

# Mecánica Clásica Tarea # 14

Favio Vázquez\*

*Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.*

## Problema 1

Utilizando únicamente la ecuación de la eikonal deduzca la ley de Snell.

Solución:

Recordemos la expresión para la ecuación de la eikonal,

$$|\nabla S|^2(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Esta ecuación es simplemente el módulo de la ecuación de Huygens que puede escribirse como

$$\nabla S = n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}, \quad (1.2)$$

y también sabemos que el gradiente de esta ecuación define el vector de rayo de magnitud  $|\mathbf{n}| = n$ . Si ahora recordamos que la integración del gradiente sobre un camino cerrado se hace cero, tenemos que

$$\oint_P \nabla S(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_P \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.3)$$

Consideremos ahora el caso en que el camino cerrado  $P$  rodea una frontera que separa dos medios diferentes. Si hacemos que los lados del bucle perpendicular a la interfaz vayan a cero, entonces únicamente las partes de la integral de línea tangenciales al camino de la interfaz contribuirán en la misma. Ahora debido a que estas contribuciones deben sumar cero, las componentes tangenciales de los vectores de rayo deben preservarse, esto es

$$(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (1.4)$$

donde el primo se refiere al lado de la frontera al cual el rayo es transmitido, cuyo vector normal es  $\hat{\mathbf{z}}$ . Ahora imaginemos a un rayo atravesando la frontera y pasando a través de la región encerrada por el bucle de integración. Si  $\theta$  y  $\theta'$  son los ángulos de incidencia y transmisión, respectivamente, medidos desde la normal  $\hat{\mathbf{z}}$  a través de la frontera, entonces la preservación de la componente tangencial del vector de rayo significa que, tomando en cuenta (1.4) y la definición del producto vectorial,

$$\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{n}' \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (1.5)$$

$$n \sin \theta - n' \sin \theta' = 0, \quad (1.6)$$

---

\*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

esto debido a que  $|\dot{\mathbf{z}}| = 1$ , por lo tanto

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (1.7)$$

Que es la ley de la refracción de Snell, descubierta primero por Ibn Sahl en 984 [1], y luego por Willebrod Snellius en 1621 [2]. Un análisis similar puede aplicarse al caso de los rayos reflejos para mostrar que el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión.

## Problema 2

En el curso se mostró que la ecuación de la eikonal es una aproximación de onda pequeña de la ecuación de ondas. Encuentre ahora, a partir únicamente del principio de Fermat, las ecuaciones diferenciales que determinan los rayos de luz y la ecuación de la eikonal. Comente sobre la situación análoga entre las ecuaciones de movimiento de la mecánica y el principio de Hamilton.

Solución:

En gran parte esta discusión y pruebas fueron tomadas de [2]. Matemáticamente, el principio de Fermat establece que el camino un rayo  $\mathbf{r}(s)$  de un punto  $A$  a un punto  $B$  en el espacio es un extremal de la longitud óptica, definida por

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}(s)) ds = 0. \quad (2.1)$$

Donde  $n(\mathbf{r})$  es el índice de refracción en el punto espacial  $\mathbf{r}$  y

$$ds^2 = d\mathbf{r}(s) \cdot d\mathbf{r}(s) \quad (2.2)$$

es el elemento de la longitud de arco  $ds$  a lo largo del camino del rayo  $\mathbf{r}(s)$  a través del punto.

**Definición:** El **eje óptico** se define como la dirección principal de propagación de la luz.

Si se escogen coordenadas de manera que el eje  $z$  coincida con el eje óptico y se exprese el elemento de longitud de arco  $ds$  en términos del incremento a lo largo del eje óptico,  $dz$ , como

$$\begin{aligned} ds &= [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2} \\ &= [1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} dz = \frac{1}{\gamma} dz, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la notación  $\dot{x} \equiv dx/dz$ ,  $\dot{y} \equiv dy/dz$  y  $\gamma \equiv dz/ds$ , entonces el principio de Fermat puede interpretarse como un principio de acción estacionaria, con  $z$  jugando el papel del tiempo (de aquí en adelante escribiremos  $t$  en vez de  $z$ ),

$$0 = \delta S \equiv \delta \int_{t_A}^{t_B} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) dt. \quad (2.3)$$

Aquí, hemos definido la lagrangiana óptica como

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = n(x, y, t) [1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} = \frac{n(x, y, t)}{\gamma}, \quad (2.4)$$

con

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \leq 1. \quad (2.5)$$

Podemos pensar en  $(x, y, t) = (\mathbf{q}, t)$  donde  $\mathbf{q} = (x, y)$  es un vector con componentes en el plano perpendicular al eje óptico a un desplazamiento en un tiempo  $t$ . En esta formulación, el principio de Fermat implica la ecuación eikonal, lo cual establecemos en el siguiente teorema:

**Teorema:** El principio de Fermat

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt, \quad (2.6)$$

para la lagrangiana óptica

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = n(\mathbf{q}, t) [1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2]^{1/2} \equiv \frac{n}{\gamma}, \quad (2.7)$$

con

$$\gamma \equiv \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}} \leq 1, \quad (2.8)$$

implica la ecuación de la eikonal

$$\gamma \frac{d}{dt} \left( n(\mathbf{q}, t) \gamma \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}}, \quad \text{con} \quad \frac{d}{ds} = \gamma \frac{d}{dt} \quad (2.9)$$

**Prueba:** Consideremos una familia de curvas  $C^2 \mathbf{q}(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^2$  que representan los posibles caminos de rayos desde un punto  $A$  a un punto  $B$  en el espacio. Estos caminos satisfacen

$$\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{q}(t_A, \epsilon) = \mathbf{q}(t_A) \quad \text{y} \quad \mathbf{q}(t_B, \epsilon) = \mathbf{q}(t_B), \quad (2.10)$$

para un parámetro  $\epsilon$  en algún intervalo cerrado. Si definimos la variación de la acción óptica (2.3) usando este parámetro como

$$\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt, \quad (2.11)$$

entonces

$$\delta S = \frac{d}{d\epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}(t, \epsilon), \dot{\mathbf{q}}(t, \epsilon)) dt. \quad (2.12)$$

Diferenciando con respecto a  $\epsilon$  bajo el signo de la integral, denotando la derivada variacional como

$$\delta \mathbf{q}(t) \equiv \frac{d}{d\epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \mathbf{q}(t, \epsilon), \quad (2.13)$$

e integrando por parte produce la siguiente variación de la acción óptica,

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} \right) dt \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta \mathbf{q} + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta \mathbf{q} \right]_{t_A}^{t_B}. \end{aligned}$$

Donde hemos asumido que las derivadas cruzadas son iguales evaluadas en  $\epsilon = 0$ , y por lo tanto podemos cambiar el orden de derivación y escribir

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}. \quad (2.14)$$

Los términos evaluados en los puntos  $t_A$  y  $t_B$  de la última ecuación se hacen cero debido a que  $\delta \mathbf{q}(t_A) = 0 = \delta \mathbf{q}(t_B)$ . Esto es porque la variación del camino del rayo debe hacerse cero en los puntos espaciales  $A$  y  $B$  en  $t_A$  y  $t_B$  a lo largo del eje óptico. Debido a que  $\delta \mathbf{q}$  es arbitrario, el principio de acción estacionaria es equivalente a la siguiente ecuación, la cual es la conocida ecuación de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (2.15)$$

Ahora introduciendo la lagrangiana óptica (2.7) en la ecuación de Lagrange (2.15), nos resulta en

$$\frac{d}{dt} \left( n(\mathbf{q}, t) \frac{\dot{\mathbf{q}}}{\sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} \sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}, \quad (2.16)$$

y utilizando la definición de  $\gamma = 1/\sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}$  tenemos entonces

$$\gamma \frac{d}{dt} \left( n(\mathbf{q}, t) \gamma \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}}, \quad (2.17)$$

que es exactamente (2.9). ■

Ahora para encontrar la ecuación de la eikonal que vimos en clase, que es en realidad la llamada ecuación eikonal escalar, comenzamos por escribir (2.9) en tres dimensiones, para un camino de rayo  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  como

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial (d\mathbf{r}/ds)} \right) = \frac{d}{ds} \left( n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.18)$$

Y ahora con el siguiente teorema probaremos lo que queremos:

**Teorema:** La ecuación de la eikonal (2.18) obtenida del principio de Fermat, se puede obtener de la ecuación de ondícula (wavelet) de Huygens,

$$\nabla S(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (2.19)$$

diferenciándola a lo largo del camino del rayo.

