Mecánica Clásica Tarea # 1

Favio Vázquez*

Instituto de Física. Universidad Nacional Autónoma de México

1. Problema 1

Encontrar el movimiento de un oscilador armónico amortiguado con un coeficiente de amortiguamiento de $\gamma = \omega_0/3$ ($\omega_0/3$ frecuencia natural de l oscilador) si a $t = 0$ está en reposo en su punto de equilibrio y a partir de ese instante se le aplica una fuerza dada por[1]

$$F = G \sin \omega_0 t + B \sin 3\omega_0 t$$

<u>Solución:</u>

Nos encontramos con el caso de un oscilador armónico amortiguado al cual se le aplica una fuerza de conducción. Si asumimos que la fuerza de amortiguamiento es una función lineal de la velocidad del oscilador, entonces la ecuación que debemos resolver tiene la forma

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = G \operatorname{sen} \omega_0 t + H \operatorname{sen} 3\omega_0 t \tag{1.1}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{1.2}$$

Podemos escribir la ecuación (1.1) de una forma más conveniente,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \operatorname{sen} 3\omega_0 t \tag{1.3}$$

Donde $A = G/m$, $B = H/m$ y hemos definido[2] a $\gamma \equiv b/2m$, y representa el coeficiente de amortiguado del oscilador y $\omega_0^2 \equiv \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador.

La solución a la ecuación (1.3) consta de dos partes, $x_h(t)$ a la que llamamos solución homogénea, la cual es solución de (1.3) si hacemos el lado derecho de la misma cero, y una solución particular $x_p(t)$, que reproduce el lado derecho.

Para la solución homogénea tenemos

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.4}$$

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

[1] Hemos modificado el nombre de las contantes originales por conveniencia

[2] Esta definición la hemos tomado de libros clásicos de mecánica [1, 2]

Para resolver esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden seguiremos los pasos establecidos en [3], con algunos trucos utilizados por los libros de mecánica, comenzamos por conjeturar que las soluciones de (1.4) tienen la forma

$$x(t) = \mathrm{e}^{rt}$$

entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{rt} \\ \dot{x}(t) &= r\mathrm{e}^{rt} \\ \ddot{x}(t) &= r^2\mathrm{e}^{rt} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Sustituyendo (1.5) en (1.4) obtenemos

$$r^2\mathrm{e}^{rt} + 2r\gamma\mathrm{e}^{rt} + \omega_0^2 ert = 0 \tag{1.6}$$

$$\therefore \left(r^2 + 2r\gamma + \omega_0^2\right)\mathrm{e}^{rt} = 0$$

Debido a que $\mathrm{e}^{rt} \neq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$r^2 + 2r\gamma + \omega_0^2 = 0 \tag{1.7}$$

Haciendo uso de la conocida relación para obtener las raíces de una ecuación algebraica lineal de segundo orden

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} r_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Debido a que r_1 y r_2 son linealmente independientes encontramos que la solución a la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{-\gamma t}(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}) \tag{1.9}$$

Que podemos escribir como

$$x_h(t) = C_h\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,(\omega_i t + \phi) \tag{1.10}$$

Donde $\omega_i = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ y ϕ es la fase de la oscilación.

Para encontrar la solución particular utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados, en el cual conjeturamos la forma de $x_p(t)$ motivados por los tipos de funciones linealmente independientes que pueden construir el término no homogéneo de la ecuación, no demostraremos el método, solo lo utilizaremos, puede encontrarse una demostración completa y comprobar su validez en cualquier libro ecuaciones diferenciales modernas como [3]. Entonces asumiendo que $x_p(t)$ tiene la forma

$$x_p(t) = C \operatorname{sen} \omega_0 t + D \cos \omega_0 t + F \operatorname{sen} 3\omega_0 t + E \cos 3\omega_0 t \tag{1.11}$$

Derivando (1.11) con respecto al tiempo y luego derivando ese resultado de nuevo con respecto la tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= C\omega_0 \cos \omega_0 t - D\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + 3F\omega_0 \cos 3\omega_0 t - 3E\omega_0 \operatorname{sen} 3\omega_0 t \\ \ddot{x}_p(t) &= -C\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t - D\omega_0^2 \cos \omega_0 t - 9F\omega_0^2 \operatorname{sen} 3\omega_0 t - 9E\omega_0^2 \cos 3\omega_0 t \end{aligned} \tag{1.12}$$

Sustituyendo (1.11) y (1.12) en (1.3), obtenemos

$$\begin{aligned} -C\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t - D\omega_0^2 \cos \omega_0 t - 9F\omega_0^2 \operatorname{sen} 3\omega_0 t - 9E\omega_0^2 \cos 3\omega_0 t - \\ 2\gamma C\omega_0 \cos \omega_0 t - 2\gamma D\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + 6\gamma F\omega_0 \cos 3\omega_0 t - 6\gamma E\omega_0 \operatorname{sen} 3\omega_0 t + \\ C\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t + D\omega_0^2 \cos \omega_0 t + F\omega_0^2 \operatorname{sen} 3\omega_0 t + E\omega_0^2 \cos 3\omega_0 t \\ = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \operatorname{sen} 3\omega_0 t \end{aligned}$$

Pero según el enunciado del problema $\gamma = \omega_0/3$, entonces

$$\begin{aligned} -C\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t - D\omega_0^2 \cos \omega_0 t - 9F\omega_0^2 \operatorname{sen} 3\omega_0 t - 9E\omega_0^2 \cos 3\omega_0 t - \\ \frac{2}{3} C\omega_0^2 \cos \omega_0 t - \frac{2}{3}\omega_0^2 D \operatorname{sen} \omega_0 t + 2\omega_0^2 F \cos 3\omega_0 t - 2\omega_0^2 E \operatorname{sen} 3\omega_0 t + \\ C\omega_0^2 \operatorname{sen} \omega_0 t + D\omega_0^2 \cos \omega_0 t + F\omega_0^2 \operatorname{sen} 3\omega_0 t + E\omega_0^2 \cos 3\omega_0 t \\ = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \operatorname{sen} 3\omega_0 t \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \omega_0 t \left[\cancel{-C\omega_0^2} - \frac{2}{3}\omega_0^2 D + \cancel{C\omega_0^2} \right] \\ \cos \omega_0 t \left[\cancel{-D\omega_0^2} + \frac{2}{3} C\omega_0^2 + \cancel{D\omega_0^2} \right] \\ \operatorname{sen} 3\omega_0 t \left[-9F\omega_0^2 - 2\omega_0^2 E + F\omega_0^2 \right] \\ \cos 3\omega_0 t \left[-9E\omega_0^2 + 2\omega_0^2 + E\omega_0^2 \right] \\ = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \operatorname{sen} 3\omega_0 t \end{aligned} \tag{1.14}$$

