Lie Group and Lie Algebra

朱鹏宇*

2023 年 03 月 31 日

摘要

本文是对于高年级研讨课程关于李群李代数的介绍后，经查阅相关文献进行总结形成的学习报告。内容主要涉及到一些相关基本概念等。文中将首先介绍李代数及李群的相关定义，最后不加证明地介绍关于李群的李代数. 此报告呈现的是笔者对于李群李代数及其关系的初步粗浅认识.

1 Lie Algebra

Definition 1.1 (李代数)**.** *对于一个域 F，设 L 是域 F 上的向量空间 (vector space), 若有一个双线性映射 (bilinear map)$[-,-]: L\times L \mapsto L$, 满足：*

$$[x,x]=0, x\in L \tag{L1}$$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \tag{L2}$$

则称 $(L,[-,-])$ 为域 F 上的李代数.

对于双线性映射 $[-,-]$ 需要满足的第二个条件 L2，我们称之为 $Jacobi$ 恒等式，李代数 $(L,[-,-])$ 的维数由向量空间 L 的维数所定义.

对于条件 L1，由双线性性质，注意到：

$$0=[x+y,x+y]=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=[x,y]+[y,x]$$

因此有：

$$[x,y]=-[y,x] \tag{L1'}$$

*E-mail:pyzhu@hainanu.edu.cn

事实上，当域 F 的特征不为 2 时，L1 可由 L1' 替换.

对于双线性映射 $[-,-]$，我们形象的称之为李括号 (lie bracket)，也称之为交换子 (commutator). [1]

对于李括号 $[-,-]$ 这里给两个小性质:

$$\forall v \in L, [v,0] = [0,v] = 0$$

事实上，将 $x = 0, y = 0, z = v$ 代数 *Jacobi* 恒等式即易得上式. 如果 $x, y \in L, [x,y] \neq 0$，那么 x, y 在域 F 上线性无关。利用双线性性质，这条也很容易得到。

下面给出一些 Lie Algebra 的例子.

Example 1.1. *对于 3 维欧式空间* $\mathbf{R}^3$*, 它是域* $\mathbf{R}$ *上的向量空间，定义其上的外积运算为李括号，即:*

$$[x,y] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1), x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3).$$

记这个李括号为 $\wedge$*，则* $(\mathbf{R}^3, \wedge)$ *构成一个李代数.*

Example 1.2. *对于域* F *上的有限维向量空间* V*，定义* $gl(V)$ *为其上线性变换的全体，*$gl(V)$ *也是域* F *上的向量空间，定义其上的李括号为：*

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f, f, g \in gl(V).$$

这也构成一个李代数.

以上都是经典的李代数的例子。除此之外，还有一个看起来比较平凡的例子，即李括号将乘积空间中的元素打到向量空间 V 的零元 (作为一个向量空间，V 首先是一个阿贝尔加法群).

2 Lie Group

这里我们从 topological manifold 出发，一步一步描述性地导出 lie group 的定义. 关于光滑流形的相关定义参考 John Lee 的拓扑流形导论和光滑流形导论。

对于一个 Hausdorff(保证极限的唯一性) 的拓扑空间 M, 如果它是第二可数的 (second countable), 并且对于任意一点 $p \in M$，存在一个 p 的邻域

[1] 我想应该大致是这么翻译的吧

U 与 $\mathbf{R}^n$ 同胚 (这称做 locally Euclidean of dimension n)，那么称 M 为 n 维 (拓扑) 流形。由此，我们可以进一步给出光滑流形的定义.

前面讲到，对于一个 n 维流形 M，它在其上任意一点 p 是局部可 n 维欧式化的，也就是存在一个 p 的邻域 U 与 $\mathbf{R}^n$ 同胚，我们设这个同胚映射为 $\phi : M \mapsto \mathbf{R}^n$, 那么我们称 (U, ϕ) 为一个 *coordinate chart*，也叫作 *chart*.

如果有一系列的 $chart : \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, 且 $M \subset \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$, 那么称这一系列的 *chart* 为 *atlas*[2].

可以看到，一个 *atlas* 覆盖了整个 n 维流形 M，且附带着一些局部开集 U(邻域 U) 上的同胚映射。这些局部开集可能会有交 (显然，其交集仍是一个开集)，对于两个 $chart : (U, \phi), (V, \psi)$，当 $U \cap V \neq \emptyset$，如果复合映射 $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \mapsto \psi(U \cap V)$ 是一个微分同胚[3]，那么称这两个 *chart* 是光滑相容的 (smoothly compatible)，$\psi \circ \phi^{-1}$ 称为一个局部坐标映射 (transition map), 其 domain 就是原本两个开集的交. 当两个 *chart* 对应开集的交集是空集时，自然地将这两个 *chart* 看作是光滑相容的.

如果一个 *atla* 的任意两个 *chart* 都光滑相容，我们就称这个 *atlas* 为 *smooth atlas*.

至此，对于这样的一个光滑 *atlas*，称之为 n 维流形 M 上的一个光滑结构[4].

现在我们终于可以给出光滑流形的定义：对于以个 n 维流形，它 equip with 一个光滑结构后就是一个光滑流形.

注意到，前文定义中的 transition map 实质上仍然是欧式空间上的映射，如果我们要求要求其实解析性 (某一点附近的幂级数展开性质), 那么称这样一个 equip 了实解析结构的流形为实解析流形。又注意到 $\mathbf{R}^{2n} \cong \mathbf{C}^n$，类似的可以定义复解析流形.

最后，我们终于能够给出李群的定义了！

Definition 2.1 (李群)**.** *对于一个解析流形 G, 若集合 G 上有一个二元 (乘法) 运算"$\times$",$(G, \times)$ 构成一个乘法群,(即其上还具有一个群结构 (group structure))，且映射 $f\, G \times G \mapsto G, (a, b) \mapsto ab$ 以及 $i\, G \mapsto G, a \mapsto a^{-1}$ 都是*

[2]有的地方称 chart 为图表，称 atlas 为图册, 我隐约觉得还差一点意思，所以后文还是沿用他们的英文单词，保留一定想象空间

[3]指其是一个 bijective 的 smooth function, 且其 inverse 也是 smooth function

[4]严谨地讲，光滑结构应该是由其完备 (complete) 光滑 atlas 所定义的，它们可以决定同样的流形上的光滑函数族 (流形上的光滑函数定义以及完备光滑 atlas 详见 GTM218)，时间所限，这里没有细致去探究.

解析映射，则称 G 为李群. 其维数由流形的维数所定义.

从定义中看可以看到，显然李群是一个拓扑群 (只要求乘积映射和逆映射的连续性)，这里不但要求了连续性，并将其增强到了解析性. 借用课堂上的一句话说：李群是一个具有相容的解析结构和拓扑结构的流形.

一些李群的例子：

Example 2.1. *显然* $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{C}^n$ *是很自然的李群.*

Example 2.2. $gl_n(\mathbf{R}), gl_n(\mathbf{C})$[5].

3 The Lie Algebra of A Lie Group

要想完整的给出李群的李代数的定义，还需要切空间、向量场 (左不变向量场) 等微分流形相关知识。限于自身知识水平、时间等，还有许多部分没有弄明白或者没有时间进一步学习[6]，以及篇幅所限，在这里，我们将不加证明地直接给出李群的李代数，这一部分内容也期待在后面的数学经历中完成学习.

概括地讲，李群的李代数应该是是其单位元处具有李代数结构的切空间 (参考李群和李代数，赵安旭著).

Proposition 3.1 (李群的李代数)**.** *设 G 是一个李群，G 上的所有左不变向量场构成的向量空间 g，在其李括号 $[X,Y] = XY - YX$ 下成为李代数，成为李群的李代数。*

这里 X, Y 指左不变向量场，其李括号的运算结果仍然是一个左不变向量场.

4 The End

至此，这篇学习报告到了结束的地方，庆幸生在这个信息社会，能让我快捷迅速地找到一些相关经典名著作参考。这篇学习报告的撰写过程中还好我发现自己那点儿知识储备根本不够看，只能让我知道该去哪儿找相关资料来看，也算是一定程度上激发了自身的斗志。另一方面也感慨于后续数学课程的魅力和深刻. 希望以后自己能有能力把这篇报告补充完整.

[5]应当承认，我现在对这个例子还不理解.

[6]其实已经学过的地方也很粗糙 qaq