Sinkgeschwindigkeit von Fässern

Über Jahre hinweg wurden Fässer mit Problemstoffen illegal im Meer versenkt.

a) Für die Sinkgeschwindigkeit v_S der Fässer im Wasser in Abhängigkeit von der Zeit t gilt annähernd:
Die momentane Änderungsrate der Sinkgeschwindigkeit ist direkt proportional zur Differenz zwischen der Endgeschwindigkeit S und der aktuellen Sinkgeschwindigkeit v_S. Der Proportionalitätsfaktor wird mit k bezeichnet.

1) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt. *[1 aus 5]*
[0/1 P.]

$\frac{dv_S}{dt} = k \cdot (S - v_S)$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = k \cdot S - v_S$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = S - k \cdot v_S$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = \frac{k}{S - v_S}$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = S - \frac{k}{v_S}$	☐

b) Für bestimmte Fässer kann die Sinkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dv}{dt} + 0{,}25 \cdot v = 2$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung durch $v_h(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ gegeben ist.
[0/1 P.]

2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differenzialgleichung.
[0/1 P.]

c) Von einem Schiff aus werden bestimmte Fässer über Bord geworfen. Diese sinken nach dem Eintauchen ins Wasser senkrecht nach unten. Die Sinkgeschwindigkeit dieser Fässer im Wasser lässt sich näherungsweise durch die Funktion v_1 beschreiben.

$v_1(t) = 8 - 5 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ mit $t \geq 0$

t … Zeit nach dem Eintauchen ins Wasser in s
$v_1(t)$ … Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie die Sinkgeschwindigkeit der Fässer beim Eintauchen ins Wasser. *[0/1 P.]*

2) Argumentieren Sie mathematisch, dass die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s am größten ist. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit ein solches Fass eine Wassertiefe von 100 m erreicht. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

$\frac{dv_S}{dt} = k \cdot (S - v_S)$	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

b1) zugehörige homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv_h}{dt} + 0{,}25 \cdot v_h = 0$

$$\frac{dv_h}{dt} = -0{,}25 \cdot v_h$$

$$\int \frac{dv_h}{v_h} = \int -0{,}25\,dt \quad \left(oder: \int \frac{v_h'(t)}{v_h(t)}\,dt = \int -0{,}25\,dt\right)$$

$$\ln|v_h(t)| = -0{,}25 \cdot t + C_1$$

$$v_h(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 8$

oder:

Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:
$v_p(t) = a \quad \Rightarrow \quad v_p'(t) = 0$
$0{,}25 \cdot a = 2$
$a = 8$

$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 8$

b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.

c1) $v_1(0) = 3$

Die Sinkgeschwindigkeit der Fässer beim Eintauchen ins Wasser beträgt 3 m/s.

c2) $a_1(t) = v_1'(t) = 1{,}25 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$

Die Funktion a_1 ist streng monoton fallend, daher ist die Beschleunigung an der Stelle $t = 0$ maximal.

c3) $100 = \int_0^{t_1} v_1(t)\,\mathrm{d}t$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 14{,}94...$

Ein solches Fass erreicht nach etwa 14,9 s eine Wassertiefe von 100 m.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Sinkgeschwindigkeit.
c2) Ein Punkt für das richtige mathematische Argumentieren.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit, nach der ein solches Fass eine Wassertiefe von 100 m erreicht.