

Mecánica Clásica Tarea # 8

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

1. Problema 1

Construya un atlas para el toro de dos dimensiones.

Solución:

La superficie de un 2-toro en \mathbb{R}^3 se denota por \mathbb{T}^2 . Esta superficie puede obtenerse rotando un círculo de radio b cuya distancia a su centro desde el eje z es a sobre ese eje. En la figura de abajo se muestra esta construcción.

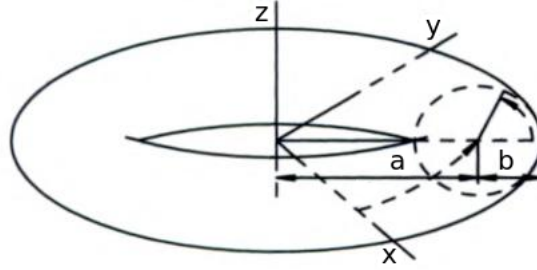


Figura 1: 2-Toro.

Podemos entonces escribir $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como el producto de dos variedades. La variedad \mathbb{S}^1 representa a la esfera de una dimensión, es decir, el círculo, por lo que podemos construir el toro como el producto cartesiano de dos círculos.

Por otra parte, un 2-toro puede determinarse paramétricamente en \mathbb{R}^3 por las siguientes relaciones

$$x = (a + b \cos \theta) \cos \phi, \quad (1.1)$$

$$y = (a + b \cos \theta) \sin \phi, \quad (1.2)$$

$$z = b \sin \theta, \quad (1.3)$$

donde la condición $b < a$ debe satisfacerse. Los parámetros ϕ y θ miden los ángulos a lo largo de los círculos, el pequeño y el grande respectivamente. Si escribimos $x^1 = \theta$ y $x^2 = \phi$ estas relaciones definen un mapeo $\varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Pero para hacer este mapeo inyectivo tenemos que restringir su dominio a un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 prescrito con las desigualdades $0 < x^1 < 2\pi$, $0 < x^2 < 2\pi$. Sea U_1 el conjunto abierto obtenido borrando de

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

\mathbb{T}^2 el círculo con radio a en el plano $z = b$ y el círculo de radio b en el plano xz centrado en el punto $x = a, z = 0$. Entonces (U_1, φ_1) se convierte en una carta. Definamos ahora un nuevo mapeo φ_2 por

$$x = -(a + b \sin y^1) \sin y^2, \quad (1.4)$$

$$y = (a + b \sin y^1) \cos y^2, \quad (1.5)$$

$$z = b \cos y^1. \quad (1.6)$$

Sea U_2 el conjunto abierto obtenido borrando de \mathbb{T}^2 el círculo con radio a en el plano $z = b$ y el círculo con radio b en el plano yz centrado en el punto $y = a, z = 0$. Es fácil ver ahora que (U_2, φ_2) se convierte en una carta. La región $U_1 \cap U_2$ en la cual las dos cartas se solapan es la unión de dos conjuntos abiertos V_1 y V_2 que son desconectados donde

$$V_1 = \varphi_1^{-1}((0, 2\pi) \times (\pi/2, 2\pi)), \quad V_2 = \varphi_1^{-1}((0, 2\pi) \times (0, 2\pi)). \quad (1.7)$$

Usando las transformaciones de coordenadas analíticas $y^1 = x^1, y^2 = x^2 - \frac{\pi}{2}$ sobre V_1 y $y^1 = x^1, y^2 = x^2 + \frac{3\pi}{2}$ sobre V_2 . Finalmente, consideremos el mapeo φ_3 dado por

$$x = (a + b \cos z^1) \cos z^2, \quad (1.8)$$

$$y = (a + b \cos z^1) \sin z^2, \quad (1.9)$$

$$z = -b \sin z^1. \quad (1.10)$$

El conjunto abierto U_3 se obtiene borrando de \mathbb{T}^2 el círculo con radio $a + b$ en el plano $z = 0$ y el círculo con radio b en plano xz centrado en el punto $x = a, z = 0$. De nuevo (U_3, φ_3) es una carta. La región $U_1 \cap U_3$ en la cual las cartas (U_1, φ_1) y (U_3, φ_3) se solapan es la unión de dos conjuntos abiertos W_1 y W_2 que son desconectados donde

$$W_1 = \varphi_1^{-1}((\pi/2, 2\pi) \times (0, 2\pi)), \quad W_2 = \varphi_1^{-1}((0, \pi/2) \times (0, 2\pi)). \quad (1.11)$$

