Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

CIC 117366 Lógica Computacional 1 - Turmas A e D **(2016/1)**

Estágiario de Docência: Thiago Mendonça Ferreira Ramos
thiagomendoncaferreiraramos N@SPAM yahoo.com.br
Monitora: Luiza Aguiar Hansen
luizaahansen N@SPAM gmail.com

7 de abril de 2016

Lista: Lógica Proposicional - Dedução Natural (Gabarito)

Em adição aos exercícios que aparecem nas notas de aula, solucione os listados a seguir. Nas sua derivações, sempre indique qual regra dedutiva é utilizada em cada passo.

1. Nos seguintes exercícios use a prova por indução na estrutura das fórmulas.

   (a) Demonstre que uma fórmula bem formada é balanceada, no sentido de que o número de parênteses abertos "("é igual ao de parêntese fechados ")", isto é, $|\varphi|_(= |\varphi|_)$, para uma fórmula φ qualquer.
   Solução Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

   - Se φ for uma constante ou variável proposicional, então a propriedade vale por vacuidade, uma vez que neste caso φ não possui parênteses.
   - Se $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então por hipótese de indução $|\varphi_1|_(= |\varphi_1|_)$ e $|\varphi_2|_(= |\varphi_2|_)$, logo $|\varphi|_(= |(\varphi_1 \wedge \varphi_2)|_(= 1 + |\varphi_1|_(+ |\varphi_2|_(\stackrel{h.i.}{=} 1 + |\varphi_1|_) + |\varphi_2|_) = |(\varphi_1 \star \varphi_2)|_) = |\varphi|_)$.
   - Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então por hipótese de indução $|\varphi_1|_(= |\varphi_1|_)$, logo $|\varphi|_(= |(\neg\varphi_1)|_(= 1 + |\varphi_1|_(\stackrel{h.i.}{=} 1 + |\varphi_1|_) = |(\neg\varphi_1)|_) = |\varphi|_)$.

   (b) Demonstre que para todo prefixo s de uma fórmula bem formada φ, vale $|s|_(\geq |s|_)$.
   Solução Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

   - Se φ for uma constante ou variável proposicional, então os possíveis prefixos de φ são a palavra vazia ou φ. Em ambos os casos, temos que $|s|_(= 0 = |s|_)$, e portanto $|s|_(\geq |s|_)$.
   - Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então, por hipótese de indução, para qualquer prefixo s' de φ_1 temos que $|s'|_(\geq |s'|_)$. Adicionalmente, os possíveis prefixos de φ são $\epsilon, (, (\neg s'$ ou φ. Nos dois primeiros casos, ou quando $s = \varphi$, claramente temos que $|s|_(\geq |s|_)$. Se $s = (\neg s'$ então $|s|_(= 1 + |s'|_(\stackrel{h.i.}{\geq} 1 + |s'|_) > |s'|_) = |s|_)$, e portanto $|s|_(\geq |s|_)$.

- Se $\varphi = (\varphi \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então por hipótese de indução temos que se s_i é um prefixo de φ_i então $|s_i|_(\geq |s_i|_)$ ($i \in \{1, 2\}$). Os possíveis prefixos de φ são $\epsilon, (s_1, (\varphi_1 \wedge s_2$ e φ. No primeiro e no último casos, o resultado é trivial. Se $s = (s_1$ então $|s|_(= 1 + |s_1|_(\stackrel{h.i.}{\geq} 1 + |s_1|_) > |s_1|_) = |s|_)$, e portanto $|s|_(\geq |s|_)$. Se $s = (\varphi_1 \star s_2$ então $|\varphi_1|_(= |\varphi_1|_)$ já que φ_1 é uma fórmula bem formada. Portanto, $|s|_(= 1+|\varphi_1|_(+|s_2|_(= 1+|\varphi_1|_)+|s_2|_(\stackrel{h.i.}{\geq} 1+|\varphi_1|_)+|s_2|_) > |\varphi_1|_) + |s_2|_) = |s|_)$. Logo, $|s|_(\geq |s|_)$.

