

# Mecánica Clásica Tarea # 13

Favio Vázquez\*

*Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.*

## Problema 1

Una partícula de masa  $m$  se mueve sobre el eje de las  $x$  sujeta a un potencial

$$V = a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right),$$

encuentre la trayectoria por el método de Hamilton-Jacobi.

Solución:

Tenemos una partícula que se mueve en sólo una dimensión en el eje  $x$ , por lo tanto podemos escribir la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2m} p_x^2, \quad (1.1)$$

y considerando la expresión que tenemos para el potencial, podemos escribir la hamiltoniana del sistema como<sup>1</sup>

$$H = \frac{1}{2m} p_x^2 + a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right). \quad (1.2)$$

Podemos ahora construir la ecuación de Hamilton-Jacobi, que queda expresada como

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right) = -\frac{\partial G}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Claramente esta ecuación se puede resolver por el método de separación de variables, y proponemos entonces que

$$G(x, t) = W(x) + T(t), \quad (1.4)$$

entonces la ecuación (1.3) se convierte en

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right) = -\frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.5)$$

---

\*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

<sup>1</sup>Debido a que la lagrangiana  $L = T - V$  del sistema es independiente del tiempo y la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades, entonces la cantidad de Jacobi es la energía total del sistema, y al escribir a la cantidad de Jacobi en términos de  $x$  y  $p_x$  tenemos que también la hamiltoniana es la energía total del sistema, es decir  $H = T + V$ .

Debido a que el lado izquierdo de (1.5) depende únicamente de  $x$  y el derecho de  $t$ , el único modo de que esta expresión se cumpla es que ambos términos sean iguales a una misma constante que llamaremos  $\alpha_1$ . Entonces,

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right) = \alpha_1, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha_1. \quad (1.7)$$

De la segunda ecuación vemos que

$$T(t) = -\alpha_1 t, \quad (1.8)$$

y de la primera ecuación

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \left\{ 2m \left[ \alpha_1 - a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (1.9)$$

y entonces

$$W(x) = \int \left\{ 2m \left[ \alpha_1 - a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right) \right] \right\}^{1/2} dx. \quad (1.10)$$

Por lo tanto tenemos que

$$G(x, t) = \int \left\{ 2m \left[ \alpha_1 - a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right) \right] \right\}^{1/2} dx - \alpha_1 t. \quad (1.11)$$

Podemos hallar ahora  $\beta_1 = \frac{\partial G}{\partial \alpha_1}$ ,

$$\beta_1 = -t + \int \frac{mdx}{\left\{ 2m \left[ \alpha_1 - a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right) \right] \right\}^{1/2}} dx. \quad (1.12)$$

De la última ecuación podemos encontrar una ecuación para la trayectoria,  $x(t)$ , pero resulta casi imposible despejar a  $x$  de la misma, pero se ha encontrado en términos generales la trayectoria del sistema, ya que con encontrar estas expresiones, aunque quedan en términos de integrales, se considera resuelto el sistema, esto también se da ya que hemos encontrado una expresión para  $G$  que contiene toda la información del sistema, y obviamente la trayectoria. Para ser completos se muestra debajo el resultado de integrar la anterior ecuación, si se desea una expresión concreta para  $x$  se pueden utilizar algunas aproximaciones o series de potencia.

$$\frac{l \sec \left( \frac{x}{l} \right) \sqrt{\alpha_1 \cos \left( \frac{2x}{l} \right)} \sqrt{\frac{1}{\alpha_1 - a \sec^2 \left( \frac{x}{l} \right)}} \arctan \left( \frac{\sqrt{2\alpha_1} \sin \left( \frac{x}{l} \right)}{\alpha_1 \cos \left( \frac{2x}{l} \right) + \alpha_1 - 2a} \right)}{2\sqrt{\alpha_1}} = -t - \beta_1 \quad (1.13)$$

## Problema 2

Usando los ángulos de Euler como coordenadas, establezca la ecuación de Hamilton-Jacobi del trompo simétrico. ¿Se podrá resolver esta ecuación por separación de variables?; de ser esto posible encuentre la solución. Puede dejar integrales indicadas.

Solución:

## Problema 3

Demuestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi de una partícula atraída por dos centros gravitatorios iguales que se encuentran a una distancia fija  $l$  es separable en coordenadas elípticas confocales.

Solución:

**Nota:** El profesor nos dijo que podíamos resolver el problema en dos dimensiones.

**Notación:** Cambiaremos  $l$  por  $a$  debido a que es más fácil de distinguir tanto para las imágenes como para las ecuaciones.

Las coordenadas elípticas confocales  $u$  y  $v$  están relacionadas con las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  por

$$x = a \cosh u \cos v, \quad (3.1)$$

$$y = a \sinh u \sin v. \quad (3.2)$$

Los rangos de  $u$  y  $v$  son  $0 \leq u < \infty$  y  $0 \leq v < 2\pi$ . Para encontrar las curvas coordenadas primero hacemos  $u$  constante, y tenemos que

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = a^2, \quad (3.3)$$

y llamando a  $A = \cosh u$  y  $B = \sinh u$  tenemos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = a^2, \quad (3.4)$$

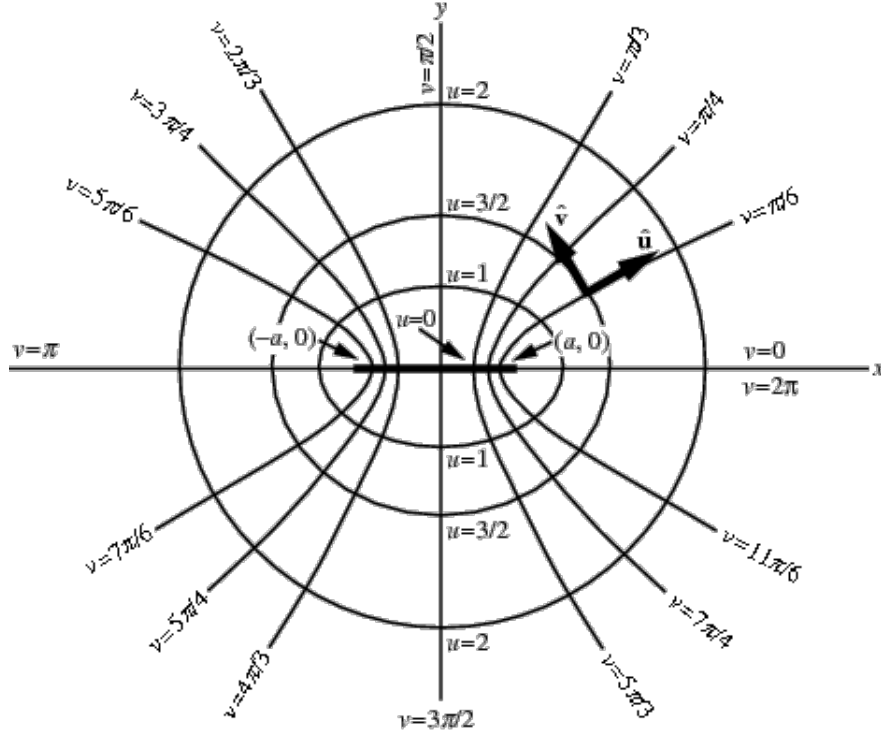
y vemos claramente que las curvas de  $u$  constante son elipses. Ahora consideremos a  $v$  constante, tenemos que

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = a^2, \quad (3.5)$$

y llamando a  $C = \cos v$  y  $D = \sin v$  tenemos

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{y^2}{D^2} = a^2, \quad (3.6)$$

y vemos que cada curva de  $v$  constante es una hipérbola que se abre en las direcciones de  $\pm x$ . Puede probarse [1] que todas estas curvas tienen los mismos focos en  $y = 0$ ,  $x = \pm a$  y que las elipses intersectan a las hipérbolas en ángulos rectos. Debajo se encuentra una representación gráfica de estas coordenadas con los resultados que hemos obtenido.



**Figura 1:** Coordenadas confocales elípticas  $(u, v)$  en el plano. Las curvas de  $u$  constante son elipses y las de  $v$  constante son hipérbolas.

Para resolver este problema fijaremos los focos de las coordenadas elípticas en los centros gravitatorios fijos  $(x, y) = (\pm a, 0)$ , ver figura (1). La hamiltoniana es entonces

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r_1, r_2), \quad (3.7)$$

donde el potencial  $V$  depende de las distancias  $r_1$  y  $r_2$  hacia los dos centros de fuerza y está dado por

$$V(r_1, r_2) = - \left( \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2} \right) = - \left( \frac{\alpha_1}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{\alpha_2}{(x+a)^2 + y^2} \right), \quad (3.8)$$

donde las  $\alpha_i$  son las fuerzas de los centros de fuerza. Ahora reescribiremos  $H$  en términos de  $(u, v)$ , para eso utilizamos el hecho de podemos escribir al potencial en términos de  $(u, v)$  como (utilizando (3.3) y (3.5))

$$V(u, v) = - \frac{\alpha \cosh u - \alpha' \cos v}{\cosh^2 u - \cos^2 v}, \quad (3.9)$$

donde  $\alpha \equiv \alpha_1 + \alpha_2$  y  $\alpha' \equiv \alpha_1 - \alpha_2$ . Y ahora reescribiremos la energía cinética en términos de los impulsos conjugados

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}}, \quad (3.10)$$

$$p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{v}}, \quad (3.11)$$

debido a que  $V$  es independiente de  $\dot{u}$  y  $\dot{v}$ . Entonces

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}a^2m(\cosh^2 u - \cos^2 v)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2), \quad (3.12)$$

por lo tanto

$$p_u = a^2m(\cosh^2 u - \cos^2 v)\dot{u}, \quad (3.13)$$

y

$$p_v = a^2m(\cosh^2 u - \cos^2 v)\dot{v}, \quad (3.14)$$

y encontramos ahora una expresión para  $\dot{u}$  y  $\dot{v}$  en términos de  $p_u$  y  $p_v$ ,

$$\dot{u} = \frac{p_u}{a^2m(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \quad (3.15)$$

y

$$\dot{v} = \frac{p_v}{a^2m(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \quad (3.16)$$

y entonces

$$T = \frac{1}{2}a^2m(\cosh^2 u - \cos^2 v) \left( \frac{p_u^2}{a^4m^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)^2} + \frac{p_v^2}{a^4m^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)^2} \right). \quad (3.17)$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \left( \frac{p_u^2 + p_v^2}{a^2m(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \right). \quad (3.18)$$

Podemos ahora escribir la hamiltoniana en estas nuevas coordenadas como

$$H = T + V = \frac{1}{2a^2m} \left( \frac{p_u^2 + p_v^2}{\cosh^2 u - \cos^2 v} \right) - \frac{\alpha \cosh u - \alpha' \cos v}{\cosh^2 u - \cos^2 v}, \quad (3.19)$$

$$\therefore H = \frac{1}{2a^2m} \left( \frac{p_u^2 + p_v^2 - 2a^2m\alpha \cosh u + 2a^2m\alpha' \cos v}{\cosh^2 u - \cos^2 v} \right) \quad (3.20)$$

Ahora escribimos la ecuación de Hamilton-Jacobi como

$$\frac{1}{2a^2m} \left( \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial v} \right)^2 - 2a^2m\alpha \cosh u + 2a^2m\alpha' \cos v \right) = -\frac{\partial G}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Para comprobar si esta ecuación en derivadas parciales es soluble por el método de separación de variables proponemos una solución del estilo

$$G(u, v, t) = W(u, v) + T(t), \quad (3.22)$$

y entonces la ecuación (3.21) se transforma en

$$\frac{1}{2a^2m} \left( \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 - 2a^2m\alpha \cosh u + 2a^2m\alpha' \cos v \right) = -\frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.23)$$

Vemos que el único modo de que se cumpla la igualdad (3.23) es que ambos lados sean iguales a una constante que llamaremos  $\zeta_1$ , y tenemos entonces

$$\frac{1}{2a^2m} \left( \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 - 2a^2m\alpha \cosh u + 2a^2m\alpha' \cos v \right) = \zeta_1, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\zeta_1. \quad (3.25)$$

De la segunda de estas ecuaciones vemos que

$$T(t) = -\zeta_1 t, \quad (3.26)$$

y la primera la podemos reescribir como

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 = 2a^2 m \zeta_1 (\cosh^2 u - \cos^2 v) + 2a^2 m \alpha \cosh u - 2a^2 m \alpha' \cos v. \quad (3.27)$$

Ya hemos separado la parte temporal, ahora proponemos una solución del tipo

$$W(u, v) = W_u(u) + W_v(v), \quad (3.28)$$

y entonces tenemos que

$$\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2 = 2a^2 m \zeta_1 (\cosh^2 u - \cos^2 v) + 2a^2 m \alpha \cosh u - 2a^2 m \alpha' \cos v, \quad (3.29)$$

reescribiendo vemos que

$$\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 - 2a^2 m \zeta_1 \cosh^2 u - 2a^2 m \alpha \cosh u = -\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2 - 2a^2 m \zeta_1 \cos^2 v - 2a^2 m \alpha' \cos v. \quad (3.30)$$

Como vemos el lado izquierdo de (3.30) solo depende de  $u$  y el lado derecho de  $v$  por lo tanto el único como de que se mantenga esta igualdad es que ambos lados sean iguales a una misma constante que llamaremos  $\zeta_2$ , y entonces

$$\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 - 2a^2 m \zeta_1 \cosh^2 u - 2a^2 m \alpha \cosh u = \zeta_2. \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2 + 2a^2 m \zeta_1 \cos^2 v + 2a^2 m \alpha' \cos v = -\zeta_2. \quad (3.32)$$

Y con estas dos ecuaciones finales hemos demostrado que el sistema es separable si se utilizan coordenadas elípticas confocales.

## Problema 4

Establezca la ecuación de Hamilton-Jacobi de una partícula libre en dos dimensiones en coordenadas polares. Encuentre una solución completa de esta ecuación. Haga un análisis de las superficies de nivel de esta solución y de su relación con el movimiento. Establezca el significado de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ .

Solución:

Debido a que la partícula está libre, tenemos que la lagrangiana de la misma en coordenadas cartesianas será

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (4.1)$$

y en coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad (4.2)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (4.3)$$

la lagrangiana se escribe como

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (4.4)$$

Ahora para obtener la expresión para la hamiltoniana debemos encontrar los momentos conjugados,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad (4.5)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad (4.6)$$

y ahora encontramos expresiones de  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$  en términos de  $p_r$  y  $p_\theta$ ,

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad (4.8)$$

y con estas expresiones podemos construir la hamiltoniana, que se escribe como

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mr^2}. \quad (4.9)$$

Y ahora la ecuación de Hamilton-Jacobi para el sistema será

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\frac{\partial G}{\partial t}. \quad (4.10)$$

Vemos que en esta ecuación el tiempo es separable, por lo que proponemos una solución de la forma  $G(r, \theta, t) = W(r, \theta) + T(t)$ , y al sustituir en la ecuación anterior nos queda

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Vemos que el único modo de que se cumpla la igualdad anterior es que ambos lados sean iguales a una constante que llamaremos  $\alpha_1$ , y tenemos entonces

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \alpha_1, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha_1, \quad (4.13)$$

más una constante aditiva de integración que consideramos, sin perder generalidad, como cero. De la segunda ecuación

$$T(t) = -\alpha_1 t. \quad (4.14)$$

Ahora para la primera ecuación proponemos una solución del tipo  $W(r, \theta) = W_r(t) + W_\theta(\theta)$  y tenemos que

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \alpha_1. \quad (4.15)$$

Toda la dependencia en  $\theta$  de esta ecuación está en el término  $\partial W_\theta / \partial \theta$ , por lo que este debe ser constante, llamaremos a esta constante  $\alpha_2$ . Entonces

$$W_\theta(\theta) = \alpha_2 \theta, \quad (4.16)$$

más una constante de integración que también haremos cero como anteriormente. Finalmente  $W_r$ , deberá, para que se cumpla la ecuación de Hamilton-Jacobi, cumplir con

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right] = \alpha_1. \quad (4.17)$$

Para resolver esta ecuación despejamos el término de la derivada

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} = \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}, \quad (4.18)$$

e integramos

$$W_r = \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr. \quad (4.19)$$

Y la solución completa será

$$G = \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \alpha_2 \theta - \alpha_1 t. \quad (4.20)$$

Ahora obtengamos las constantes  $\beta^i$ ,

$$\beta^1 = \frac{\partial G}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} dr - t, \quad (4.21)$$

$$\beta^2 = \frac{\partial G}{\partial \alpha_2} = - \int \frac{\alpha_2}{r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} dr + \theta. \quad (4.22)$$

Por último utilicemos las expresiones para los impulsos generalizados en la formulación de Hamilton-Jacobi,

$$p_r = \frac{\partial G}{\partial r} = \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}, \quad (4.23)$$

$$p_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} = \alpha_2. \quad (4.24)$$

Podemos ahora darle sentido físico a las constantes  $\alpha_i$  y  $\beta^i$ , tenemos que de (4.24)  $\alpha_2$  es el impulso  $p_\theta$  o impulso angular de la partícula. De la ecuación (4.23) podemos despejar  $\alpha_1$ ,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) \quad (4.25)$$



y por lo tanto podemos ver que  $\alpha_1$  es la energía total de la partícula que llamaremos  $E$ . Ahora si reescribimos la ecuación (4.22) como

$$\theta = \beta^2 - \int \frac{p_\theta}{r^2 \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} dr, \quad (4.26)$$

podemos identificar a  $\beta^2$  con  $\theta_0$ . Y al escribir (4.21) como

$$t = \int \frac{m}{\sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} dr - \beta^1, \quad (4.27)$$

podemos identificar a  $\beta^2$  con  $r_0$ . Podemos escribir ahora la solución completa del problema como

$$G = \int \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}} dr + p_\theta \theta - Et. \quad (4.28)$$

Ahora culminemos el problema haciendo un breve análisis de las superficies de nivel para  $G$  constante, es decir ver a  $W$  como un campo escalar en la variedad de configuración parametrizado por las  $\alpha_i$  que ya sabemos que no son más que la energía total  $E$  y el impulso angular  $p_\theta$  de la partícula. Entonces tenemos que las superficies de nivel que forma  $W$  están dadas por

$$\int \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}} dr + p_\theta \theta = c, \quad (4.29)$$

donde hemos llamado  $c$  a la constante.

## Problema 5

Utilizando el método de Hamilton-Jacobi reduzca a cuadraturas el péndulo simple.

Solución:

## Referencias

- [1] G. Arfken y H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6ta edición, Elsevier Academic Press, 2005.