Usando las transformaciones de coordenadas analíticas $z^1 = x^1 - \frac{\pi}{2}, z^2 = x^2$ sobre W_1 y $z^1 = x^1 - \frac{3\pi}{2}, z^2 = x^2$ sobre W_2 . Las cartas (U_2, φ_2) y (U_3, φ_3) se solapan en $U_2 \cap U_3$ que es la unión de los conjuntos abiertos Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4 . Estos conjuntos están dados por

$$Z_1 = \varphi_2^{-1}((0, \pi/2) \times (0, 3\pi/2)), \quad Z_2 = \varphi_2^{-1}((0, \pi/2) \times (3\pi/2, 2\pi)), \quad (1.12)$$

$$Z_3 = \varphi_2^{-1}((\pi/2, 2\pi) \times (0, 3\pi/2)), \quad Z_4 = \varphi_2^{-1}((\pi/2, 2\pi) \times (3\pi/2, 2\pi)). \quad (1.13)$$

Transformaciones de coordenadas analíticas para estos cuatro conjuntos están determinadas por las siguientes expresiones, respectivamente

$$z^1 = y^1 + \frac{3\pi}{2}, z^2 = y^2 + \frac{\pi}{2}; \quad (1.14)$$

$$z^1 = y^1 + \frac{3\pi}{2}, z^2 = y^2 - \frac{3\pi}{2}; \quad (1.15)$$

$$z^1 = y^1 - \frac{\pi}{2}, z^2 = y^2 + \frac{\pi}{2}; \quad (1.16)$$

$$z^1 = y^1 - \frac{\pi}{2}, z^2 = y^2 - \frac{3\pi}{2}. \quad (1.17)$$

Debido a que las cartas $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = T^2$, concluimos que el 2-toro tiene un atlas analítico con tres cartas $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)\}$. Lo cual completa la solución a este problema.

2. Problema 2

Demuestre que la estructura de espacio vectorial que se dio al conjunto de clases de tangencia de curvas que pasan por un punto de una variedad diferencial, es independiente de las cartas utilizadas y de las curvas representativas escogidas en cada clase.

Solución:

Durante toda la prueba utilizaremos el convenio de suma de Einstein, el cual nos dice que un índice que aparece dos veces en un término matemático, una vez como un superíndice y una vez como un subíndice, es sumado sobre el rango entero de ese índice.

Queremos pensar en un campo vectorial sobre una variedad diferencial M como un mapeo ξ que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $\xi_p \in T_p M$, junto con alguna suposición de continuidad o diferenciabilidad. Pero como bien se establece en las notas del curso, antes de que podamos pensar en ese objeto como un mapeo, debemos definir el conjunto que será su rango. Esto nos lleva a la definición de “haz tangente”.

Definición: Sea una variedad diferencial M , definimos el *haz tangente* de M , denotado por TM , como la unión disjunta de espacios tangentes en todos los puntos de M :

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M. \quad (2.1)$$

Escribiremos un elemento de esta unión disjunta como el par ordenado (p, ξ) , con $p \in M$ y $\xi \in T_p M$. El haz tangente viene equipado con un mapeo de proyección natural $\pi = TM \rightarrow M$, que mapea cada vector en $T_p M$ al punto p en el cual es tangente: $\pi(p, \xi) = p$. El siguiente lema muestra que TM puede pensarse como una variedad diferenciable en sí mismo.

Lema: Para cualquier variedad diferencial M de n dimensiones, el haz tangente TM tiene una topología natural y una estructura diferenciable que lo hace una variedad diferencial de $2n$ dimensiones. Con esta estructura, $\pi : TM \rightarrow M$ es un mapeo diferenciable.

Prueba: Comenzamos por definir los mapeos que se convertirán en nuestras cartas diferenciables. Dada una carta diferenciable (U, ϕ) , sean (q^1, \dots, q^n) las funciones coordenadas de ϕ , y definimos un mapeo $\phi' : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\phi' \left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p \right) = (q^1(p), \dots, q^n(p), v^1, \dots, v^n). \quad (2.2)$$

Su conjunto imagen es $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$, que es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{2n} . Es una biyección sobre su imagen, debido a que su inversa puede escribirse explícitamente como

$$\phi'^{-1}(q^1(p), \dots, q^n(p), v^1, \dots, v^n) = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\phi^{-1}(q)}. \quad (2.3)$$

Sean ahora dos cartas diferenciales dadas (U, ϕ) y (V, ψ) para M , y sean $(\pi^{-1}(U), \phi')$, $(\pi^{-1}(V), \psi')$ las cartas correspondientes sobre TM . Los conjuntos $\phi'(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ y $\psi'(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ son ambos abiertos en \mathbb{R}^{2n} , y el mapeo de transición $\psi' \circ \phi'^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ puede escribirse explícitamente como¹

¹Ver problema 4.

$$\begin{aligned} \psi' \circ \phi'^{-1}(q^1(p), \dots, q^n(p), v^1, \dots, v^n) = \\ \left(q'^1(q), \dots, q'^n(q), \frac{\partial q'^1}{\partial q^j}(q)v^j, \dots, \frac{\partial q'^n}{\partial q^j}(q)v^j \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

El cual es claramente diferenciable. Si escogemos una cobertura contable $\{U_i\}$ sobre M un dominio de coordenadas diferenciables, obtenemos una cobertura contable sobre TM con un dominio de coordenadas $\pi^{-1}(U_i)$, con lo cual cumple con las condiciones para la construcción de una variedad diferencial. También puede probarse que satisface la condición de Hausdorff lo cual no haremos aquí. Por último para ver que π es diferenciable, notamos que su representación en coordenadas con respecto a las cartas (U, ϕ) para M y $(\pi^{-1}(U), \phi')$ para TM es $\pi(q, v)q$.

□

Podemos ahora definir lo que queríamos, un campo vectorial.

Definición: Si M es una variedad diferencial, un campo vectorial sobre M es una sección del mapeo $\pi : TM \rightarrow M$. De forma más concreta, un campo vectorial es un mapeo continuo $\zeta : M \rightarrow TM$, usualmente escrito $p \mapsto \zeta_p$, con la propiedad que

$$\pi \circ \zeta = \text{Id}_M, \quad (2.5)$$

o de forma equivalente, $\zeta_p \in T_p M, \forall p \in M$. Debemos pensar un campo vectorial en M de la misma manera en que lo hacemos con los campos vectoriales en el espacio euclidiano: como una flecha fijada a cada punto de M , escogido como tangente a M y a que varíe continuamente de punto en punto.

Para culminar esta demostración, con el siguiente lema mostraremos que cada vector tangente en un punto puede ser extendido a un campo vectorial global diferenciable.

Lema: Sea M una variedad diferencial. Si $p \in M$ y $\xi \in T_p M$, \exists un campo vectorial ξ' sobre M tal que $\xi'_p = \xi$.

Prueba: Sean (q^i) unas coordenadas diferenciables en la vecindad U de p , y sea $\xi^i \partial / \partial q^i|_p$ la expresión coordenada para ξ . Si ψ es una función “bump” [2] soportada en U y con $\psi(p) = 1$, el campo vectorial ξ' definido por

$$\xi'_s = \begin{cases} \psi(s) \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_s, & s \in U, \\ 0, & s \notin \text{supp} \psi, \end{cases} \quad (2.6)$$

es un campo vectorial diferenciable cuyo valor en p es igual a X .

□

Claramente este último lema prueba directamente el enunciado del problema, pero para poder llegar al mismo tuvimos que pasar por algunas definiciones y proposiciones necesarias; y también debe ser claro que esta estructura que le hemos dado a las clases de tangencia de curvas que pasan por un punto de una variedad diferencial es independiente de las cartas utilizadas, ya que la construcción de la estructura de la cual son secciones, TM la hemos construido independiente de las cartas, y obviamente de las curvas representativas escogidas en cada clase. No hemos utilizado directamente los conceptos de clases de tangencia de curvas, pero los conceptos y definiciones que hemos establecidos contienen a las mismas.

3. Problema 3

Demuestre que la definición de diferencial en un punto de un mapeo entre dos variedades diferenciales es buena y que proporciona un mapeo lineal que se reduce a la noción común

de diferencial cuando las dos variedades son espacios de tipo \mathbb{R}^n .

Solución:

Durante toda la prueba utilizaremos el convenio de suma de Einstein, el cual nos dice que un índice que aparece dos veces en un término matemático, una vez como un superíndice y una vez como un subíndice, es sumado sobre el rango entero de ese índice.