(c) Demonstre que a palavra vazia não é uma fórmula.
Solução Fórmulas da lógica proposicional são construídas de acordo com a seguinte gramática:

$$\varphi ::= \bot \mid \top \mid p \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi)$$

Desta forma, qualquer fórmula possui pelo menos um símbolo, e portanto a palavra vazia não é uma fórmula.

(d) Demonstre que uma fórmula bem formada não tem prefixos próprios que são também fórmulas: Se φ é uma fórmula bem formada e s é prefixo próprio de φ então s não pode ser uma fórmula bem formada.
Solução Consideramos cada um dos possíveis construtores para fórmulas:

- Se φ for uma constante ou variável proposicional então a propriedade vale por vacuidade, uma vez que φ não possui prefixos próprios.
- Se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ então os possíveis prefixos próprios de φ são $\epsilon, ($ e $(\neg s'$, onde s' é um prefixo próprio de φ_1. Os dois primeiros casos claramente não são fórmulas. Suponha que $s = (\neg s'$. Por hipótese de indução s' não é fórmula bem formada, e portanto s também não é.
- Se $\varphi = (\varphi \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ então os possíveis prefixos próprios de φ são $\epsilon, (s_1, (\varphi_1$ e $(\varphi_1 \star s_2$, onde s_i é prefixo próprio de φ_i ($i \in \{1, 2\}$). No primeiro e terceiro casos, não temos fórmulas. Se $s = (s_1$ [resp. $s = (\varphi_1 \star s)$] então por hipótese de indução s_1 [resp. s_2] não é fórmula bem formada, e portanto s não é fórmula bem formada.

2. "Toda fórmula satisfatível é tautológica." Esta afirmação está correta? Justifique.
Solução Não está, pois existem fórmulas que são satisfatíveis e que não são tautologias. Por exemplo, $a \rightarrow b$ satisfatível porque $I(a \rightarrow b) = T$ para a interpretação I tal que $I(a) = I(b) = T$. No entanto, para a interpretação I' tal que $I'(a) = T$ e $I'(b) = F$, temos que $I'(a \rightarrow b) = F$, e portanto $a \rightarrow b$ não é tautologia.

3. Construa a tabela de verdade e verifique se as fórmulas a seguir são tautologias, contradições ou contingências. Adicionalmente classifique-as como satisfatíveis ou insatisfatíveis:

(a) $\psi \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))$

Solução Tautologia, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	$\psi \rightarrow \phi$	$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$	$\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$	$\psi \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)))$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T

(b) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\phi \wedge \delta \rightarrow \psi \wedge \gamma))$

Solução Contingência, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	δ	γ	$\phi \rightarrow \psi$	$\delta \rightarrow \gamma$	$\phi \wedge \delta$	$\psi \wedge \gamma$	$\phi \wedge \delta \rightarrow \psi \wedge \gamma$	$(\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\phi \wedge \delta \rightarrow \psi \wedge \gamma)$
F	F	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	F	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	T	T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

(c) $\phi \rightarrow \neg\phi$

Solução Contingência, e portanto satisfatível.

ϕ	$\neg\phi$	$\phi \rightarrow \neg\phi$
F	T	T
T	F	F

(d) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)$

Solução Tautologia, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\psi \vee \phi$	$(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)$
F	F	F	F	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

(e) $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \rightarrow \delta)) \wedge (\neg\phi \vee \delta)$

Solução Contingência, e portanto satisfatível.

ϕ	ψ	δ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \rightarrow \delta$	$\neg\phi \vee \delta$	$(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \rightarrow \delta)$	$((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \rightarrow \delta)) \wedge (\neg\phi \vee \delta)$
F	F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	T	F
T	T	T	F	T	T	T	T	T

4. Mostre que $\neg\phi \rightarrow \neg\psi$ é consequência lógica de $\psi \rightarrow \phi$, e vice-versa.

Solução
Seja I uma interpretação qualquer. Temos as seguintes equivalências: $I(\psi \to \phi) = V \Leftrightarrow I(\psi) = F$ ou $I(\phi) = V \Leftrightarrow I(\neg\psi) = V$ ou $I(\neg\phi) = F \Leftrightarrow I((\neg\phi) \to (\neg\psi))$.

5. A árvore de dedução abaixo está correta? Justifique e corrija caso a dedução esteja errada. (Lembre-se que "$a \leftrightarrow b$" abrevia "$(a \to b) \wedge (b \to a)$".)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi]^1$}
\AxiomC{$[\neg\phi \to \psi]^2$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\to_i)$ 1}
\UnaryInfC{$((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \to \neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\phi]^3$}
\RightLabel{$(\to_i)$ 2}
\UnaryInfC{$(\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi$}
\RightLabel{$(\to_i)$ 3}
\UnaryInfC{$\neg\phi \to ((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi)$}
\RightLabel{$(\wedge_i)$}
\BinaryInfC{$((\neg\phi \to \psi) \to \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

Solução Não está correto, pois a hipótese 2 não está sendo descartada propriamente. Na prova acima há duas ramificações, e a hipótese 2 aparece na ramificação a esquerda, logo ela deve ser descartada nesta ramificação, e não na direita, como foi feito.

6. Prove os sequentes a seguir utilizando apenas a lógica proposicional intuicionista:

   (a) $\neg\neg\neg\phi \dashv\vdash \neg\phi$.
   Solução

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\neg\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\phi]^u$}
\AxiomC{$[\phi]^v$}
\LeftLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{$(\neg_i), u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi$}
\LeftLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{$(\neg_i), v$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\end{prooftree}
\qquad
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\neg\phi]^u$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i), u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

   (b) $\neg\neg(\phi \to \psi) \vdash \neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$.
   Solução

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\neg(\phi \to \psi)$}
\AxiomC{$[\neg\neg\phi]^u$}
\AxiomC{$[\neg\psi]^v$}
\AxiomC{$[\phi \to \psi]^x$}
\AxiomC{$[\phi]^y$}
\RightLabel{$(\to_e)$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i), y$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i), x$}
\UnaryInfC{$\neg(\phi \to \psi)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i), v$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$(\to_i), u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$}
\end{prooftree}
$$

(c) $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi$.
Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg(\phi\wedge\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u \qquad \dfrac{[\phi\wedge\psi]^v}{\phi}\,(\wedge_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\phi\wedge\psi)}\,(\neg_i), v}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\phi}\,(\neg_i), u \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg(\phi\wedge\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^x \qquad \dfrac{[\phi\wedge\psi]^y}{\psi}\,(\wedge_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\phi\wedge\psi)}\,(\neg_i), y}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\psi}\,(\neg_i), x}{\neg\neg\phi\wedge\neg\neg\psi}\,(\wedge_i)$$

(d) $\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$.
Solução

$$\dfrac{(\neg_i), u\;\dfrac{(\neg_e)\;\dfrac{\neg(\phi\vee\psi) \qquad (\vee_i)\;\dfrac{[\phi]^u}{\phi\vee\psi}}{\bot}}{\neg\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\phi\vee\psi) \qquad \dfrac{[\psi]^v}{\phi\vee\psi}\,(\vee_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\psi}\,(\neg_i), v}{\neg\phi\wedge\neg\psi}\,(\wedge_i)$$

$$\dfrac{\dfrac{[(\phi\vee\psi)]^u \qquad (\neg_e)\;\dfrac{(\wedge_e)\;\dfrac{(\neg\phi\wedge\neg\psi)}{\neg\phi} \qquad [\phi]^x}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{(\neg\phi\wedge\neg\psi)}{\neg\psi}\,(\wedge_e) \qquad [\psi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\vee_e), x, y}{\neg(\phi\vee\psi)}\,(\neg_i), u$$

