

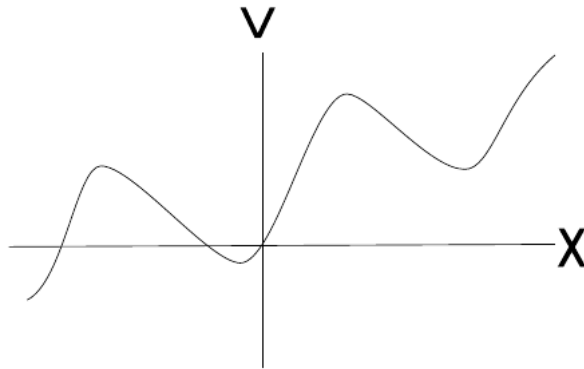
# Mecánica Clásica Tarea # 3

Favio Vázquez\*

*Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.*

## 1. Problema 1

Trace el diagrama o retrato de fase que corresponde al movimiento de una partícula en una dimensión sujeta al potencial que se ilustra en la figura.



**Figura 1:** Problema 1. Diagrama del potencial a estudiar

### Solución:

En el gráfico del potencial a estudiar es fácil notar que, en la porción dada, hay dos mínimos y dos máximos (casi se puede ver el tercero) pronunciados, en los mínimos tendremos en el retrato de fases centros y en los máximos puntos de silla. El retrato de fase resultante es el mostrado en la figura (2).

---

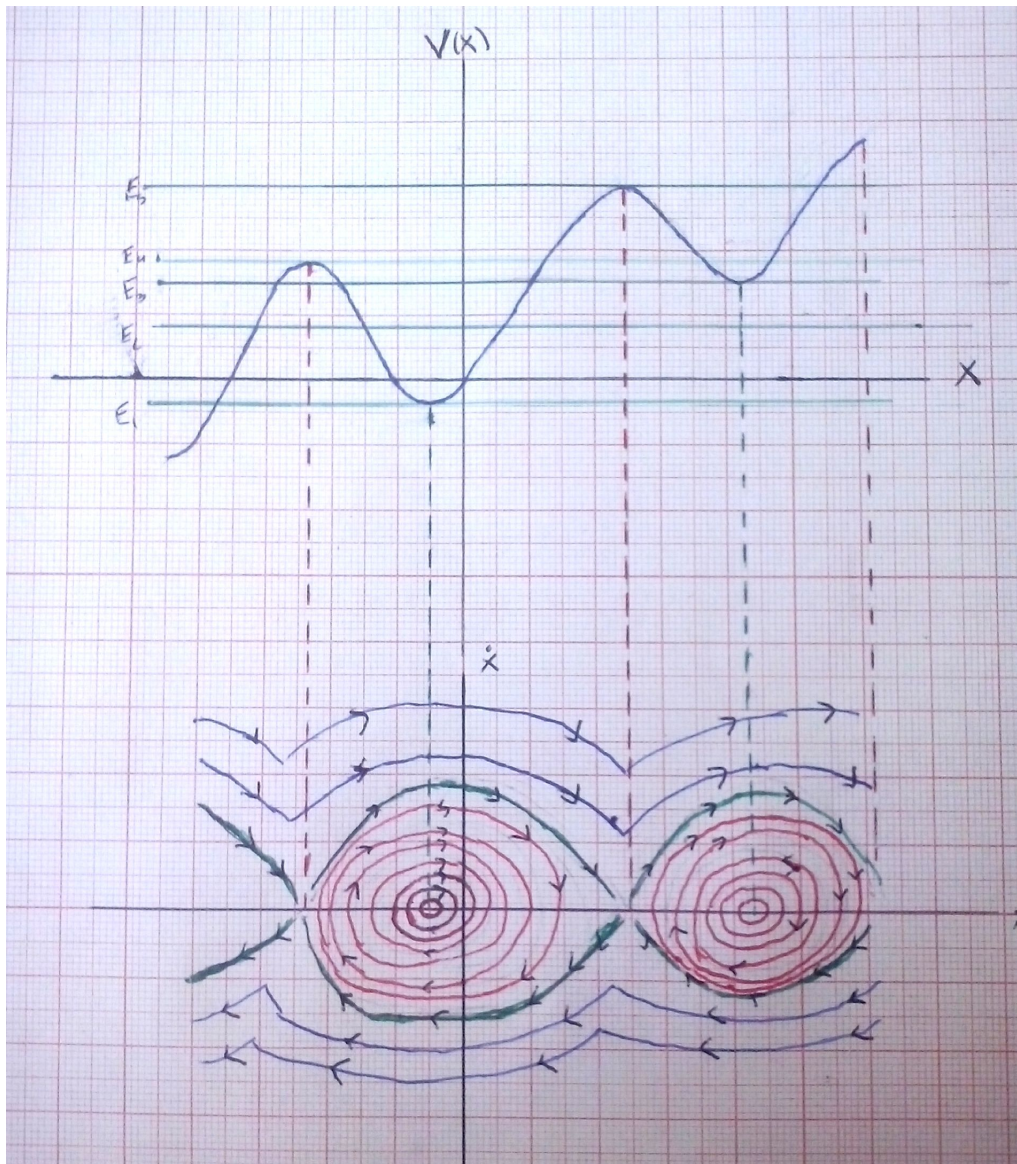
**Nota:** En este espacio que queda libre en la página, agregué una nota relevante. La tarea, tanto el PDF como el archivo  $.\text{TeX}$ , las imágenes, y el código en Python (ingresado en un Notebook de Jupyter<sup>1</sup>), que utilicé para crear algunos gráficos posteriores, se encuentran en un repositorio público en el cual se puede acceder al código  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  y ver los PDF, de ésta y las otras tareas que he entregado y seguiré entregando.

El link al repositorio es el siguiente: <https://github.com/FavioVazquez/MecanicaClasica-PCF>. Cualquier duda con respecto a lo mencionado, no duden en escribirme al correo.

---

\* Correo: [favio.vazquezp@gmail.com](mailto:favio.vazquezp@gmail.com)

<sup>1</sup><https://jupyter.org/>



**Figura 2:** Problema 1. Diagrama de fases resultante

## 2. Problema 2

Demuestre que una trayectoria de Lissajous en el espacio físico de dos dimensiones cubre densamente la región a la que tiene acceso si, y sólo si, las dos frecuencias son inconmensurables.

Solución:

Para demostrar este enunciado utilizaremos algunas técnicas de [1], conjunto con algunas particularidades que desarrollaremos aquí. Comenzaremos con unas definiciones importantes las cuales nos permitirán luego demostrar un teorema y un lema que completará la demostración del enunciado. El problema debe tratarse en el espacio físico, pero algunas demostraciones se harán en el espacio de fase, pero su extensión es posible.

**Definición:** Dos números  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se llaman racionalmente independientes si la relación  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ , con  $k_1$  y  $k_2$  enteros, que implica que  $k_1 = k_2 = 0$ .

Por ejemplo  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{8}$  son racionalmente dependientes, mientras que  $\sqrt{6}$  y  $\sqrt{8}$  son racionalmente independientes. Podemos ver esta definición desde otra perspectiva, que está un poco más cercana a la notación en mecánica clásica,

**Definición:** Si la división entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$  es un número racional  $k_2/k_1$ , donde  $k_1$  y  $k_2$  son enteros, entonces se dice que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son *commensurables*. De lo contrario se llaman *incommensurables*.

Para demostrar el enunciado utilizaremos un teorema y un lema definidos sobre un toro  $T^2$ , esto lo hacemos debido a que como es sabido un sistema de dos dimensiones como el que tratamos, el espacio de fase es de cuatro dimensiones, pero el espacio  $\mathbb{R}^4$  puede descomponerse en la suma directa de dos planos invariantes

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_{1,2} + \mathbb{R}_{3,4}. \quad (2.1)$$

En cada uno de estos planos las curvas de fase son círculos  $S^1$ , para el caso que tratamos, entonces cada curva de fase pertenece al producto directo de las curvas de fase en  $\mathbb{R}_{1,2}$  y  $\mathbb{R}_{3,4}$ , si ambos son círculos entonces obtenemos

$$T^2 = S^1 \times S^1, \quad (2.2)$$

llamado un toro dos-dimensional.

**Definición:** Un conjunto  $A$  es denso en todas partes en un espacio  $B$  si hay un punto del conjunto  $A$  en cada vecindad arbitrariamente pequeña de cualquier punto del espacio  $B$ .

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema,

**Teorema:** Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son racionalmente dependientes, entonces cada curva de fase en el toro  $T^2$  es cerrada. Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son racionalmente independientes, entonces las curvas de fase cubren densamente el toro  $T^2$ .

Para demostrar el teorema primero demostraremos el siguiente lema,

**Lema:** Considere una rotación del círculo  $S^1$  por un ángulo  $\alpha$  que es incommensurable con  $2\pi$ . Entonces las imágenes de cualquier punto en el círculo bajo las rotaciones repetidas

$$\phi, \phi + \alpha, \phi + 2\alpha, \phi + 3\alpha, \dots \pmod{2\pi}, \quad (2.3)$$

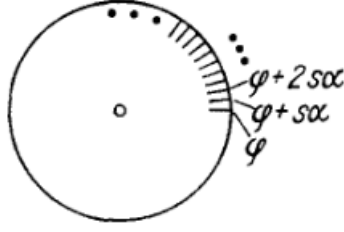
forman un conjunto que es denso en todas partes del círculo.

**Prueba:** La prueba puede ser deducida de la estructura de los subgrupos cerrados de la línea. Comenzamos enunciando el llamado “principio del hoyo de pájaro”: Si  $k + 1$  objetos yacen en  $k$  cajas, entonces al menos uno de las cajas tiene más de un objeto. Dividimos el círculo en  $k$  intervalos semiabiertos de longitud  $2\pi/k$ . Pero por el principio que enunciamos, entre los primeros  $k + 1$  puntos de nuestra secuencia hay dos que yacen en el mismo intervalo semiabierto. Sean estos puntos  $\phi + p\alpha$  y  $\phi + q\alpha$  con  $p > q$ . Consideremos  $s = p - q$ . El ángulo de rotación  $s\alpha$  difiere de un múltiplo de  $2\pi$  por menos de  $2\pi/k$ . En la secuencia de puntos  $\phi, \phi + s\alpha, \phi + 2s\alpha, \phi + 3s\alpha, \dots \pmod{2\pi}$  cada par de puntos adyacentes están a la misma distancia, menor que  $2\pi/k$ , de cada uno de ellos. Sea un número  $\epsilon > 0$  dado. Escogiendo  $k$ , lo suficientemente grande, podemos tener obtener  $2\pi/k < \epsilon$ . En cualquier vecindad de  $\epsilon$ , de cualquier punto de  $S^1$  hay puntos de la secuencia  $\phi + Ns\alpha$ . Lo cual prueba el lema.

□

---

<sup>2</sup>Ver figura (3)



**Figura 3:** Los puntos  $\phi + Ns\alpha$

El lema no utiliza directamente la inconmensurabilidad de  $\alpha$  con  $2\pi$ , pero es claro que el lema no es cierto para un  $\alpha$  conmensurable con  $2\pi$ .

Estamos en posición entonces para probar el teorema. Aunque todo sea muy matemático hasta ahora luego cuando hablemos del caso particular del problema al que nos enfrentamos, haremos una breve descripción física de la situación.

**Prueba del teorema:** Las trayectorias de fase del flujo que consideramos<sup>3</sup> sobre la superficie de  $T^2$  satisfacen la ecuación diferencial,

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\phi}_2 = \omega_2. \quad (2.4)$$

Las soluciones de esta ecuación tienen la forma

$$\phi_1(t) = \phi_1(0) + \omega_1 t, \quad \phi_2(t) = \phi_2(0) + \omega_2 t. \quad (2.5)$$

Sean  $\omega_1$  y  $\omega_2$  racionalmente dependientes:  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ ,  $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ . Las ecuaciones en una variable  $T$

$$\omega_1 T = 2\pi k_2, \quad \omega_2 T = -2\pi k_1, \quad (2.6)$$

son consistentes. Una solución  $T$  de estas ecuaciones es un período de la curva cerrada de fase.

Sea  $\omega_1$  y  $\omega_2$  racionalmente independientes. Como dijimos en una definición anterior,  $\omega_1/\omega_2$  es un número irracional. Consideremos los puntos de intersección consecutivos de la curva de fase con el meridiano  $\phi_1 = 0 \pmod{2\pi}$ . Las latitudes de estos puntos son

$$\phi_{2,k} \phi_{2,0} + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} k \pmod{2\pi}. \quad (2.7)$$

Por el lema, el conjunto de puntos de la intersección es denso en todas partes del meridiano. Entonces, las líneas dibujadas desde los puntos de un conjunto que es denso en todas partes, en una línea que yace en el plano en una dirección con esa línea, forman un subconjunto denso en todas partes del plano. Por lo que la imagen

$$\tilde{\phi}_1(t) = \phi_1(t) - 2\pi \left\lfloor \frac{\phi_1(t)}{2\pi} \right\rfloor, \quad \tilde{\phi}_2(t) = \phi_2(t) - 2\pi \left\lfloor \frac{\phi_2(t)}{2\pi} \right\rfloor, \quad (2.8)$$

de la curva de fase en el cuadrado  $0 \leq \tilde{\phi}_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \tilde{\phi}_2 < 2\pi$ , es densa en todas partes. Por lo que una curva de fase de la ecuación que consideramos es densa en todas partes del toro.

□

<sup>3</sup>Estamos considerando un flujo muy similar al que nos encontraremos en el caso del oscilador armónico en 2D.

Consideremos ahora que ya hemos probado el lema y teorema que nos interesaban, el caso de un oscilador armónico en dos dimensiones. Las componentes de la ecuación de movimiento son

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_2^2 y = 0, \quad (2.9)$$

donde  $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$ . Las soluciones generales son

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + \delta_1, \quad y(t) = A_2 \cos \omega_2 t + \delta_2, \quad (2.10)$$

donde las constantes  $A_i$  y  $\phi_i$  dependen de las condiciones iniciales  $r_0$  y  $v_0$ . Como vimos anteriormente la naturaleza de la trayectoria descrita por (2.10) dependen crucialmente de la proporción de las frecuencias angulares  $\omega_1/\omega_2$ . Démosle un sentido físico aplicado al problema, a las ecuaciones que se encuentran dentro de la prueba del teorema. Veámos que si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  eran conmensurables las trayectorias eran cerradas. Esto significa en el caso del oscilador armónico 2D que cuando la partícula ha hecho  $k_1$  oscilaciones completas en la dirección  $x$ , también habrá hecho  $k_2$  oscilaciones completas en la dirección de  $y$ , y por lo tanto ha vuelto a su punto de inicio  $r_0$  con la misma velocidad inicial  $v_0$ . El movimiento es periódico en este caso, lo cual lo podemos entender ahora desde una perspectiva física y matemática.

Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son inconmensurables, es decir que su proporción es un número irracional, habíamos dicho que las trayectorias eran densas en todas partes, esto desde la perspectiva del problema que tratamos quiere decir que la partícula nunca vuelve a tener sus condiciones iniciales  $r_0$  y  $v_0$ , entonces nunca pasa dos veces por el mismo punto con la misma velocidad, lo que hace claramente q la órbita sea abierta.

En el caso del oscilador armónico en 2D las trayectorias del espacio físico serán figuras de Lissajous cerradas, y periódicas si las frecuencias angulares son conmensurables, o cubrirán densamente el espacio físicos con figuras tipo Lissajous describiendo trayectorias abiertas.

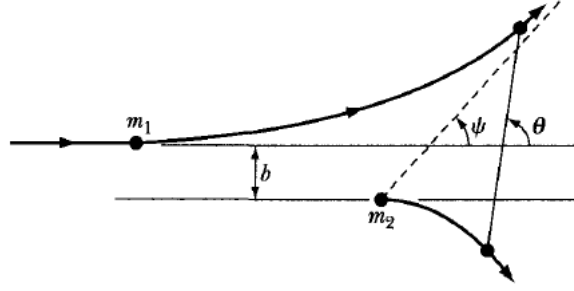
### 3. Problema 3

Encuentre la sección de dispersión para un potencial coulombiano repulsivo.

Solución:

Antes de dar la solución al problema hay que hacer algunas definiciones importantes, y encontrar algunas relaciones de la dispersión clásica generalizada que facilitarán la solución del caso que consideramos. Para esto utilizaremos un conjunto de acercamientos al problema desde los libros de mecánica clásica como [2, 3].

Consideremos la situación mostrada en la figura (4)



**Figura 4:** Representación esquemática del problema de dispersión visto desde el sistema de laboratorio.

que ilustra una colisión en el sistema de coordenadas del laboratorio<sup>4</sup> cuando una fuerza repulsiva existe entre  $m_1$  y  $m_2$ .

**Definición:** Llamaremos parámetro de impacto,  $b$ , a la distancia más cercana a la que la partícula  $m_1$  se acercaría a la vecindad de  $m_2$  si hubiera fuerza actuando sobre las partículas.

En la mayoría de los casos, no podemos escoger ni medir directamente  $b$ , por lo tanto, debemos reducirnos a hablar, en estas situaciones, de la probabilidad para varios ángulos de dispersión  $\theta$ .

Consideramos ahora la distribución de ángulos de dispersión que resultan de la colisión con varios parámetros de impacto. Para hacer esto, asumamos que tenemos un haz estrecho de partículas, cada una con masa  $m_1$  y energía  $T_0$ . Dirigimos este haz hacia una pequeña región del espacio que contiene una colección de partículas, cada una con una masa  $m_2$  en reposo.

**Definición:** La intensidad o flujo de intensidad  $I$  de las partículas incidentes, es el número de partículas pasando por unidad de tiempo a través de una unidad de área normal a la dirección del haz.

Si asumimos que la fuerza entre  $m_1$  y  $m_2$  decae con la distancia lo suficientemente rápido, entonces luego del encuentro, el movimiento de la partícula dispersada asintóticamente se acerca a una línea recta con un ángulo bien definido  $\theta$  entre la dirección inicial del movimiento y la final.

**Definición:** La sección de dispersión diferencial  $\sigma(\theta)$  en el sistema de Centro de Masa (CM) del sistema para la dispersión dentro de un elemento de ángulo sólido  $d\Omega'$  a un ángulo particular  $\theta$  CM, es:

$$\sigma(\theta) = \frac{\left( \begin{array}{l} \text{número de interacciones por partículas obje-} \\ \text{to que llevan a una dispersión dentro de } d\Omega' \\ \text{a un ángulo } \theta \end{array} \right)}{\text{Número de partículas incidentes por unidad de área}}. \quad (3.1)$$

Si  $dN$  es el número de partículas dispersadas dentro de  $d\Omega'$  por unidad de tiempo, entonces la probabilidad de dispersión dentro de  $d\Omega'$  de un haz incidente es

$$\sigma(\theta)d\Omega' = \frac{dN}{I}. \quad (3.2)$$

<sup>4</sup>Comúnmente suele llamarse sistema de coordenadas de laboratorio a uno que está en reposo viendo el sistema ocurrir, como un científico viendo el fenómeno parado o sentado (si es muy largo) ocurrir.

Podemos escribir también,

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega'}. \quad (3.3)$$

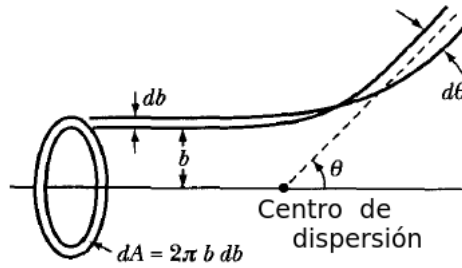
El hecho de que  $\sigma(\theta)$  tenga las dimensiones de área por estereorradián<sup>5</sup> da lugar al término *sección de dispersión*. El hecho de que asumimos que la fuerza entre las partículas es central, la dispersión tiene simetría axial, podemos entonces hacer la integración sobre el ángulo azimutal para obtener  $2\pi$ , y luego el elemento de ángulo sólido  $d\Omega'$  está dado por

$$d\Omega' = 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (3.4)$$

Si consideramos, por un momento, la dispersión de una partícula de masas  $\mu$  por un centro de fuerza, entonces la figura (5), muestra que el número de partículas con parámetros de impacto dentro de un rango  $db$  a una distancia  $b$  deben corresponder con el número de partículas dispersadas dentro del rango angular  $d\theta$  a una ángulo  $\theta$ , entonces

$$I 2\pi b db = -I \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (3.5)$$

donde  $db/d\theta$  es negativo, debido a que hemos asumidos que la fuerza es tal que la cantidad de deflexión angular decrece monótonamente aumentando de parámetro de impacto.



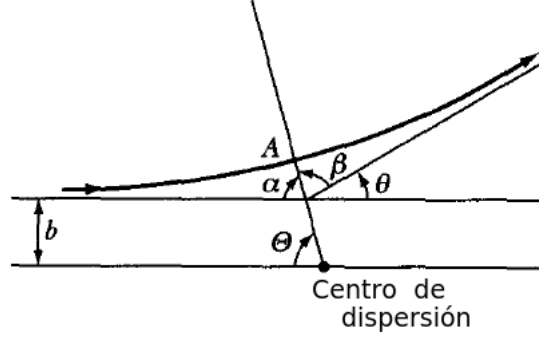
**Figura 5:** Problema equivalente de un cuerpo de masa  $\mu$  dispersado por un centro de fuerzas

Entonces,

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left\| \frac{db}{d\theta} \right\|. \quad (3.6)$$

Podemos obtener ahora una relación entre el parámetro de impacto  $b$  y el ángulo de dispersión usando la figura (6).

<sup>5</sup>El estereorradián se define haciendo referencia a una esfera de radio  $r$ . Si el área de una porción de esta esfera es  $r^2$ , un estereorradián es el ángulo sólido comprendido entre esta porción y el centro de la esfera.



**Figura 6:** Geometría de una partícula dispersada en un campo central. El punto A es la distancia de mayor acercamiento.

Como puede demostrarse de manera sencilla, el cambio de ángulo de una partícula de masa  $\mu$  moviéndose en un campo central está dado por ( $l$  es la velocidad angular y  $V$  la energía potencial)

$$\Delta\Theta = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(l/r^2)dr}{\sqrt{2\mu[E - V - (l^2/2\mu r^2)]}}. \quad (3.7)$$

Entonces el movimiento de una partícula en un campo central es simétrico respecto al punto de mayor acercamiento al centro de fuerza (A), lo que hace que los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  sean iguales. Tenemos entonces que

$$\theta = \pi - 2\Theta. \quad (3.8)$$

Para el caso en que  $r_{max} = \infty$ , el ángulo  $\Theta$  está dado por

$$\Delta\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{(b/r^2)dr}{\sqrt{1 - (b^2/r^2) - (U/T'_0)}}. \quad (3.9)$$

Donde hemos usado el hecho de que  $l = b\sqrt{2\mu T'_0}$ , y hemos puesto  $E = T'_0$ , debido a que la energía total  $E$  debe ser igual a la energía cinética  $T'_0 = \frac{1}{2}\mu u_1^2$  en  $r = \text{inf}$  donde  $V = 0$ .

Estamos ahora en posición para calcular lo solicitado en el problema, nos piden que consideremos un potencial coulombiano repulsivo, por lo tanto podemos escribir este como

$$V(r) = \frac{k}{r}. \quad (3.10)$$

Entonces la ecuación (3.9), se convierte en

$$\Theta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{(b/r)dr}{\sqrt{r^2 - (k/T'_0)r - b^2}}, \quad (3.11)$$

que al integrarse resulta (haciendo cambio de variable  $b/r$  y de ahí un proceso un poco largo) en

$$\cos \Theta = \frac{(\kappa/b)}{\sqrt{1 + (\kappa/b)^2}}, \quad (3.12)$$

donde hemos definido

$$\kappa = \frac{k}{2T'_0}. \quad (3.13)$$



Podemos reescribir (3.12) como

$$b^2 = \kappa^2 \tan^2 \Theta. \quad (3.14)$$

Pero de la ecuación (3.8),  $\Theta = \pi/2 - \theta/2$ , entonces

$$b = \kappa \cot \theta/2. \quad (3.15)$$

Entonces

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\kappa}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2}. \quad (3.16)$$

Y de la ecuación (3.6) tenemos que

$$\sigma(\theta) = \frac{\kappa^2}{2} \frac{\cot \theta/2}{\sin \theta \sin^2 \theta/2}. \quad (3.17)$$

Pero,

$$\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2. \quad (3.18)$$

Por lo que,

$$\sigma(\theta) = \frac{\kappa^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \theta/2}, \quad (3.19)$$

o,

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{(4T_0')^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2}. \quad (3.20)$$

Que es la conocida sección de dispersión para un potencial coulombiano repulsivo, obtenida por primera vez por Rutherford, en 1911, en su estudio de la dispersión de partículas  $\alpha$  por un núcleo atómico, curiosamente, este fue uno o el más famoso trabajo de Rutherford y lo hizo luego de ya haber ganado el premio nobel en 1908.

## 4. Problema 4

Demuestre que una partícula moviéndose en una dimensión y sujeta a la acción de una fuerza

$$f = -kx^{2n+1} \quad n \text{ entero positivo,}$$

oscilará con un período proporcional a  $A^{-n}$ , donde  $A$  es la amplitud de la oscilación. ¿Es esto válido cuando  $n < 0$ ?

Solución:

Debido a la forma de la fuerza que nos dan en el problema, y al hecho de que en una dimensión todas las fuerzas que dependen solo de  $x$  son conservativas, entonces podemos escribir [4],

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (4.1)$$

Por otra parte la energía total del sistema puede escribirse como,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x). \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) puede resolverse para  $1/\dot{x} = dt/dx$ , lo que resulta en

$$\int_{t_0}^t dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (4.3)$$

Que resulta en

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad (4.4)$$

donde  $x_0$  es la posición de la partícula en el tiempo  $t_0$ , y  $x$  es la posición en el tiempo  $t$ . Si en una gráfica de  $V(x)$  sobre  $x$ , podemos encontrar una región en la cual una partícula, con una energía dada, se encuentre constreñida a moverse alrededor de un mínimo, decimos que la misma oscila, o que el movimiento es periódico sobre esa región, en el cual puede demostrarse con facilidad que los límites de la oscilación serán entre el valor  $-A$  y  $A$ , donde  $A$  es la amplitud de la oscilación.

**Definición:** El período de una oscilación es el tiempo que le toma a una partícula ir de  $-A$  a  $A$  y volver de nuevo, donde  $A$  es la amplitud de la oscilación.

Debido a esta definición, y al hecho de que el tiempo que le toma a la partícula ir de  $-A$  a  $A$  es el mismo que le toma para ir de  $A$  a  $-A$  (si el potencial es simétrico), podemos escribir el período como

$$T = 2\sqrt{m/2} \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \sqrt{2m} \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (4.5)$$

Con los resultados obtenidos podemos ahora dar solución al problema. En el enunciado nos dicen que la partícula está sujeta a una fuerza  $F(x) = -kx^{2n+1}$ , por lo que

$$\int_0^{V(x)} dV(x) = k \int_0^x x^{2n+1} dx, \quad (4.6)$$

$$\therefore V(x) = \Theta x^{2(n+1)}, \quad (4.7)$$

donde hemos definido  $\Theta = k/2(n+1)$ . Por otra parte, en la oscilación de una partícula los momentos iniciales y finales de la oscilación son aquellos en los que la velocidad es igual a cero, o dicho de otra manera en los que la energía total es igual al potencial, entonces

$$E = V(A) = \Theta A^{2(n+1)}. \quad (4.8)$$

Introduciendo los resultados de (4.7) y (4.8) en (4.5) obtenemos

$$T = \sqrt{2m} \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{\Theta A^{2(n+1)} - \Theta x^{2(n+1)}}} = \sqrt{2m} \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{\Theta} \sqrt{A^{2(n+1)} - x^{2(n+1)}}}. \quad (4.9)$$

Si hacemos el cambio de variables  $x = A\xi$ , entonces

$$dx = A d\xi, \quad (4.10)$$

y los límites de integración cambian a

$$\begin{aligned} (\text{inferior}) \quad x = -A &\Rightarrow \xi = A/-A = -1, \\ (\text{superior}) \quad x = A &\Rightarrow \xi = A/A = 1, \end{aligned}$$

entonces (4.9) se transforma en

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{\frac{2m}{\Theta}} \int_{-1}^1 \frac{Ad\xi}{\sqrt{A^{2(n+1)} - (A\xi)^{2(n+1)}}}, \\
&= \sqrt{\frac{2m}{\Theta}} \int_{-1}^1 \frac{Ad\xi}{A^{2(n+1)}[1 - \xi^{2(n+1)}]}, \\
&= \sqrt{\frac{2m}{\Theta}} \int_{-1}^1 \frac{Ad\xi}{A^{(n+1)}\sqrt{1 - \xi^{2(n+1)}}}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Y debido a que  $A/A^{(n+1)} = A^{-n}$ , tenemos que

$$T = \sqrt{\frac{2m}{\Theta}} A^{-n} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{2(n+1)}}}. \tag{4.12}$$

Y debido a que la integral es una constante, entonces hemos demostrado que  $T \propto A^{-n}$ .

Debido a la forma del potencial, si  $n = 0$ ,

$$F(x) = -kx. \tag{4.13}$$

Que es simplemente el caso del oscilador armónico de una dimensión. Por otra parte si  $n$  es negativo, digamos que  $n = -1$ , entonces

$$F = -kx^{-1} \Rightarrow V(x) = k \ln |x/c|, \tag{4.14}$$

donde hemos puesto  $\ln |c|$  como constante de integración. Este tipo de potenciales no puede generar oscilaciones periódicas debido a que no tiene mínimos, y aparte es una función discontinua debido a que no contiene al 0 en su dominio. Por lo que esta solución no funciona para un  $n$  negativo ya que daríamos la errónea conclusión de que por ejemplo si  $n = -1$  entonces el período sería proporcional a  $A$ , lo cual se puede demostrar siguiendo un procedimiento similar al que llevamos a cabo en la solución del problema. Pero por la descripción del potencial que acabamos de hacer vemos que sería un error conjeturar tal cosa, por lo cual esta solución no es válida cuando  $n < 0$ .

## 5. Problema 5

Grafique las proyecciones  $(\theta, r)$ ,  $(\theta, \dot{r})$ ,  $(r, \dot{r})$ , y  $(r, \dot{\theta})$  en el espacio de fase  $(\theta, r, \dot{\theta}, \dot{r})$  (ojo no se trata de la órbita) de una partícula sujeta a una fuerza central gravitacional. Considere tanto casos con energía total positiva, como negativa.

Solución:

Consideramos el espacio de fases de una partícula sujeta a una fuerza gravitacional; este espacio de fases es de 4-dimensional, y debido a la dificultad de conseguir un programa que haga gráficos en 4 dimensiones (serían bien caros), y a la dificultad que tenemos para hacerlo en un cuaderno al ser seres tridimensionales, lo máximo que podemos hacer es dibujar las proyecciones de este espacio de fase en los planos que la forman, en este caso  $(\theta, r)$ ,  $(\theta, \dot{r})$ ,  $(r, \dot{r})$  y  $(r, \dot{\theta})$ <sup>6</sup>.

Todos los códigos con los que realicé estas gráficas son libres y se encuentran en el un Notebook de Python, en [este link...](#) Fueron hechos con Matplotlib<sup>7</sup> usando la función `plot.polar()` algunos, otros con `plot.plot()` y el último con `plot.streamplot()`.

<sup>6</sup> Es claro que es equivalente graficar la proyección de  $(a, b)$  a la de  $(b, a)$

<sup>7</sup><http://matplotlib.org/>

Comencemos por  $(r, \theta)$ . En este caso tenemos la ecuación para las órbitas que es

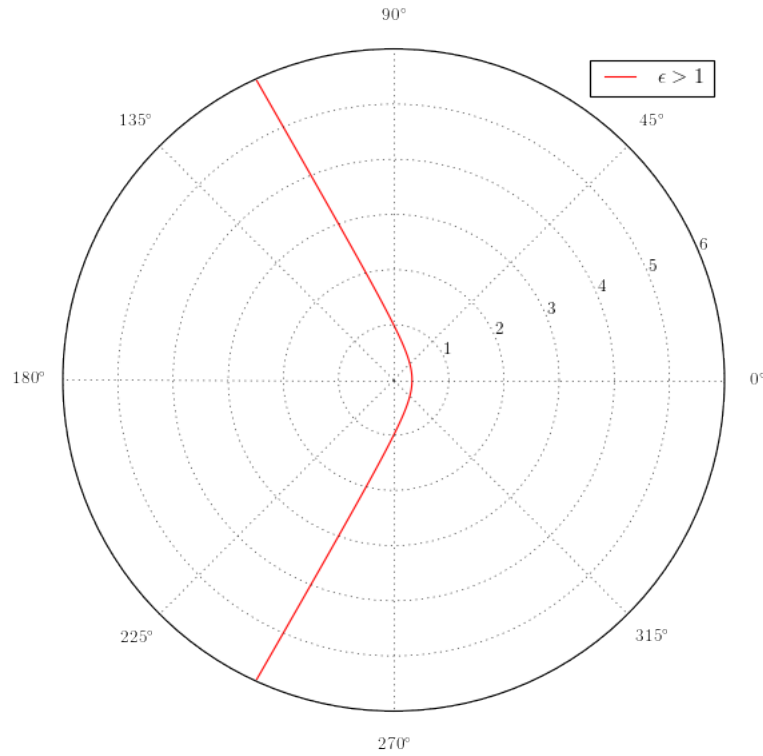
$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (5.1)$$

donde,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{l^2}{mk}, \\ \epsilon &= \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

A  $\epsilon$  se le conoce como la excentricidad, y a  $2\alpha$  como el latus rectum de la órbita. Esta ecuación (5.1) es la de una cónica con uno de sus focos en el origen. Y tenemos los siguientes casos<sup>8</sup>:

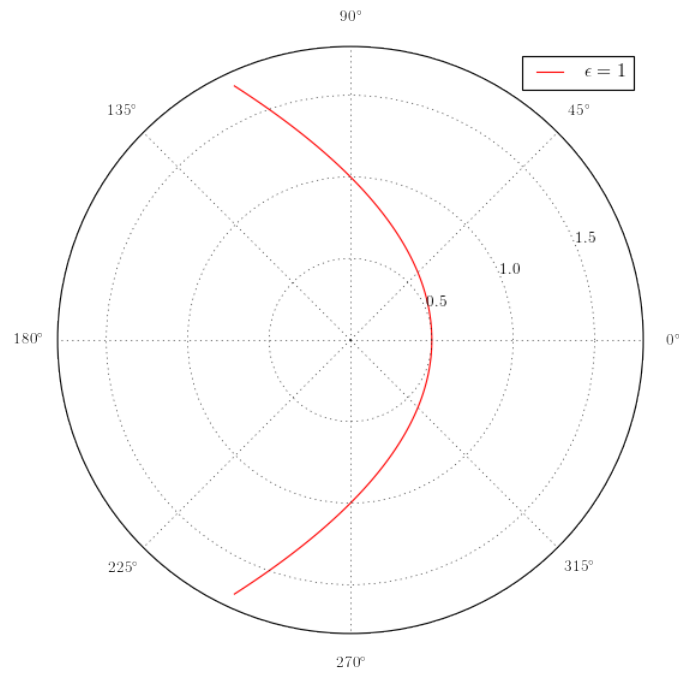
- $\epsilon > 1$ ,  $E > 0 \Rightarrow$  Hipérbola



**Figura 7:** Caso  $\epsilon > 1$

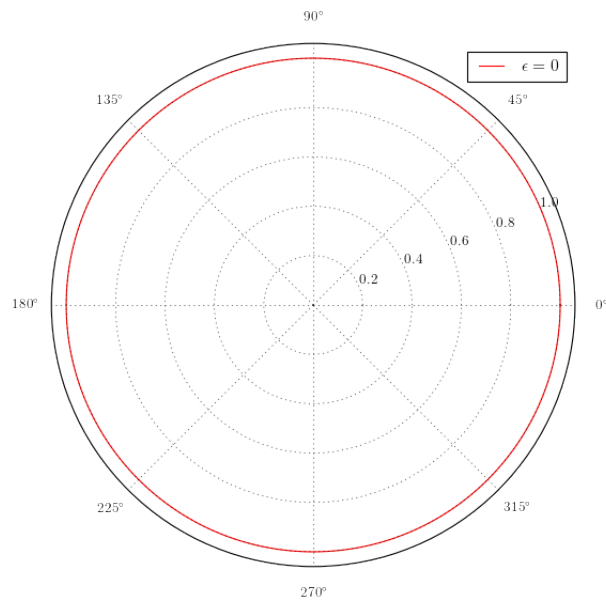
<sup>8</sup>Los valores de  $E$  menores que  $V_{min} = -(mk^2/2l^2)$  no producen movimiento físico real, debido que para esos casos  $\dot{r}^2 < 0$  y la velocidad es imaginaria (y aunque lo intentemos mucho no podremos imaginarla)

■  $\epsilon = 1$ ,  $E = 0 \Rightarrow$  Parábola



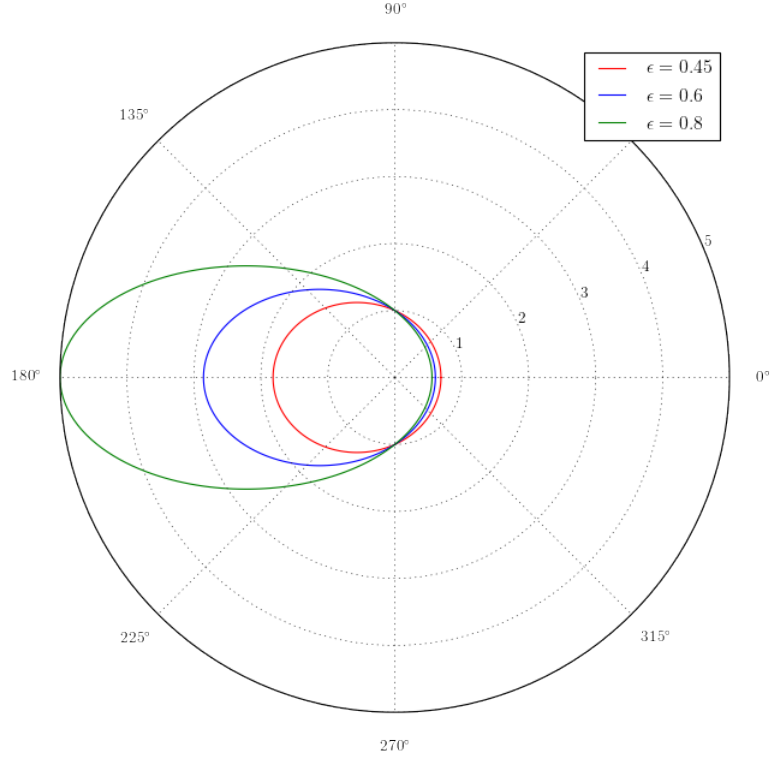
**Figura 8:** Caso  $\epsilon = 1$

■  $\epsilon = 0$ ,  $E = V_{min} \Rightarrow$  Círculo



**Figura 9:** Caso  $\epsilon = 0$

■  $0 < \epsilon < 1$ ,  $0 < E < V_{min} \Rightarrow$  Elipse



**Figura 10:** Caso  $0 < \epsilon < 1$

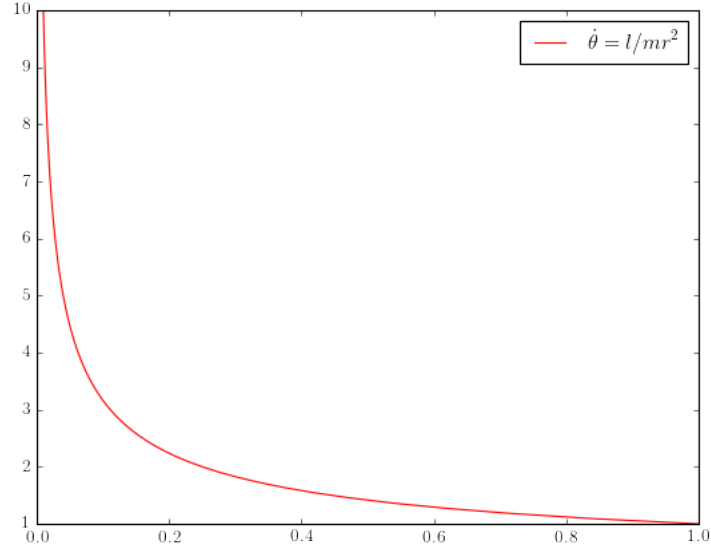
Para  $(\dot{\theta}, r)$ , podemos utilizar el impulso angular, que se expresa como

$$l = mr^2\dot{\theta}, \quad (5.3)$$

que si despejamos  $\dot{\theta}$ , tendremos a  $\dot{\theta}$  en función de  $r$ ,

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}. \quad (5.4)$$

Una función sencilla, positiva definida de la siguiente forma de la figura (11), vemos que  $\dot{\theta}$  decrece de forma cuadrática con  $r$  lo cual es lo esperado.



**Figura 11:** Gráfico de  $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$

Para el caso de  $(\dot{r}, \theta)$ , podemos utilizar el hecho de que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}. \quad (5.5)$$

Derivamos entonces la ecuación (5.1) con respecto a  $\theta$  y multiplicamos por  $\dot{\theta}$ , (recordemos que  $\dot{\theta} = l/mr^2$  y que  $r = \frac{\alpha}{1+\epsilon \cos \theta}$ )

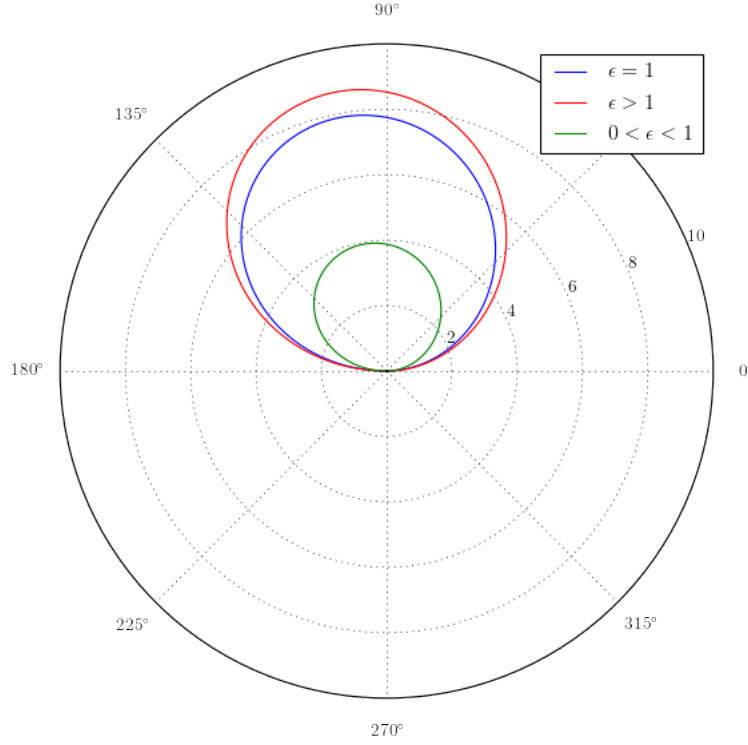
$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\cancel{\alpha'(1+\epsilon \cos \theta)} - \alpha(1+\epsilon \cos \theta)'}{(1+\epsilon \cos \theta)^2} \dot{\theta}, \\ &= \frac{\alpha \epsilon \sin \theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^2} \frac{l}{mr^2}, \\ &= \frac{\cancel{\alpha \epsilon \sin \theta}}{(1+\epsilon \cos \theta)^2} \frac{l}{m} \frac{\cancel{(1+\epsilon \cos \theta)^2}}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\therefore \dot{r}(\theta) = \frac{\alpha \epsilon \sin \theta}{m}. \quad (5.7)$$

Consideremos los siguientes casos

- $\epsilon > 1$ ,  $E > 0$
- $\epsilon = 1$ ,  $E = 0$
- $0 < \epsilon < 1$ ,  $V_{min} < E < 0$

Que son elipses, como las que vemos en la figura (12)



**Figura 12:** Gráfico de  $\dot{r}(\theta) = \frac{\alpha l \epsilon \sin \theta}{m}$  para distintos  $\epsilon$

Para el caso de  $(\dot{r}, r)$ , podemos utilizar la energía total para el caso de un potencial gravitatorio  $V(x) = -k/r$ , que tiene la siguiente forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad (5.8)$$

y despejamos  $\dot{r}$ ,

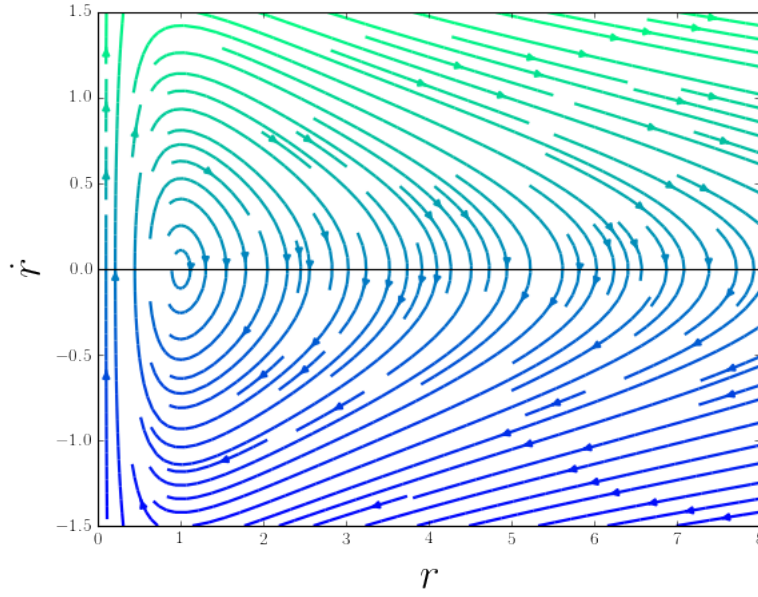
$$\dot{r} = \pm \sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}}. \quad (5.9)$$

El tratamiento que haremos con en este caso será diferente, y lo haremos considerando la ecuación diferencial, y el trazaremos el retrato de fase para  $(\dot{r}, r)$ , considerando el gráfico muy conocido para el potencial efectivo de el problema gravitacional. Parafrasearemos el comentario de este gráfico hecho en [4] para completar el entendimiento del problema.

En este caso, tomando a  $l$  como constante, tendremos el gráfico (13). Las curvas cerradas de este retrato de fase corresponden a estados ligados, en los que la partícula tiene una distancia mínima y máxima del centro de fuerza; en el espacio de configuración esto significa que la partícula está rotando respecto al centro de fuerza. Entonces estos estados ligados forman las órbitas que ya obtuvimos. Estos estados tienen todos energías negativas  $E$  y las órbitas del espacio de fase de velocidad cruzan al eje  $r$  en puntos que dependen de  $E$ . Mientras más grande  $E$  (más cercano a cero), más cercano será el punto de cruce interno ( $r$  mínimo) al origen y más lejano el externo ( $r$  máximo) del mismo. Las energías negativas terminan en  $E = 0$ , cuando el punto de cruce externo se va a  $r = \infty$ . Esta es la separatriz para este problema, y corresponde a una órbita **parabólica** en el espacio de configuración (ver figura (8)). Mientras más pequeño  $E$ , mas lejano el punto de cruce interno y más cercano el



externo, hasta que se encuentran en un punto, que corresponde a un  $r$  fijo, o a una órbita **circular** en el espacio de configuración (ver figura (9)), para un valor dado de  $l$ . Este es el único punto singular de este sistema. Las órbitas del espacio de fase de velocidad para valores negativos de  $E$ , entre cero y este límite inferior corresponden a **elipses** en el espacio de configuración (ver figura (10)). Las órbitas del espacio de fase de velocidad para  $E > 0$ , cruzan el eje  $r$  solo una vez, entonces cada órbita tiene una asíntota, para  $r$  grande, que es paralela al eje  $r$  en el espacio de fases de velocidad. La distancia de esta órbita desde el eje  $r$  es la velocidad mínima  $|\dot{r}|$  a esa energía. Estas órbitas en el espacio de configuración para  $E > 0$  correspondan a órbitas **hiperbólicas** (ver figura (7)).



**Figura 13:** Gráfico de  $(\dot{r}, r)$

## Referencias

- [1] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlang, 3ra edición, 1992.
- [2] S. Thronton y J. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, Thomson Brooks/Cole, 5ta edición, 2004.
- [3] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 2da edición, 1980.
- [4] J. José y E. Saletan, *Classical dynamics: A contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998.