Mecánica Clásica Tarea # 15

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

NOTA: En los billares hay trayectorias que son singulares que son aquellas en las que la partícula llega a incidir exactamente en uno de los vértices. Desprecie esta posibilidad limitando sus cálculos al conjunto de trayectorias no singulares.

Problema 1

Una partícula de masa m se mueve libremente en el interior de un rectángulo de lados a y b y rebota elásticamente al incidir sobre los lados del rectángulo (billar). Encuentre, si es que existen, unas coordenadas o variables de acción y ángulo para este sistema. A partir de estas variables encuentre, si es que existen, las frecuencias asociadas al movimiento.

Solución:

Problema 2

Encuentre coordenadas de acción y ángulo para el péndulo esférico (puede dejar indicadas algunas integrales). Trace figuras, similares a las que se trazaron en clase para el problema de Kepler, en las que se muestra que las trayectorias están sobre toros de dos dimensiones inmersos en el espacio fase de cuatro. (Use la computadora para hacer las figuras).

Solución:

Recordemos que las coordenadas de acción y ángulo existen sólo en las regiones acotadas del espacio de fase de un sistema integrable, y que estas son coordenadas canónicas en las que los impulsos son integrales de movimiento y determinan a uno de los toros y las coordenadas conjugadas de estos impulsos son ángulos que determinan a un punto de dicho toro. Por lo tanto es necesario demostrar que el péndulo esférico es un sistema integrable, y encontrar las coordenadas de ángulo y acción para su espacio de fases que será acotado.

Debajo se encuentra un diagrama del péndulo esférico,

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

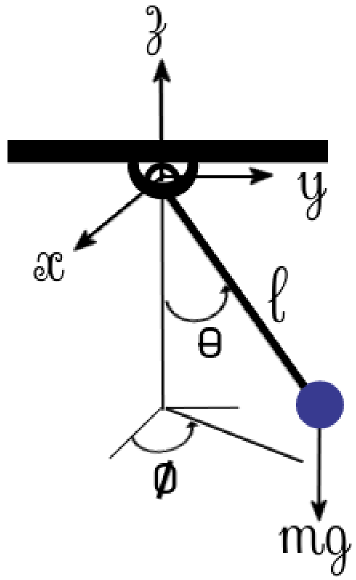

Figura 1: Péndulo esférico.

recordamos que para el péndulo esférico la lagrangiana se escribe como

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) - mgl \cos\theta, \tag{2.1}$$

podemos ahora escribir la hamiltoniana del sistema, primero obteniendo los momentos conjugados para las variables θ y ϕ,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \tag{2.2}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta, \tag{2.3}$$

de donde obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \tag{2.4}$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \operatorname{sen}^2 \theta}, \tag{2.5}$$

y ahora utilizando

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^2(q,p) - L, \tag{2.6}$$

la hamiltoniana del péndulo esférico resulta

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \operatorname{sen}^2 \theta} + mgl \cos\theta. \tag{2.7}$$

Podemos notar ahora dos cosas. Primero, debido a que la coordenada ϕ es ignorable según la forma de la lagrangiana, entonces su momento conjugado se conservará, es decir que p_ϕ es constante y es una integral de movimiento, y además debido a que la energía cinética es una forma cuadrática de las velocidades y que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, entonces la hamiltoniana es igual a la energía total del sistema, que también será una integral de movimiento. Usando la notación del método de Liouville, podemos escribir esto de la siguiente forma

$$\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+\frac{p_\phi^2}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta}+mgl\cos\theta=I_1=E, \tag{2.8}$$

$$p_\phi=I_2. \tag{2.9}$$

Ahora hemos encontrado entonces dos integrales de movimiento, nos preguntamos ahora si están en involución, es decir si

$$\{I_1,I_2\}=0, \tag{2.10}$$

para ver esto recordamos la expresión para los paréntesis de Poisson,

$$\frac{\partial I_1}{\partial\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial I_2}{\partial p_\theta}}-\frac{\partial I_1}{\partial p_\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial I_2}{\partial\theta}}+\cancelto{0}{\frac{\partial I_1}{\partial\phi}}\frac{\partial I_2}{\partial p_\phi}-\frac{\partial I_1}{\partial p_\phi}\cancelto{0}{\frac{\partial I_2}{\partial\phi}}=0. \tag{2.11}$$

Por lo tanto hemos demostrado que las dos integrales de movimiento que hemos encontrado están en involución, y debido a que hay tantas integrales de movimiento en involución como grados de libertad el sistema es integrable y podemos proceder a encontrar las coordenadas de acción y ángulo. Para hacer esto comenzamos escribiendo la ecuación de Hamilton-Jacobi a partir de la hamiltoniana (2.7),

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial G}{\partial\phi}\right)^2+mgl\cos\theta=-\frac{\partial G}{\partial t}. \tag{2.12}$$

Proponemos ahora la siguiente solución para la G,

$$G(\theta,\phi,t)=W(\theta,\phi)+T(t), \tag{2.13}$$

y entonces

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)^2+mgl\cos\theta=-\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2.14}$$

Como el lado izquierdo de esta ecuación depende solamente de θ y ϕ y el derecho del tiempo, ambos términos deben ser iguales a misma constante que llamaremos α_1, y tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\alpha_1\Rightarrow T(t)=-\alpha_1 t, \tag{2.15}$$

donde hemos hecho cero la constante aditiva de integración ya que no afectará la solución final, y también nos queda que

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)^2+mgl\cos\theta=\alpha_1, \tag{2.16}$$

y ahora proponemos que W puede separase en una parte que depende sólo de θ y otra que solo depende de ϕ, i.e.

$$W(\theta,\phi)=W_\theta(\theta)+W_\phi(\phi), \tag{2.17}$$

y al sustituir esto en la ecuación para W obtenemos

$$\frac{1}{2ml^2}\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi}\right)^2\right]+mgl\cos\theta=\alpha_1. \tag{2.18}$$

De esta ecuación vemos que la dependencia en ϕ solo se encuentra en el término $(\partial W_\phi/\partial\phi)^2$ por lo tanto este debe ser igual a una constante que llamaremos α_2, por lo tanto

$$\left(\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi}\right)^2 = \alpha_2 \Rightarrow W_\phi(\phi) = \sqrt{\alpha_2}\phi, \tag{2.19}$$

y

$$\frac{1}{2ml^2}\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right] + mgl\cos\theta = \alpha_1. \tag{2.20}$$

De esta ecuación podemos obtener W_θ, para esto despejamos $\partial W_\theta/\partial\theta$,

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta} = \pm\left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2\csc^2\theta\right]^{1/2}, \tag{2.21}$$

$$\therefore W_\theta = \int \pm\left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2\csc^2\theta\right]^{1/2} d\theta, \tag{2.22}$$

y entonces

$$W(\theta,\phi) = \sqrt{\alpha_2}\phi + \int \pm\left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2\csc^2\theta\right]^{1/2} d\theta, \tag{2.23}$$

y

$$\boxed{G(\theta,\phi,t) = \sqrt{\alpha_2}\phi + \int \pm\left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2\csc^2\theta\right]^{1/2} d\theta - \alpha_1 t.} \tag{2.24}$$

Calculemos ahora entonces los momentos con las relaciones de Hamilton-Jacobi,

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q^i}, \tag{2.25}$$

con lo que obtenemos lo ya sabíamos sobre p_ϕ, i.e. que es constante,

$$p_\phi = \frac{\partial G}{\partial\phi} = \sqrt{\alpha_2}, \tag{2.26}$$

y para p_θ,

$$p_\theta = \frac{\partial G}{\partial\theta} = \pm\left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2\csc^2\theta\right]^{1/2}. \tag{2.27}$$