(e) $\phi \to \psi \vdash \delta \vee \phi \to \delta \vee \psi$
Solução

$$\dfrac{\dfrac{[\delta\vee\phi]^z \qquad \dfrac{\dfrac{\phi\to\psi \qquad [\phi]^x}{\psi}\,(\to_e)}{\psi\vee\delta}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{[\delta]^y}{\psi\vee\delta}\,(\vee_i)}{\psi\vee\delta}\,(\vee_e)\;, x, y}{\delta\vee\phi\to\delta\vee\psi}\,(\to_i)\;, z$$

(f) $(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi) \dashv\vdash \delta \wedge (\phi \vee \psi)$ (Distributividade)
Solução

$$\dfrac{\dfrac{(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi) \qquad \dfrac{[\delta \wedge \phi]^u}{\delta}\,(\wedge_e) \qquad \dfrac{[\delta \wedge \psi]^v}{\delta}\,(\wedge_e)}{\delta}\,(\vee_e)\ u, v \qquad \dfrac{(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi) \qquad \dfrac{\dfrac{[\delta \wedge \phi]^x}{\phi}\,(\wedge_e)}{\phi \vee \psi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{\dfrac{[\delta \wedge \psi]^t}{\psi}\,(\wedge_e)}{\phi \vee \psi}\,(\vee_i)}{\phi \vee \psi}\,(\vee_e)\ x, t}{\delta \wedge (\phi \vee \psi)}\,\wedge i$$

$$\dfrac{\dfrac{\delta \wedge (\phi \vee \psi)}{\phi \vee \psi}\,(\wedge_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta \wedge (\phi \vee \psi)}{\delta}\,(\wedge_e) \qquad [\phi]^x}{\delta \wedge \phi}\,(\wedge_i)}{(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi)}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta \wedge (\phi \vee \psi)}{\delta}\,(\wedge_e) \qquad [\psi]^y}{\delta \wedge \psi}\,(\wedge_i)}{(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi)}\,(\vee_i)}{(\delta \wedge \phi) \vee (\delta \wedge \psi)}\,(\vee_e), x, y$$

Questões e itens “6e”e “6f”foram baseadas nos itens “b” e “e”da primeira questão em: `http://wiki.di.uminho.pt/twiki/pub/Education/MFES/VF/exerciciosCoq.pdf`

7. A lógica clássica é obtida acrescentando-se qualquer uma das seguintes regras à lógica proposicional intuicionista:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\phi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\phi}\,(\text{PPC}), u \qquad\qquad \dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\,\text{LTE}$$

$$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\,(\neg\neg\text{-e}) \qquad\qquad \dfrac{}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\,\text{LP}$$

Prove que quaisquer três destas regras pode ser provada a partir da quarta regra restante, ou seja:

(a) Adicione a regra PPC ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove os sequentes correspondentes à lei do terceiro excluído e à eliminação da dupla negação:

i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^v}{\phi \vee \neg\phi}\,(\vee_i) \qquad [\neg(\phi \vee \neg\phi)]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ , v}{\phi \vee \neg\phi}\,(\vee_i) \qquad [\neg(\phi \vee \neg\phi)]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi \vee \neg\phi}\,(\text{PPC})\ , u$$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\text{PPC})\ ,u$$

iii. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[((\phi\to\psi)\to\phi)]^x \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi\to\neg\phi}\,\to_i,\emptyset \qquad [\neg\psi]^v}{\neg\phi}\,(\to_e) \qquad [\phi]^w}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\text{PBC}),v}{\phi\to\psi}\,(\to_i),w}{}}{\phi}\,(\to_e) \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\text{PBC}),u}{((\phi\to\psi)\to\phi)\to\phi}\,(\to_i),x$$