**Prueba:** Podemos probar este teorema aplicando la operación

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla = \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla, \quad (2.20)$$

a la ecuación de Huygens (2.19). Esto producirá la ecuación de la eikonal (2.18), con el siguiente razonamiento,

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla (\nabla S) = \frac{1}{2n} \nabla |\nabla S|^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \nabla n. \quad (2.21)$$

En estas ecuaciones el primer paso sustituye

$$\frac{d}{ds} = n^{-1} \nabla S \cdot \nabla. \quad (2.22)$$

El segundo paso cambia el orden de las derivadas. El tercer paso usa el módulo de la ecuación de Huygens (2.19) e invoca la propiedad  $|d\mathbf{r}/ds|^2 = 1$ . Demostrando así el teorema y encontrando la ecuación de la eikonal.

■

Y para obtener la ecuación escalar de la eikonal, que fue la que vimos en clase, solo debemos obtener el módulo de la ecuación de Huygens, que como probamos produce la misma ecuación de la eikonal que del principio de Fermat, y nos queda

$$|\nabla S|^2(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}). \quad (2.23)$$

Y hemos obtenido lo que pedía el problema, hemos encontrado la ecuación diferencial que determinan los rayos de luz que es la ecuación (2.18) y aparte hemos encontrado la ecuación de la eikonal en su forma vectorial (2.9) y escalar que fue como se vio en clases en la ecuación (2.23).

Ahora por otra parte, hablaremos un poco sobre la analogía entre la mecánica y la óptica geométrica que es la que hemos estado tratando. El principio de Fermat es un ejemplo de la relevancia de los principios variacionales en la física, y la analogía entre la mecánica y la óptica geométrica está basada en el hecho de que ambas teorías pueden ser formuladas en términos de principios variacionales. Aún más, existe una analogía muy cercana entre la ecuación de la eikonal en la óptica y la ecuación de Hamilton-Jacobi en la mecánica, y por lo tanto entre los rayos de luz y las trayectorias en un sistema mecánico, esto está bien establecido y probado en extensión en [3]. Podemos decir que, en pocas palabras, la analogía mecánica del principio de Fermat en la óptica es el principio de Maupertuis, que establece que las órbitas para una energía fija

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + V, \quad (2.24)$$

donde  $I_{ij}$  es el tensor de inercia, sigue del problema variacional

$$\delta \int \sqrt{(E - V) I_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} = 0. \quad (2.25)$$

De este principio podemos obtener las ecuaciones diferenciales que rigen la mecánica clásica, que pueden expresarse de forma equivalente en las ecuaciones de Newton, Lagrange, Hamilton o Hamilton-Jacobi. Para pasar de este principio a la determinación de rayos de luz tenemos que hacer  $E = 0$ , debido a la ecuación de la eikonal (2.23).

### Problema 3

En el curso se demostró que la función principal de Hamilton es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente. ¿Será cierto el enunciado inverso de este, esto es, que una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede ver como la función principal de Hamilton? Argumente su respuesta.

Solución:

### Problema 4

Demuestre que un sistema es integrable sí y solo sí existen sistemas de coordenadas canónicas en las que la ecuación de Hamilton-Jacobi es totalmente separable.

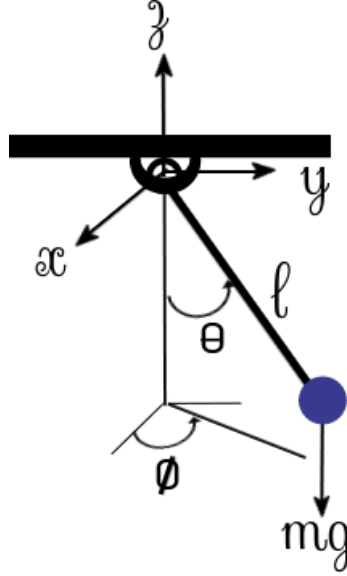
Solución:

## Problema 5

Reduzca a cuadraturas por el método de Liouville el ejemplo del péndulo esférico.

Solución:

Debajo se encuentra un diagrama del péndulo esférico,



**Figura 1:** Péndulo esférico.

recordamos que para el péndulo esférico la lagrangiana se escribe como

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - mgl \cos \theta), \quad (5.1)$$

podemos ahora escribir la hamiltoniana del sistema, primero obteniendo los momentos conjugados para las variables  $\theta$  y  $\phi$ ,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad (5.2)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta, \quad (5.3)$$

de donde obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \quad (5.4)$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.5)$$

y ahora utilizando

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^i(q, p) - L, \quad (5.6)$$

la hamiltoniana del péndulo esférico resulta

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta. \quad (5.7)$$

Podemos notar ahora dos cosas. Primero, debido a que la coordenada  $\phi$  es ignorable según la forma de la lagrangiana, entonces su momento conjugado se conservará, es decir que  $p_\phi$  es constante, y además debido a que la energía cinética es una forma cuadrática de las velocidades y que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, entonces la hamiltoniana es igual a la energía total del sistema, que también será una integral de movimiento. Usando la notación del método de Liouville, podemos escribir esto de la siguiente forma

$$\frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta = I_1 = E, \quad (5.8)$$

$$p_\phi = I_2. \quad (5.9)$$

Ahora hemos encontrado entonces dos integrales de movimiento, nos preguntamos ahora si están en involución, es decir si

$$\{I_1, I_2\} = 0, \quad (5.10)$$

para ver esto recordamos la expresión para los paréntesis de Poisson,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \theta} \frac{I_2}{\partial p_\theta} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\theta} \frac{I_2}{\partial \theta} + \frac{\partial I_1}{\partial \phi} \frac{I_2}{\partial p_\phi} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\phi} \frac{I_2}{\partial \phi} = 0. \quad (5.11)$$

Por lo tanto hemos demostrado que las dos integrales de movimiento que hemos encontrado están en involución, y debido a que hay tantas integrales de movimiento en involución como grados de libertad el sistema es integrable. Esto quiere decir que la uno forma  $\omega = \sum_i p_i dq^i$ , que en términos de nuestras coordenadas y definiciones tiene la forma (despejando  $p_\theta$  de (5.8)),

$$\omega = \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)} d\theta + I_2 d\phi, \quad (5.12)$$

utilizando el teorema de Liouville es integrable, y al integrarla obtenemos

$$F = \int \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)} d\theta + I_2 \phi. \quad (5.13)$$

Y en vistas del mismo teorema podemos ver entonces a  $F(q, I)$  como una función generadora de tipo dos, que al complementarla con

$$Q^i = \frac{\partial F(q, I)}{\partial I_i}, \quad (5.14)$$

obtenemos una transformación canónica de coordenadas

$$(q, p) \leftrightarrow (Q, I), \quad (5.15)$$

que nos lleva a un sistema canónico de coordenadas donde los impulsos son las integrales de movimiento. Ahora calculando las  $Q^i$  utilizando (5.14), obtenemos

$$Q^1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = \int \frac{ml^2}{\sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta, \quad (5.16)$$

$$Q^2 = \phi - \int \frac{I_2}{\sin^2 \theta \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta. \quad (5.17)$$

Y en nuestro nuevo sistema canónico  $(Q^1, Q^2, I_1, I_2)$  tenemos

$$H = I_1 = E, \quad (5.18)$$

por lo que

$$\dot{Q}^1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = 1, \quad (5.19)$$

y

$$\dot{Q}^2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = 0. \quad (5.20)$$

Y de estas ecuaciones podemos escribir, llamando a las constantes de integración  $\beta^1$  y  $\beta^2$  respectivamente,

$$Q^1 = t + \beta^1, \quad (5.21)$$

$$Q^2 = \beta^2, \quad (5.22)$$

y utilizando estos resultados las ecuaciones (5.16) y (5.17), quedan como

$$t = -\beta^1 + \frac{\partial F}{\partial I_1} = \int \frac{ml^2}{\sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta. \quad (5.23)$$

$$\phi = \beta^2 + \int \frac{I_2}{\sin^2 \theta \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta. \quad (5.24)$$

Con lo cual hemos reducido el péndulo esférico a cuadraturas utilizando el método de Liouville.

## Referencias

- [1] R. Rashed, “*Géométrie et dioptrique au Xe siècle: Ibn Sahl, Al-Quhi et Ibn Al-Haytham*”, Las Belles Lettres, 1993.
- [2] D. Holm, *Geometric Mechanics, Part I: Dynamics and Symmetry*, World Scientific, Imperial College Press, 2008.
- [3] H. Römer, *Theoretical Optics: An introduction*, Wiley-VCH, 2005.