Mecánica Clásica Tarea # 5

Favio Vázquez[*]

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

1. Problema 1

Dos partículas, una de masa m_1 y otra de masa m_2, interaccionan gravitacionalmente en el espacio tridimensional. En adición a su interacción mutua se encuentran en un campo de fuerzas externo que les produce una aceleración constante **a** en cierta dirección también constante. En un sistema de coordenadas generalizadas conveniente para este sistema, encuentre la función lagrangiana y las ecuaciones de movimiento.

Solución:

En la figura de abajo se muestra un diagrama del problema. Las dos partículas m_1 y m_2 interaccionan gravitacionalmente, es decir mediante una fuerza central, y además sabemos que el campo de fuerza que les produce una aceleración constante en una dirección constante, asumiremos que lo hace en la dirección del eje z.

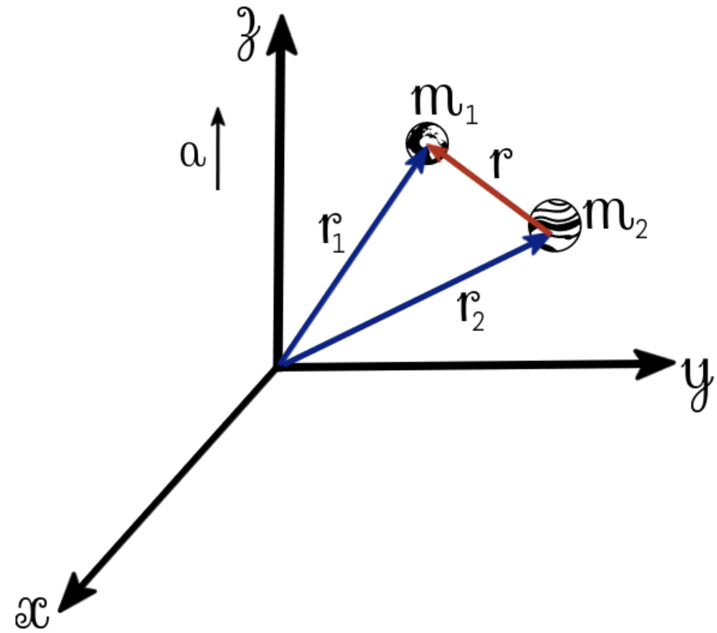

Figura 1: Representación esquemática del problema de dos cuerpos que interactúan gravitacionalmente, y que se encuentran en un campo de fuerza que les produce una aceleración constante.

[*]Correo: favio.vazquezp@gmail.com

Entonces las masas tendrán el siguiente potencial actuando sobre ellas, aparte del gravitacional,

$$V_a^1 = F^{(1)} z_1 = m_1 \alpha z_1, \tag{1.1}$$
$$V_a^2 = F^{(2)} z_1 = m_2 \alpha z_2. \tag{1.2}$$

donde α es la magnitud de la aceleración constante $\mathbf{a}$. Ahora introduciendo la coordenada relativa $\mathbf{r}$ y la coordenada del centro de masa $\mathbf{R}$ de acuerdo a

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tag{1.3}$$

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{R}, \tag{1.4}$$

podemos expresar a $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ en términos de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R}, \tag{1.5}$$
$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{R}. \tag{1.6}$$

Entonces las coordenadas generalizadas que utilizaremos para describir el sistema serán $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$. La energía cinética del sistema será igual a

$$T = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2, \tag{1.7}$$

y la energía potencial será

$$V = V_a^1 + V_a^2 + V(|\mathbf{r}|). \tag{1.8}$$

Y la lagrangiana $L = T - V$ del sistema será entonces

$$L = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2 - V_a^1 - V_a^2 - V(|\mathbf{r}|). \tag{1.9}$$

Luego con los resultados que hemos obtenido,

$$L = \frac{1}{2} m_1 \left| \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} \right) \right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left| \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} \right) \right|^2 \tag{1.10}$$
$$- V(r) - m_1 \alpha \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi + \Xi \right] - m_2 \alpha \left[-\frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi + \Xi \right], \tag{1.11}$$

donde ξ y Ξ son las componentes de z de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$ respectivamene. Y luego de algo de álgebra podemos llegar a,

$$L = \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right]^2 |\dot{r}|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right] |\dot{r}|^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) |\dot{R}|^2 \tag{1.12}$$
$$- V(r) + \cancel{\frac{m_2 m_1 \alpha \xi - m_2 m_1 \alpha \xi}{m_1 + m_2}} - (m_1 + m_2) \alpha \Xi \tag{1.13}$$

$$\boxed{\therefore L = \frac{1}{2} \mu |\dot{r}|^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) |\dot{R}|^2 - V(r) - (m_1 + m_2) \alpha \Xi.} \tag{1.14}$$

Donde μ es la masa reducida del sistema

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.15}$$

Y las ecuaciones de movimiento serán, para $|\mathbf{r}|$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial |\dot{\mathbf{r}}|} - \frac{\partial L}{\partial |\mathbf{r}|} = 0, \tag{1.16}$$

$$\boxed{\mu|\ddot{\mathbf{r}}| + \frac{\partial V(r)}{\partial |\mathbf{r}|} = 0} \tag{1.17}$$

Y para $|\mathbf{R}|$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial |\dot{\mathbf{R}}|} - \frac{\partial L}{\partial |\mathbf{R}|} = 0, \tag{1.18}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m_1 + m_2)|\dot{\mathbf{R}}| = 0} \tag{1.19}$$

Por lo tanto hemos demostrado que existe una integral de movimiento en este sistema y es igual a $(m_1 + m_2)|\dot{\mathbf{R}}|$, y entonces el problema queda reducido a un problema de un cuerpo de masa μ bajo un potencial efectivo, donde se conserva la energía y por lo tanto podemos reducirlo a cuadraturas.

2. Problema 2

Demuestre que si la energía cinética de un sistema mecánico se puede expresar como

$$T = \sum_i f_i(q^i)(\dot{q}^i)^2,$$

y la energía potencial como

$$V = \sum_i V_i(q^i),$$

entonces podemos reducir a cuadraturas las ecuaciones de movimiento.

<u>Solución:</u>

Tenemos las siguientes expresiones para la energía cinética y potencial del sistema,

$$T = \sum_i f_i(q^i)(\dot{q}^i)^2, \tag{2.1}$$

$$V = \sum_i V_i(q^i). \tag{2.2}$$

Y podemos escribir la lagrangiana $L = T - V$ del sistema como,

$$L = \sum_i \left[f_i(q^i)(\dot{q}^i)^2 - V_i(q^i)\right] = \sum_i L_i, \tag{2.3}$$

donde

$$L_i = f_i(q^i)(\dot{q}^i)^2 - V_i(q^i). \tag{2.4}$$

Por otra parte las ecuaciones de Lagrange nos dicen que,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{2.5}$$

pero debido a que L_i solo depende de $\dot{q}^i$ y q^i, entonces

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L_i}{\partial q^i}. \tag{2.6}$$

Y vemos entonces que las ecuaciones se separan y solo tendríamos que resolver una sola ecuación como (2.6) para cada coordenada generalizada. Ya este argumento es suficiente y necesario para decir que podemos reducir a cuadraturas las ecuaciones de movimiento, pero podemos mostrar esto de un modo más simple. Debido a que L_i no depende explícitamente del tiempo, y que la energía potencial es una función homogénea de segundo orden de las velocidades generalizadas, entonces la energía se conserva (será una integral de movimiento). Y tiene la siguiente expresión,

$$E_i = T + V = f_i(q^i)(\dot{q}^i)^2 + V_i(q^i), \tag{2.7}$$

la cual puede integrarse por separación de variables. Para hacer esto llamaremos $\xi = \dot{q}^i$, y entonces

$$f_i(q^i)\xi^2 = V_i(q^i) - E_i, \tag{2.8}$$

y de (2.8) vemos que,

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{E_i - V_i(q^i)}{f(q^i)}, \\ \xi &= \pm\sqrt{\frac{E_i - V_i(q^i)}{f(q^i)}}, \\ \frac{dq^i}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{E_i - V_i(q^i)}{f(q^i)}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\boxed{dt = \frac{dq^i}{\pm\sqrt{\frac{E_i - V_i(q^i)}{f(q^i)}}}}. \tag{2.10}$$

La cual nos proporciona q^i y derivando obtenemos ξ, entonces todo el sistema mecánico se puede reducir a cuadraturas como habíamos dicho anteriormente, pero ahora podemos verlo más fácilmente.

3. Problema 3

Un péndulo de longitud l y masa m tiene su extremo fijo anclado a una masa M que puede desplazarse libremente en la dirección horizontal. Encuentre las ecuaciones de movimiento. ¿Hay suficientes integrales de movimiento como para reducir el problema a cuadraturas? En un caso de ser así, utilizando el procedimiento gráfico para una dimensión, discuta el movimiento de este sistema.

Solución:

Para tener más claro la configuración física del problema que tratamos, nos referimos a la figura (2).

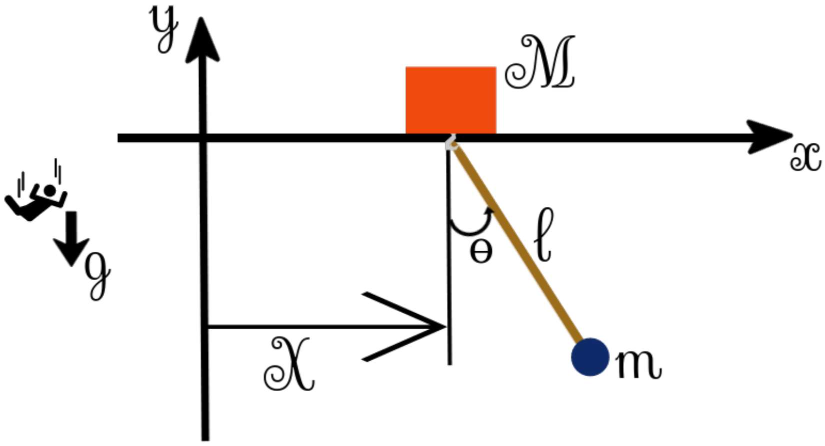

Figura 2: Representación gráfica del péndulo simple que tiene en su extremo fijo una masa M que puede moverse libremente en la dirección horizontal. Como indica el muñequito la gravedad va dirigida hacia abajo.

Tenemos entonces un péndulo simple cuyo extremo fijo está anclado a una masa M que puede desplazarse libremente en dirección horizontal. Comencemos por ver cuantas coordenadas generalizadas necesitamos para especificar la configuración del sistema completamente. Como trataremos este sistema como tridimensional, cada masa necesita tres coordenadas cartesianas para ser ubicada únicamente en el espacio, para m las denotaremos por (x, y, z) y para M, (X, Y, Z). Pero debido a la configuración del sistema físico podemos ver fácilmente que existen cuatro constricciones holonómicas, que podemos escribir como[1]

$$Z = 0, \tag{3.1}$$
$$Y = 0, \tag{3.2}$$
$$z = 0, \tag{3.3}$$
$$[(x - X)^2 - y^2] - r^2 = 0. \tag{3.4}$$

Las ecuaciones (3.1, 3.2) constriñen el movimiento de la masa M al eje X. Las ecuaciones (3.3, 3.4) constriñen al péndulo a moverse en el plano xy a lo largo de un arco de radio l, relativo a la masa movible M. Por lo tanto necesitamos $6 - 4 = 2$ coordenadas generalizadas para describir completamente la configuración del sistema. Las elecciones obvias para éstas son X, la cual denota la posición horizontal de la masa M, y θ, que representa el desplazamiento angular del péndulo lejos del eje vertical.

La formulación lagrangiana nos dice ahora que debemos obtener la energía cinética y la energía potencial en términos de las coordenadas generalizadas. Comenzamos por escribir la expresión de las mismas en coordenadas cartesianas, recordando que está presente un campo gravitacional constante dirigido hacia abajo,

$$T = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{3.5}$$
$$V = mgy \tag{3.6}$$

Para poder expresar estas ecuaciones en términos de X y θ, necesitamos una transformación de coordenadas[2], fáciles de obtener de la figura (2),

[1] Es fácil ver que, debido al teorema de Pitágoras en coordenadas cartesianas, l se puede considerar como la hipotenusa de el triángulo formado por los catetos y y $X - x$, y ya es claro el resultado de (3.4).

[2] Claramente la transformación de X será $X = X$, y por lo tanto $\dot{X} = \dot{X}$.

$$x = X + l\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{3.7}$$
$$y = -l\cos\theta \tag{3.8}$$

Ahora necesitamos la primera derivada temporal de las mismas para sustituirlas en la expresión de la energía cinética (3.5),

$$\dot{x} = \dot{X} + l\dot{\theta}\cos\theta, \tag{3.9}$$
$$\dot{y} = l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{3.10}$$

por lo tanto las ecuaciones (3.5, 3.6) se transforman en,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{X} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2], \\ &= \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}[\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta], \\ &= \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}[\dot{X}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$V = -mgl\cos\theta. \tag{3.12}$$

Por lo tanto la lagrangiana $L = T - V$, será igual a

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}[\dot{X}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta] + mgl\cos\theta. \tag{3.13}$$

Y las ecuaciones de movimiento serán, para X,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{d}{dt}(M\dot{X} + m\dot{X} + lm\dot{\theta}\cos\theta) = 0. \tag{3.15}$$

La ecuación (3.15) es producto de que la lagrangiana no depende de X, y por lo tanto

$$\boxed{M\dot{X} + m\dot{X} + lm\dot{\theta}\cos\theta = \text{constante},} \tag{3.16}$$

Lo cual nos dice que $M\dot{X} + m\dot{X} + lm\dot{\theta}\cos\theta$ es una integral de movimiento.

Por otra parte para θ,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta} + lm\dot{X}\cos\theta) + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta + lm\dot{X}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0, \\ m\ddot{\theta}l^2 + m\ddot{X}l\cos\theta - \cancel{lm\dot{X}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta} + mgl\,\mathrm{sen}\,\theta + \cancel{lm\dot{X}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta} = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\boxed{\therefore \ddot{\theta} + \frac{\ddot{X}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.} \tag{3.19}$$

Hemos encontrado las ecuaciones de movimiento para el sistema, ahora nos queda ver si existen la cantidad suficiente de integrales de movimiento para reducir el problema a cuadraturas. Ya hemos encontrado una, que podemos reescribir como

$$(M+m)\dot{X} + lm\dot{\theta}\cos\theta = p_x. \tag{3.20}$$

Donde hemos llamado a esta integral de movimiento p_x, la cual podemos asociar con el momentum lineal total en la dirección X. Por otra parte, debido a que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, i.e., ni la energía potencial ni la cinética dependen explícitamente del tiempo, entonces la energía del sistema se conserva, convirtiéndose esta en una integral de movimiento, que podemos escribir como

$$E = \frac{M+m}{2}\dot{X}^2 + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + ml\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta - mgl\cos\theta. \tag{3.21}$$

Pero de (3.20) podemos obtener una expresión para $\dot{X}$,

$$\dot{X} = \frac{p_x - lm\dot{\theta}\cos\theta}{M+m}, \tag{3.22}$$

y sustituyendo (3.22) en (3.21) vemos que

$$\begin{aligned}
E &= \frac{M+m}{2}\left(\frac{p_x - ml\dot{\theta}\cos\theta}{M+m}\right)^2 + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + ml\dot{\theta}\cos\theta\left(\frac{p_x - ml\dot{\theta}\cos\theta}{M+m}\right) - mgl\cos\theta,\\
&= \frac{M+m}{2}\left[\frac{p_x^2 - 2p_x ml\dot{\theta}\cos\theta + m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{(M+m)^2}\right] + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{p_x ml\dot{\theta}\cos\theta - m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{M+m}\\
&- mgl\cos\theta,\\
&= \frac{p_x^2 - 2p_x ml\dot{\theta}\cos\theta + m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{2(M+m)} + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{p_x ml\dot{\theta}\cos\theta - m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{M+m} - mgl\cos\theta,\\
&= \frac{p_x^2 - \cancel{2p_x ml\dot{\theta}\cos\theta} + m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \cancel{2p_x ml\dot{\theta}\cos\theta} - 2m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{2(M+m)} + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta,\\
&= \frac{p_x^2 - m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{2(M+m)} + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta,\\
&= \frac{p_x^2}{2(M+m)} - \frac{m^2l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{2(M+m)} + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta,\\
&= \dot{\theta}^2\left[\frac{ml^2}{2} - \frac{m^2l^2\cos^2\theta}{2(M+m)}\right] + \frac{p_x^2}{2(M+m)} - mgl\cos\theta,\\
&= \dot{\theta}^2\left[\frac{Mml^2 + m^2l^2 - m^2l^2\cos^2\theta}{2(M+m)}\right] + \frac{p_x^2}{2(M+m)} - mgl\cos\theta.
\end{aligned}$$

$$\boxed{E = \left[\frac{Mml^2 + m^2l^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{2(M+m)}\right]\dot{\theta}^2 + \frac{p_x^2}{2(M+m)} - mgl\cos\theta.} \tag{3.23}$$

z Entonces podemos considerar esta energía como una energía cinética, la cual siempre es positiva por la expresión de (3.23) más un potencial efectivo igual a

$$\boxed{V_{ef} = \frac{p_x^2}{2(M+m)} - mgl\cos\theta.} \tag{3.24}$$

El cual tiene mucho sentido debido a que se reduce al potencial de un péndulo simple si $p_x = 0$. En la figuras de abajo se muestra dicho potencial para diferentes condiciones iniciales de p_x y para distintas configuraciones de m, M y l. Vemos que el sistema oscilará como era esperado, pero que los parámetros de la oscilación, como la amplitud, frecuencia y período dependerán de los valores de los parámetros del potencial efectivo y en gran parte de la diferencia de masas y la magnitud del momentum.

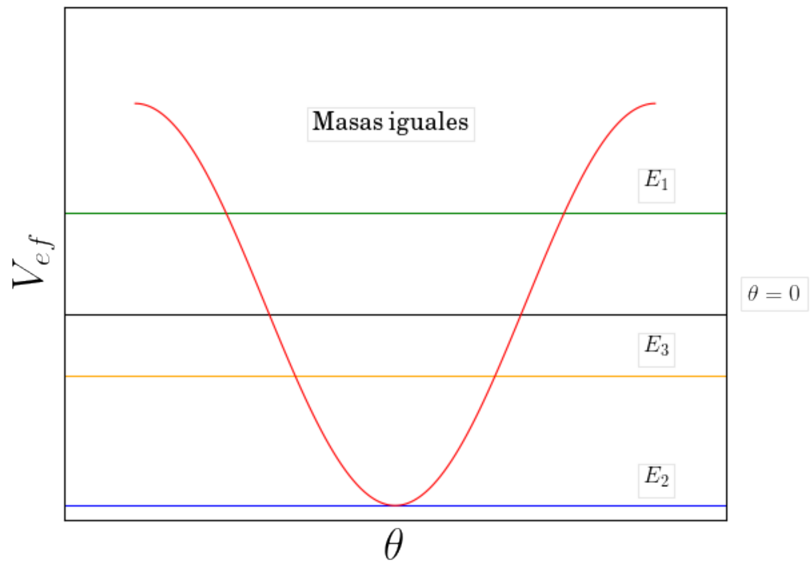

Figura 3: Masas iguales

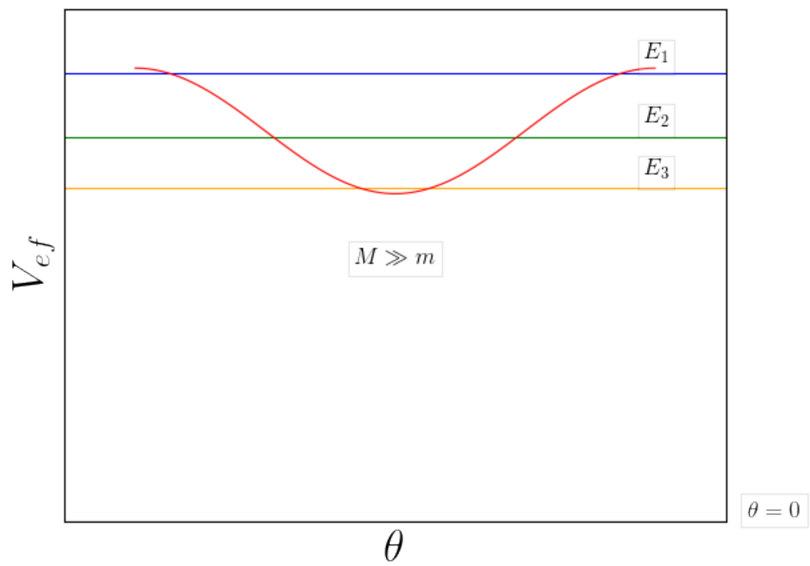

Figura 4: $M \gg m$

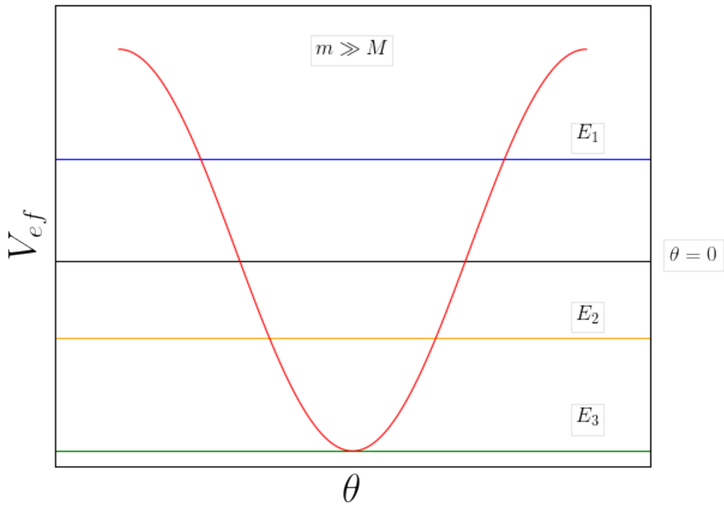

Figura 5: $m \gg M$

Todos los códigos con los que realicé estas gráficas se encuentran en un repositorio público de GitHub, en .::este link::.. Se encuentran en un NoteBook de Python, el cual se encuentra .::este link::.. También puede encontrarse un NoteBook de Mathematica con el que se hacen las mismas figuras y se pueden manipular dinámicamente, se puede acceder a este NoteBook en .::este link::..

4. Problema 4

Para un número de grados de libertad mayor que uno, dos lagrangianas distintas L_1 y L_2 generan ecuaciones de movimiento idénticas, demuestre que

$$L_1 - L_2 = \frac{d}{dt} f(q),$$

donde f es una función de la variedad de configuración en los reales. ¿Es esto cierto en sentido inverso?