(b) Adicione a regra ($\neg\neg$-e) ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\vdash \phi \vee \neg\phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^v}{\phi\vee\neg\phi}\,(\vee_i) \qquad [\neg(\phi\vee\neg\phi)]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ ,v}{\phi\vee\neg\phi}\,(\vee_i) \qquad [\neg(\phi\vee\neg\phi)]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg(\phi\vee\neg\phi)}\,(\neg_i)\ ,u}{\phi\vee\neg\phi}\,(\neg\neg\text{ -e})$$

ii. $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi\to\bot \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\,(\to_e)}{\neg\neg\phi}\,(\neg_i)}{\phi}\,(\neg\neg\text{ -e})$$

iii. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Solução

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^1 \qquad [\neg\phi]^y}{\bot}\;(\neg_e)}{\psi}\;(\bot_e)}{\phi \to \psi}\;(\to_i)\;,x \qquad [(\phi \to \psi) \to \phi]^z}{\phi}\;(\to_e) \qquad [\neg\phi]^y}{\bot}\;(\neg_e)}{\neg\neg\phi}\;(\neg_i)\;,y}{\phi}\;(\neg\neg\text{ -e})}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\;(\to_i)\;,z
$$

(c) Adicione a regra LEM ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$

Solução

$$
\dfrac{\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\;\text{LEM} \qquad [\phi]^v \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \bot \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\;(\to_e)}{\phi}\;(\bot_e)}{\phi}\;(\vee_e)\;,v,u
$$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

Solução

$$
\dfrac{\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\;\text{LEM} \qquad [\phi]^v \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi \qquad [\neg\phi]^u}{\bot}\;(\to_e)}{\phi}\;(\bot_e)}{\phi}\;(\vee_e)\;,v,u
$$

iii. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi \lor \neg\phi}\,\text{LEM} \qquad [\phi]^z \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi]^x \qquad [\phi]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\bot_e)}{\phi \to \psi}\,(\to_i)\ ,y \qquad [(\phi \to \psi) \to \phi]^w}{\phi}\,(\to_e)}{\phi}\,(\lor_e)\ ,x,z}{((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi}\,(\to_i)\ ,w$$

(d) Adicione a regra LP ao conjunto de regras da lógica proposicional intuicionista. Com este novo conjunto de regras prove:

i. $\neg\phi \to \bot \vdash \phi$

Solução

$$\dfrac{((\phi \to \neg\phi) \to \phi) \to \phi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \bot \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi \to \neg\phi]^x \qquad [\phi]^y}{\neg\phi}\,(\to_e) \qquad \neg\phi \to \bot}{\bot}\,(\to_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ y}{\bot}\,(\to_e)}{\phi}\,(\bot_e)}{(\phi \to \neg\phi) \to \phi}\,(\to_i)\ x}{\phi}\,(\to_e)$$

ii. $\neg\neg\phi \vdash \phi$

Solução

$$\dfrac{((\phi \to \neg\phi) \to \phi) \to \phi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi \qquad \dfrac{[\phi \to (\neg\phi)]^x \qquad \neg\neg\phi}{\neg\phi}\,(MT)}{\bot}\,(\neg_e)}{\phi}\,(\bot_e)}{(\phi \to \neg\phi) \to \phi}\,(\to_i)\ x}{\phi}\,(\to_e)$$

iii. $\vdash \phi \lor \neg\phi$

Solução

$$\dfrac{(((\phi \lor \neg\phi) \to \neg\phi) \to (\phi \lor \neg\phi)) \to (\phi \lor \neg\phi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^x \qquad \dfrac{[(\phi \lor \neg\phi) \to \neg\phi]^y \qquad \dfrac{[\phi]^x}{\phi \lor \neg\phi}\,(\lor_i)}{\neg\phi}\,(\to_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi}\,(\neg_i)\ x}{\phi \lor \neg\phi}\,(\lor_i)}{(((\phi \lor \neg\phi) \to \neg\phi) \to (\phi \lor \neg\phi))}\,(\to_i)\ y}{\phi \lor \neg\phi}\,(\to_e)$$

8. Construa provas para todas as variantes das regras MT e CP e indique quais derivações são da lógica clássica e quais da lógica intuicionista proposicional:

$$\frac{\pm\phi \to \pm\psi \qquad \mp\psi}{\mp\phi}\ (\mathrm{MT}_{1\ \mathrm{e}\ 2}) \qquad\qquad \frac{\pm/\pm\phi \to \pm/\mp\psi}{\mp/\pm\psi \to \mp/\mp\phi}\ (\mathrm{CP}_{1,2,3\ \mathrm{e}\ 4})$$

Solução

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \qquad [\phi]^x}{\psi}\ (\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\phi}\ (\neg_i)\ x$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \neg\psi \qquad [\neg\phi]^x}{\neg\psi}\ (\to_e) \qquad \psi}{\bot}\ (\neg_e)}{\phi}\ (\mathrm{PBC})\ x$$

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \quad [\neg\psi]^u}{\neg\phi}\ MT}{\neg\psi \to \neg\phi}\ (\to_i)\ u$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \neg\psi \qquad \dfrac{[\psi]^u}{\neg\neg\psi}\ (\neg\neg_i)}{\neg\neg\phi}\ MT}{\phi}\ (\neg\neg_e)}{\psi \to \phi}\ (\to_i)\ u$$

Intuicionista

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \neg\psi \qquad [\phi]^x}{\neg\psi}\ (\to_e) \qquad [\psi]^y}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\phi}\ (\neg_i)\ x}{\psi \to \neg\phi}\ (\to_i)\ y$$

Clássica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi \to \psi \qquad [\neg\phi]^x}{\psi}\ (\to_e) \qquad [\neg\psi]^y}{\bot}\ (\neg_e)}{\phi}\ (\mathrm{PBC})\ x}{\neg\psi \to \phi}\ (\to_i)\ y$$

9. Construa deduções para provar que:

(a) $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \dashv\vdash \phi \wedge (\psi \wedge \varphi)$.
Solução

$$\dfrac{\wedge_e\,\dfrac{\wedge_e\,\dfrac{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}{(\phi\wedge\psi)}}{\phi} \qquad \dfrac{\wedge_e\,\dfrac{\wedge_e\,\dfrac{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}{\phi\wedge\psi}}{\psi} \qquad \dfrac{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}{\varphi}\,\wedge_e}{(\psi\wedge\varphi)}\,\wedge_i}{\phi\wedge(\psi\wedge\varphi)}\,\wedge_i$$

$$\dfrac{\wedge_i\,\dfrac{\wedge_e\,\dfrac{\phi\wedge(\psi\wedge\varphi)}{\phi} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi\wedge(\psi\wedge\varphi)}{(\psi\wedge\varphi)}\,\wedge_e}{\psi}\,\wedge_e}{(\phi\wedge\psi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\phi\wedge(\psi\wedge\varphi)}{(\psi\wedge\varphi)}\,\wedge_e}{\varphi}\,\wedge_e}{(\phi\wedge\psi)\wedge\varphi}\,\wedge_i$$

(b) $(\phi \vee \psi) \vee \varphi \dashv\vdash \phi \vee (\psi \vee \varphi)$.
Solução

$$\dfrac{(\phi\vee\psi)\vee\varphi \qquad \dfrac{[(\phi\vee\psi)]^x \qquad \dfrac{[\phi]^z}{\phi\vee(\psi\vee\varphi)}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{\dfrac{[\psi]^w}{(\psi\vee\varphi)}\,(\vee_i)}{\phi\vee(\psi\vee\varphi)}\,(\vee_i)}{\phi\vee(\psi\vee\varphi)}\,(\vee_e)z,w \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^y}{(\psi\vee\varphi)}\,(\vee_i)}{\phi\vee(\psi\vee\varphi)}\,(\vee_i)}{\phi\vee(\psi\vee\varphi)}\,(\vee_e)x,y$$

$$\dfrac{\phi\vee(\psi\vee\varphi) \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi]^x}{(\phi\vee\psi)}\,(\vee_i)}{(\phi\vee\psi)\vee\varphi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{[(\psi\vee\varphi)]^y \qquad \dfrac{\dfrac{[\psi]^u}{(\phi\vee\psi)}\,(\vee_i)}{(\phi\vee\psi)\vee\varphi}\,(\vee_i) \qquad \dfrac{[\varphi]^v}{(\phi\vee\psi)\vee\varphi}\,(\vee_i)}{(\phi\vee\psi)\vee\varphi}\,(\vee_e)u,v}{(\phi\vee\psi)\vee\varphi}\,(\vee_e)x,y$$