Entonces tenemos que, por igualación

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2}{3}\omega_0^2 D \Rightarrow \boxed{D = -\frac{3A}{2\omega_0^2}} \\ 0 &= -\frac{2}{3}\omega_0^2 C \Rightarrow \boxed{C = 0} \\ 0 &= -8E\omega_0^2 + 2F\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{F = 4E} \\ B &= -8F\omega_0^2 - 2E\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{E = -\frac{B}{34\omega_0^2}} \end{aligned}$$

Entonces la solución particular es

$$x_p(t) = -\frac{3A}{2\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{2}{17}\frac{B}{\omega_0^2}\operatorname{sen}3\omega_0 t - \frac{B}{34\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t \tag{1.15}$$

La solución final a la ecuación es entonces, donde por simpleza asumiremos por ahora que $\phi = 0$

$$x(t) = C_h \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{3}t}\operatorname{sen}\omega_i t - \frac{3A}{2\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{2}{17}\frac{B}{\omega_0^2}\operatorname{sen}3\omega_0 t - \frac{B}{34\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t \tag{1.16}$$

Pero $x(0) = 0$, entonces

$$0 = \frac{3A}{2\omega_0^2} - \frac{B}{34\omega_0^2} \Rightarrow \frac{3A}{2} = \frac{B}{34} \Rightarrow \boxed{A = \frac{B}{51}} \tag{1.17}$$

Y $\dot{x}(0) = 0$, calculando la derivada de $x(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &-\frac{\omega_0^2}{3}C_h \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{3}t}\operatorname{sen}\omega_i t + C_h \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos\omega_0 t + \frac{3A\omega_0}{2\omega_0^2}\operatorname{sen}\omega_0 t \\ &- \frac{6}{17}\frac{B\omega_0}{\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t + \frac{3B\omega_0}{34\omega_0^2}\operatorname{sen}3\omega_0 t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &-\frac{\omega_0^2}{3}C_h \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{3}t}\operatorname{sen}\omega_i t + C_h \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{3}t}\cos\omega_0 t + \frac{3A}{2\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t \\ &- \frac{6}{17}\frac{B}{\omega_0}\cos 3\omega_0 t + \frac{3B}{34\omega_0}\operatorname{sen}3\omega_0 t\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}0 &= C_h - \frac{6}{17}\frac{B}{\omega_0} \\ C_h &= \frac{6B}{17}\end{aligned}$$

Entonces la solución final al problema es, donde debido a que $\gamma < \omega_0$ hemos asumido que $\omega_i \approx \omega_0$

$$\boxed{x(t) = \frac{6B}{17}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{3}t}\operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) - \frac{B}{34\omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{2}{17}\frac{B}{\omega_0^2}\operatorname{sen}3\omega_0 t - \frac{B}{34\omega_0^2}\cos 3\omega_0 t}$$

2. Problema 2

Considere un oscilador armónico con un pequeño amortiguamiento. Muestre que el cambio en la energía durante un período es $2T/\tau$, donde T el período de oscilador sin amortiguar y τ es el tiempo que tarda la amplitud en reducirse por un factor $1/e = 1/2,718$.

Solución:

Nos encontramos de nuevo con el caso de un oscilador armónico con un pequeño amortiguamiento, en este caso sin fuerzas de conducción, para este tipo de oscilador la ecuación diferencial que lo gobierna tiene la forma

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.1}$$

Donde hemos definido el factor de amortiguamiento como $\gamma = b/2m$, y $\omega_0 t$ es la frecuencia natural del oscilador. Esta ecuación diferencial lineal homogénea tiene por solución, definiendo $\omega_i \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}(Asin(\omega_i t + \delta) \tag{2.2}$$

Donde δ es la fase del oscilador. Podemos ver de (2.2) que la presencia del factor exponencial real $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ la amplitutud A del oscilador amortiguado decrece con el tiempo. Podemos definir el período del oscilador amortiguado como

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \tag{2.3}$$

Estamos ya en posición de comenzar a demostrar lo que el problema nos pide, lo cual es que el cambio en la energía durante un período es $2T/\tau$, donde T el período de oscilador sin amortiguar y τ es el tiempo que tarda la amplitud en reducirse por un factor $1/e = 1/2,718$. Comenzamos por escribir la energía total para oscilador amortiguado, la cual está dada por la suma de la energía cinética y potencial

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.4}$$

Para un oscilador armónico esta energía es constante, pero en este caso veremos que se cumple algo un poco diferente. Diferenciemos a E con respecto al tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

Pero por la ecuación (2.1) vemos que

$$\frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2 \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5) representa la tasa de cambio de la energía para el oscilador armónico, que comúnmente es conocida cono la tasa de disipación de energía debido a que (2.5) es siempre cero o negativa, entonces como la amplitud, la energía decrece y en un punto se hace despreciable. El cambio de en la energía durante un período T_a es

$$\Delta E = \int_0^{T_i} \dot{E}dt \tag{2.6}$$

De la donde $\dot{E}$ está dada por (2.5). Necesitamos una expresión para $\dot{x}$, para eso derivamos (2.2) y obtenemos

$$\dot{x} = -A\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}\operatorname{sen}\omega_i t + \delta - \omega_i\cos(\omega_i t + \delta) \tag{2.7}$$

Sustituyendo (2.7) en (2.6),

$$\Delta E = \int_0^{T_i} [-A\gamma e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \omega_i t + \delta - \omega_i \cos(\omega_i t + \delta)]dt \tag{2.8}$$

