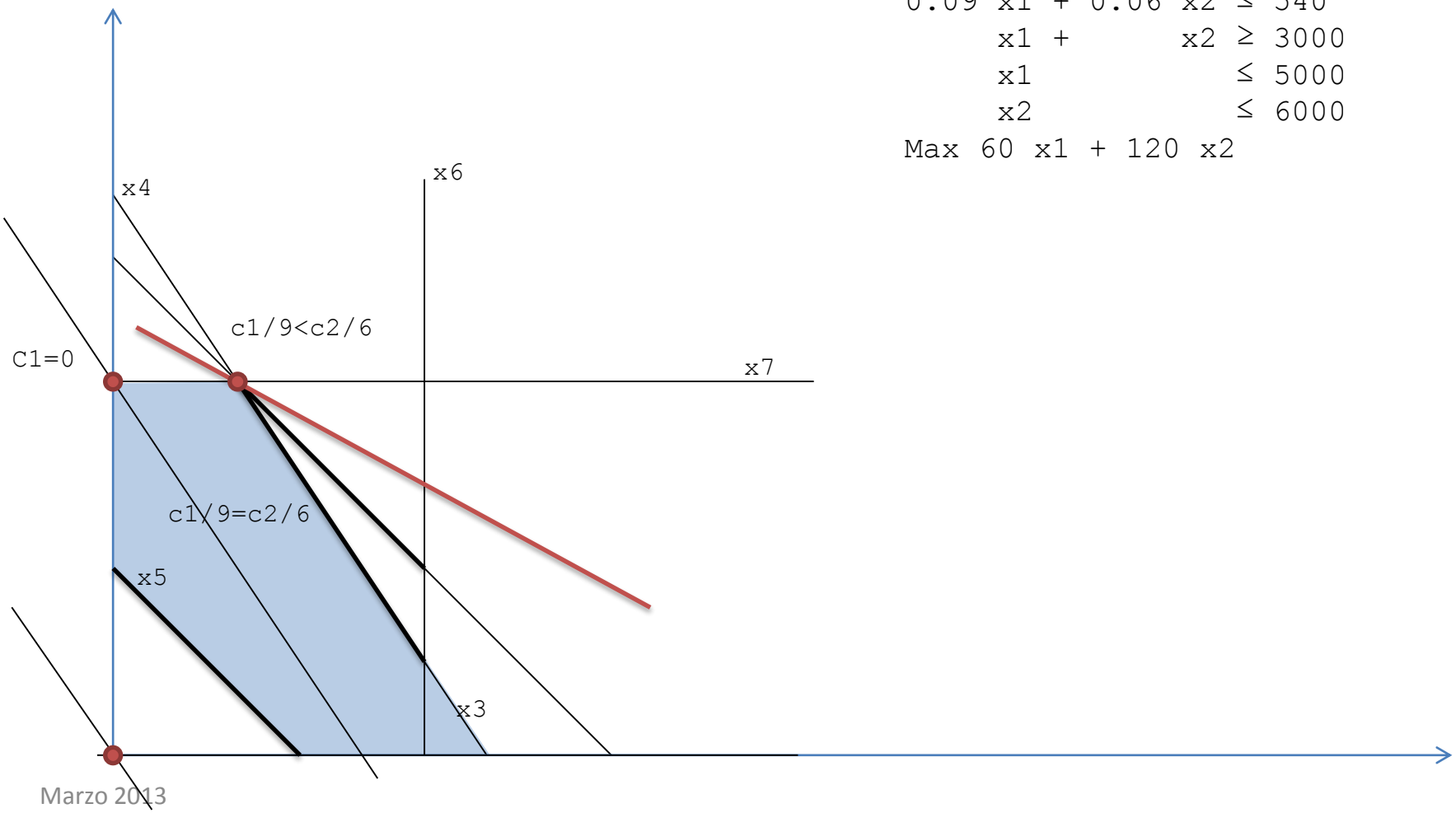
$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000 \\
\text{Max } 60\,x1 + 120\,x2
\end{aligned}
$$



Problema 6.2

4. Uso de h maquina

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000 \\
\text{Max } 60\,x1 + 120\,x2
\end{aligned}
$$

