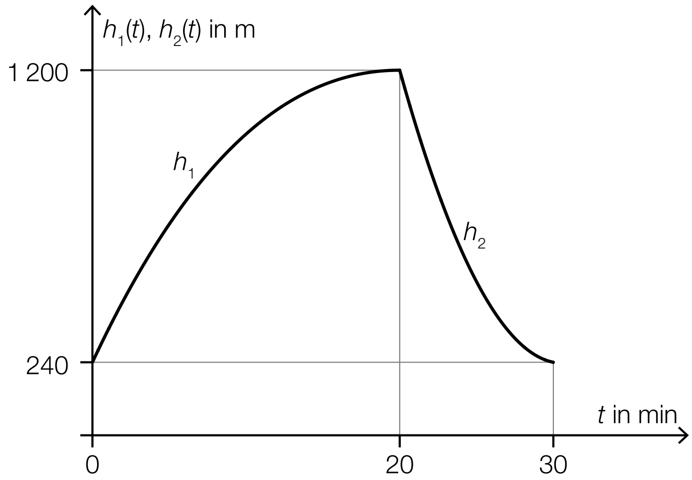
Ballonfahren

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel), in der sich ein Heißluftballon während einer bestimmten Fahrt befindet. Diese Seehöhe wird durch die Graphen der Funktionen h_1 und h_2 beschrieben.



Der Heißluftballon startet zur Zeit $t = 0$ in 240 m Seehöhe.

Für die 1. Ableitung von h_1 gilt:
$h_1'(t) = 0{,}09 \cdot t^2 - 7{,}2 \cdot t + 108$

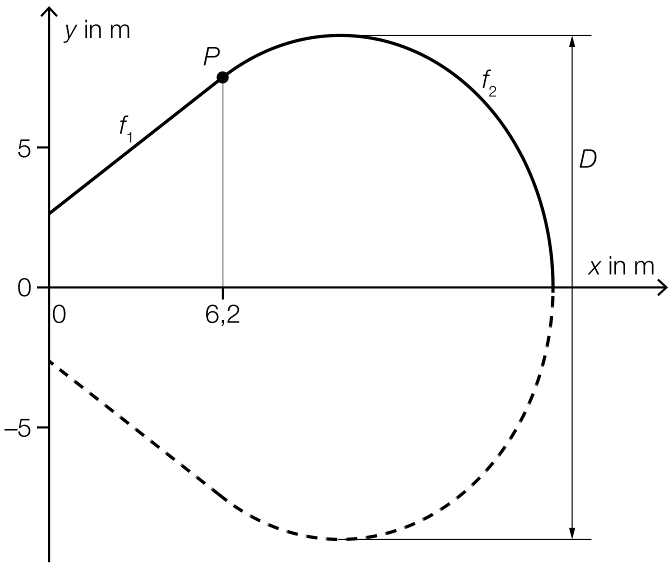
1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h_1 auf. *[0/1 P.]*

Nach 20 min befindet sich der Heißluftballon in 1 200 m Seehöhe und beginnt mit dem Sinkflug. Die Höhe während des Sinkflugs wird durch den Graphen der quadratischen Funktion h_2 mit $h_2(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben. Nach 30 min landet der Heißluftballon mit einer Sinkgeschwindigkeit von 10 m/min auf 240 m Seehöhe.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[0/1/2 P.]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[0/1 P.]*

b) Die Form eines bestimmten Heißluftballons entsteht durch Rotation der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 um die x-Achse (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f_2 gilt:

$$f_2(x) = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4}$$

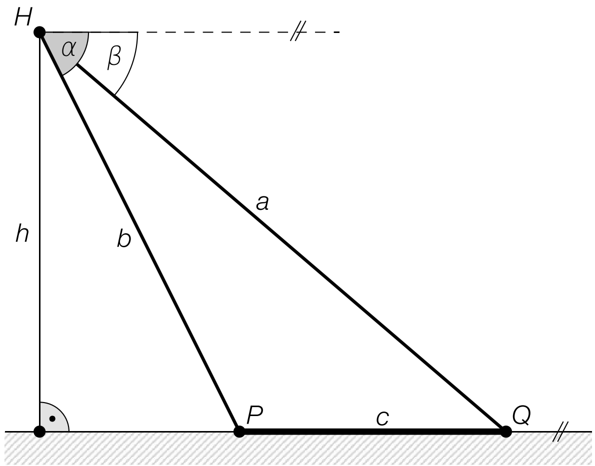
1) Berechnen Sie den maximalen Durchmesser D des Heißluftballons. *[0/1 P.]*

Der Graph der Funktion f_1 ist die Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_1 auf. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie das Volumen des Heißluftballons. *[0/1 P.]*

c) Bei einer bestimmten Ballonfahrt wird vom Punkt H aus der Punkt P unter dem Tiefenwinkel α und der Punkt Q unter dem Tiefenwinkel β gesehen.



1) Ordnen Sie den beiden Streckenlängen jeweils den zutreffenden Ausdruck zu deren Berechnung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

b	
h	

A	$a \cdot \sin(\beta)$
B	$c \cdot \sin(\beta)$
C	$\frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$
D	$\sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)}$

Gegeben sind die Winkel $\alpha = 65°$ und $\beta = 23°$ sowie die Streckenlänge $c = 2\,800$ m.

2) Berechnen Sie h. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\int h_1'(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}03 \cdot t^3 - 3{,}6 \cdot t^2 + 108 \cdot t + C$

$h_1(0) = 240 \quad \Rightarrow \quad C = 240$
$h_1(t) = 0{,}03 \cdot t^3 - 3{,}6 \cdot t^2 + 108 \cdot t + 240$

a2) $h_2'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$
I: $h_2(20) = 1\,200$
II: $h_2(30) = 240$
III: $h_2'(30) = -10$

oder:

I: $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 1\,200$
II: $a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c = 240$
III: $2 \cdot a \cdot 30 + b = -10$

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 8{,}6$
$b = -526$
$c = 8\,280$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion h_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a, b und c.

b1) $f_2'(x) = 0$ *oder* $\frac{5}{8} \cdot \frac{-2 \cdot x + 20{,}8}{\sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4}} = 0$
$x = 10{,}4$
$D = 2 \cdot f_2(10{,}4) = 2 \cdot 9{,}5 = 19$

b2) $f_1(x) = k \cdot x + d$
$k = f_2'(6{,}2) = 0{,}8288...$

$f_2(6{,}2) = 7{,}917...$
$d = f_2(6{,}2) - 6{,}2 \cdot k = 2{,}778...$

$f_1(x) = 0{,}8288... \cdot x + 2{,}778...$

b3) $f_2(x) = 0$ *oder* $\frac{5}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4} = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = 2{,}8)$ $x_2 = 18$

$V = \pi \cdot \left(\int_0^{6{,}2} (f_1(x))^2 \, \mathrm{d}x + \int_{6{,}2}^{18} (f_2(x))^2 \, \mathrm{d}x\right) = 3\,106{,}1...$
Das Volumen des Heißluftballons beträgt rund 3 106 m³.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Durchmessers D.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion f_1.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Volumens des Heißluftballons.

c1)

b	D
h	A

A	$a \cdot \sin(\beta)$
B	$c \cdot \sin(\beta)$
C	$\frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$
D	$\sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)}$

c2) $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha - \beta)}$

$b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{2\,800 \cdot \sin(23°)}{\sin(42°)} = 1\,635{,}0...$
$h = b \cdot \sin(\alpha) = 1\,635{,}0... \cdot \sin(65°) = 1\,481{,}8...$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von h.