Mecánica Clásica Tarea # 10

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

<u>Nota</u>: Para simplificar las ecuaciones, durante toda la tarea utilizaremos el convenio de suma de Einstein, el cual nos dice que un índice que aparece dos veces en un término matemático, una vez como un superíndice y una vez como un subíndice, es sumado sobre el rango entero de ese índice.

1. Problema 1

Utilizando la formulación hamiltoniana de la mecánica, encuentre las ecuaciones de movimiento de un péndulo doble de masas y longitudes iguales.

<u>Solución:</u>

En la figura de abajo se muestra un diagrama para el problema,

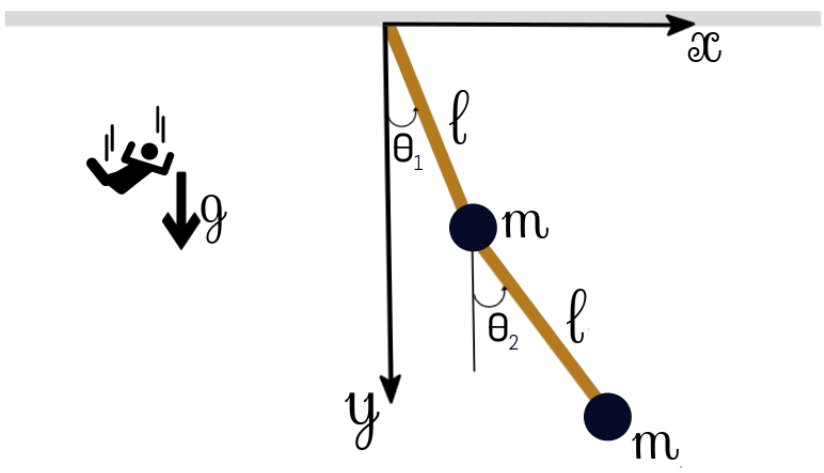

Figura 1: Péndulo doble. Como muestra el muñequito la gravedad va dirigida hacia abajo.

Si tomamos a θ_1 y θ_2 como nuestras coordenadas generalizadas, las coordenadas x y y de las dos masas serán

$$x_1 = l \operatorname{sen} \theta_1, \tag{1.1}$$
$$y_1 = l \cos \theta_1, \tag{1.2}$$
$$x_2 = l \operatorname{sen} \theta_1 + l \operatorname{sen} \theta_2, \tag{1.3}$$
$$y_2 = l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2. \tag{1.4}$$

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

Para construir la energía cinética del sistema necesitamos las primeras derivadas temporales de estas ecuaciones, las cuales son

$$\dot{x_1} = l\dot{\theta_1}\cos\theta_1, \tag{1.5}$$
$$\dot{y_1} = -l\dot{\theta_1}\operatorname{sen}\theta_1, \tag{1.6}$$
$$\dot{x_2} = l\dot{\theta_1}\cos\theta_1 + l\dot{\theta_2}\cos\theta_2, \tag{1.7}$$
$$\dot{y_2} = -l\dot{\theta_1}\operatorname{sen}\theta_1 - l\dot{\theta_2}\operatorname{sen}\theta_2. \tag{1.8}$$

Entonces la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2), \tag{1.9}$$

puede escribirse como

$$T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta_1}^2\cos^2\theta_1 + l^2\dot{\theta_1}^2\operatorname{sen}^2\theta_1 + l^2\dot{\theta_1}^2\cos^2\theta_1 + 2l^2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{1.10}$$
$$+ l^2\dot{\theta_2}^2\cos^2\theta_2 + l^2\dot{\theta_1}^2\operatorname{sen}^2\theta_1 + 2l^2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + l^2\dot{\theta_2}^2\operatorname{sen}^2\theta_2), \tag{1.11}$$

$$\therefore T = \frac{m}{2}l^2\left[2\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2 + 2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]. \tag{1.12}$$

Por otra parte la energía potencial del sistema

$$V = -mgy_1 - mgy_2, \tag{1.13}$$

puede escribirse como

$$V = -mg(l\cos\theta_1) - mg(l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2), \tag{1.14}$$

$$\therefore V = -mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \tag{1.15}$$

Por lo tanto la lagrangiana del sistema es

$$L = T - V = \frac{m}{2}l^2\left[2\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2 + 2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \tag{1.16}$$

Definimos a la hamiltoniana del sistema como

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}^k(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t), \tag{1.17}$$

necesitamos entonces una expresión para los impulsos generalizados, y escribir a las velocidades generalizadas en términos de éstos. Recordamos que los impulsos generalizados están definidos por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1.18}$$

En este caso tendremos dos, uno para cada coordenada generalizada

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}} = 2ml^2\dot{\theta_1} + ml^2\dot{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{1.19}$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}} = ml^2\dot{\theta_2} + ml^2\dot{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2). \tag{1.20}$$

Ahora que tenemos expresiones para los impulsos generalizados, podemos expresar a las coordenadas generalizadas en función de los mismos como

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)[-p_{\theta_1}^2 - p_{\theta_2} ml^2] + p_{\theta_1}[p_{\theta_2} + ml^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]}{m^2 l^4 [2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]}, \tag{1.21}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{2p_{\theta_2} - 2p_{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2[2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]}. \tag{1.22}$$

Usando estas ecuaciones podemos reescribir ahora la lagrangiana para que solo dependa de las coordenadas e impulsos generalizados,

$$L = \frac{m}{2} l^2 \left[2 \left\{ \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)[-p_{\theta_1}^2 - p_{\theta_2} ml^2] + p_{\theta_1}[p_{\theta_2} + ml^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]}{m^2 l^4 [2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} \right\}^2 + \right.$$
$$2 \left\{ \frac{2p_{\theta_2} - 2p_{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2[2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} \right\}^2 +$$
$$2 \left\{ \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)[-p_{\theta_1}^2 - p_{\theta_2} ml^2] + p_{\theta_1}[p_{\theta_2} + ml^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]}{m^2 l^4 [2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} \right\} \left\{ \frac{2p_{\theta_2} - 2p_{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{ml^2[2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} \right\}$$
$$\left. \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Entonces la hamiltoniana del sistema puede escribirse como[1], utilizando las expresiones para los impulsos generalizados (1.19) y (1.20), las expresiones para las velocidades generalizadas en términos de los impulsos generalizados (1.21) y (1.22), así como la lagrangiana expresada sólo en términos de las coordenadas e impulsos generalizados

$$H = \frac{ml^2 p_{\theta_1}^2 + 2ml^2 p_{\theta_2}^2 - 2ml^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{2ml^2[2m - m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} - mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2), \tag{1.23}$$

o simplificando

$$\boxed{H = \frac{p_{\theta_1}^2 + 2p_{\theta_2}^2 - 2\cos(\theta_1 - \theta_2) p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{4m - 2m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} - mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).} \tag{1.24}$$

Podemos utilizar ahora las ecuaciones de Hamilton para encontrar las ecuaciones de movimiento, recordamos su forma

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{1.25}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1.26}$$

Entonces las ecuaciones de movimiento, utilizando las anteriores ecuaciones serán

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{2p_{\theta_2} - 2p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{4m - 2m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \tag{1.27}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{4p_{\theta_2} - 2p_{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{4m - 2m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \tag{1.28}$$

[1] El trabajo algebraico es largo para llegar a esta ecuación, por lo tanto solo se escribe el resultado final.

$$\dot{p_{\theta_1}} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = \frac{4m \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)\left[p_{\theta_1}^2 - 2p_{\theta_1}p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2) - 2p_{\theta_2}^2\right]}{\left[4m - 2m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right]^2} + \frac{2p_{\theta_1}p_{\theta_2}\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{4m - 2m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} - 2mgl\operatorname{sen}\theta_1, \tag{1.29}$$

$$\dot{p_{\theta_2}} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -\frac{4m \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)\left[p_{\theta_1}^2 - 2p_{\theta_1}p_{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2p_{\theta_2}^2\right]}{\left[4m - 2m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right]^2} + \frac{2p_{\theta_1}p_{\theta_2}\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{4m - 2m\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} - mgl\operatorname{sen}\theta_2. \tag{1.30}$$

2. Problema 2

Una partícula de masa m se mueve en una dimensión y la hamiltoniana del sistema es

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}$$

Encuentre las ecuaciones de movimiento y su solución. Considerando únicamente los casos en que $p > 0$, ¿Cuál sería la fuerza que debería actuar sobre la partícula en una visión newtoniana del este sistema? ¿Qué sentido le puede dar en este caso a las relaciones entre la energía total, la energía cinética y la hamiltoniana como integral de movimiento?

Solución:

Para encontrar las ecuaciones de movimiento utilizaremos las ecuaciones de Hamilton que podemos escribir, debido a que la partícula se mueve en una dimensión, como

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{2.1}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{2.2}$$

Entonces tenemos que,

$$\dot{q} = \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}m}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}} = \frac{p}{m}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}, \tag{2.3}$$

$$\dot{p} = -\left(-\frac{1}{a}\frac{p^2}{2m}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}\right) = \frac{p^2}{2ma}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}. \tag{2.4}$$

Para hallar $q(t)$ nos podemos ayudar calculando $\ddot{q}$, utilizando (2.3) y (2.4), y el hecho de que[2] $p^2 = \dot{q}^2 m^2 \mathrm{e}^{\frac{2q}{a}}$,

[2]Tomaremos los casos para los que $p > 0$.

$$\begin{aligned}
\ddot{q} &= \frac{\dot{p}}{m}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}} - \frac{p\dot{q}}{ma}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}},\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}\left(\frac{\dot{p}}{m} - \frac{p\dot{q}}{ma}\right),\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}\left(\frac{p^2}{2m^2a}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}} - \frac{p^2}{m^2a}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}\right),\\
&= -\mathrm{e}^{-\frac{2q}{a}}\left(\frac{p^2}{2m^2a}\right),\\
&= -\frac{\cancel{\mathrm{e}^{-\frac{2q}{a}}}}{2\cancel{m^2}a}\dot{q}^2\cancel{m^2}\cancel{\mathrm{e}^{\frac{2q}{a}}},
\end{aligned}$$

$$\therefore \ddot{q} = -\frac{\dot{q}^2}{2a}. \tag{2.5}$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$m\ddot{q} = -m\frac{\dot{q}^2}{2a}, \tag{2.6}$$

donde vemos entonces que en una visión newtoniana del sistema y para el caso en que $p > 0$ el sistema luce como una partícula con una fuerza de retardo $-\frac{m\dot{q}^2}{2a}$.

Tenemos entonces que

$$-\frac{\ddot{q}}{\dot{q}^2} = \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}\cancel{\dot{q}}}{\cancel{\dot{q}}\dot{q}} = \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{d}{\dot{q}} = \frac{dt}{2a}, \tag{2.7}$$

que integrando resulta en

$$\frac{1}{\dot{q}} = \frac{t}{2a} + C, \tag{2.8}$$

luego

$$\dot{q} = \frac{2a}{t} + C \Rightarrow dq = 2a\frac{dt}{t} + Cdt. \tag{2.9}$$

Integrando de nuevo tenemos una expresión para $q(t)$

$$\boxed{q(t) = 2a\ln\left(Ct + B\right).} \tag{2.10}$$

Para hallar $p(t)$ podemos usar este resultado, la derivada del mismo que es $\dot{q(t)} = \frac{2aC}{Ct+B}$ y la ecuación (2.3),

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}} &= \frac{\dot{q}m}{p},\\
-\frac{q}{a} &= \ln\left(\frac{2aCm}{(Ct+B)p)}\right),\\
-2\ln(Ct+B) &= \ln(2aCm) - \ln(Ct+B) - \ln(1/p),\\
\ln(2aCm(Ct+B)) &= \ln(p),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boxed{p(t) = 2amC(Ct+B).} \tag{2.11}$$

Primero notamos que la hamiltoniana es una integral de movimiento debido a que

$$\frac{d}{dt}H = \frac{d}{dt}\frac{p^2}{2m}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}} = 0, \tag{2.12}$$

vemos también que la energía cinética es igual a (usando (2.3))

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{p^2}{m^{\cancel{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{2q}{a}} = \frac{p^2}{2m}\mathrm{e}^{-\frac{2q}{a}}. \tag{2.13}$$

Pero por la definición de H entonces

$$\boxed{T = H\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}.} \tag{2.14}$$

Algo muy peculiar es que aunque la hamiltoniana es una integral de movimiento, la energía cinética no se conserva, podemos ver esto fácilmente

$$\dot{T} = -\frac{H}{a}\dot{q}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}} = -\frac{4m^2aC^3}{Ct+B}. \tag{2.15}$$

Pasemos un último punto importante ahora. Si queremos una expresión para la energía total del sistema (si es que se puede hablar de la misma), necesitamos encontrar la lagrangiana del sistema. Para eso hacemos uso de la ecuación (para un grado de libertad)

$$H = \dot{q}p - L \tag{2.16}$$

y necesitamos invertir esta ecuación[3]

$$L = \dot{q}p - H, \tag{2.17}$$

y escribirla expresando a las p en función de las $(q, \dot{q})$, entonces utilizando las expresiones que hemos encontrado

$$L = \dot{q}(m\dot{q}\mathrm{e}^{\frac{q}{a}}) - \frac{\dot{q}^2m^{\cancel{2}}e^{\frac{2q}{a}}}{2\cancel{m}}\mathrm{e}^{-\frac{q}{a}}, \tag{2.18}$$

$$L = m\dot{q}^2\mathrm{e}^{\frac{q}{a}} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2\mathrm{e}^{\frac{q}{a}}, \tag{2.19}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2\mathrm{e}^{\frac{q}{a}}.} \tag{2.20}$$

Pero por la expresión que tenemos para $\dot{q}$ vemos que

$$L = H, \tag{2.21}$$

Entonces vemos que en este sistema no existe potencial, y la lagrangiana solo contiene la contribución de la energía cinética, la cual no se conserva, y por lo tanto la energía total del sistema no es igual a la hamiltoniana, que sí es una cantidad conservada.

[3]Esto es posible si podemos escribir a p en función de $(q, \dot{q})$, es decir el procedimiento inverso para obtener la hamiltoniana desde la lagrangiana, y eso puede hacerse si la Hessiana $\partial^2 H/\partial p_i \partial p_j$ es no singular [1], [2].

3. Problema 3

Considere la hamiltoniana en dos grados de libertad

$$H = q^1 p_1 - q^2 p_2 - a(q^1)^2 + b(q^2)^2$$

demuestre que las tres funciones

$$f_1 = (p_2 - bq^2)/q^1, \quad f_2 = q^1 q^2, \quad f_3 = q^1 e^{-t},$$

son constantes de movimiento. ¿Son todas integrales de movimiento? ¿Son independientes?, ¿Cuáles son los paréntesis de Poisson entre ellas?, ¿Habrá más integrales de movimiento independientes?; de haber más, ¿podrán ser los paréntesis de Poisson entre todas las integrales de movimiento iguales a cero?

Esta hamiltoniana es muy rara, encuentre esta rareza y descríbala.