Un procedimiento muy útil en este punto es el que sigue [5] en la cual se cambia la variable de integración por $\theta = \omega_i t + \delta$, con lo que $dt = d\theta/\omega_i$ y la integral sobre el período T_i, se transforma debido al cambio de variable[3] en una integral de δ a $\delta + 2\pi$, pero debido a que el valor de la integral sobre un ciclo completo no depende de la fase inicial del movimiento δ, lo podemos eliminar de los límites de integración, lo cual simplifica la evaluación de la integral, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{\omega_i}\int_0^{2\pi} \dot{E} d\theta \\ &= -\frac{bA^2}{\omega_i} e^{-2\gamma t} \int_0^{2\pi} (\gamma^2 \operatorname{sen}^2\theta - 2\gamma\omega_i \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \omega_i^2\cos^2\theta)d\theta\end{aligned} \tag{2.9}$$

La integral de $\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$ de 0 a 2π es π, mientras que la integral del producto de $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ se hace cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\frac{bA^2}{\omega_i}\pi e^{-2\gamma t}(\gamma^2 + \omega_i^2) \\ &= -bA^2 e^{-2\gamma t}\omega_0^2\left(\frac{\pi}{\omega_i}\right) \\ &= -\gamma m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} T_i\end{aligned} \tag{2.10}$$

Donde hemos utilizado las relaciones $\omega_0^2 = \omega_i^2 + \gamma^2$ y $\gamma = b/2m$. Si ahora identificamos el valor de γ con una constante τ, tal que $\gamma = (2\tau)^-1$, es decir el tiempo en que la amplitud decrece $1/e$, obtenemos que la magnitud de la pérdida de energía en un ciclo es

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-t/\tau}\right)\frac{T_i}{\tau}$$

y definiendo a $E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-t/\tau}$ como la energía almacenada en el oscilador amortiguado, vemos que

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{T_i}{\tau} \tag{2.11}$$

Podemos escribir esta ecuación en función del período de un oscilador sin amortiguamiento T , expandiendo en series de Taylor y truncando a primer orden[4] podemos lograr ese objetivo

---

[3]
$t = 0 \Rightarrow \theta = \delta$
$t = T_i \Rightarrow \theta = \omega_i T_i + \delta = \omega_i \frac{2\pi}{\omega_i} + \delta = 2\pi + \delta$

[4] Podemos hacer esto debido a que el amortiguamiento es pequeño y por lo tanto γ es pequeño

$$T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}}$$

$$T_i \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 + \cancel{\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}} \right] \therefore T_i \approx T$$

Entonces tenemos que

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = \frac{T}{\tau}} \tag{2.12}$$

La ecuación (2.12) demuestra justo lo que se pide en el problema el que cambio en la energía durante un período es T/τ, expresado en términos del período del oscilador sin amortiguar y τ es el tiempo que tarda la amplitud en reducirse por un factor 1/e = 1/2,718. Cabe destacar que la solución final al problema no es exactamente lo que se pide demostrar, debido a que falta un 2 en el numerador, pero luego de una intensa revisión de los cálculos realizados se llega a la conclusión de que el valor obtenido es correcto, el único modo de que la solución de exactamente igual es que se tome el valor de $T_i = 2T$.

3. Problema 3

Un proyectil se dispara a partir del origen con velocidad inicial v_0. Se desea impactar el punto de coordenadas $x = x_0$, $z = 0$.

a) ¿Cuál es el ángulo (o ángulos) de disparo que se requieren?

b) Encuentre la corrección a primer orden que se debe dar a dicho ángulo si toma en cuenta la resistencia del aire.

<u>Solución:</u>

Podemos esquematizar el problema como en la (figura 1). Tenemos un proyectil que es disparado desde el origen a una velocidad inicial v_0, haciendo un ángulo θ con el eje x, y deseamos alcanzar el punto $x = x_0$ y $z = 0$. Primero consideremos el caso sin tomar en cuenta la resistencia del aire.

De la (figura 1) utilizando las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo vemos que

$$v_{0x} = v_0 \cos(\theta)$$
$$v_{0z} = v_0 \operatorname{sen}(\theta)$$

Si la partícula de masa m está sujeta a la atracción gravitacional por la tierra, entonces tenemos, utilizando la segunda ley de Newton,

En la dirección de x,

$$0 = m\ddot{x} \tag{3.1}$$

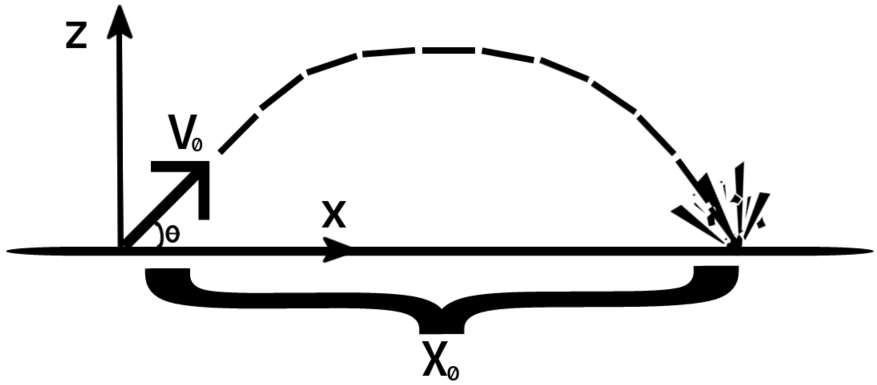

Figura 1: Problema 3

y en la dirección de z,

$$-mg = m\ddot{z} \tag{3.2}$$

De la ecuación (3.1) tenemos que (utilizando las condiciones iniciales),

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{v_{0x}}^{\dot{x}} d\dot{x}' = 0 \Rightarrow \dot{x} - v_{0x} = 0$$

$$\therefore \dot{x} = v_0 \cos(\theta) \tag{3.3}$$

De la ecuación (3.3) podemos obtener $x(t)$,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos(\theta) \Rightarrow dx = v_0 \cos(\theta) dt \Rightarrow \int_0^x dx' = v_0 \cos(\theta) \int_0^t dt'$$

$$\therefore x = v_0 t \cos(\theta) \tag{3.4}$$

Luego para z, utilizando la ecuación (3.2),

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \frac{d\dot{z}}{dt} = -g \Rightarrow \int_{v_{0z}}^{\dot{z}} d\dot{z}' = -g \int_0^t dt' \Rightarrow \dot{z} - v_{0z} = -gt$$

$$\therefore \dot{z} = -gt + v_0 \operatorname{sen}(\theta) \tag{3.5}$$

De la ecuación (3.5) podemos obtener $z(t)$,

$$\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow dz = (-gt + v_0 \operatorname{sen}(\theta))dt$$
$$\Rightarrow \int_0^z dz' = -g \int_0^t t'dt' + v_0 \cos(\theta) \int_0^t t'dt'$$

$$\therefore z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t \operatorname{sen}(\theta) \tag{3.6}$$

Podemos encontrar el momento en que el proyectil se encuentra en el punto x_0, es decir hasta que choque con el piso, lo cual ocurre al final de su recorrido cuando $z = 0$. Para dar respuesta a la parte a) de la pregunta debemos determinar en qué momento esto ocurre, es decir cuánto es el valor del tiempo para el punto en que $z = 0$, ya que esto nos permitirá determinar los ángulos de lanzamiento que requerimos para que el proyectil llegue a x_0 y $z = 0$.

Debido a que el proyectil sale disparado desde el origen, $z = 0$ cuando $t = 0$, pero mediante la ecuación (3.6) podemos determinar el otro momento en que $z = 0$ que es al final de su recorrido, y a este tiempo lo llamaremos τ, reescribiendo (3.6) podemos ver esto claramente,

$$z = t(\frac{-gt}{2} + v_0 \operatorname{sen}(\theta)) = 0$$

Donde vemos que $z = 0$ si $t = 0$, pero también para un tiempo τ,

$$\frac{-g\tau}{2} + v_0 \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

Resolviendo para τ,

$$\tau = \frac{2v_0 \operatorname{sen}(\theta)}{g} \tag{3.7}$$

Entonces para obtener el rango del proyectil en $z = 0$ cuando $t = \tau$ y ha llegado al punto x_0, para eso sustituimos (3.7) en (3.4)

$$x_0 = v_0\tau \cos(\theta) \Rightarrow x = 2\frac{(v_0)^2}{g} \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

Utilizando la identidad trigonométrica $2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$, obtenemos que

$$x_0 = \frac{(v_0)^2}{g} \operatorname{sen}(2\theta) \tag{3.8}$$

Despejando a θ de (3.8) podemos obtener uno de los ángulos que se requieren para que el proyectil llegue a x_0 y $z = 0$, esto es

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x_0 g}{v_0^2}\right)} \tag{3.9}$$

El otro ángulo puede obtenerse restando $\pi/2$ menos (3.9) lo cual completa la solución a la primera parte del problema.

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2}\left[\pi - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x_0 g}{v_0^2}\right)\right]} \tag{3.10}$$

Para dar respuesta a la segunda parte del problema debemos considerar la resistencia del aire. Si suponemos que la fuerza aplicada por la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del proyectil, tenemos entonces

En la dirección de x,

$$m\ddot{x} = -km\dot{x} \tag{3.11}$$

y en la dirección de z,

$$m\ddot{z} = -km\dot{z} - mg \tag{3.12}$$

Resolvemos primero la ecuación (3.11), la reescribimos como

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k\dot{x} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -k\dot{x} \\ \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} &= -kdt \end{aligned} \tag{3.13}$$

Y debido a que las condiciones iniciales son las mismas

$$\begin{aligned} \int_{v_{ox}}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}'}{\dot{x}'} &= -k\int_0^t dt' \\ \therefore \dot{x} &= \mathrm{e}^{-kt} v_0 \cos\theta \end{aligned} \tag{3.14}$$

Podemos encontrar x de la ecuación (3.14),

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathrm{e}^{-kt} v_0 \cos\theta \\ \int_0^x dx' &= v_0 \cos\theta \int_0^t \mathrm{e}^{-kt'} \\ \therefore x &= \frac{v_0 \cos\theta}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Resolvamos ahora la ecuación (3.12), reescribiendo como

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -k\dot{z} - g \\ \frac{d\dot{z}}{dt} &= -k\dot{z} - g \\ \frac{d\dot{z}}{k\dot{x} + g} &= -dt \\ \int \frac{d\dot{z}}{k\dot{x} + g} &= \int dt \end{aligned} \tag{3.16}$$

Luego, como las condiciones iniciales son las mismas y haciendo el cambio de variable $u = k\dot{z} + g$ podemos encontrar la solución a (3.16),

$$\frac{1}{k} ln(k\dot{z} + g)|_{v_0 z}^{\dot{z}} = -t \tag{3.17}$$

Luego de hacer las sustituciones y la evaluación en los límites de integración obtenemos que

$$\dot{z} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 \operatorname{sen}\theta + g\mathrm{e}^{-kt}}{k} \tag{3.18}$$

Podemos obtener el valor de z de (3.18),

$$\int_0^z dz' = \frac{g}{k}\int_0^t dt' + \frac{kv_0 \operatorname{sen}\theta + g}{k}\int_0^t \mathrm{e}^{-kt'}dt' \tag{3.19}$$

Por lo tanto

$$z = -\frac{gt}{k} + \frac{kv_0 \operatorname{sen}\theta + g}{k^2}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \tag{3.20}$$

Usaremos la misma metodología que en la primera parte del problema, para encontrar ahora la corrección que se debe hacer para los ángulos de disparo cuando se consideraba la resistencia del aire.

Entonces, de (3.20) podemos encontrar el tiempo τ necesario para que el proyectil alcance $z = 0$,

$$-\frac{gt}{k} + \frac{kv_0 \operatorname{sen}\theta + g}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt}) = 0 \tag{3.21}$$

Despejando τ,

$$\tau = \frac{kv_0 \operatorname{sen}\theta + g}{gk}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \tag{3.22}$$

Pero (3.22) es una ecuación trascendental para τ, por lo que nos es imposible encontrar un valor analítico para τ. Pero podemos utilizar un método perturbativo para encontrar un valor aproximado. Haciendo una expansión de $(1-\mathrm{e}^{-kt})$, en series de potencia encontramos que

$$\tau = \frac{kv_0 \operatorname{sen}\theta + g}{gk}\left(k\tau - \frac{1}{2}k^2\tau^2 + \frac{1}{6}k^3\tau^3 - \dots\right) \tag{3.23}$$

Aunque nos piden una corrección de primer orden nos será útil mantener algunos órdenes superiores por el momento para obtener una ecuación de la forma

$$\tau = \frac{tk^2 v_0 \operatorname{sen}\theta + gkt}{gk} - \frac{1}{2}\frac{t^2k^3v_0 \operatorname{sen}\theta + gk^2t^2}{gk} + \frac{1}{6}\frac{t^3k^4v_0 \operatorname{sen}\theta + gk^3t^3}{gk} \tag{3.24}$$

Si mantenemos los términos de la expansión hasta k^3 y luego de un largo camino algebraico obtenemos que

$$\tau = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta/g}{1 + kv_0 \operatorname{sen}\theta/g} + \frac{1}{3}k\tau^2 \tag{3.25}$$

Expandiendo $\frac{1}{1+kv_0 \operatorname{sen}\theta/g}$ del primer término de (3.25), y manteniendo términos hasta k que es lo que nos dice el problema, obtenemos

$$\tau = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} + \left(\frac{\tau^2}{3} - \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2}\right) \tag{3.26}$$

Puede verificarse que fácilmente que si $k = 0$, obtenemos el mismo resultado para τ que para el caso sin resistencia del aire, lo cual es un indicio de que la ecuación (3.26) es correcta. Por lo tanto, si k es pequeño, el tiempo τ

será aproximadamente igual a l τ_0 que calculamos anteriormente, si usamos ese valor y sustituimos en el lado derecho de (3.26), obtenemos un valor un poco más compacto para el nuevo τ,

$$\tau \approx \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\left(1 - \frac{kv_0 \operatorname{sen}\theta}{3g}\right) \tag{3.27}$$

Escribimos ahora la ecuación para x en su forma expandida,

$$x = \frac{v_0 \cos\theta}{k}\left(kt - \frac{1}{2}k^2t^2 + \frac{1}{6}k^3t^3 +\right) \tag{3.28}$$

Pero $x = x_0$ cuando $t = \tau$, entonces

$$x_0 \approx v_0 \cos\theta\left(\tau - \frac{1}{2}k\tau^2\right) \tag{3.29}$$

Donde en (3.29) hemos considerado términos hasta el primer orden de k. Sustituyendo el valor de τ que hemos obtenido en (3.27),

$$x_0 = \frac{2v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g}\left(1 - \frac{4kv_0 \operatorname{sen}\theta}{3g}\right) \tag{3.30}$$

Que utilizando el hecho de que $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$, podemos escribir como

$$x_0 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{g}\left(1 - \frac{4kv_0 \operatorname{sen}\theta}{3g}\right) \tag{3.31}$$

Pero utilizando la ecuación 8 ecuación (3.8) podemos ver que el término de corrección, al cual llamaremos α es[5]

$$\alpha = \frac{4kv_0}{3g} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &\approx \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{g}(1-\alpha) \\
x_0 &\approx \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{g} - \frac{\alpha v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{g} \\
x_0 &\approx \operatorname{sen}2\theta\left[\frac{v_0^2}{g} - \frac{\alpha v_0^2}{g}\right] \\
x_0 &\approx \operatorname{sen}2\theta\left[\frac{v_0^2 - \alpha v_0^2}{g}\right]
\end{aligned}$$

Entonces

$$\boxed{\theta \approx \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x_0 g}{v_0^2(1-\alpha)}} \tag{3.33}$$

[5] Hemos despreciado la contribución de θ de este término, debido a que como la ecuación (3.31) es trascendental para θ, solo podemos hallar valores aproximados para el mismo.

De nuevo, el otro ángulo puede obtenerse restando $\pi/2$ menos (3.33) lo cual completa la solución a la segunda parte del problema.

$$\boxed{\theta \approx \frac{1}{2}\left[\pi - \operatorname{arc\,sen}\frac{x_0 g}{v_0^2(1-\alpha)}\right]} \tag{3.34}$$

4. Problema 4

Dos partículas de masa m_1 y m_2 están amarradas por una cuerda sin masa de longitud l y descansan sobre una mesa sin fricción. En el instante t=0 la cuerda está totalmente desplegada y las masas están en reposo; en ese instante se le aplica un impulso a la partícula m_2 de tal suerte que ésta adquiere una velocidad v_0 perpendicular a la cuerda.

a) Describa el movimiento después de haber aplicado el impulso

b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda durante el movimiento?

<u>Solución:</u>

Para tener una mejor intuición del problema podemos representarlo como en la figura (2)

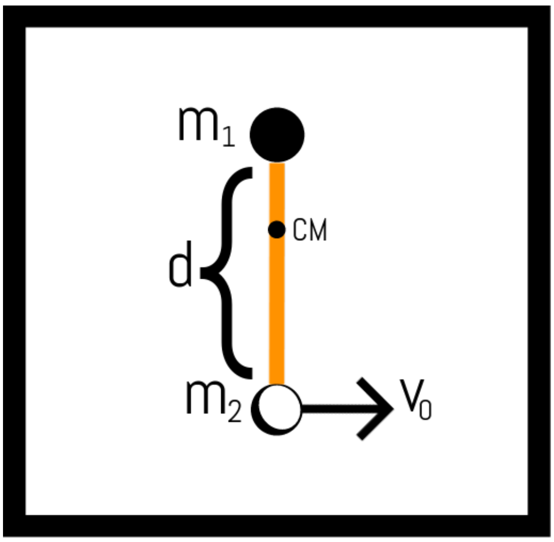

Figura 2: Problema 4. Hemos hecho un pequeño cambio de notación en que $l = d$

Donde consideramos que vemos de arriba de la mesa el sistema, como dice el problema se le aplica una fuerza perpendicular a la cuerda a la masa 2 la cual se puede observar en la figura. Consideraremos un caso general en el que las masas de las partículas no necesariamente son las mismas, y trataremos el caso utilizando la formulaciónn del centro de masa, que hemos ubicado en un punto arbirtrario entre las partículas, y obviamente en la línea que las une que igual a la cuerda extendida.