Para poder dar respuesta a este problema, tendremos que hacer una serie de construcciones, debido a que como veremos la diferencial de una función real sobre un punto de una variedad diferencial, se puede interpretar más naturalmente en términos de covectores tangentes (como veremos una sección diferenciable del haz cotangente). Muchas de las definiciones y proposiciones básicas, así como sus demostraciones se excluirán de esta solución, enfocándonos y probando las más importantes y relevantes para la solución de este problema.

Sea V un espacio vectorial finito y real. Definimos un covector sobre V como un funcional real lineal sobre V , es decir un mapeo lineal $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$. El espacio de todos los covectores sobre V es un espacio vectorial real sobre la adición y la multiplicación escalar. Se denota por V^* y es llamado el espacio dual a V .

Proposición: Sea V un espacio vectorial finito. Si (E_1, \dots, E_n) es una base cualquiera para V , entonces los covectores $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$, definidos por

$$\epsilon^i(E_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (3.1)$$

forman una base para V^* , llamada la base dual a (E_i) . Y por lo tanto la dimensión de V es igual a la dimensión de V^* .

Definición: Sea M una variedad diferencial. Para cada $p \in M$ definimos el espacio cotangente en p , denotado por T_p^*M , como el espacio dual a T_pM :

$$T_p^*M = (T_pM)^*. \quad (3.2)$$

Los elementos de T_p^*M son llamados los covectores tangentes en p . Si (q^i) son unas coordenadas locales en sobre un subconjunto abierto $U \subseteq M$, entonces para cada $p \in U$, la base coordenada² $(\partial/\partial q^i|_p)$ da lugar a una base dual para T_p^*M , que denotaremos por el momento como $(\lambda^i|_p)$.

Definición: La unión disjunta

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M, \quad (3.3)$$

es llamada el haz cotangente de M . Tiene un mapeo de proyección natural $\pi : T^*M \rightarrow M$ enviando $\omega \in T_p^*M$ a $p \in M$. La base dual para T_p^*M establecida arriba define n mapeos $\lambda^1, \dots, \lambda^n : U \rightarrow T^*M$, llamados los campos covectoriales coordenados. Puede probarse³ que T^*M tiene una única estructura de variedad diferencial, lo que lo hace un haz vectorial de rango n sobre M para el cual todos los campos covectores coordenados son secciones locales diferenciales. Una sección de T^*M es llamada un campo covectorial o una 1-forma diferencial⁴.

Estamos ahora en posición de definir la diferencial.

²Ver problema 4.

³ Ver [2], [1], [3].

⁴Ver [1] y [4].

Definición: Sea f una función real sobre una variedad diferencial M . Definimos un campo covectorial $df_p(\xi_p) = \xi_p f$ para $\xi_p \in T_p M$.

Lema: La diferencial de una función diferenciable es un campo covectorial diferenciable.

Prueba: Es fácil verificar que en cada punto $p \in M$, $df_p(\xi_p)$ depende linealmente en ξ_p , de manera que df_p es un covector en p . Para ver que df es diferenciable, usamos el hecho de que para cualquier campo vectorial ξ sobre un subconjunto abierto $U \subseteq M$, la función $(df \cdot \xi)$ es diferenciable debido a que es igual a ξf .

□

La cual claramente es una buena definición, y también hemos demostrado que proporciona un mapeo lineal. Para ver como luce df de forma más concreta, necesitamos computar su representación coordenada. Sean (q^i) coordenadas diferenciables sobre un subconjunto abierto $U \subseteq M$, y sean (λ^i) las bases correspondientes (en realidad estas deberían llamarse el co-marco coordenado) sobre U . Escribiendo df en coordenadas como $df_p = A_i(p)\lambda^i|_p$ para algunas funciones $A_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, la definición de df implica

$$A_i(p) = df_p \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial q^i}(p). \quad (3.4)$$

Esto produce la siguiente fórmula para la representación de df :

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial q^i}(p) \lambda^i|_p. \quad (3.5)$$

Entonces las funciones componentes de df en cualquier carta coordenada diferenciable son las derivadas parciales con respecto a esas coordenadas. Debido a esto podemos pensar en df como un análogo a el gradiente clásico, reinterpretado en una manera independiente de coordenadas sobre una variedad.

Con estas pequeñas construcciones estamos en posición de probar la segunda parte del enunciado. Si aplicamos (3.5) al caso especial en que las funciones coordenadas $q^i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, obtenemos

$$dq^i|_p = \frac{\partial q^i}{\partial q^i}(p) \lambda^i|_p = \delta_i^i \lambda^i|_p = \lambda^i|_p. \quad (3.6)$$

En otras palabras, el campo covectorial coordenado λ^i no es más que dq^i . Por lo tanto la ecuación (3.5) para df_p puede reescribirse como

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial q^i}(p) dq^i|_p, \quad (3.7)$$

o como una ecuación entre campos covectoriales en vez de covectores:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i. \quad (3.8)$$

La cual es la expresión clásica para la diferencial de una función f en coordenadas, lo cual era lo que debíamos probar. Por este resultado anterior, la notación para las bases de este espacio ya no se denotan como λ^i sino como dq^i , la cual tiene una forma más esclarecedora.

4. Problema 4

Demuestre que el conjunto que denotamos por

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} \right)$$

es una base para el espacio tangente de una variedad en el punto con coordenadas locales (q^1, \dots, q^n) .

Solución:

Para probar esto necesitamos hacer unas pequeñas construcciones, estableceremos un lema, el cual no probaremos, y una proposición que sí será probada de la cual surgirá un corolario el cual demostrará el enunciado del problema. Para una lectura más detallada del tema y la prueba del lema ver el capítulo 3 de [1]. Durante toda la prueba utilizaremos el convenio de suma de Einstein, el cual nos dice que un índice que aparece dos veces en un término matemático, una vez como un superíndice y una vez como un subíndice, es sumado sobre el rango entero de ese índice.

La noción de un vector tangente euclidiano provee la noción de tomar la “derivada direccional” de funciones. Por ejemplo, para cualquier vector tangente $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ podemos definir un mapeo

$$D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

tomando la derivada direccional en la dirección de v en a :

$$D_v|_a f = D_v f(a) = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_t = f(a + tv). \quad (4.2)$$

Esta operación es lineal y satisface la regla del producto:

$$D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a(g) + g(a)D_v|_a(f). \quad (4.3)$$

Si $v_a = v^i e_i|_a$ en términos de la base estándar, entonces por la regla de la cadena $D_v|_a f$ puede escribirse más concretamente como

$$D_v|_a f = f = v^i \frac{\partial f}{\partial q^i(a)}. \quad (4.4)$$

Por ejemplo, si $v_a = e_j|_a$ entonces

$$D_v|_a = \frac{\partial f}{\partial x^j}(a). \quad (4.5)$$

Con esta construcción en la mente hacemos la siguiente definición.

Definición: Si a es un punto de \mathbb{R}^n , un mapeo lineal $\xi : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado una derivación en a si satisface la siguiente regla del producto:

$$\xi(fg) = f(a)\xi(g) + g(a)\xi(f). \quad (4.6)$$

Lema: (Propiedades de la derivación): Sea $T_a(\mathbb{R}^\times)$ el conjunto que denota todas las derivaciones de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\xi \in T_a(\mathbb{R}^n)$, entonces

- (a) Si f es una función constante, entonces $\xi f = 0$.
- (b) Si $f(a) = g(a) = 0$, entonces $\xi(fg) = 0$.

Proposición: Para todo $a \in \mathbb{R}^n$, el mapeo $v_a \mapsto D_v|_a$ es un isomorfismo de \mathbf{R}_a^n sobre $T_a(\mathbb{R}^n)$.

Prueba: El mapeo $v_a \mapsto D_v|_a$ es lineal, lo cual es fácil de verificar. Para ver que es inyectivo, supongamos que $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ tiene la propiedad de que $D_v|_a$ es la derivación cero.

Escribiendo $v_a = v^i e_i|_a$ en términos de la base estándar, y tomando f como la j -ésima función coordenada $q^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pensándola como una función suave en \mathbb{R} , obtenemos

$$0 = D_v|_a(q^j) = v^i \frac{\partial}{\partial q^i}(q^j) \Big|_{x=a} = v^j. \quad (4.7)$$

Debido a que esto es cierto para todo j , entonces v_a es el vector cero.