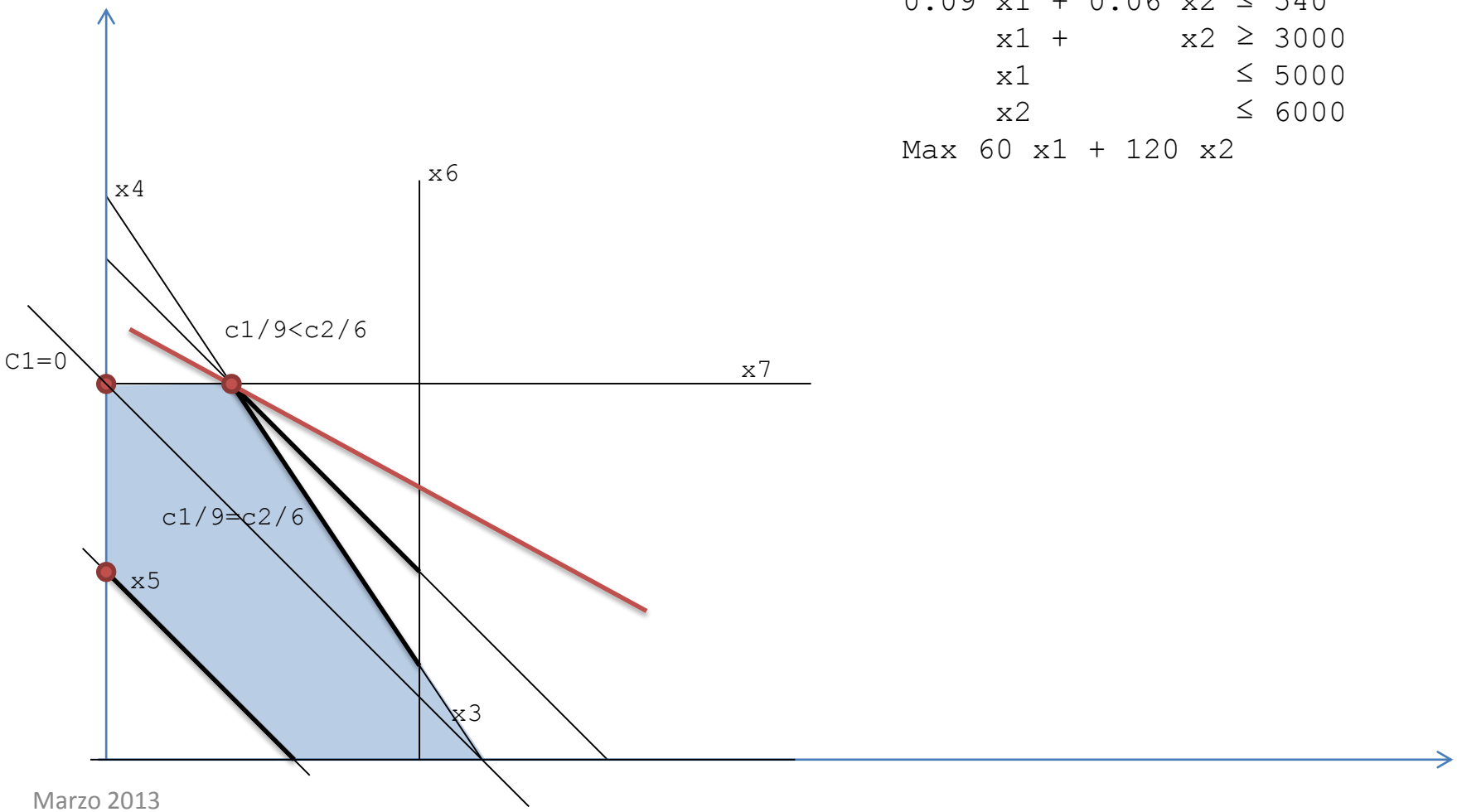


FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 6.2

4. Uso de despacho

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000 \\
\text{Max } 60\,x1 + 120\,x2
\end{aligned}
$$

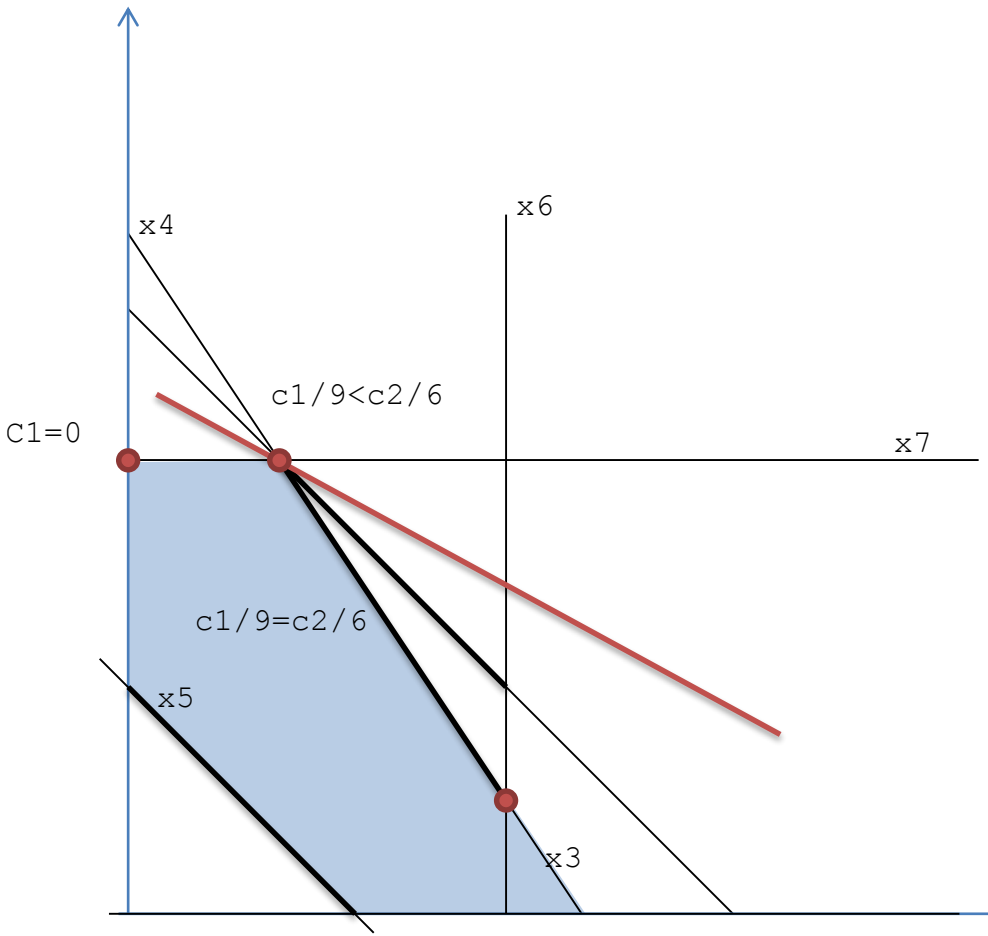


FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

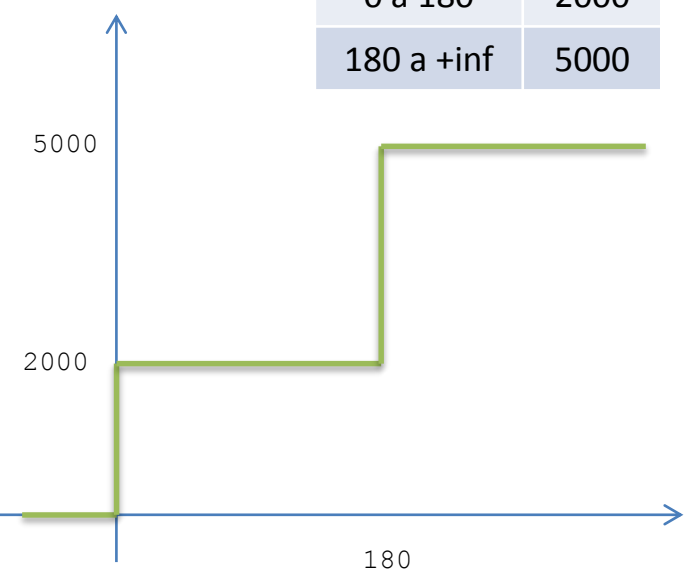
Problema 6.2

Curva de oferta de A

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &\leq 8000 \\
0.09\,x1 + 0.06\,x2 &\leq 540 \\
x1 + x2 &\geq 3000 \\
x1 &\leq 5000 \\
x2 &\leq 6000 \\
\text{Max } 60\,x1 + 120\,x2
\end{aligned}
$$



C1	A
-inf a 0	0
0 a 180	2000
180 a +inf	5000



Problema 6.3

En una fábrica se desea analizar la operación de un sector integrado por tres equipos E1, E2 y E3 donde se procesan los productos A, B y C. Los tiempos de proceso de los productos son los del siguiente cuadro, medidos en horas de equipo/docena de producto.

Se ha determinado además la disponibilidad mensual de cada uno de los equipos. Esta importa respectivamente 160, 180 y 110 horas. Asimismo se estima en 100 docenas mensuales la cantidad demandada máxima del producto A y en 120 docenas mensuales la cantidad demandada máxima del producto B.

Por otra parte, la Dirección de la empresa desea producir como mínimo 80 docenas mensuales del producto B.

El margen de beneficio de cada producto, es de 50 $/docena de A, 40$/docena de B y 30$/docena de C.

El programa óptimo es el que hace máximo el margen total de beneficio.

Problema 6.3

Habiéndose resuelto el problema por programación lineal y disponiéndose de la tabla óptima obtenida por el Método Simplex, se pide:

1. Identificar todas las incógnitas del problema (directo).

   Variables:

   x1: Cantidad de docenas de tipo A a producir por mes

   x2: Cantidad de docenas de tipo B a producir por mes

   x3: Cantidad de docenas de tipo C a producir por mes

   x4: Sobrante de Máquina 1 (horas por mes)

   x5: Sobrante de Máquina 2 (horas por mes)

   x6: Sobrante de Máquina 3 (horas por mes)

   x7: Demanda insatisfecha de A (docenas por mes)

   x8: Demanda insatisfecha de B (docenas por mes)

   x9: Excedente sobre el mínimo impuesto de B (docenas por mes)

Problema 6.3

Habiéndose resuelto el problema por programación lineal y disponiéndose de la tabla óptima obtenida por el Método Simplex, se pide:

2. Informar sobre el significado de la solución óptima obtenida.

			50	40	30							-M
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	μ_9
	x_4	160	0.8	0.8	0.3	1	0	0	0	0	0	0
	x_5	180	0.6	1.2	0	0	1	0	0	0	0	0
	x_6	110	0.6	1	0.6	0	0	1	0	0	0	0
	x_7	100	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	x_8	120	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
-M	μ_9	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1

	x_4	56	0	0	-0.5	1	0	-1.33	0	0	-0.53
	x_5	54	0	0	-0.6	0	1	-1	0	0	0.2
50	x_1	50	1	0	1	0	0	1.66	0	0	1.667
	x_7	50	0	0	-1	0	0	-1.66	1	0	-1.66
	x_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
40	x_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	Z =	5700	0	0	20	0	0	83.33	0	0	43.33

Programación Lineal. Formulación con variables enteras

	x_4	56	0	0	-0.5	1	0	-1.33	0	0	-0.53
	x_5	54	0	0	-0.6	0	1	-1	0	0	0.2
50	x_1	50	1	0	1	0	0	1.66	0	0	1.667
	x_7	50	0	0	-1	0	0	-1.66	1	0	-1.66
	x_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
40	x_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	Z =	5700	0	0	20	0	0	83.33	0	0	43.33

2. Informar sobre el significado de la solución óptima obtenida.

- Las máquinas 1 y 2 no se utilizarán plenamente (sobrarán 56 y 54 horas semanales, respectivamente).
- La máquina 3, en cambio, estará saturada. Se podría paga hasta $83.33 por hora adicional de este recurso.
- Se deben producir 50 docenas de A y 80 de B.
- No es conveniente producir C. Para que convenga producirlo, su beneficio debería incrementarse en por lo menos $20.
- La fabricación de los productos A y B no cubrirá la demanda
- La producción de B estará en el mínimo impuesto. Por cada docena que se baje el requerimiento mínimo el beneficio mensual aumentaría en $43.33.

Programación Lineal. Formulación con variables enteras

	x_4	56	0	0	-0.5	1	0	-1.33	0	0	-0.53
	x_5	54	0	0	-0.6	0	1	-1	0	0	0.2
50	x_1	50	1	0	1	0	0	1.66	0	0	1.667
	x_7	50	0	0	-1	0	0	-1.66	1	0	-1.66
	x_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
40	x_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	Z =	5700	0	0	20	0	0	83.33	0	0	43.33

3. Calcular el rango de variación de cada coeficiente cj, dentro del cual no se altera la estructura de la solución óptima hallada.

No se altera la estructura - > todos (zj – cj) son > 0 **c1, c2, c3 = (50, 40, 30)**

c1… x1 esta en la base

C1 – 30 > 0 **C1 > 30**

C1 * 1.667 > 0 **C1 > 0**

C1 * 1.667 – 40 > 0 **C1> 40/1.667 = 23.9** **C1 > 30 C1 = { 30, +inf}**

Programación Lineal. Formulación con variables enteras

	x_4	56	0	0	-0.5	1	0	-1.33	0	0	-0.53
	x_5	54	0	0	-0.6	0	1	-1	0	0	0.2
50	x_1	50	1	0	1	0	0	1.66	0	0	1.667
	x_7	50	0	0	-1	0	0	-1.66	1	0	-1.66
	x_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
40	x_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	Z =	5700	0	0	20	0	0	83.33	0	0	43.33

3. Calcular el rango de variación de cada coeficiente cj, dentro del cual no se altera la estructura de la solución óptima hallada.

X2 esta en la base

C2 sup -> que hace 0 los zj-cj

50* 1.667 -1*C2 > 0 **C2 < 83.33** **C2 = { -inf, 83.33 }**

X3 no esta en la base

50 – C3 > 0 **C3 < 50** **C3 = { -inf, 50}**

Programación Lineal. Formulación con variables enteras

	x_4	56	0	0	-0.5	1	0	-1.33	0	0	-0.53
	x_5	54	0	0	-0.6	0	1	-1	0	0	0.2
50	x_1	50	1	0	1	0	0	1.66	0	0	1.667
	x_7	50	0	0	-1	0	0	-1.66	1	0	-1.66
	x_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
40	x_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	Z =	5700	0	0	20	0	0	83.33	0	0	43.33

4. Obtener la tabla óptima del problema dual.

			160	180	110	110	120	-80			
110	y_3	83.33	1.333	1	1	1.667	0		-1.667	0	
-80	y_6	43.33	0.533	-0.2		1.667	-1	1	-1.667	1	
0	y_9	20	0.5	0.6		1	0		-1	0	1
	Z =	5700	-56	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
			x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_1	x_2	x_3

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 6.3

5 y 6 . Identificar todas las incógnitas del problema. Explicar la solución del problema dual

			160	180	110	110	120	-80			
110	y_3	83.33	1.333	1	1	1.667	0		-1.667	0	
-80	y_6	43.33	0.533	-0.2		1.667	-1	1	-1.667	1	
0	y_9	20	0.5	0.6		1	0		-1	0	1
	Z =	5700	-56	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
			x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_1	x_2	x_3

y1= 0: Valor marginal (o precio sombra) de la Máquina 1
y2= 0: Ídem para la Máquina 2.
y3= 83.33: Ídem para la Máquina 3.
y4 = 0: Valor marginal (o precio sombra) de la demanda de A
y5 = 0: Ídem para el producto B.
y6 = 43.33: Valor marginal del requerimiento mínimo de B
y7 = 0: Costo de oportunidad (costo reducido) del producto A
y8 = 0: Ídem para el producto B.
y9 = 20: Ídem para el producto C.