Debido a la simetría del problema, se puede ver que el movimiento que ocurrirá luego de que se le aplica el impulso a la partícula m_2 será un movimiento circular uniforme, con velocidad igual a la velocidad del centro de masa, que podemos obtener fácilmente. El radio del centro de masa se puede obtener con la ecuación

$$R_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m1 + m2} \tag{4.1}$$

Escogeremos unas coordenadas que nos facilitarán el problema, en las cuales el eje X, lo pondremos sobre la partícula m_1, por lo tanto $r_1 = 0$, luego

$$R_{CM} = \frac{m_2 r_2}{m1 + m2} \tag{4.2}$$

Entonces la velocidad del centro de masa será

$$\boxed{V_{CM} = \frac{m_2 \dot{r_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}} \tag{4.3}$$

La tensión de la cuerda, debido al tratamiento de movimiento circular uniforme que le hemos dado al problema será igual a la fuerza centrípeta, la cual debería ser la misma no importa si la calculemos utilizando la fuerza centrípeta que sentirá m_1 o m_2, demostremos esto.

La tensión de la cuerda en la partícula m_2 será

$$\begin{aligned} T = F_c = \frac{m_2 v_2'^2}{r_2'} &= \frac{m_2 (v_0 - V_{CM})^2}{d - \frac{m_2 d}{m1+m2}} = \frac{m_2 (v_0 - \frac{m_2 v_0}{m_1+m_2})^2}{d - \frac{m_2 d}{m1+m2}} \\ &= \frac{\frac{m_2 m_1^2 v_0^2}{(m_1+m_2)^2}}{\frac{d m_1}{m_1+m2}} \\ \therefore T &= \frac{m_1 m_2}{d(m_1 + m_2)} v_0^2 \end{aligned}$$

Si definimos la masa reducida del sistema como $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, entonces tenemos que

$$\boxed{T = \frac{\mu}{d} v_0^2} \tag{4.4}$$

Nuestro tratamiento será correcto si encontramos que la tensión de la cuerda en ambas masas es la misma, por lo tanto para m_1

$$T = \frac{m_1 v_1'^2}{r_1'} = \frac{m_1 (0 - V_{CM})^2}{\frac{m_2}{m_1+m_2}} = \frac{m_1 (\frac{m_2 v_0}{m1+m2})^2}{\frac{m_2}{m_1+m_2}} = \frac{m_1 m_2 v_0^2 (m_1 + m2)}{d m_2 (m_1 + m_2)^2}$$

$$\boxed{\therefore T = \frac{m_1 m_2}{d(m_1 + m_2)} v_0^2 = \frac{\mu}{d} v_0^2} \tag{4.5}$$

Entonces vemos que la tensión será igual si definimos la masa reducida μ de nuevo, lo cual completa la demostración y la solución al problema.

5. Problema 5

Una partícula de masa m_1 tiene una energía cinética $T_1 i$ y choca elásticamente con otra de masa m_2. La segunda partícula sale disparada en una dirección que hace un ángulo θ con la dirección del movimiento inicial de la primera partícula. Encuentre la energía cinética $T_2 f$ con la que sale la segunda partícula. Muestre que esta energía es máxima si el choque es de frente.

Solución:

Para la resolución de este problema se seguirán las convenciones y notación de [1] y algunos otros autores para el tratamiento de las colisiones elásticas. Según el enunciado del problema puede asumirse que la segunda partícula estaba en reposo, mientras que la primera va directo a chocarla. Esto simplifica un poco los cálculos y ecuaciones pero la extensión a un choque donde ambas partículas tienen una velocidad inicial no es muy engorroso.

Usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{Masa de la partícula en movimiento} \\ m_2 &= \text{Masa de la partícula en reposo} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Las velocidades iniciales y finales de las partículas la denotaremos como

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{Velocidad inicial de } m_1 \\ v_1 &= \text{Velocidad final de } m_1 \\ u_2 &= 0 \\ v_2 &= \text{Velocidad final de} m_2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para las energías cinéticas,

$$\begin{aligned} T_{0i} &= \text{Energía cinética total inicial} \\ T_{0f} &= \text{Energía cinética total final} \\ T_{1i} &= \text{Energía cinética inicial de } m_1 \\ T_{2i} &= \text{Energía cinética inicial de } m_2 \\ T_{1f} &= \text{Energía cinética final de } m_1 \\ T_{2f} &= \text{Energía cinética final de } m_2 \end{aligned}$$

Y para los momenta,

$$
\begin{aligned}
P_{0i} &= \text{Momentum total inicial}\\
P_{0f} &= \text{Momentum total final}\\
p_{1i} &= \text{Momentum inicial de } m_1\\
p_{2i} &= \text{Momentum inicial de } m_2\\
p_{1f} &= \text{Momentum final de } m_1\\
p_{2f} &= \text{Momentum final de } m_2
\end{aligned}
$$

En las colisiones elásticas el momentum y la energía cinética se conservan, lo cual nos será de mucha utilidad para los cálculos posteriores. Hagámos un breve análisis de lo que ocurrirá luego de la colisión. La masa $m1$ se moverá con una velocidad v_1, haciéndo un ángulo ψ con el eje X, y la masa m_2 se moverá con una velocidad v_2 haciéndo un ángulo θ con el eje X (ver figura (3). La conservación del momentum lineal y la energía requieren que

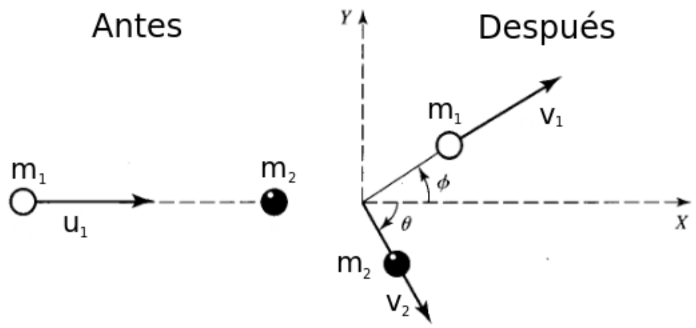

Figura 3: Problema 5

$$\mathbf{P}_{0i} = \mathbf{P}_{0f} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T}_{0i} = \mathbf{T}_{0f} \tag{5.3}$$