<u>Solución:</u>

Para probar que las f_j son constantes de movimiento debemos demostrar que

$$\frac{df_j}{dt} = \{f_j, H\} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0. \tag{3.1}$$

Entonces tenemos que, para f_1

$$\frac{df_1}{dt} = \{f_1, H\} = \frac{\partial f_1}{\partial q^1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q^1} + \frac{\partial f_1}{\partial q^2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q^2}, \tag{3.2}$$

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{p_2 - bq^2}{(q^1)^2}q^1 + \frac{b}{q^1}q^2 - \frac{1}{q^1}(-p_2 + 2bq^2), \tag{3.3}$$

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{-p_2 + bq^2 + bq^2 + p_2 - 2bq^2}{q^1}, \tag{3.4}$$

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\cancel{-p_2} + \cancel{2bq^2} + \cancel{p_2} - \cancel{2bq^2}}{q^1} = 0, \tag{3.5}$$

luego para f_2

$$\frac{df_2}{dt} = \{f_2, H\} = \frac{\partial f_2}{\partial q^1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q^1} + \frac{\partial f_2}{\partial q^2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial f_2}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q^2}, \tag{3.6}$$

$$\frac{df_2}{dt} = q^2 q^1 - q^1 q^2 = 0, \tag{3.7}$$

y por último para f_3

$$\frac{df_3}{dt} = \{f_3, H\} + \frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial q^1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial f_3}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q^1} + \frac{\partial f_3}{\partial q^2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial f_3}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q^2} + \frac{\partial f_3}{\partial t}, \tag{3.8}$$

$$\frac{df_3}{dt} = \mathrm{e}^{-t} q^1 - \mathrm{e}^{-t} q^1 = 0. \tag{3.9}$$

Hemos demostrado entonces que las f_j son constantes de movimiento, dos de ellas integrales de movimiento (f_1 y f_2) y f_3 sólo constante de movimiento. Vemos además que todas estas constantes de movimiento son independientes entre sí, lo cual puede verse fácilmente debido a que solamente f_1 depende de p_2, por lo tanto es independiente de f_2 y f_3, también solamente f_3 depende del tiempo t, por lo tanto f_3 es independiente de f_1 y f_2, por lo tanto las tres son independientes.

Los paréntesis de Poisson entre ellas son

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial q^1}\frac{\partial f_2}{\partial p_1} - \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial q^1} + \frac{\partial f_1}{\partial q^2}\frac{\partial f_2}{\partial p_2} - \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial q^2}, \tag{3.10}$$

$$\boxed{\{f_1, f_2\} = -\frac{1}{q^1} q^1 = -1.} \tag{3.11}$$

$$\{f_2, f_3\} = \frac{\partial f_2}{\partial q^1}\frac{\partial f_3}{\partial p_1} - \frac{\partial f_2}{\partial p_1}\frac{\partial f_3}{\partial q^1} + \frac{\partial f_2}{\partial q^2}\frac{\partial f_3}{\partial p_2} - \frac{\partial f_2}{\partial p_2}\frac{\partial f_3}{\partial q^2}, \tag{3.12}$$

$$\boxed{\{f_2, f_3\} = 0.} \tag{3.13}$$

$$\{f_3, f_1\} = \frac{\partial f_3}{\partial q^1}\frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \frac{\partial f_3}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial q^1} + \frac{\partial f_3}{\partial q^2}\frac{\partial f_1}{\partial p_2} - \frac{\partial f_3}{\partial p_2}\frac{\partial f_1}{\partial q^2}, \tag{3.14}$$

$$\boxed{\{f_3, f_1\} = 0.} \tag{3.15}$$

Sí existe otra constante de movimiento (en este casi integral de movimiento), y es la hamiltoniana, para ver esto hacemos

$$\frac{d}{dt}H = \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial q^1}\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q^1} + \frac{\partial H}{\partial q^2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q^2}, \tag{3.16}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}H = \cancel{(p_1 - 2aq^1)q^1} - \cancel{q^1(p_1 - 2aq^1)} - \cancel{(p_2 + 2bq^2)q^2} + \cancel{q^2(p_2 + 2bq^2)} = 0.} \tag{3.17}$$

Y esta es independiente de las f_j debido a que depende de p_1 y las f_j no. Los paréntesis de Poisson entre las H y las f_j ya los calculamos y vimos que dos eran cero lo cual probó que eran integrales de movimiento, pero $\{f_3, H\}$ no lo es, con lo cual vimos que f_3 es solo una constante de movimiento. También calculamos los paréntesis de Poisson de las f_j y vemos que dos eran cero, los de $\{f_3, f_1\}$ y $\{f_2, f_3\}$, pero $\{f_1, f_2\}$ no fue cero.

La peculiaridad de esta hamiltoniana es fácil verla al conocer las condiciones[4] para la inversión de la ecuación

$$H = \dot{q}p - L, \tag{3.18}$$

para así obtener a la lagrangiana desde la hamiltoniana. Y vemos que no cumple con la condición de que la Hessiana $\partial^2 H/\partial p_i \partial p_j$ no sea singular, esto es fácil verlo debido a que claramente, tomando la ecuación para la hamiltoniana y ver que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.19}$$

que es muy fácil de probar que esto es así al ver nuestra expresión de H. Entonces no podemos obtener la lagrangiana de la hamiltoniana y por motivos similares no podemos obtener la hamiltoniana de la lagrangiana, por lo tanto la rareza de esta hamiltoniana es que no proviene de ninguna lagrangiana.

[4] Ver pié de página 3.

4. Problema 4

Demuestre que un sistema es hamiltoniano sí y solo sí

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\dot{f},g\} + \{f,\dot{g}\}$$

<u>Solución:</u>

Probemos primero hacia un sentido y luego hacia el otro para así ver si tenemos una equivalencia matemática. Para probar el primer sentido asumimos que existe una función hamiltoniana $H(q,p,t)$ y queremos probar si se cumple la conocida regla de Leibniz. Recordamos que si existe esta H entonces

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{4.1}$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\{f,g\},H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}. \tag{4.2}$$

Utilizando la identidad de Jacobi[5] el primer término de (4.2) puede escribirse como

$$\{\{f,g\},H\} + \{\{H,f\},g\} + \{\{g,H\},f\} = 0, \tag{4.3}$$

pero por la antisimetría de los paréntesis de Poisson, podemos escribir (4.3) como

$$\{\{f,g\},H\} = \{\{f,H\},g\} + \{f,\{g,H\}\}. \tag{4.4}$$

Por otra parte el segundo término de (4.2) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\right], \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial p_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial}{\partial t}f, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial}{\partial t}g\right\}. \tag{4.5}$$

Entonces (4.2), utilizando (4.4) y (4.5), puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\{f,H\},g\} + \{f,\{g,H\}\} + \left\{\frac{\partial}{\partial t}f, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial}{\partial t}g\right\}, \tag{4.6}$$

pero por la linealidad de los paréntesis de Poisson podemos escribir (4.6) como

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \left\{\{f,H\} + \frac{\partial}{\partial t}g, g\right\} + \left\{f, \{g,H\} + \frac{\partial}{\partial t}g\right\}, \tag{4.7}$$

Y utilizando (4.1) podemos escribir (4.7) de la forma deseada

$$\boxed{\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\dot{f},g\} + \{f,\dot{g}\}.} \tag{4.8}$$

□

Entonces hemos demostrado que si existe la hamiltoniana, entonces se cumple la regla de Leibniz para los paréntesis de Poisson. Debemos ahora probar el sentido inverso, para

[5] Ver siguiente problema.

demostrar la equivalencia matemática, es decir, que si se cumple la regla de Leibniz entonces existe una función hamiltoniana.

Para probar la segunda parte, utilizaremos el hecho de que [3]

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \tag{4.9}$$

y asumiremos que se cumple la regla de Leibniz. Tenemos que[6]

$$\frac{d}{dt}\{q^i, p_j\} = \{\dot{q}^i, p_j\} + \{q^i, \dot{p}_j\} = 0, \tag{4.10}$$

y sean $\dot{q}^i = X^i$ y $\dot{p}_j = X_j$, donde las X^i y X_j son las componentes de un campo vectorial en la base inducida por las coordenadas $(\partial/\partial q^i, \partial/\partial p_j)$, el cual está definido en $\mathbb{TM}*$, entonces

$$\{X^i, p_j\} + \{q^i, X_j\} = 0, \tag{4.11}$$

usando la definición de los paréntesis de Poisson

$$\frac{\partial X^i}{\partial q^i}\cancelto{1}{\frac{\partial p_j}{\partial p_j}} - \frac{\partial X^i}{\partial p_j}\cancelto{0}{\frac{\partial p_j}{\partial q^i}} + \cancelto{1}{\frac{\partial q^i}{\partial q^i}}\frac{\partial X_j}{\partial p_j} - \cancelto{0}{\frac{\partial q^i}{\partial p_j}}\frac{\partial X_j}{\partial q^i} = 0 \tag{4.12}$$

$$\therefore \frac{\partial X^i}{\partial q^i} = -\frac{\partial X_j}{\partial p_j}. \tag{4.13}$$

Si suponemos que existe una forma simpléctica expresada en estas coordenadas canónicas de la forma

$$\gamma = dp_i \wedge dq^i, \tag{4.14}$$

sabemos entonces que la diferenciación exterior de la uno-forma que le toca al campo vectorial X será igual a cero por la condición a la que hemos llegado asumiendo que se cumple la regla de Leibniz, es decir que la uno-forma $\gamma[\bullet, X]$ es exacta, por lo que debe ser la diferencial de alguna función, la cual llamaremos H

$$\gamma[\bullet, X] = dH, \tag{4.15}$$

$\square$

lo que nos dice que el campo X es hamiltoniano y debe existir entonces una función hamiltoniana H. Debe quedar claro que esta prueba es local debido a que hemos usado coordenadas explícitamente para demostrarlo, y puede además probarse que esto es lo mejor que se puede hacer [1]. En otras palabras, si el paréntesis de Poisson se comporta como un producto con respecto a la diferenciación temporal, existe una función hamiltoniana H local, es decir, que el sistema es localmente hamiltoniano. Y como establece [1] y puede verse mejor en [2], puede no existir una sola H que sea válida para todo $\mathbb{TM}^*$.

5. Problema 5

Demuestre la identidad de Jacobi para los paréntesis de Poisson.

<u>Solución:</u>

Sean $f, g, h \in \mathbb{TM}^*$, la identidad de Jacobi nos dice que

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{5.1}$$

[6] Claramente la derivada temporal de δ^i_j debe ser cero.

Para probar esta identidad utilizamos la definición de los paréntesis de Poisson, en coordenadas canónicas (q^i, p_i),

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}, \tag{5.2}$$

y el hecho de que

$$\frac{\partial^2}{\partial q^i \partial p_i} = \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial q^i}, \tag{5.3}$$

entonces

$$\{f, \{g, h\}\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\{g, h\} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\{g, h\}, \tag{5.4}$$

$$\{f, \{g, h\}\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\right] - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\right], \tag{5.5}$$

$$\{f, \{g, h\}\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial p_i^2}\frac{\partial h}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q^i}\right] \tag{5.6}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_i}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial h}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i \partial p^i} - \frac{\partial^2 g}{\partial q^i \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 (q^i)^2}\right], \tag{5.7}$$

$$\{f, \{g, h\}\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i^2} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i^2}\frac{\partial h}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q^i} \tag{5.8}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i \partial p^i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i \partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 (q^i)^2}. \tag{5.9}$$

De la misma manera

$$\{g, \{h, f\}\} = \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i^2}\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial q^i} \tag{5.10}$$

$$-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial p^i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i \partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 (q^i)^2}, \tag{5.11}$$

y

$$\{h, \{f, g\}\} = \frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} + \frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i^2} - \frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial q^i} \tag{5.12}$$

$$-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i \partial p^i} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} + \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial^2 (q^i)^2}. \tag{5.13}$$

Tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
&\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}= \\
&\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i^2}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i^2}\frac{\partial h}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial q^i} \\
&-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial h}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i\partial p^i}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 (q^i)^2} \\
&+\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2}-\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i^2}\frac{\partial f}{\partial q^i}-\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q^i} \\
&-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i\partial p^i}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i}+\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 (q^i)^2} \\
&+\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}+\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i^2}-\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2}\frac{\partial g}{\partial q^i}-\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial q^i} \\
&-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i\partial p^i}+\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}+\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial^2 (q^i)^2}.
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Para entender un poco mejor todos los términos de esta ecuación, los numeraremos (debajo) y si aparecen repetidos sencillamente se repetirá la numeración,

$$
\begin{aligned}
&\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}= \\
&\underset{\textcircled{1}}{\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i}}+\underset{\textcircled{2}}{\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i^2}}-\underset{\textcircled{3}}{\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i^2}\frac{\partial h}{\partial q^i}}-\underset{\textcircled{4}}{\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial q^i}} \\
&-\underset{\textcircled{5}}{\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial h}{\partial p_i}}-\underset{\textcircled{6}}{\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i\partial p^i}}+\underset{\textcircled{7}}{\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i}}+\underset{\textcircled{8}}{\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial^2 (q^i)^2}} \\
&+\underset{\textcircled{6}}{\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}}+\underset{\textcircled{9}}{\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2}}-\underset{\textcircled{2}}{\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i^2}\frac{\partial f}{\partial q^i}}-\underset{\textcircled{10}}{\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q^i}} \\
&-\underset{\textcircled{8}}{\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial f}{\partial p_i}}-\underset{\textcircled{11}}{\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i\partial p^i}}+\underset{\textcircled{4}}{\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i}}+\underset{\textcircled{12}}{\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 (q^i)^2}} \\
&+\underset{\textcircled{11}}{\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}}+\underset{\textcircled{3}}{\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i^2}}-\underset{\textcircled{9}}{\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2}\frac{\partial g}{\partial q^i}}-\underset{\textcircled{7}}{\frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\partial q^i}} \\
&-\underset{\textcircled{12}}{\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial (q^i)^2}\frac{\partial g}{\partial p_i}}-\underset{\textcircled{1}}{\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i\partial p^i}}+\underset{\textcircled{10}}{\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial^2 f}{\partial q^i\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}}+\underset{\textcircled{5}}{\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial^2 (q^i)^2}}.
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

Vemos entonces que podemos escribir, para hacer mucho más fácil la cancelación de términos

$$
\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} &= \textcircled{1}+\textcircled{2}-\textcircled{3}-\textcircled{4}-\textcircled{5}-\textcircled{6}+\textcircled{7} \\
&+\textcircled{8}+\textcircled{6}+\textcircled{9}-\textcircled{2}-\textcircled{10}-\textcircled{8}-\textcircled{11}+\textcircled{4}+\textcircled{12}+\textcircled{11} \\
&+\textcircled{3}-\textcircled{9}-\textcircled{7}-\textcircled{12}-\textcircled{1}+\textcircled{10}+\textcircled{5},
\end{aligned}
$$

ordenando tenemos

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} = {} & ① - ① + ② - ② + ③ - ③ \\ & + ④ - ④ + ⑤ - ⑤ + ⑥ - ⑥ \\ & + ⑦ - ⑦ + ⑧ - ⑧ + ⑨ - ⑨ \\ & + ⑩ - ⑩ + ⑪ - ⑪ + ⑫ - ⑫.\end{aligned}$$

Vemos claramente que cada número está repetido, una vez positivo y una vez negativo, por lo tanto todos se cancelan, y llegamos a que

$$\boxed{\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0.} \tag{5.16}$$

Referencias

[1] J. José y E. Saletan, *Classical dynamics: A contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998.

[2] R. Abraham y J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2da edición, Addison-Wesley, 1978.

[3] H. Iro, *A modern approach to classical mechanics*, World Scientific Publishing, 2002.