Solución:

Nota: Debido a la alta aparición de sumatorias en este problema, durante la solución del mismo utilizaremos el convenio de la suma de Einstein, el cual nos dice que un índice que aparece dos veces en un término matemático es sumado sobre el rango entero de ese índice.

Comencemos por escribir las ecuaciones de Lagrange, donde $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{4.1}$$

Por la regla de la cadena vemos que,

$$\begin{aligned}
\xi_i(L) &\equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d\dot{q}^k}{dt} + \frac{\partial}{\partial q^k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{dt}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^i}, \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \dot{q}^i}\ddot{q}^k + \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \dot{q}^i}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}
\end{aligned}$$

Ahora, debido a que las lagrangianas producen las mismas ecuaciones de movimiento, entonces

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial \dot{q}^k \dot{q}^i}\ddot{q}^k + \frac{\partial^2 L_1}{\partial q^k \dot{q}^i}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 L_1}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L_1}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 L_2}{\partial \dot{q}^k \dot{q}^i}\ddot{q}^k + \frac{\partial^2 L_2}{\partial q^k \dot{q}^i}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 L_2}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L_2}{\partial q^i}. \tag{4.2}$$

Que podemos escribir como,

$$\xi_i(L_1) - \xi_i(L_2) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{q}^k \dot{q}^i}\ddot{q}^k + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^k \dot{q}^i}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \phi}{\partial q^i} = 0. \tag{4.3}$$

Donde $\phi = L_1 - L_2$. Ahora, debido a que L_1 y L_2 son funciones de solamente $q^i, \dot{q}^i$ y t, entonces necesariamente ϕ también lo es, es decir, que L_1, L_2 y ϕ son lineales en $\ddot{q}^k$, por lo que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^k} = 0, \tag{4.4}$$

y

$$\phi = \Xi_i(q,t)\dot{q}^i + \Gamma(q,t). \tag{4.5}$$

Y de (4.5), tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}^i} = \Xi_i, \tag{4.6}$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial q^i} = \frac{\Xi_k}{\partial q^i}\dot{q}^k + \frac{\Gamma}{\partial q^i} \tag{4.7}$$

Entonces, tenemos que debido a (4.4) la ecuación (4.3) se convierte en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial q^k \dot{q}^i}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \phi}{\partial q^i} = 0, \tag{4.8}$$

y sustituyendo (4.6) y (4.7) en (4.8) tenemos que

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial \Xi_i}{\partial t} - \frac{\Xi_k}{\partial q^i}\dot{q}^k - \frac{\Gamma}{\partial q^i} = 0, \tag{4.9}$$

que podemos escribir como,

$$\left(\frac{\partial \Xi_i}{\partial q^k} - \frac{\partial \Xi_i}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k + \frac{\partial \Xi_i}{\partial t} - \frac{\Gamma}{\partial q^i} = 0. \tag{4.10}$$

Pero debido a que las Ξ_i son lineales en $\dot{q}^k$, y usando un argumento parecido al que utilizamos anteriormente, vemos que

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial q^k} - \frac{\partial \Xi_i}{\partial q^i} = 0, \tag{4.11}$$

$$\therefore \frac{\partial \Xi_i}{\partial q^k} = \frac{\partial \Xi_i}{\partial q^i}. \tag{4.12}$$

Y por lo tanto existe una función f(q,t) que nos permite escribir[3],

$$\Xi_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \tag{4.13}$$

[3]Esto es una generalización para n dimensiones del hecho de que en 3 dimensiones, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, implica que existe una función V tal que $\mathbf{E} = \nabla V$, que podemos escribir para n dimensiones como $\partial E_i/\partial x_k = \partial E_k/\partial x_i$, $\therefore E_k = \partial V/\partial x_k$

y por la ecuación anterior vemos que

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial t} = \frac{\partial \Gamma}{\partial q^i} \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial q^i} = \frac{\partial \Gamma}{\partial q^i} \tag{4.15}$$

$$\therefore \Gamma = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.16}$$

Ahora sustituyendo (4.13) y (4.16) en (4.5) obtenemos que

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.17}$$

Pero por la regla de la cadena, y recordando que $\phi = L_1 - L_2$, tenemos que

$$\boxed{L_1 - L_2 = \frac{d}{dt}f(q,t)} \tag{4.18}$$

$\square$

Entonces hemos demostrado, solucionando la primera parte del problema, que si dos lagrangianas distintas generan ecuaciones de movimiento idénticas, entonces su resta es una función f de la variedad de configuración; o dicho de otra manera, si le sumamos a una lagrangiana una derivada total del tiempo de una función como $f(q,t)$ entonces las ecuaciones de movimiento no cambiarán.

Por otra parte nos piden ahora demostrar que si necesariamente dos lagrangianas que producen la mismas ecuaciones de movimiento, difieren por una derivada total del tiempo. Podemos demostrar fácilmente que esto no es cierto, y lo haremos usando un contraejemplo del enunciado, es decir si encontramos dos lagrangianas que producen las mismas ecuaciones de movimiento, pero estas no difieren por una derivada total temporal de una función f entonces habremos probado que el enunciado es falso.

Para hacer esto consideremos dos partículas en un potencial de oscilador armónico, las ecuaciones de movimiento están dadas por,

$$\ddot{q}_1^i + \omega^2 q_1^i = 0, \tag{4.19}$$
$$\ddot{q}_2^i + \omega^2 q_2^i = 0, \tag{4.20}$$
$$\tag{4.21}$$

donde $i = 1, \ldots, 3$. En estas ecuaciones q_1 se refiere a la posición de la partícula 1, q_2 se refiere a la posición de la partícula 2, y ω es la frecuencia del oscilador armónico. Si ahora buscamos una lagrangiana que satisfaga las siguientes identidades

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1^i} - \frac{\partial L}{\partial q_1^i} \equiv \ddot{q}_1^i + \omega^2 q_1^i = 0, \tag{4.22}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2^i} - \frac{\partial L}{\partial q_2^i} \equiv \ddot{q}_2^i + \omega^2 q_2^i = 0, \tag{4.23}$$
$$\tag{4.24}$$

obtenemos la lagrangiana familiar

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_2)^2 - \frac{1}{2}\omega^2(q_1)^2 - \frac{1}{2}\omega^2(q_2)^2. \tag{4.25}$$

Supongamos ahora que buscamos una lagrangiana que produzca las mismas ecuaciones de movimiento, pero cambiadas de posición, i.e.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_1^i} - \frac{\partial L'}{\partial q_1^i} \equiv \ddot{q}_2^i + \omega^2 q_2^i = 0, \tag{4.26}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_2^i} - \frac{\partial L'}{\partial q_2^i} \equiv \ddot{q}_1^i + \omega^2 q_1^i = 0, \tag{4.27}$$

resulta que podemos encontrarla, y resulta ser una simplificación de la lagrangiana de Morse-Feshbach [1],

$$L' = \dot{q}_1^i \dot{q}_2^i + \omega^2 q_1^i q_2^i \tag{4.28}$$

Es claro entonces que no podemos encontrar una función f de la forma en que la planteamos para que $L - L' = df/dt$, por lo tanto hemos demostrado que es esta proposición no se cumple en sentido inverso, es decir que **NO** necesariamente dos lagrangianas que producen la mismas ecuaciones de movimiento, difieren por una derivada total del tiempo.

5. Problema 5

En presencia de la gravedad una partícula de masa m, inicialmente en reposo, se mueve a lo largo de una cicloide dada por

$$x = \pm a \cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2}$$

Encuentre y resuelva las ecuaciones de movimiento. Demuestre que el tiempo que tarda la partícula en llegar a la parte más baja del cicloide es independiente de su posición inicial sobre la cicloide.

<u>Solución:</u>

En la figura de abajo se encuentra el gráfico del cicloide en cuestión, de la ecuación vemos que este es válido para $y \in [0, 2a]$ y en el eje x lo graficamos de $[-\pi a, \pi a]$.

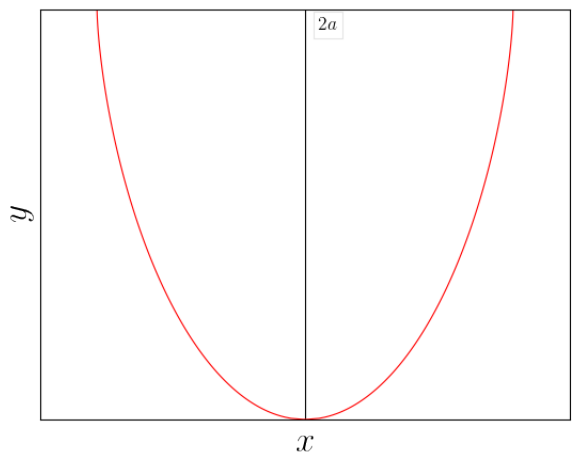

Figura 6: Gráfico del cicloide en consideración.