Para probar que es sobreyectiva, sea un $\xi \in T_a(\mathbb{R}^n)$ arbitrario. Motivados por la pasada computación, definimos números reales v^1, \dots, v^n por

$$v^i = \xi(q^i). \quad (4.8)$$

Mostraremos que $\xi = D_v|_a$, donde $v = v^i e_i$. Para ver esto, sea f una función real suave sobre \mathbb{R} . Por la fórmula de Taylor con residuo, vemos que hay funciones suaves g_1, \dots, g_n definidas en \mathbb{R}^n tales que $g_i(a) = 0$ y

$$f(x) = f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i}(a)(q^i - a^i) + \sum_{i=1}^n g_i(q)(q^i - a^i). \quad (4.9)$$

Notemos que el último término de esta ecuación es una suma de funciones, y cada una de ellas es producto de dos funciones $g_i(q)$ y $(q^i - a^i)$ que se hacen cero cuando $q = a$. Aplicando ξ a esta fórmula y usando el lema, obtenemos

$$\begin{aligned} \xi f &= \xi(f(a)) + \sum_{i=1}^n \xi \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}(a)(q^i - a^i) \right) + \xi(g_i(q)(q^i - a^i)), \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i}(a)(\xi(q^i) - \xi(a^i)) + 0, \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i}(a)v^i, \\ &= D_v|_a f. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Lo cual muestra que $\xi = D_v|_a$. □

De esta proposición surge el siguiente corolario,

Corolario: Para todo $a \in \mathbb{R}^n$, las n derivaciones

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_a, \quad (4.11)$$

definidas por

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_a f = \frac{\partial f}{\partial q^i}(a), \quad (4.12)$$

forman una base para $T_a(\mathbb{R}^n)$, que por lo tanto tiene dimensión n .

Prueba: Esto puede probarse inmediatamente de la pasada proposición, haciendo

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_a = D_{e_i}|_a. \quad (4.13)$$

□

Claramente el corolario es exactamente igual al enunciado que debía probarse, concluyendo así la solución a este problema.

5. Problema 5

Identifique la variedad de configuración correspondiente a las rotaciones de un cuerpo rígido. Demuestre que los ángulos de Euler son un sistema de coordenadas para esa variedad.

Solución:

Definición: Un cuerpo rígido es un sistema de N partículas puntuales, constreñidas por relaciones holonómicas expresadas por el hecho de que la distancia entre los puntos es constante:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \text{constante}, \quad (5.1)$$

para todo $i, j = 1, \dots, N$.

El movimiento más general para un cuerpo rígido es una traslación más una rotación sobre un punto P , pero para la solución de este problema solo consideraremos las rotaciones.

Sea un cuerpo rígido fijado en un punto P . Consideremos una rotación sobre el punto P . Para describir esto, especificaremos las posiciones en un marco de referencia estático $\{\tilde{\mathbf{e}}_a\}$ introduciendo un marco de referencia en movimiento $\{\mathbf{e}_a\}$ en el cuerpo de manera que $\{\mathbf{e}_a\}$ se mueve con él. Debajo se encuentra una ilustración de estas consideraciones,

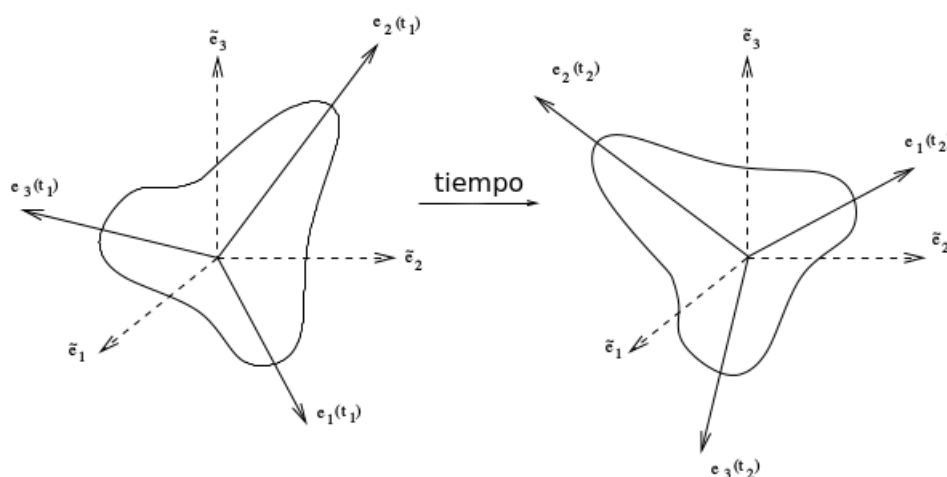


Figura 2: El marco de referencia estático y el marco de referencia en movimiento.

