Mecánica Clásica Tarea # 14

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1

Utilizando únicamente la ecuación de la eikonal deduzca la ley de Snell.

Solución:

Recordemos la expresión para la ecuación de la eikonal,

$$|\nabla S|^2(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}). \tag{1.1}$$

Esta ecuación es simplemente el módulo de la ecuación de Huygens que puede escribirse como

$$\nabla S = n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}, \tag{1.2}$$

y también sabemos que el gradiente de esta ecuación define el vector de rayo de magnitud $|\mathbf{n}| = n$. Si ahora recordamos que la integración del gradiente sobre un camino cerrado se hace cero, tenemos que

$$\oint_P \nabla S(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_P \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{1.3}$$

Consideremos ahora el caso en que el camino cerrado P rodea una frontera que separa dos medios diferentes. Si hacemos que los lados del bucle perpendicular a la interfaz vayan a cero, entonces únicamente las partes de la integral de línea tangenciales al camino de la interfaz contribuirán en la misma. Ahora debido a que estas contribuciones deben sumar cero, las componentes tangenciales de los vectores de rato deben preservarse, esto es

$$(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \tag{1.4}$$

donde el primo se refiere al lado de la frontera al cual el rayo es transmitido, cuyo vector normal es $\hat{\mathbf{z}}$. Ahora imaginemos a un rayo atravesando la frontera y pasando a través de la región encerrada por el bucle de integración. Si θ y θ' son los ángulos de incidencia y transmisión, respectivamente, medidos desde la normal $\hat{\mathbf{z}}$ a través de la frontera, entonces la preservación de la componente tangencial del vector de rayo significa que, tomando en cuenta (1.4) y la definición del producto vectorial,

$$\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{n}' \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \tag{1.5}$$

$$n \operatorname{sen}\theta - n' \operatorname{sen}\theta' = 0, \tag{1.6}$$

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

esto debido a que $|\hat{\mathbf{z}}| = 1$, por lo tanto

$$\boxed{n \operatorname{sen} \theta = n' \operatorname{sen} \theta'.} \tag{1.7}$$

Que es la ley de la refracción de Snell, descubierta primero por Ibn Sahl en 984 [1], y luego por Willebrod Snellius en 1621 [2]. Un análisis similar puede aplicarse al caso de los rayos reflejaos para mostrar que el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión.

Problema 2

En el curso se mostró que la ecuación de la eikonal es una aproximación de onda pequeña de la ecuación de ondas. Encuentre ahora, a partir únicamente del principio de Fermat, las ecuaciones diferenciales que determinan los rayos de luz y la ecuación de la eikonal. Comente sobre la situación análoga entre las ecuaciones de movimiento de la mecánica y el principio de Hamilton.

Solución:

Problema 3

En el curso se demostró que la función principal de Hamilton es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente. ¿Será cierto el enunciado inverso de este, esto es, que una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede ver como la función principal de Hamilton? Argumente su respuesta.

Solución:

Problema 4

Demuestre que un sistema es integrable sí y solo sí existen sistemas de coordenadas canónicas en las que la ecuación de Hamilton-Jacobi es totalmente separable.

Solución:

Problema 5

Reduzca a cuadraturas por el método de Liouville el ejemplo del péndulo esférico.

Solución:

Debajo se encuentra un diagrama del péndulo esférico,

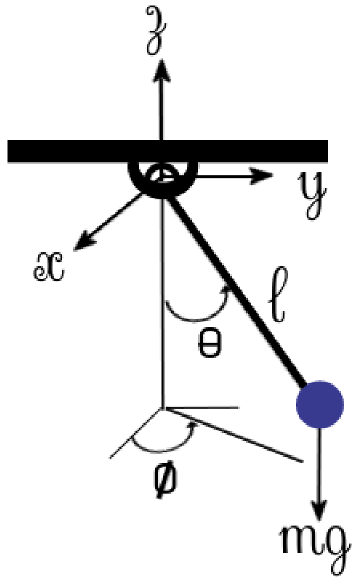

Figura 1: Péndulo esférico.

recordamos que para el péndulo esférico la lagrangiana se escribe como

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta - mgl\cos\theta, \tag{5.1}$$

podemos ahora escribir la hamiltoniana del sistema, primero obteniendo los momentos conjugados para las variables θ y ϕ,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \tag{5.2}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta, \tag{5.3}$$

de donde obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \tag{5.4}$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2\operatorname{sen}^2\theta}, \tag{5.5}$$

y ahora utilizando

$$H = \sum_i p_i\dot{q}^2(q,p) - L, \tag{5.6}$$

la hamiltoniana del péndulo esférico resulta

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2\operatorname{sen}^2\theta} + mgl\cos\theta. \tag{5.7}$$

Podemos notar ahora dos cosas. Primero, debido a que la coordenada ϕ es ignorable según la forma de la lagrangiana, entonces su momento conjugado se conservará, es decir que p_ϕ es constante, y además debido a que la energía cinética es una forma cuadrática de las velocidades y que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, entonces la hamiltoniana es igual a la energía total del sistema, que también será una integral de movimiento. Usando la notación del método de Liouville, podemos escribir esto de la siguiente forma

$$\frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \operatorname{sen}^2\theta} + mgl\cos\theta = I_1 = E, \tag{5.8}$$

$$p_\phi = I_2. \tag{5.9}$$

Ahora hemos encontrado entonces dos integrales de movimiento, nos preguntamos ahora si están en involución, es decir si

$$\{I_1, I_2\} = 0, \tag{5.10}$$

para ver esto recordamos la expresión para los paréntesis de Poisson,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \theta}\cancelto{0}{\frac{\partial I_2}{\partial p_\theta}} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial I_2}{\partial \theta}} + \cancelto{0}{\frac{\partial I_1}{\partial \phi}}\frac{\partial I_2}{\partial p_\phi} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\phi}\cancelto{0}{\frac{\partial I_2}{\partial \phi}} = 0. \tag{5.11}$$

Por lo tanto hemos demostrado que las dos integrales de movimiento que hemos encontrado están en involución, y debido a que hay tantas integrales de movimiento en involución como grados de libertad el sistema es integrable. Esto quiere decir que la uno forma $\omega = \sum_i p_i dq^i$, que en términos de nuestras coordenadas y definiciones tiene la forma (despejando p_θ de (5.8)),

$$\omega = \sqrt{2ml^2\left(I_1 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{I_2}{ml^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)}d\theta + I_2 d\phi, \tag{5.12}$$

utilizando el teorema de Liouville es integrable, y al integrarla obtenemos

$$F = \int \sqrt{2ml^2\left(I_1 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{I_2}{ml^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)}d\theta + I_2\phi. \tag{5.13}$$

Y en vistas del mismo teorema podemos ver entonces a $F(q, I)$ como una función generadora de tipo dos, que al complementarla con

$$Q^i = \frac{\partial F(q, I)}{\partial I_i}, \tag{5.14}$$

obtenemos una transformación canónica de coordenadas

$$(q, p) \leftrightarrow (Q, I), \tag{5.15}$$

que nos lleva a un sistema canónico de coordenadas donde los impulsos son las integrales de movimiento. Ahora calculando las Q^i utilizando (5.14), obtenemos

$$Q^1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = \int \frac{ml^2}{\sqrt{2ml^2\left(I_1 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{I_2}{ml^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)}}d\theta, \tag{5.16}$$

$$Q^2 = \phi - \int \frac{I_2}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{2ml^2\left(I_1 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{I_2}{ml^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)}}d\theta. \tag{5.17}$$

Y en nuestro nuevo sistema canónico (Q^1, Q^2, I_1, I_2) tenemos

$$H = I_1 = E, \tag{5.18}$$

por lo que

$$\dot{Q}^1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = 1, \tag{5.19}$$

y

$$\dot{Q}^2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = 0. \tag{5.20}$$

Y de estas ecuaciones podemos escribir, llamando a las constantes de integración β^1 y β^2 respectivamente,

$$Q^1 = t + \beta^1, \tag{5.21}$$

$$Q^2 = \beta^2, \tag{5.22}$$

y utilizando estos resultados las ecuaciones (5.16) y (5.17), quedan como

$$\boxed{t = -\beta^1 + \frac{\partial F}{\partial I_1} = \int \frac{ml^2}{\sqrt{2ml^2\left(I_1 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{I_2}{ml^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right)}} d\theta.} \tag{5.23}$$

$$\boxed{\phi = \beta^2 + \int \frac{I_2}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{2ml^2\left(I_1 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{I_2}{ml^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right)}} d\theta.} \tag{5.24}$$

Con lo cual hemos reducido el péndulo esférico a cuadraturas utilizando el método de Liouville.

Referencias

[1] R. Rashed, *"Géométrie et dioptrique au Xe siècle: Ibn Sahl, Al-Quhi et Ibn Al-Haytham*, Las Belles Lettres, 1993.

[2] D. Holm, *Geometric Mechanics, Part I: Dynamics and Symmetry*, World Scientific, Imperial College Press, 2008.