Debido a las simetrías de este problema es claro que la coordenada generalizada que mejor describirá el sistema, en una manera más simple también, es la longitud de arco s a lo largo de la línea definida por el cicloide, ver figura (6). En este caso, la energía cinética estará dada por

$$T = \frac{1}{2} m\dot{s}^2. \tag{5.1}$$

Por otra parte, el potencial a la cual está sujeta la partícula, se puede obtener simplemente de la fuerza de gravedad. Si imponemos que este campo gravitacional de magnitud g está en la dirección negativa de y, entonces el potencial será,

$$V = mgy. \tag{5.2}$$

Debemos encontrar entonces la relación entre y y s para poder escribir la energía potencial en términos de nuestra coordenada generalizada. Recordando que la longitud de arco diferencial en coordenadas cartesianas se puede escribir como,

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \tag{5.3}$$

Ahora debemos obtener la derivada de x con respecto a y, que hacemos explícitamente debajo,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= \left(\pm a \cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right)\right)' + \left(\sqrt{2ay - y^2}\right)', \\
&= a\left[\frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-y}{a}\right)^2}}\left(\frac{a-y}{a}\right)'\right] + \frac{1}{2\sqrt{2ay - y^2}}(2ay - y^2)', \\
&= \cancel{a}\left[\frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-y}{a}\right)^2}}\left(-\frac{1}{\cancel{a}}\right)\right] + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2ay - y^2}}[\cancel{2}(a-y)], \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(a-y)^2}{a^2}}} + \frac{a-y}{\sqrt{2ay - y^2}}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Y simplificando llegamos a que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2a - y}{\sqrt{2ay - y^2}} \tag{5.5}$$

Ahora sustituyendo (5.5) en (5.3) nos queda

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{(2a-y)^2}{(\sqrt{2ay - y^2})^2}} dy, \tag{5.6}$$

que podemos reescribir como

$$
\begin{aligned}
s &= \int \sqrt{1+\frac{(2a-y)^2}{2ay-y^2}}dy, \\
&= \int \sqrt{\frac{2ay-\cancel{y^2}+4a^2-4ay+\cancel{y^2}}{2ay-y^2}}dy, \\
&= \int \sqrt{\frac{4a^2-2ay}{2ay-y^2}}dy. \\
&= \int \sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{y}}dy.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Evaluando esta integral obtenemos que

$$
s = 2\sqrt{2ay}. \tag{5.8}
$$

Y por lo tanto

$$
y = \frac{s^2}{8a}. \tag{5.9}
$$

Sustituyendo (5.9) en (5.2), obtenemos

$$
V = \frac{mgs^2}{8a} \tag{5.10}
$$

Entonces la lagrangiana del sistema, $L = T - V$ es

$$
L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{mgs^2}{8a} \tag{5.11}
$$

Y utilizando las ecuaciones de Lagrange[4]

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0, \tag{5.12}
$$

tenemos que la ecuación de movimiento del sistema será:

$$
\frac{d}{dt}(m\dot{s}) - \frac{mgs}{4a} = 0, \tag{5.13}
$$

$$
\boxed{\therefore \ddot{s} = \frac{g}{4a}s.} \tag{5.14}
$$

Claramente esta es la ecuación de un oscilador armónico, y podemos ver esto de una forma un poco más clara si llamamos $k = g/4a$, entonces la ecuación de movimiento se convierte en

$$
\ddot{s} - ks = 0. \tag{5.15}
$$

Cuya solución es[5],

$$
s = A\cos(\omega t + \delta) \tag{5.16}
$$

[4]Tomando en cuenta que el sistema es conservativo.

[5]Esta solución ya se ha encontrado en otras tareas varias veces, y es muy simple obtenerla. Debido a que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea proponemos una solución del tipo $e^{\lambda t}$, obtenemos la ecuación característica de la EDO. Luego obtenemos las raíces λ que sustituiremos en la solución que hemos propuesto, haciendo uso de la linealidad de la ecuación para usar el principio de superposición y sumar estas soluciones. Por último hacemos la sustitución $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, donde C_1 y C_2 son las constantes de integración de la ecuación diferencial, y con un poco de trigonometría, colocamos C_1 y C_2 en un triángulo rectángulo de hipotenusa A, y proponemos un ángulo δ entre A y C_1, al cual llamamos fase de la oscilación.

donde $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{g/a}$ es la frecuencia del oscilador, A es la amplitud de la oscilación y δ es la fase de la misma. La cual es la solución clásica para un oscilador armónico en s.

La demostración de que el tiempo que tarda la partícula en llegar a la parte más baja del cicloide es independiente de su posición inicial sobre la cicloide, es ahora trivial debido a que tenemos un oscilador armónico y entonces, con un poco de ayuda de la figura (6) y usando los resultados de la teoría de osciladores armónicos, es fácil ver que el tiempo que le tomará a la partícula llegar a la parte más baja del cicloide es un cuarto de período, independientemente de la amplitud (que es lo mismo que considerar su posición inicial en el cicloide).

Referencias

[1] R. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I: The inverse problem in Newtonian Mechanics*, Springer-Verlang, 1978.