(c) $\neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\phi \wedge \psi)$.
Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi\wedge\neg\neg\psi}{\neg\neg\phi}(\wedge_e)}{\phi}(\neg\neg\text{ -e}) \quad \dfrac{\dfrac{\neg\neg\phi\wedge\neg\neg\psi}{\neg\neg\psi}(\wedge_e)}{\psi}(\neg\neg\text{ -e})}{\phi\wedge\psi}(\wedge_i) \quad [\neg(\phi\wedge\psi)]^x}{\bot}(\neg_e)}{\neg\neg(\phi\wedge\psi)}(\neg_i)\ x$$

(d) $\phi\vee\psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi\wedge\neg\psi)$.
Solução

$$\dfrac{\dfrac{\phi\vee\psi \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi\wedge\neg\psi]^u}{\neg\phi}(\wedge_e)\quad [\phi]^x}{\bot}(\neg_e) \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi\wedge\neg\psi]^u}{\neg\psi}(\wedge_e)\quad [\psi]^y}{\bot}(\neg_e)}{\bot}(\vee_e), x, y}{\neg(\neg\phi\wedge\neg\psi)}(\neg_i), u$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\phi\wedge\neg\psi)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\vee\psi)]^w \quad \dfrac{[\phi]^u}{\phi\vee\psi}(\vee_i)}{\bot}(\neg_e)}{\neg\phi}(\neg_i), u \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\vee\psi)]^w\quad \dfrac{[\psi]^v}{\phi\vee\psi}(\vee_i)}{\bot}(\neg_e)}{\neg\psi}(\neg_i), v}{\neg\phi\wedge\neg\psi}(\wedge_i)}{\bot}(\neg_e)}{\phi\vee\psi}(\text{PBC})\ w$$

(e) $\phi\wedge\psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi\vee\neg\psi)$.
Solução

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\phi\vee\neg\psi]^u \quad \dfrac{\dfrac{\phi\wedge\psi}{\phi}(\wedge_e)\quad[\neg\phi]^x}{\bot}(\neg_e)\quad \dfrac{\dfrac{\phi\wedge\psi}{\psi}(\wedge_e)\quad [\neg\psi]^y}{\bot}(\neg_e)}{\bot}(\vee_e), x, y}{\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)}(\neg_i), u$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg\phi\vee\neg\psi)\quad \dfrac{\dfrac{}{\psi\vee\neg\psi}\text{LEM}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^z\quad[\psi]^x}{\phi\wedge\psi}(\wedge_i)\quad \neg(\phi\wedge\psi)}{\bot}(\neg_e)}{\neg\phi}(\neg_i)\ z}{\neg\phi\vee\neg\psi}(\vee_i)\quad \dfrac{[\neg\psi]^y}{\neg\phi\vee\neg\psi}(\vee_i)}{\neg\phi\vee\neg\psi}(\vee_e)\ x, y}{\bot}(\neg_e)}{\phi\wedge\psi}(\text{PBC}),\ u$$

(f) $\phi \leftrightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \leftrightarrow \neg\phi$

Solução

Inicialmente, observe que $\phi \leftrightarrow \psi \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)}{\phi \rightarrow \psi}\,(\wedge_e)}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi}\,CP_1 \qquad \dfrac{\dfrac{(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)}{\psi \rightarrow \phi}\,(\wedge_e)}{\neg\phi \rightarrow \neg\psi}\,CP_1}{(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \wedge (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)}\,(\wedge_i)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \wedge (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi}\,(\wedge_e)}{\phi \rightarrow \psi}\,CP_2 \qquad \dfrac{\dfrac{(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \wedge (\neg\phi \rightarrow \neg\psi)}{\neg\phi \rightarrow \neg\psi}\,(\wedge_e)}{\psi \rightarrow \phi}\,CP_2}{(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)}\,(\wedge_i)$$