Problema 6.3

7. Rango de variación de los coeficientes bj

			160	180	110	110	120	-80			
110	y_3	83.33	1.333	1	1	1.667	0		-1.667	0	
-80	y_6	43.33	0.533	-0.2		1.667	-1	1	-1.667	1	
0	y_9	20	0.5	0.6		1	0		-1	0	1
	Z =	5700	-56	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
			x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_1	x_2	x_3

b1sup = +inf
b1 inf = 160 – 56 = 104

b2sup = +inf
b2inf = 180 – 54 = 126

b3sup = 110 + min{56/1.333, 54/1, 50/1.666} = 130
b3inf = 110 – min{50/1.666} = 80

VARIABLES NO BÁSICAS

$c_{j\ LIM}$	MAX	MIN
SUP.	$c_j + (z_j - c_j)$	$\nexists$
INF.	$\nexists$	$c_j - (z_j - c_j)$

VARIABLES BÁSICAS

$$c_{jLIM} = c_j \pm \left| \frac{z_j - cj}{a_{ij}} \right|_{MIN}$$

a_{ij}	MAX	MIN
SUP.	-	+
INF.	+	-

Problema 6.3

7. Rango de variación de los coeficientes bj

			160	180	110	110	120	-80			
110	y_3	83.33	1.333	1	1	1.667	0		-1.667	0	
-80	y_6	43.33	0.533	-0.2		1.667	-1	1	-1.667	1	
0	y_9	20	0.5	0.6		1	0		-1	0	1
	Z =	5700	-56	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
			x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_1	x_2	x_3

b4 sup = +inf
b4 inf = 110 - 50 = 60

b5sup = +inf
b5inf = 120 – 40 = 80

b6sup = -80 + min{56/0.533, 50/1,667, 80/1} = -50
b6inf = -80 – min{54/0.2, 40/1, 50/1.667} = -110

VARIABLES NO BÁSICAS

$c_{j\ LIM}$	MAX	MIN
SUP.	$c_j + (z_j - c_j)$	$\nexists$
INF.	$\nexists$	$c_j - (z_j - c_j)$

VARIABLES BÁSICAS

$$c_{jLIM} = c_j \pm \left| \frac{z_j - cj}{a_{ij}} \right|_{MIN}$$

a_{ij}	MAX	MIN
SUP.	-	+
INF.	+	-

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 6.3

8. ¿Qué ocurre si el margen de beneficios del producto C se eleva a 35 $/docena?

			50	40	65 ~~30~~						
	x_4	56	0	0	-0.5	1	0	-1.33	0	0	-0.53
	x_5	54	0	0	-0.6	0	1	-1	0	0	0.2
50	x_1	50	1	0	1	0	0	1.66	0	0	1.667
	x_7	50	0	0	-1	0	0	-1.66	1	0	-1.66
	x_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
40	x_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	Z =	5700	0	0	20	0	0	83.33	0	0	43.33
					-15						

convendría introducir C en la línea de producción, dado que el costo de oportunidad actual es de $20.

Problema 6.3

9. ¿Qué ocurre si la disponibilidad de Equipo 1 se torna inferior a 104 hs/mes?

			104 ~~160~~	180	110	110	120	-80			
110	y_3	83.33	1.333	1	1	1.667	0		-1.667	0	
-80	y_6	43.33	0.533	-0.2		1.667	-1	1	-1.667	1	
0	y_9	20	0.5	0.6		1	0		-1	0	1
	Z =	5700	~~-56~~ + 0	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0

la variable correspondiente (y1) se debe activar.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 6.3

10. ¿Qué ocurre si la disponibilidad de Equipo 3 disminuye en más de 30 hs.?

					30						
30			160	180	~~110~~	110	120	-80			
~~110~~	y_3	83.33	1.333	1	1	1.667	0		-1.667	0	
-80	y_6	43.33	0.533	-0.2		1.667	-1	1	-1.667	1	
0	y_9	20	0.5	0.6		1	0		-1	0	1
	Z =	5700	-56	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
			-	-		-			0		

Todos bi/aij negativos

Directo Incompatible ← **Polígono abierto**

Problema 6.3

11. ¿A que precio se pueden vender 30 horas del Equipo 3?

	x_4	56	0	0	-0.5	1	0	-1.33	0	0	-0.53
	x_5	54	0	0	-0.6	0	1	-1	0	0	0.2
50	x_1	50	1	0	1	0	0	1.66	0	0	1.667
	x_7	50	0	0	-1	0	0	-1.66	1	0	-1.66
	x_8	40	0	0	0	0	0	0	0	1	1
40	x_2	80	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
	Z =	5700	0	0	20	0	0	83.33	0	0	43.33

$83.33 x 30 = $2500

Equipo 3: variable dual y3, con b3=110 variando en {80, 130}

Problema 6.3

12. ¿Convendrá producir el producto D, nuevo, cuyo insumo de los equipos 1, 2 y 3 es respectivamente 1.4; 1.2 y 0.5 hs. por docena; no tiene restricción de demanda y su margen de beneficios es de 45 $/docena?

Del problema dual

$1.4 \cdot y1 + 1.2 \cdot y2 + 0.5 \cdot y3 = 0.5 \cdot 83.33 = 41.66$

Dado que 45 > 41.66 (es decir el beneficio por fabricar es mayor que el beneficio por no fabricar), convendría fabricarlo.

Problema 6.3

13. ¿Convendrá producir el producto E, nuevo, cuyo insumo de los equipos 1, 2 y 3 es respectivamente 1.0; 1.2 y 1.0 hs. por docena; no tiene restricción de demanda y su margen de beneficios es de 75 $/docena?

Del problema dual

$1.0 \cdot y1 + 1.2 \cdot y2 + 1 \cdot y3 = 83.33 = 83.33$

No, ya que el beneficio por no fabricar es mayor que el beneficio por fabricar.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 6.3

14. ¿Qué ocurre si la dirección decide producir un mínimo de 60 docenas mensuales de B en vez de la cifra actual de 80? ¿Cuánto pasa a valer el funcional?

								-60			
			160	180	110	110	120	~~-80~~			
110	y_3	83.33	1.333	1	1	1.667	0		-1.667	0	
-60 ~~-80~~	y_6	43.33	0.533	-0.2		1.667	-1	1	-1.667	1	
0	y_9	20	0.5	0.6		1	0		-1	0	1
	Z =	5700	-56	-54	0	-50	-40	0	-50	-80	0
	Z =	6566.67	-45.33	-58	0	-26.67	-60	0	-83.33	-60	0

Del problema dual

La solución dual no cambia. Se deben producir 83.33 docenas de A por semana, 60 de B y nada de C. El sobrante del equipo 1 será de 45.33 horas, el sobrante del equipo 2 de 58 horas, el equipo 3 seguirá saturado. Por su parte, la demanda insatisfecha de A será de 26.67 docenas, y la de B de 60 docenas.

Problema 6.4

Para el ejercicio 2.4 se pide:

1) Definir las variables del problema (directo y dual)Tabla directa primera y ultima

Un taller de tejido de pullovers elabora varios modelos, los que se pueden agrupar desde el punto de vista técnico-económico en tres tipos de prendas diferentes: A, B y C.

El taller posee 2 máquinas: I y II. Los pullovers A solo se pueden fabricar en la máquina I, los C en la II y los B en la I o en la II.

Las dos máquinas trabajan 2 turnos de 8 horas de lunes a viernes.

La materia prima utilizada es lana de dos calidades distintas: M se usa para los A y C, y N para los de tipo B. De la lana M es posible conseguir hasta 20 kg. por semana y de la N hasta 36 Kg. por semana.

Problema 6.4

Para el ejercicio 2.4 se pide:

1) Definir las variables del problema (directo y dual)Tabla directa primera y ultima

X1: Producción de pullovers tipo A (unidades/semana)
X2: Producción de pullovers tipo B en máquina I (unidades/semana)
X3: : Producción de pullovers tipo B en máquina II (unidades/semana)
X4: Producción de pullovers tipo C (unidades/semana)

```
MAX 1000·X1 + 1500·B1 + 1500·B2 + 1800·C
ST
MAQ1) 5·X1 + 6·X2 ≤ 80
MAQ2) 4·X3 + 4·X4 ≤ 80
LANAM) 1.6·X1 + 1.2·X4 ≤ 20
LANAN) 1.8·X2 + 1.8·X3 ≤ 36
REQB) X2 + X3 ≥ 10
```

Problema 6.4

Para el ejercicio 2.4 se pide:

1) Definir las variables del problema (directo y dual)

Tabla directa primera y ultima

			1000	1500	1500	1800						-M
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	μ_9
0	x_5	80	5	6	0	0	1	0	0	0	0	0
0	x_6	80	0	0	4	4	0	1	0	0	0	0
0	x_7	20	1.6	0	0	1.2	0	0	1	0	0	0
0	x_8	36	0	1.8	1.8	0	0	0	0	1	0	0
-M	μ_9	10	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	1
	x_9	6.66	-0.5	0	0	0	0.166	0.250	-0.833	0	1	
1500	x_3	3.33	-1.33	0	1	0	0	0.250	-0.833	0	0	
1800	x_4	16.66	1.33	0	0	1	0	0	0.833	0	0	
	x_8	6.00	0.9	0	0	0	-0.3	-0.45	1.5	1	0	
1500	x_2	13.33	0.833	1	0	0	0.16	0	0	0	0	
	Z =	55000	650	0	0	0	250	375	250	0	0	
			y_6	y_7	y_8	y_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	

Problema 6.4

Para el ejercicio 2.4 se pide:

1) Definir las variables del problema (directo y dual)

La formulación del problema es:

```
Max Z = 1000 x1 + 1500 x2 + 1500 x3 + 1800 x4
I)    5 x1 +  6 x2                          <= 80
II)                     4 x3 +   4 x4 <= 80
M) 1.6 x1 +                      1.2 x4 <= 20
N)          1.8 x2 + 1.8 x3                <= 36
BMIN)           x2 +     x3                >= 10
```

Problema 6.4

Para el ejercicio 2.4 se pide:

1) Definir las variables del problema (directo y dual)

Variables directas

x1 = Producción de pullovers tipo A (unidades/semana)

x2 = Producción de pullovers tipo B en máquina I (unidades/semana)

x3 = Producción de pullovers tipo B en máquina II (unidades/semana)

x4 = Producción de pullovers tipo C (unidades/semana)

x5 = Sobrante de Máquina I (horas/semana)

x6 = Sobrante de Máquina II (horas/semana)

x7 = Sobrante de Lana M (Kg/semana)

x8 = Sobrante de Lana N (Kg/semana)

x9 = Excedente sobre mínimo impuesto de pullovers B (unidades/semana)

Problema 6.4

Variables duales:

y1 = Valor marginal Máquina I (representa el incremento en el funcional por cada hora adicional que se pueda disponer por semana).

y2 = Valor marginal Máquina II (representa el incremento en el funcional por cada hora adicional que se pueda disponer por semana).

y3 = Valor marginal Lana M (representa el incremento en el funcional por cada Kg adicional que se pueda disponer por semana).

y4 = Valor marginal Lana N (representa el incremento en el funcional por cada Kg adicional que se pueda disponer por semana).

y5 = Valor marginal restricción de mínimo de pullovers B (representa el incremento en el funcional por cada unidad adicional que se disminuya la restricción).

y6 = Costo de oportunidad de A (representa la disminución en el funcional por cada unidad de pullovers de tipo A que se fabrique si no es conveniente producirlos).

y7 = Costo de oportunidad de A (representa la disminución en el funcional por cada unidad de pullovers de tipo B en la máquina I que se fabrique si no es conveniente producirlos).

y8 = Costo de oportunidad de B en la máquina II (representa la disminución en el funcional por cada unidad de pullovers de tipo A que se fabrique si no es conveniente producirlos).

y9 = Costo de oportunidad de C (representa la disminución en el funcional por cada unidad de pullovers de tipo A que se fabrique si no es conveniente producirlos).

Problema 6.4

2. Expresar la solución en términos de un programa de producción, indicando el porcentaje de utilización de los recursos.

Pullover	Producción
A	0
B en I	13.33
B en II	3.33
C	16.66

Recurso	Utilización	%
Máquina I	80	100
Máquina II	80	100
Lana M	20	100
Lana N	30	83

Problema 6.4

3. Valores marginales y costos de oportunidad

y1 = 250 $/h: lo que estaríamos dispuestos a pagar por una hora adicional de la Máquina I

y2 = 375 $/h: lo que estaríamos dispuestos a pagar por una hora adicional de la Máquina II

y3 = 250 $/h: lo que estaríamos dispuestos a pagar por un Kg adicional de lana M

y6 = 650 $/u: es el costo en el que se incurriría por fabricar un pullover tipo A.

Si el beneficio unitario de A fuera mayor a $1650, entonces convendría fabricarlo.

			1000	1500	1500	1800						-M
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	μ_9
0	x_5	80	5	6	0	0	1	0	0	0	0	0
0	x_6	80	0	0	4	4	0	1	0	0	0	0
0	x_7	20	1.6	0	0	1.2	0	0	1	0	0	0
0	x_8	36	0	1.8	1.8	0	0	0	0	1	0	0
-M	μ_9	10	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	1
	x_9	6.66	-0.5	0	0	0	0.166	0.250	-0.833	0	1	
1500	x_3	3.33	-1.33	0	1	0	0	0.250	-0.833	0	0	
1800	x_4	16.66	1.33	0	0	1	0	0	0.833	0	0	
	x_8	6.00	0.9	0	0	0	-0.3	-0.45	1.5	1	0	
1500	x_2	13.33	0.833	1	0	0	0.16	0	0	0	0	
	Z =	55000	650	0	0	0	250	375	250	0	0	
			y_6	y_7	y_8	y_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	

Problema 6.4

4. Rangos de variación de los coeficientes de costo. C1

C1=1000

	x_9	6.66	-0.5	0	0	0	0.166	0.250	-0.833	0	1
1500	x_3	3.33	-1.33	0	1	0	0	0.250	-0.833	0	0
1800	x_4	16.66	1.33	0	0	1	0	0	0.833	0	0
	x_8	6.00	0.9	0	0	0	-0.3	-0.45	1.5	1	0
1500	x_2	13.33	0.833	1	0	0	0.16	0	0	0	0
	Z =	55000	650	0	0	0	250	375	250	0	0
			y_6	y_7	y_8	y_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

1500 * -1.33 + 1800 * 1.33 + 1500 * 0.833 - C1 > 0

C1 = 1650 -> C1 = {-inf, 1650}

Problema 6.4

4. Rangos de variación de los coeficientes de costo. C2

C2=1500

		x_9	6.66	-0.5	0	0	0	0.166	0.250	-0.833	0	1
	1500	x_3	3.33	-1.33	0	1	0	0	0.250	-0.833	0	0
	1800	x_4	16.66	1.33	0	0	1	0	0	0.833	0	0
		x_8	6.00	0.9	0	0	0	-0.3	-0.45	1.5	1	0
C2	1500	x_2	13.33	0.833	1	0	0	0.16	0	0	0	0
		Z =	55000	650	0	0	0	250	375	250	0	0
				y_6	y_7	y_8	y_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

todos los zj-cj son positivos->

1500 * -1.33 + 1800 * 1.33 + C2 * 0.833 -1000 > 0 C2 > 720

C2 * 0.16 = 0 C2 > 0

C2 = {720, +inf}

Problema 6.4

4. Rangos de variación de las restricciones bj

							80	80	20	36	10
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
			y6	y7	y8	y9	y1	y2	y3	y4	y5
80	y1	250		-0.1633	0	0	1			0.3	-0.166
80	y2	375		0	0.25	0		1		0.45	-0.25
20	y3	250		0	-0.8333	-0.833			1	-1.5	0.833
	y6	650	1	-0.833	1.33	-0.833				-0.9	0.5
			0	-13.33	3.33	-16.66	0	0	0	-6	-6.66

b4 = {36 -6, inf} = {30, inf} limite maximo

b5 = { -inf, 10 -6.66} = {-inf, 16.66} limite minimo

VARIABLES NO BÁSICAS

$c_{j\ LIM}$	MAX	MIN
SUP.	$c_j + (z_j - c_j)$	$\nexists$
INF.	$\nexists$	$c_j - (z_j - c_j)$

Problema 7.4

Un supermercado que funciona las 24 horas tiene los siguientes requerimientos mínimos para los cajeros:

Periodo	1	2	3	4	5	6
Turno	3-7hs	7-11hs	11-15hs	15-19hs	19-23hs	23-3hs
Número mínimo	7	20	14	20	10	5

Cada cajero trabaja 8 horas consecutivas. Los turnos comienzan al inicio de cualquiera de los 6 periodos.

Determinar la cantidad de empleados que deberán disponerse en cada turno para satisfacer las necesidades con el mínimo del personal.

Problema 7.4

Esquema:

Problema 7.4

Variables:

Ei: Cantidad de empleados que empiezan en el turno i (variable entera)

E3: Cantidad de empleados que empiezan a las 3.

Problema 7.4

Restricciones:

A las 7 debe haber 20 empleados

R7)	E7 + E3	≥ 20 empleados

A las 11 debe haber 14 empleados

R11)	E11 + E7	≥ 14 empleados
R15)	E15 + E11	≥ 20 empleados
R19)	E19 + E15	≥ 10 empleados
R23)	E23 + E19	≥ 5 empleados
R3)	E3 + E23	≥ 7 empleados

Problema 7.4

Funcional:

Cantidad mínima de empleados:

MIN) E3 + E7 + E11 + E15 + E19 + E23

Problema 7.6

Una empresa organizadora de exposiciones está considerando la exhibición de 5 productos de diferentes compañías en 50 m2 de espacio de estantes disponibles para exhibiciones. Los requerimientos de espacio de cada compañía y el pago ofrecido por cada una de ellas es el siguiente:

Producto	Compañía	Pago $	Requer.m^2
1	A	100	17
2	B	75	15
3	C	115	20
4	D	50	15
5	E	135	20

¿Cómo debe asignar su espacio para maximizar los ingresos?

Problema 7.6

Esquema:

Ejemplo: exhibo A, B y C

Prod	Comp	$	Req	Acti	$	Req
1	A	100	17	1	100	17
2	B	75	15	1	75	15
3	C	115	20	1	115	20
4	D	50	15	0	0	0
5	E	35	20	0	0	0
				Tot	290	52

No cumple restricción

Problema 7.6

Variables:

Activación: (A, B, C, D, E) binarias

Restricciones:

RE) $17 A + 15 B + 20 C + 15 D + 20 E \leq 50$

Funcional:

MAX) $100 A + 75 B + 115 C + 50 D + 135 E$

Problema 7.7

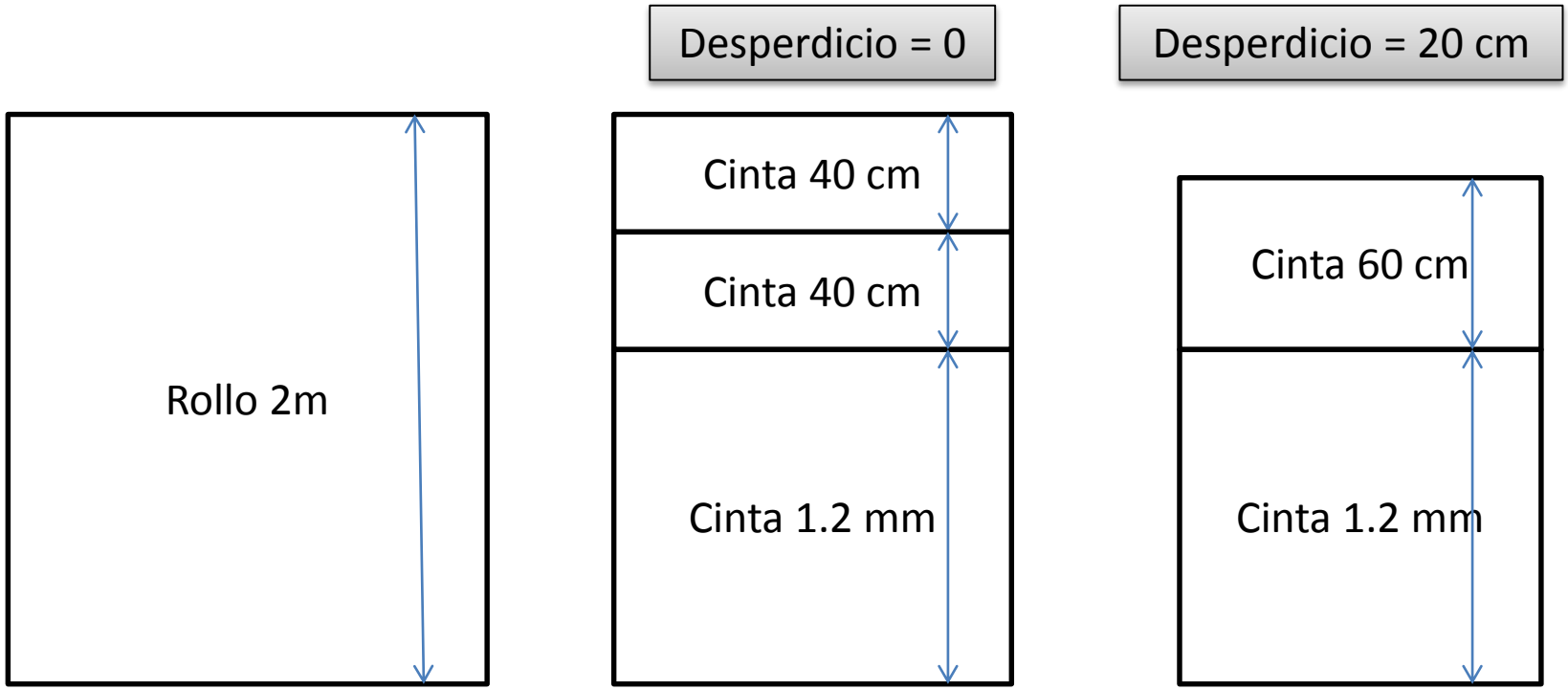
Una empresa compra rollos a 2 m, de ancho de papel de autoadhesivo y los vende, luego de cortarlos, en anchos de 40 cm., 60 cm., 70 cm., y 1.2 m.

La empresa tiene pedidos por 1000 rollos de 40 cm., 1500 rollos de 60 cm., 1600 rollos de 70 cm. y 1200 de 1.2 m.

Construir el modelo matemático que permita obtener la mejor distribución (mínimo desperdicio) para satisfacer la demanda.

Problema 7.7

Esquema:



Problema 7.7

Lo único que puedo hacer es especificar todos los tipos de cortes posibles:

	CT1	CT2	CT3	CT4	CT5	CT6	CT7	CT8	CT9	CT10	CT11	CT12	Requerim.
Tipo 1: 40cm	5	3	3	2	2	1	1						1000
Tipo 2: 60cm		1		2		1		3	2	1	1		1500
Tipo 3: 70cm			1			1	2		1	2		1	1600
Tipo 4: 120cm					1						1	1	1200
Desperdic:		20	10			30	20	20	10		20	10	

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Problema 7.7

	CT1	CT2	CT3	CT4	CT5	CT6	CT7	CT8	CT9	CT10	CT11	CT12	Requerim.
Tipo 1: 40cm	5	3	3	2	2	1	1						1000
Tipo 2: 60cm		1		2		1		3	2	1	1		1500
Tipo 3: 70cm			1			1	2		1	2		1	1600
Tipo 4: 120cm					1						1	1	1200

Variable:

CT(i) Cantidad de rollos que corto con el tipo de corte i

i: CT1, CT2

Problema 7.7

	CT1	CT2	CT3	CT4	CT5	CT6	CT7	CT8	CT9	CT10	CT11	CT12	Requerim.
Tipo 1: 40cm	5	3	3	2	2	1	1						1000
Tipo 2: 60cm		1		2		1		3	2	1	1		1500
Tipo 3: 70cm			1			1	2		1	2		1	1600
Tipo 4: 120cm					1						1	1	1200

Restricciones:

$$5.CT1 + 3.CT2 + 3.CT3 + 2.CT4 + 2.CT5 + CT6 + CT7 \geq 1000$$

$$CT2 + 2.CT4 + CT6 + 3.CT8 + 2.CT9 + CT10 + CT11 \geq 1500$$

$$CT3 + CT6 + 2.CT7 + CT9 + 2.CT10 + CT12 \geq 1600$$

$$CT5 + CT11 + CT12 \geq 1200$$

Problema 7.7

	CT1	CT2	CT3	CT4	CT5	CT6	CT7	CT8	CT9	CT10	CT11	CT12	Requerim.
Tipo 1: 40cm	5	3	3	2	2	1	1						1000
Tipo 2: 60cm		1		2		1		3	2	1	1		1500
Tipo 3: 70cm			1			1	2		1	2		1	1600
Tipo 4: 120cm					1						1	1	1200
Desperdic:		20	10			30	20	20	10		20	10	

Funcional: desperdicio (MIN)

d = 20.CT2 + 10.CT3 + 30.CT6 + 20.CT7 + 20.CT8 + 10.CT9 + 20.CT11 +10 .CT12

Problema 7.9

Se debe establecer una dieta que consta de 4 fuentes alimentarias satisfaciendo los siguientes requerimientos nutritivos mínimos (en unidades):

A	B	C	D	E
1000	2500	1500	2000	500

Las unidades que aporta 1 kg de cada fuente alimentaria son las siguientes:

	NUTRIENTES				
Fuente	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1	100	400	200	600	300
2	200	250	200	700	200
3	150	350	250	400	100
4	200	350	250	200	200

Fuente	Costo ($/kg)	Costo de Orden ($)	Disponibilidad (kg)
1	0.375	10	20
2	0.5	7,5	18
3	0.4	8	40
4	0.4	6	8

Los costos por kg, de cada fuente alimenticia, costos de la orden de compra y las disponibilidades de cada una de ellas son:

¿Cuántos kg. habrá que comprar de cada fuente alimentaria?

Problema 7.9

Esquema:

Lo diferente en este problema es el COSTO DE LA ORDEN.

Si pido 1 g de la Fuente uno ya tengo un costo de 10$.

Al costo de la orden tengo que sumarle el costo por Kg dependiendo de la cantidad de alimento que pida.

Variables:

X(i): Cantidad de Kg que voy a comprar de la fuente i. Continua positiva.

I(i): Variable binaria que se activa si se pide la fuente i.

