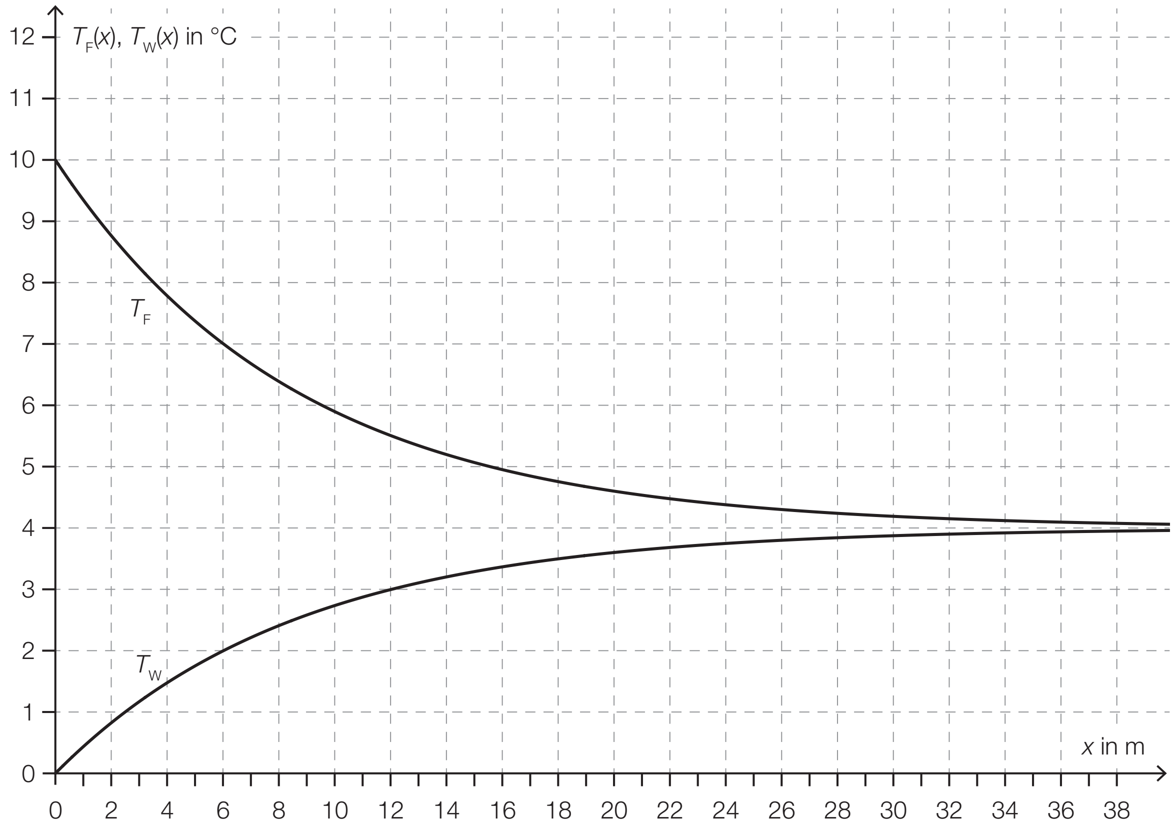
Limnologie*

Aufgabennummer: B_478		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Die Limnologie erforscht wichtige Kenngrößen von stehenden Gewässern wie etwa Temperatur oder Dichte.

a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Wassertemperatur eines Sees in Abhängigkeit von der Tiefe x im Frühling (T_F) und im Winter (T_W). Die Wassertemperatur nähert sich in beiden Fällen asymptotisch dem Wert 4 °C.



Die Wassertemperatur des Sees im Frühling kann in Abhängigkeit von der Tiefe x näherungsweise durch eine Exponentialfunktion T_F mit $T_F(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$ beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a, b und c der Funktion T_F.

Für ein bestimmtes x_1 gilt: $T_F(x_1) - T_W(x_1) = 5$

2) Ermitteln Sie x_1 mithilfe der obigen Abbildung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der Limnologie wird für bestimmte Zwecke eine Funktion g verwendet:

$$g(x) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1}$$

a, b ... positive Parameter

1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g nicht zutrifft. *[1 aus 5]*

$g(0) = a$	☐
Für $0 < x < b$ gilt: $g(x) > a$	☐
g ist für $0 < x < b$ monoton steigend.	☐
Die Funktion g hat eine Polstelle.	☐
$g(b) = 0$	☐

c) Die Dichte von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur kann unter bestimmten Bedingungen näherungsweise durch die Funktion ϱ beschrieben werden:

$\varrho(T) = a - b \cdot (T - 4)^2$ mit $0 < T \leq 10$

T ... Temperatur in °C
$\varrho(T)$ ... Dichte von Wasser bei der Temperatur T in kg/m³
a, b ... positive Parameter

1) Lesen Sie aus der obigen Funktionsgleichung die Koordinaten des Scheitelpunkts S von ϱ ab.

   $S = (\_\_\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_\_\_)$

2) Argumentieren Sie mathematisch, dass der Scheitelpunkt ein Hochpunkt der Funktion ϱ ist.