Debido a que ambos ejes son ortogonales, tenemos que

$$\tilde{\mathbf{e}}_a \cdot \tilde{\mathbf{e}}_b = \delta_{ab}, \quad \mathbf{e}_a(t) \cdot \mathbf{e}_b(t) = \delta_{ab}. \quad (5.2)$$

Proposición: Para todo t , existe una matriz ortogonal única $R(t)$ con componentes $R_{ab}(t)$ tal que $\mathbf{e}_a(t) = R_{ab}(t)\tilde{\mathbf{e}}_b$.

Prueba: $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab} \Rightarrow R_{ac}R_{bd}(\tilde{\mathbf{e}}_c \cdot \tilde{\mathbf{e}}_d) = \delta_{ab} \Rightarrow R_{ac}R_{bc} = \delta_{ab}$ o, en otras palabras, $(R^T R)_{ab} = \delta_{ab}$ lo cual establece que R es ortogonal. La unicidad de R proviene de la construcción $R_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \tilde{\mathbf{e}}_b$. □

Entonces mientras el cuerpo rígido rota, esta rotación es descrita por una matriz 3×3 ortogonal y dependiente del tiempo $R(t)$. Debido a la propiedad de las matrices R , $R_{ac}R_{bc} = \delta_{ab}$,

y al hecho de que esta matriz es real, puede probarse sin dificultad que éstas tienen determinantes ± 1 . Debido a que todas las rotaciones físicas pueden ser alcanzadas continuamente de la transformación idéntica (ángulo cero de rotación), y debido a que el determinante de esta es $+1$, entonces todas las matrices de rotación deben tener determinante $+1$, a este tipo de matrices se les llama matrices especiales. Entonces, cada familia uniparamétrica $R(t)$ describe un posible movimiento para el cuerpo, y llegamos a la siguiente conclusión:

$M =$ Variedad de configuración para las rotaciones del cuerpo rígido $=$ Espacio de las matrices ortogonales especiales $\equiv \mathbf{SO}(3)$.

Una matriz 3×3 tiene 9 componentes pero la condición de ortogonalidad $R^T R = 1$ impone 6 relaciones, por lo tanto la variedad de configuración es tridimensional, y por lo tanto necesitamos 3 coordenadas generalizadas para parametrizar y describir completamente a M . Como probaremos en el siguiente teorema, estas coordenadas son los conocidos ángulos de Euler.

Teorema: Una rotación arbitraria puede ser expresada como el producto de 3 rotaciones sucesivas sobre (en general) 3 ejes diferentes.

Prueba: Sean $\{\tilde{\mathbf{e}}_a\}$ los ejes del sistema estático y $\{\mathbf{e}_a\}$ los ejes anclados al cuerpo en rotación. Queremos encontrar la rotación R tal que $\mathbf{e}_a = R_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_b$. Podemos lograr esto en tres pasos

$$\{\tilde{\mathbf{e}}_a\} \xrightarrow{R_3(\phi)} \{\mathbf{e}'_a\} \xrightarrow{R_1(\theta)} \{\mathbf{e}''_a\} \xrightarrow{R_3(\psi)} \{\mathbf{e}_a\} \quad (5.3)$$

Paso 1: Rotación por un ángulo ϕ sobre el eje $\tilde{\mathbf{e}}_3$. Entonces $\mathbf{e}'_a = R_3(\phi)_{ab}\tilde{\mathbf{e}}_b$ con

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

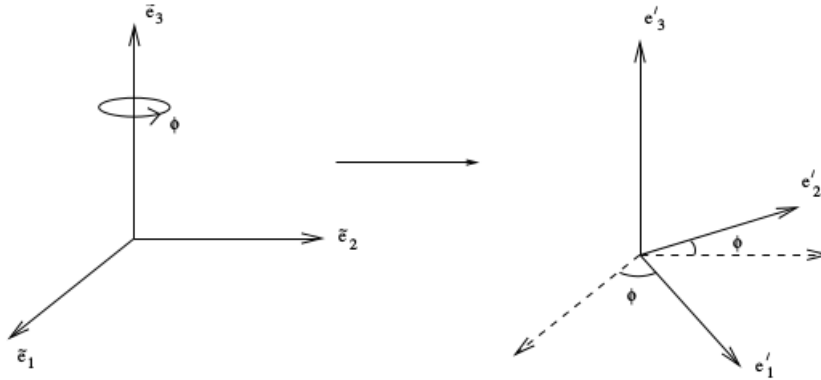


Figura 3: Paso 1: Rotación sobre $\tilde{\mathbf{e}}_e$ del marco de referencia estático.