Problema 7.9

	NUTRIENTES				
Fuente	A	B	C	D	E
1	100	400	200	600	300
2	200	250	200	700	200
3	150	350	250	400	100
4	200	350	250	200	200

Restricciones:

A) 100 X1 + 200 X2 + 150 X3 + 200 X4 >= 1000

B) 400 X1 + 250 X2 + 300 X3 + 350 X4 >= 2500

C) 200 X1 + 200 X2 + 250 X3 + 250 X4 >= 1500

D) 600 X1 + 700 X2 + 400 X3 + 200 X4 >= 2000

E) 300 X1 + 200 X2 + 100 X3 + 200 X4 >= 500

D1) X1 ≤ 20

D2) X2 ≤ 18

D3) X3 ≤ 40

D4) X4 ≤ 8

Fuente	Costo ($/kg)	Costo de Orden ($)	Disponibilidad (kg)
1	0.375	10	20
2	0.5	7,5	18
3	0.4	8	40
4	0.4	6	8

Problema 7.9

Fuente	Costo ($/kg)	Costo de Orden ($)	Disponibilidad (kg)
1	0.375	10	20
2	0.5	7,5	18
3	0.4	8	40
4	0.4	6	8

Funcional:

MIN Z) 0.375 X1 + 0.5 X2 + 0.4 X3 + 0.4 X4 + 10 I1 + 7.5 I2 + 8 I3 + 6 I4

Falta algo?

vincular X(i) con I(i)…

Una opción es:

$X1 - M.\ I1 \leq 0$

Otra opción mas directa es reemplazar:

$X1 \leq 20$ por $X1 \leq 20\ .I1$

D1) $X1 \leq 20.I1$
D2) $X2 \leq 18.I2$
D3) $X3 \leq 40.I3$
D4) $X4 \leq 8.I4$

Problema 7.12

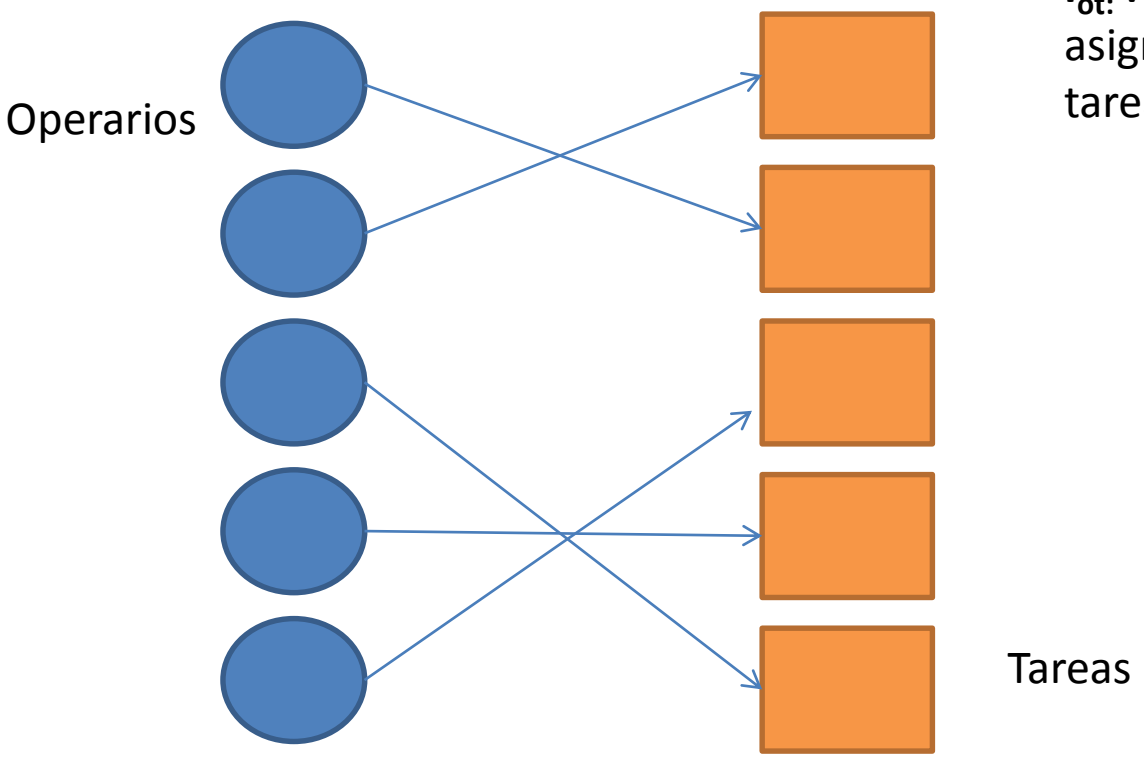
El gerente de una línea de producción de una empresa de electrónica debe asignar personal a 5 tareas. Existen 5 operadores disponibles para asignar. El gerente de línea tiene datos de prueba que reflejan una calificación numérica de productividad para cada operario en cada uno de los trabajos.

	Número de Trabajo				
Operario	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	12	16	24	8	2
2	6	8	20	14	6
3	10	6	16	18	12
4	2	4	2	24	20
5	7	10	6	6	18

Suponiendo que un operador pueda ejecutar un solo trabajo, plantear un modelo que lleve a la asignación óptima de tareas.

Problema 7.12

Esquema



$I_{ot:}$ variable binaria que indica la asignación del operario "o" a la tarea "t"

Problema 7.12

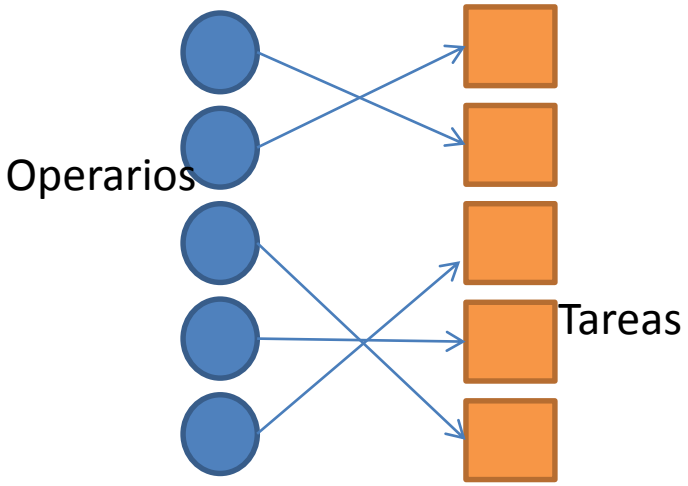
Restricciones

Suponiendo que un operador pueda ejecutar un solo trabajo, plantear un modelo que lleve a la asignación óptima de tareas.

$$\sum_{o} I_{ot} = 1$$

$$\sum_{t} I_{ot} = 1$$

I_{ot}: variable binaria que indica la asignación del operario "o" a la tarea "t"



Problema 7.12

Funcional

calificación numérica de productividad para cada operario en cada uno de los trabajos.

Supongo que la calificación es inversa. Mas calificación - menos productividad

$$\sum_{o,t} P_{ot} \cdot I_{ot} \qquad \text{Mínimo}$$

I_{ot}: variable binaria que indica la asignación del operario "o" a la tarea "t"

P_{ot}: productividad del operario "o" a la tarea "t"

	Número de Trabajo				
Operario	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	12	16	24	8	2
2	6	8	20	14	6
3	10	6	16	18	12
4	2	4	2	24	20
5	7	10	6	6	18