Podemos ahora construir las coordenadas de acción,

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i dq^i, \tag{2.28}$$

que para ϕ será

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi d\phi, \tag{2.29}$$

pero ϕ está acotada entre 0 y 2π, y $p_\phi = \sqrt{\alpha_2}$, entonces

$$J_\phi = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\cancel{2\pi}}\cancel{2\pi}, \tag{2.30}$$

$$\boxed{\therefore J_\phi = p_\phi = \sqrt{\alpha_2}.} \tag{2.31}$$

Ahora para θ tenemos,

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \pm \left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2 \csc^2\theta\right]^{1/2}, \tag{2.32}$$

la cual dejaremos planteada. Ahora para las variables de ángulo usamos

$$\Theta^i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \sum_k p_k dq^k, \tag{2.33}$$

para ϕ esto es

$$\Theta^\phi = \frac{\partial}{\partial J_\phi} \left[\oint p_\theta d\theta + \oint p_\phi d\phi\right] \tag{2.34}$$

$$\Theta^\phi = \frac{\partial}{\partial J_\phi} \left[\oint \pm \left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2 \csc^2\theta\right]^{1/2} d\theta + \oint \sqrt{\alpha_2} d\phi\right] \tag{2.35}$$

$$\boxed{\Theta^\phi = \frac{\partial}{\partial J_\phi} \left[\oint \pm \left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2 \csc^2\theta\right]^{1/2} d\theta + 2\pi\alpha_2\right].} \tag{2.36}$$

Y para θ nos quedaría entonces

$$\boxed{\Theta^\theta = \frac{\partial}{\partial J_\theta} \left[\oint \pm \left[2ml^2(\alpha_1 - mgl\cos\theta) - \alpha_2^2 \csc^2\theta\right]^{1/2} d\theta + 2\pi\alpha_2\right].} \tag{2.37}$$

Con lo cual hemos encontrado las coordenadas de acción y ángulo, dejando algunas integrales complicadas planteadas. Ahora para trazar las figuras similares a las del problema de Kepler sobre T^2, lo hacemos desde p_θ. Es fácil ver que α_1 será la energía total del péndulo esférico, y recordamos que α_2 es p_ϕ y es constante, entonces escribimos p_θ como

$$p_\theta = \pm \left[2ml^2(E - mgl\cos\theta) - p_\phi^2 \csc^2\theta\right]^{1/2}. \tag{2.38}$$

Debajo se muestran las trayectorias sobre toros para esta ecuación para unos valores dados de la energía y p_ϕ válidos para que la raíz no sea imaginaria.

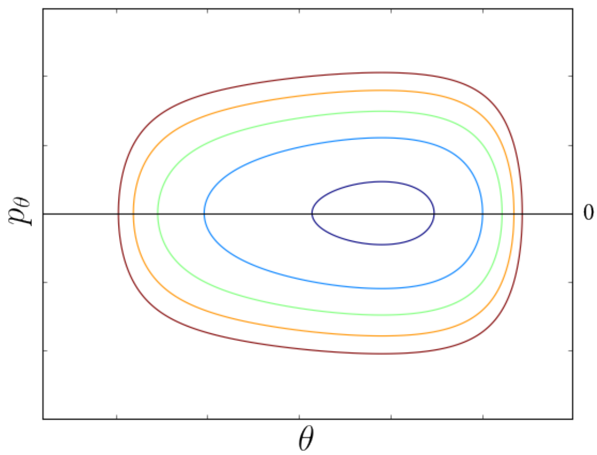

Figura 2: Trayectorias sobre toros para el péndulo esférico. Hay que hacer girar la gráfica para efectivamente ver estos toros.

Problema 3

Una partícula de masa m se mueve libremente en el interior de un triángulo equilátero de lado a y rebota elásticamente al incidir sobre los lados del triángulo (billar). Encuentre, si es que existen, unas coordenadas o variables de acción y ángulo para este sistema. A partir de estas variables encuentre, si es que existen, las frecuencias asociadas al movimiento.

Solución: