Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

CIC 117366 Lógica Computacional 1 - Turmas A e D **(2016/1)**

Estágiario de Docência: Thiago Mendonça Ferreira Ramos
thiagomendoncaferreiraramos N@SPAM yahoo.com.br
Monitora: Luiza Aguiar Hansen
luizaahansen N@SPAM gmail.com

24 de março de 2016

Lista: Lógica Proposicional - Dedução Natural

Em adição aos exercícios que aparecem nas notas de aula, solucione os listados a seguir. Nas sua derivações, sempre indique qual regra dedutiva é utilizada em cada passo.

1. Nos seguintes exercícios use a prova por indução na estrutura das fórmulas.
   (a) Demonstre que uma fórmula bem formada é balanceada, no sentido de que o número de parênteses abertos "("é igual ao de parêntese fechados ")", isto é, $|t|_(= |t|_)$.
   (b) Demonstre que para todo prefixo s de uma fórmula bem formada t, vale $|s|_(\geq |s|_)$.
   (c) Demonstre que a palavra vazia não é uma fórmula.
   (d) Demonstre que uma fórmula bem formada não tem prefixos próprios que são também fórmulas: Se t é uma fórmula bem formada e s é prefixo próprio de t então s não pode ser uma fórmula bem formada.
2. "Toda fórmula satisfatível é tautológica." Esta afirmação está correta? Justifique.
3. Construa a tabela de verdade e verifique se as fórmulas a seguir são tautologias, contradições ou contingências. Adicionalmente classifique-as como satisfatíveis ou insatisfatíveis:
   (a) $\psi \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))$
   (b) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\phi \wedge \delta \rightarrow \psi \wedge \gamma))$
   (c) $\phi \rightarrow \neg\phi$
   (d) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)$
   (e) $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \rightarrow \delta)) \wedge (\neg\phi \vee \delta)$
4. Mostre que $\neg\phi \rightarrow \neg\psi$ é consequência lógica de $\psi \rightarrow \phi$, e vice-versa.

5. A árvore de dedução abaixo está correta? Justifique e corrija caso a dedução esteja errada. (Lembre-se que "$a \leftrightarrow b$" abrevia "$(a \to b) \wedge (b \to a)$".)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi]^1 \qquad [\neg\phi \to \psi]^2}{\neg\phi}\,(\to_e)}{((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \to \neg\phi}\,(\to_i)\ 1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^3}{(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi}\,(\to_i)\ 2}{\neg\phi \to ((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi)}\,(\to_i)\ 3}{((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi}\,(\wedge_i)$$

6. Prove os sequentes a seguir utilizando apenas a lógica proposicional intuicionista:

   (a) $\neg\neg\neg\phi \dashv\vdash \neg\phi$.

   (b) $\neg\neg(\phi \to \psi) \vdash \neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$.

   (c) $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi$.

   (d) $\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$.

   (e) $(\phi \to \psi) \vdash \delta \vee \phi \to \delta \vee \psi$

   (f) $(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi) \dashv\vdash \delta \wedge (\phi \vee \psi)$ (Distributividade)

   Questões e itens "6e"e "6f"foram baseadas nos itens "b" e "e"da primeira questão em: http://wiki.di.uminho.pt/twiki/pub/Education/MFES/VF/exerciciosCoq.pdf

7. A lógica clássica é obtida acrescentando-se qualquer uma das seguintes regras à lógica proposicional intuicionista:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\phi}\,(\text{PPC}),u \qquad\qquad \dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\,\text{LTE}$$

$$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\,(\neg\neg\text{-e}) \qquad\qquad \dfrac{}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\,\text{LP}$$

   Prove que quaisquer três destas regras pode ser provada a partir da quarta regra restante, ou seja:

   (a) Adicione a regra PPC ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove os sequentes correspondentes à lei do terceiro excluído e à eliminação da dupla negação:

      i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

      ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

      iii. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

   (b) Adicione a regra ($\neg\neg$-e) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

ii. $\neg\phi \rightarrow \bot \vdash \phi$

iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

(c) Adicione a regra LTE ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \rightarrow \bot \vdash \phi$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

iii. $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

(d) Adicione a regra LP ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \rightarrow \bot \vdash \phi$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

iii. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

8. Construa provas para todas as variantes das regras MT e CP e indique quais derivações são da lógica clássica e quais da lógica intuicionista proposicional:

$$\frac{\pm\phi \rightarrow \pm\psi \qquad \mp\psi}{\mp\phi}\ (\mathrm{MT}_{1\text{ e }2}) \qquad\qquad \frac{\pm/\pm\phi \rightarrow \pm/\mp\psi}{\mp/\pm\psi \rightarrow \mp/\mp\phi}\ (\mathrm{CP}_{1,2,3\text{ e }4})$$

9. Construa deduções para provar que:

(a) $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \dashv\vdash \phi \wedge (\psi \wedge \varphi)$.

(b) $(\phi \vee \psi) \vee \varphi \dashv\vdash \phi \vee (\psi \vee \varphi)$.

(c) $\neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\phi \wedge \psi)$.

(d) $\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

(e) $\phi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$.

(f) $\phi \leftrightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \leftrightarrow \neg\psi$