Es gilt: $a = 999{,}972$ und $b = 0{,}007$
Die Gleichung einer Tangente an den Graphen der Funktion ϱ lautet: $f(T) = 0{,}028 \cdot T + d$

3) Berechnen Sie den Parameter d.

Jemand verwendet zur Berechnung der Dichte von Wasser bei 10 °C die obige Funktion ϱ mit den Parametern $a = 999{,}972$ und $b = 0{,}007$.
Die Dichte von Wasser bei 10 °C beträgt jedoch laut einer Tabelle 999,700 kg/m³.

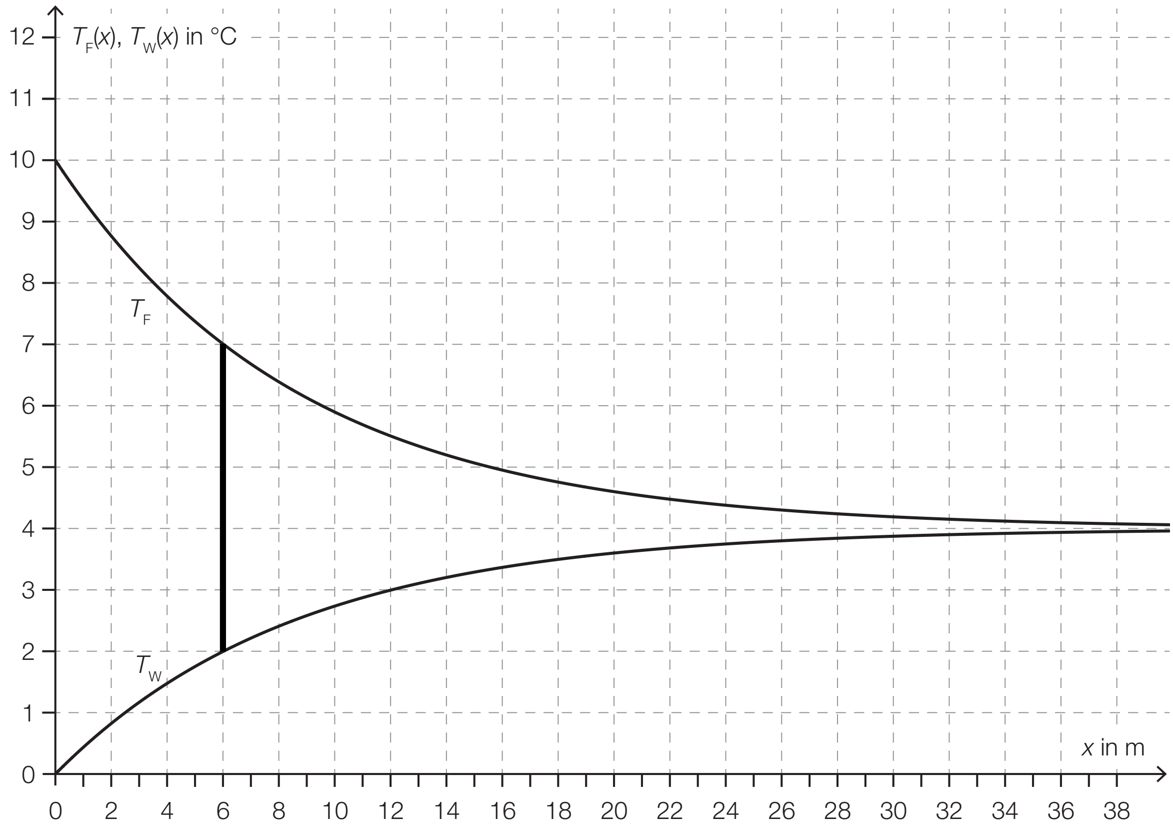
4) Berechnen Sie den Betrag des absoluten Fehlers bei Verwendung der Funktion ϱ anstelle des Tabellenwerts.

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 4$, $b = 6$

Einsetzen des Punktes mit den Koordinaten (6|7): $7 = 4 + 6 \cdot e^{c \cdot 6}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$c = -0{,}1155...$

a2)



An der Stelle $x_1 = 6$ ergibt sich eine Temperaturdifferenz von 5 °C.
Toleranzbereich: [5,9; 6,1]

b1)

$g(b) = 0$	☒

c1) $S = (4\,|\,a)$

c2) Es liegt ein Hochpunkt vor, da die 2. Ableitung von ϱ negativ ist ($\varrho''(T) = -2 \cdot b < 0$).

oder:

Es liegt ein Hochpunkt vor, weil der Koeffizient des quadratischen Gliedes ($-b$) negativ ist.

c3) $\varrho'(T) = -0{,}014 \cdot T + 0{,}056$

$\varrho'(T_1) = 0{,}028 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2$
$d = \varrho(2) - 0{,}028 \cdot 2 = 999{,}888$

c4) $|\varrho(10) - 999{,}7| = 0{,}02$

Betrag des absoluten Fehlers: 0,02 kg/m^3

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Ermitteln der Parameter *a* und *b*
1 × B: für das richtige Ermitteln des Parameters *c*
a2) 1 × A2: für das richtige Ermitteln von x_1 (Toleranzbereich: [5,9; 6,1])
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunkts
c2) 1 × D: für das richtige mathematische Argumentieren
c3) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Parameters *d*
c4) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Betrags des absoluten Fehlers