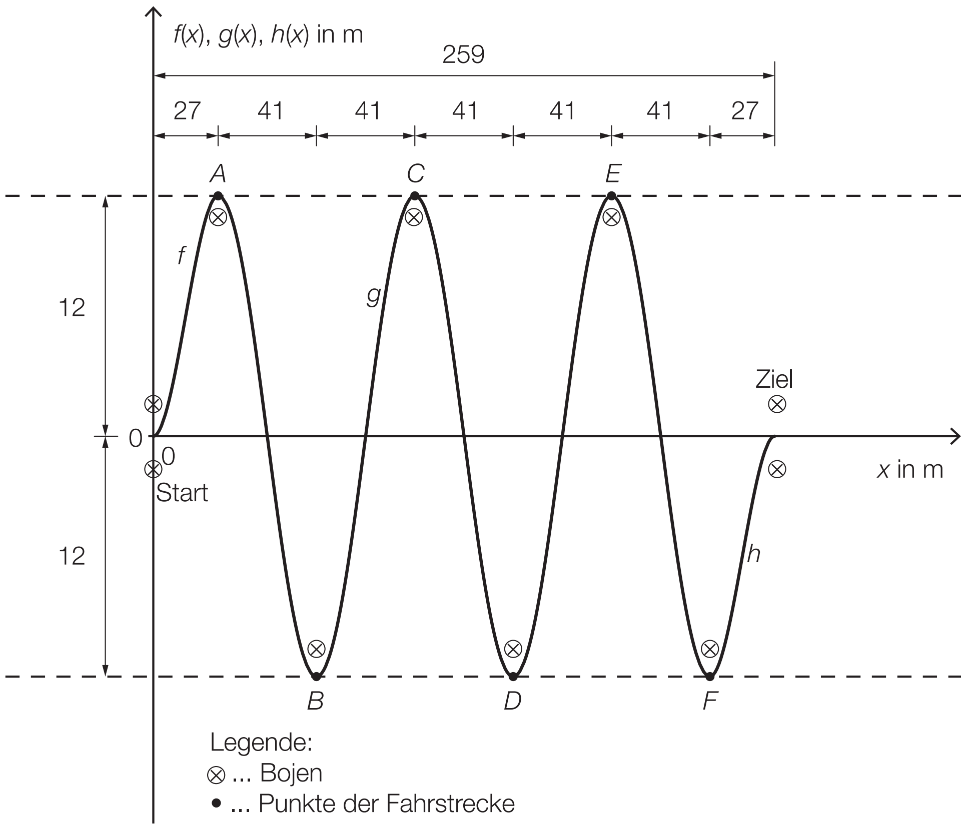
Wasserski-Wettbewerb (1)*

Aufgabennummer: B_470

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Wasserski-Wettbewerb muss ein Slalom um 6 Bojen gefahren werden (siehe nachstehende Abbildung).



In einem vereinfachten Modell kann die Bahn einer Wasserskifahrerin abschnittsweise durch die Graphen dreier Funktionen beschrieben werden:

Funktion f ... vom Start bis zum Punkt A
Funktion g ... vom Punkt A bis zum Punkt F
Funktion h ... vom Punkt F bis ins Ziel
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Für die gesamte Fahrt benötigt die Wasserskifahrerin 30 s.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{\int_0^{27} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x + \int_{27}^{232} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,\mathrm{d}x + \int_{232}^{259} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,\mathrm{d}x}{30}$$

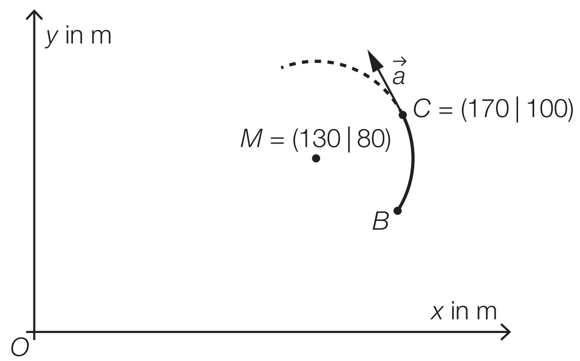
b) Die Bahn der Wasserskifahrerin vom Start bis zum Punkt A kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ beschrieben werden.
Der Graph der Funktion h entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 232 m nach rechts und um 12 m nach unten.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung der Funktion h an. *[1 aus 5]*

$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 + 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 12)^3 + b \cdot (x + 12)^2 - 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 12)^3 + b \cdot (x - 12)^2 + 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 232)^3 + b \cdot (x + 232)^2 - 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☐

c) Für das Publikum gibt es in der Pause die Möglichkeit, sich in einem Reifen hinter einem Motorboot durch das Wasser ziehen zu lassen. Bei einer wilden Fahrt kann es vorkommen, dass man aus dem Reifen geschleudert wird und ins Wasser fällt.

Die nachstehende Abbildung zeigt einen kurzen Ausschnitt des Weges eines Reifens bei einer solchen Fahrt. Vom Punkt *B* zum Punkt *C* ist dieser kreisförmig mit dem Mittelpunkt *M*. Im Punkt *C* wird der „Reifenfahrer" in der durch den Vektor $\vec{a}$ angegebenen tangentialen Richtung aus dem Reifen geschleudert.



1) Begründen Sie, warum $\vec{a} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ ist.

Der „Reifenfahrer" fällt in einer Entfernung von 2 m vom Punkt *C* ins Wasser.

2) Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes, in dem der „Reifenfahrer" ins Wasser fällt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit der Wasserskifahrerin in m/s berechnet.

b1)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☒

c1) Da die Tangente normal auf den Radius steht, ist das Skalarprodukt 0.

c2) $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 170 \\ 100 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169{,}1... \\ 101{,}7... \end{pmatrix}$

Der Reifenfahrer fällt ungefähr im Punkt (169 | 102) ins Wasser.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit

b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

c1) 1 × D: für die richtige Begründung

c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten