Mecánica Clásica Tarea # 14

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1

Utilizando únicamente la ecuación de la eikonal deduzca la ley de Snell.

Solución:

Recordemos la expresión para la ecuación de la eikonal,

$$|\nabla S|^2(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}). \tag{1.1}$$

Esta ecuación es simplemente el módulo de la ecuación de Huygens que puede escribirse como

$$\nabla S = n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}, \tag{1.2}$$

y también sabemos que el gradiente de esta ecuación define el vector de rayo de magnitud $|\mathbf{n}| = n$. Si ahora recordamos que la integración del gradiente sobre un camino cerrado se hace cero, tenemos que

$$\oint_P \nabla S(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_P \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{1.3}$$

Consideremos ahora el caso en que el camino cerrado P rodea una frontera que separa dos medios diferentes. Si hacemos que los lados del bucle perpendicular a la interfaz vayan a cero, entonces únicamente las partes de la integral de línea tangenciales al camino de la interfaz contribuirán en la misma. Ahora debido a que estas contribuciones deben sumar cero, las componentes tangenciales de los vectores de rato deben preservarse, esto es

$$(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \tag{1.4}$$

donde el primo se refiere al lado de la frontera al cual el rayo es transmitido, cuyo vector normal es $\hat{\mathbf{z}}$. Ahora imaginemos a un rayo atravesando la frontera y pasando a través de la región encerrada por el bucle de integración. Si θ y θ' son los ángulos de incidencia y transmisión, respectivamente, medidos desde la normal $\hat{\mathbf{z}}$ a través de la frontera, entonces la preservación de la componente tangencial del vector de rayo significa que, tomando en cuenta (1.4) y la definición del producto vectorial,

$$\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{n}' \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \tag{1.5}$$

$$n \operatorname{sen} \theta - n' \operatorname{sen} \theta' = 0, \tag{1.6}$$

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

esto debido a que $|\hat{\mathbf{z}}| = 1$, por lo tanto

$$\boxed{n \operatorname{sen}\theta = n' \operatorname{sen}\theta'.} \tag{1.7}$$

Que es la ley de la refracción de Snell, descubierta primero por Ibn Sahl en 984 [1], y luego por Willebrod Snellius en 1621 [2]. Un análisis similar puede aplicarse al caso de los rayos reflejaos para mostrar que el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión.

Problema 2

En el curso se mostró que la ecuación de la eikonal es una aproximación de onda pequeña de la ecuación de ondas. Encuentre ahora, a partir únicamente del principio de Fermat, las ecuaciones diferenciales que determinan los rayos de luz y la ecuación de la eikonal. Comente sobre la situación análoga entre las ecuaciones de movimiento de la mecánica y el principio de Hamilton.

Solución:

Problema 3

En el curso se demostró que la función principal de Hamilton es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente. ¿Será cierto el enunciado inverso de este, esto es, que una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede ver como la función principal de Hamilton? Argumente su respuesta.

Solución:

Problema 4

Demuestre que un sistema es integrable sí y solo sí existen sistemas de coordenadas canónicas en las que la ecuación de Hamilton-Jacobi es totalmente separable.

Solución:

Problema 5

Reduzca a cuadraturas por el método de Liouville el ejemplo del péndulo esférico.

Solución:

Referencias

[1] R. Rashed, *"Géométrie et dioptrique au Xe siècle: Ibn Sahl, Al-Quhi et Ibn Al-Haytham*, Las Belles Lettres, 1993.

[2] D. Holm, *Geometric Mechanics, Part I: Dynamics and Symmetry*, World Scientific, Imperial College Press, 2008.