Paso 2: Rotación por un ángulo θ sobre el nuevo eje \mathbf{e}'_1 . Este eje \mathbf{e}'_1 es conocido como la “línea de nodos”. Escribimos entonces $\mathbf{e}''_a = R_1(\theta)\mathbf{e}'_b$ con

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

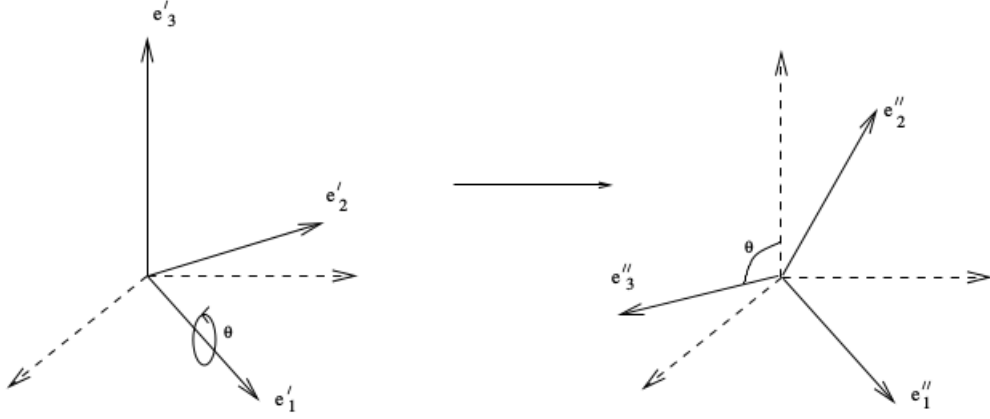


Figura 4: Paso 2: Rotación sobre el nuevo eje \mathbf{e}'_1 .

Paso 3: Rotación por un ángulo ψ sobre el nuevo eje \mathbf{e}''_3 entonces $\mathbf{e}_a = R_3(\psi)_{ab}\mathbf{e}''_b$ con

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

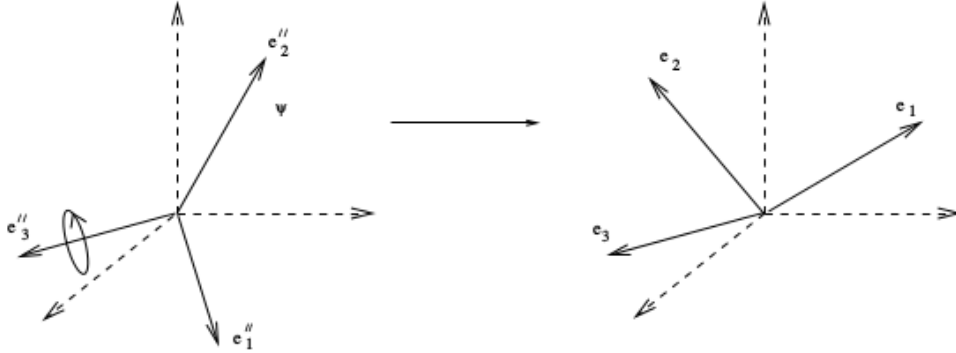


Figura 5: Paso 3: Rotación sobre el último eje \mathbf{e}''_3 .

Poniendo todo esto junto tenemos que

$$R_{ab}(\phi, \theta, \psi) = [R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi)]_{ab} \quad (5.7)$$

□

Los ángulos ϕ, θ, ψ son los ángulos de Euler. Los cuales hemos demostrado entonces que forman un sistema de coordenadas para la variedad de configuración para las rotaciones de un cuerpo rígido, ya que podemos escribir la matriz $R(\phi, \theta, \psi)$ como

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \psi \sin \phi - \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix},$$

y esta cumple con las propiedades deseadas para probar el teorema que hemos propuesto y para formar un sistema de coordenadas locales para $\mathbf{SO}(3)$. Cabe destacar que al utilizar estos ángulos para un problema concreto, debemos recordar que este sistema de

coordenadas es similar a las coordenadas geográficas sobre la esfera: excluyen los polos y son multivaluadas en un meridiano.

Referencias

- [1] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2006.
- [2] W. Curtis y F. Miller, *Differential Manifolds and Theoretical Physics*, Academic Press, 1985.
- [3] A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Academic Press, 1993.
- [4] G. Torres del Castillo, *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, Birkhäuser - Springer, 2012.