

23 de maio de 2016

Lista: Lógica de Predicados
Derivações em Dedução Natural e Cálculo de Gentzen

Estagiário de docência: Thiago Ramos (thiagomendoncaferreiraramos@yahoo.com.br)

Monitora: Luiza Hansen (luizaahansen@gmail.com)

Em adição aos exercícios que aparecem nas notas de aula, faça os listados a seguir. Nas suas derivações, sempre indique qual regra dedutiva é utilizada em cada um dos passos.

1. Com derivações em Dedução Natural, prove as seguintes equivalências.

(a) $\neg\forall x \phi \dashv\vdash \exists x \neg\phi$

(b) $\forall x \phi \dashv\vdash \neg\exists x \neg\phi$

(c) $\exists x \phi \vdash \neg\forall x \neg\phi$

2. Apresente derivações em Dedução Natural, para os seguintes a seguir assumindo que x não ocorre livre em ψ :

(a) $(\forall x \phi) \wedge \psi \vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$

(b) $(\exists x \phi) \wedge \psi \vdash \exists x (\phi \wedge \psi)$

(c) $\forall x (\psi \rightarrow \phi) \vdash \psi \rightarrow \forall x \phi$

(d) $\forall x (\phi \rightarrow \psi) \vdash (\exists x \phi) \rightarrow \psi$

3. Prove os seguintes a seguir utilizando o Cálculo de Gentzen e indique se foi utilizada a lógica intuicionista ou clássica::

(a) $\phi \wedge \psi \vdash \phi$.

(b) $\neg(\phi \vee \psi) \vdash (\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

(c) $\neg\neg(\phi \wedge \psi) \vdash \neg\neg\phi \wedge \neg\neg\psi$.

(d) $\neg(\phi \vee \psi) \dashv\vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$.

(e) $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\delta \rightarrow \psi) \vdash (\phi \wedge \delta) \rightarrow \psi$.

(f) $(\phi \rightarrow \psi) \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$.

(g) $\vdash (\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

(h) $\vdash (\neg\neg\phi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\phi \rightarrow \psi)$.

(i) $(\phi \wedge (\psi \vee \delta)) \vdash ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \delta))$.

(j) $p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$

- (k) $\neg(\neg p \wedge \neg q) \vdash p \vee q$
4. Com derivações no Cálculo de Gentzen, prove as seguintes equivalências entre os quantificadores universal e existencial:
- (a) $\neg \forall x \phi \dashv\vdash \exists x \neg \phi$
 - (b) $\neg \exists x \phi \dashv\vdash \forall x \neg \phi$
 - (c) $\forall x \phi \dashv\vdash \neg \exists x \neg \phi$
 - (d) $\exists x \phi \vdash \neg \forall x \neg \phi$
5. Apresente derivações no Cálculo de Gentzen para os seguintes a seguir assumindo que x não ocorre livre em ψ nos itens (a), (b), (c) e (d). Para o item (g), assumo que x não ocorre livre em ϕ .
- (a) $(\forall x \phi) \vee \psi \vdash \forall x (\phi \vee \psi)$
 - (b) $(\exists x \phi) \vee \psi \vdash \exists x (\phi \vee \psi)$
 - (c) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \vdash (\forall x \phi) \rightarrow \psi$
 - (d) $\exists x (\psi \rightarrow \phi) \vdash \psi \rightarrow \exists x \phi$
 - (e) $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \dashv\vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$
 - (f) $\exists x \phi \vee \exists x \psi \dashv\vdash \exists x (\phi \vee \psi)$
 - (g) $\exists x (\phi \rightarrow q(x)) \dashv\vdash \phi \rightarrow \exists x q(x)$
 - (h) $\exists x (\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vdash \exists x (\neg(p(x) \wedge q(x)))$
 - (i) $\exists x (\neg p(x) \vee q(x)) \vdash \exists x (\neg(p(x) \wedge \neg q(x)))$
 - (j) $\forall x (p(x) \wedge q(x)) \vdash (\forall x p(x)) \wedge (\forall x q(x))$
 - (k) $(\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)) \vdash \forall x (p(x) \vee q(x))$
 - (l) $\exists x (p(x) \wedge q(x)) \vdash \exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$
 - (m) $\exists x p(x) \vee \exists x q(x) \vdash \exists x (p(x) \vee q(x))$
 - (n) $\forall x \forall y (p(y) \rightarrow q(x)) \vdash \exists y p(y) \rightarrow \forall x q(x)$
6. Conforme os teoremas de equivalência entre o Cálculo de Dedução Natural (CDN) e o de Gentzen (CG), relacione as regras de cada um destes cálculos com as do outro.
- Note que as questões difíceis estão relacionadas com como relacionar as regras estritamente clássicas de DN ((PBC), $(\neg\neg_e)$) e (LEM)) com elementos do CG, e como relacionar regras estruturais e (Cut) do CG com elementos do CDN.
7. Conforme experiência no desenvolvimento do projeto construa uma tabela que relacione as regras do CG com os comandos de prova (`split`), (`flatten`), (`inst`), (`Skolem`), (`lemma`), (`case`), (`copy`), (`hide`) do assistente de demonstração PVS. Note que será preciso discriminar a ação destas regras sobre fórmulas no antecedente e no sucedente de cada sequente.

8. Explique a semântica lógica do comando de especificação condicional `IF _ THEN _ ELSE _ ENDIF`. Deverá explicar qual a maneira como fórmulas do estilo `IF "C"THEN "T"ELSE "E"ENDIF` são interpretadas tanto no sucedente quanto no antecedente de sequentes no provador de PVS: qual o comando a aplicar, e qual o seu efeito, a uma fórmula `IF "C"THEN "T"ELSE "E"ENDIF` no antecedente e no sucedente?