Desglosando (5.3) tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} &= \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}\\
\mathbf{T}_{1i} + \mathbf{T}_{2i} &= \mathbf{T}_{1f} + \mathbf{T}_{2f}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{1i} &= m_1 u_1, \qquad \mathbf{p}_{2i} = 0, \qquad \mathbf{p}_{1f} = m_1 v_1, \qquad \mathbf{p}_{2f} = m_2 v_2\\
\mathbf{T}_{1i} &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2, \qquad \mathbf{T}_{2i} = 0, \qquad \mathbf{T}_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, \qquad \mathbf{T}_{2f} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2
\end{aligned}
$$

Utilizando estas expresiones podemos escribir 5.4 en forma de componentes en el eje X y Y, con la ayuda de la figura (3) como

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\phi + m_2 v_2 \cos\theta \tag{5.5}$$

$$0 = m_1 v_1 \sin\phi + m_2 v_2 \sin\theta \tag{5.6}$$

Y para las energías

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{5.7}$$

En la mayoría de las situaciones, m_1, m_2 y u_1 son conocidas, mientras que v_1, v_2, θ y ϕ son cantidades desconocidas. Entonces tenemos tres ecuaciones (5.5, 5.6, 5.7) y cuatro variables desconocidas. Pero podemos eliminar una de esas cuatro incógnitas de manera simple, y encontrar relaciones para las otras tres. Lo haremos para ϕ, y encontraremos relaciones para v_1, v_2 y θ. Comenzamos por escribir las ecuaciones (5.5) y (5.6) como

$$\begin{aligned} m_1 u_1 - m_1 v_1 \cos\phi &= m_2 v_2 \cos\theta \\ m_1 v_1 \operatorname{sen}\phi &= m_2 v_2 \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado estas ecuaciones y las sumamos obtenemos

$$\begin{gathered} m_1^2 u_1^2 - 2m_1^2 u_1 s v_1 \cos\phi + m_1^2 v_1^1 \cos^2\phi + m_1^2 v_1^2 \operatorname{sen}^2\phi = m_2^2 v_2^2 \cos\theta + m_2^2 v_2^2 \operatorname{sen}\theta \\ m_1^2 u_1^2 - 2m_1^2 v_1 u_1 \cos\phi + m_1^2 v_1^2 = m_2^2 v_2^2 \end{gathered} \tag{5.8}$$

Si dividimos por m_1^2 nos queda

$$u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\phi = \left(\frac{m2}{m1}\right)^2 v_2^2 \tag{5.9}$$

Y de la ecuación (5.7) obtenemos

$$v_2^2 = \frac{m1}{m2}(u_1^2 - v_1^2) \tag{5.10}$$

Sustituyendo el valor de v_2^2 de (5.10) en (5.9), obtenemos

$$u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\phi = \left(\frac{m2}{m1}\right)^2 \frac{m1}{m2}(u_1^2 - v_1^2) \tag{5.11}$$

Y luego de un poco de trabajo algebraico descubrimos que esta es una ecuación cuadrática en v_1/u_1 que al resolver nos da las siguientes raíces

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}\right)}\right] \tag{5.12}$$

Con esta expresión podemos entonces dar respuesta completa al problema. Primero para encontrar la energía cinética de m_2 solo debemos sustituir (5.10) en la ecuación para T_{2f}, entonces

$$T_{2f} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{m1}{m2}(u_1^2 - v_1^2) \tag{5.13}$$

$$\boxed{T_{2f} = m_1(u_1^2 - v_1^2)} \tag{5.14}$$

Esta energía es máxima claramente cuando $\cos\phi$ en (5.12) es igual a 1, lo que corresponde a una colisión de frente, que es justamente lo que nos piden demostrar, en ese caso las velocidades finales de m_1 y m_2 son

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m2} u_1 \\ v_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Y en ese caso la energía cinética de m_2 tendría la siguiente expresión

$$T_{2f_{max}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \right)^2 \tag{5.16}$$

Entonces,

$$\boxed{T_{2f_{max}} = \frac{2m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} u_1^2} \tag{5.17}$$

6. Problema 6

Un objeto de masa m se encuentra en el ecuador de la Tierra. ¿Qué velocidad debe tener para que su peso y la fuerza de Coriolis sean iguales?

Solución:

El efecto de la rotación de la Tierra sobre los experimentos de laboratorio es muy pequeño, pero sin embargo se puede hacer un tratamiento del problema planteado considerandolo como un problema de movimiento con respecto a unsistema de coordenadas en rotación. No demostraremos todas las ecuacioens debido a que se haría muy larga la solución, pero podemos comenzar por escribir la siguiente ecuación,

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - 2m(\omega \times \mathbf{v}') - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \tag{6.1}$$

Donde $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = d\mathbf{p}'/dt$ es la fuerza que mediría un observador S' situado en un sistemas de coordenadas en rotación, $\mathbf{F}$ es la fuerza que mediría un observador en reposo en un sistema inercial. Los dos términos resultantes son las conocidas *fuerzas de inercia*:

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{i}} = -2m(\omega \times \mathbf{v}') - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') \tag{6.2}$$

Donde recordamos que ω es la velocidad angular del sistema en rotación. Es evidente que cuando $\omega = 0$ entonces S' no gira y ambos observadores deberían concordar en las fuerzas. Estas dos fuerzas tienen nombre, el segundo de los términos recibe el nombre de fuerza centrífuga, aunque no diremos mucho más de ella, cabe resaltar que esta siempre dirigida hacia afuera, es siempre perpendicular al eje de rotación y es proporcionala ω^2 y a la deistancia al eje.

La fuerza que nos interesa para resolver este problema es el primer término de (6.2), $-2m(\omega \times \mathbf{v}')$, llamada *fuerza de Coriolis*, esta como se puede ver depende de la velocidad en S', pero no de la posición. La fuerza de Coriolis es perpendicular a ω y a $\mathbf{v}'$. En el problema se nos pregunta qé velocidad debe tener un objeto de masa m para que su peso y la fuerza de Coriolis sean iguales. Como hemos dicho el efecto de la fuerza Coriolis sobre el movimiento de los cuerpos en la Tierra suele ser muy pequeño. Debido a la forma y estructura de la ecuación para la fuerza Coriolis podemos predecir que el objeto se deberá mover relativamente rápido para que su peso y la fuerza de Coriolis sean iguales, porque la velocidad angular de la tierra es de unos 2π radianes por día sideral (23 h, 56 m, 4.1 s) lo que da un valor aproximado de $7{,}3 \times 10^{-}5$ rad/s. El hecho de que el cuerpo está en el ecuador facilita un poco el cálculo ya que no hay que considerar las correcciones para la fuerza Coriolis en el hemisferio norte o sur de la Tierra.

Entonces lo que requerimos es que para el objeto de masa m se cumpla

$$-2m(\omega \times \mathbf{v}') = -m\mathbf{g} \tag{6.3}$$

De (6.3), la velocidad que debe tener el cuerpo es de (asumiendo que se encuentra a nivel del mar y una distribución homogénea del campo gravitacional que lo afecta)

$$\boxed{v' = \frac{g}{2\omega} = \frac{9{,}8m/s^2}{7{,}3 \times 10^{-}5rad/s} = 6{,}72 \times 10^5 m/s} \tag{6.4}$$

7. Problema 7

La hélice de un avión tiene un momento de inercia I y el motor le imprime una torca

$$N_m = N_0(1 + \alpha \cos \omega t) \qquad (\alpha \ll 1))$$

La resistencia del aire le imprime una torca

$$N_f = -b\dot{\theta}$$

¿Cuál es el estado estacionario del movimiento de la hélice?

Solución:

Nos encontramos con un caso en el que podemos asumir que la hélice del avión es un cuerpo rígido en rotación, debido a que mediante esta suposición podremos utilizar las ecuaciones clásicas para cuerpos rígidos en rotación y se simplifica mucho el problema. Claramente esta es una descripción idealizada de la hélice porque no existe un cuerpo de tamaño físico que sea estríctamente rígido, debido a que se deformará (así sea en cantidades muy pequeñas) bajo la acción de fuerzas aplicadas en él. Sin embargo como veremos este tratamiento será muy útil para describir el movimiento, y las desviaciones con respecto al sistema físico real no son tan significantes.

Recordemos que para un cuerpo rígido el momentum angular se peude expresar como

$$L = I\omega = I\dot{\theta} \tag{7.1}$$

Donde I es conocido como el momento de inercia, ω es la velocidad angular del cuerpo y, por consideraciones de simetría en el tratamiento del cuerpo rígido podemos ver que $\dot{\theta} = \omega$[6]. Por otra parte, la tasa de cambio del momentum angular de cualquier sistema, es igual al torque total externo τ. Entonces para el caso en que estamos tratando,

$$\sum_i \tau_i = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta} = N_0(1 + \alpha \cos \omega t) - b\dot{\theta} \tag{7.2}$$

Podemos reescribir (7.2) como

$$I\ddot{\theta} - b\dot{\theta} = N_0(1 + \alpha \cos \omega t) \tag{7.3}$$

Donde se puede ver que tenemos una ecuación diferencial lineal no homogénea para θ. Seguiremos el método clásico de solución en el cual se encuentra una solución para la ecuación homogénea (haciendo cero el lado derecho de (7.3) y una solución particular tomando en cuenta la forma de la parte que hace a la ecuación no homogénea, la solución final será una suma de la ecuación homogénea más la particular[7].

La ecuación diferencial homogénea a resolver es,

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = 0 \tag{7.4}$$

Si suponemos que la solución tiene la forma

$$\theta = \mathrm{e}^{rt}$$

y sus derivadas

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= r\mathrm{e}^{rt} \\ \ddot{\theta} &= r^2\mathrm{e}^{rt} \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} Ir^2\mathrm{e}^{rt} + br\mathrm{e}^{rt} &= 0 \\ (Ir^2 + br)\mathrm{e}^{rt} &= 0 \qquad \text{pero} \qquad \mathrm{e}^{rt} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore Ir^2 + br = 0 \Rightarrow r(Ir + b) = 0$$

Para esta ecuación auxiliar, es fácil ver que las raíces son

$$\begin{aligned} r_1 &= 0 \\ r_2 &= -\frac{I}{b} \end{aligned}$$

[6] Este tratamiento es el que se encuentra en la mayoría de los libros de mecánica clásica [1, 4], y simplifica mucho las ecuaciones diferenciales e interpretación física de la rotación del cuerpo

[7] Esto es posible debido a que la ecuación diferencial que resolveremos es lineal

Por lo tanto la solución homgénea es

$$\theta_h = Ae^{0t} + Be^{-\frac{I}{b}t} = A + Be^{-\frac{I}{b}t} \tag{7.5}$$

Para encontrar la solución partícular utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados, y supondremos que la solución tiene la forma

$$\theta_p = C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t + Et$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_p &= -C\omega\operatorname{sen}\omega t + D\omega\cos\omega t + E \\ \ddot{\theta}_p &= -C\omega^2\cos\omega t - D\omega^2\operatorname{sen}\omega t \end{aligned} \tag{7.6}$$

Si sustituimos (7.6) en (7.3), nos queda

$$\begin{aligned} -IC\omega^2\cos\omega t - ID\omega^2\operatorname{sen}\omega t + bC\omega\operatorname{sen}\omega t - bD\omega\cos\omega t - bE &= \\ N_0 + N_0\alpha\cos\omega t & \\ \cos\omega t[-IC\omega^2 - bD\omega] + \operatorname{sen}\omega t[-ID\omega^2 + bC\omega] - bE &= \\ N_0 + N_0\alpha\cos\omega t & \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -IC\omega^2 - bD\omega &= N_0\alpha \\ -ID\omega^2 + bC\omega &= 0 \\ -bE &= N_0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene directamente que $E = -N_0/b$, y para C y D,

$$\begin{aligned} C &= \frac{ID\omega^2}{b\omega} \\ \therefore C &= \frac{ID\omega}{b} \end{aligned}$$

luego podemos usar el valor de C para obtener D

$$
\begin{aligned}
D &= -\frac{N_0\alpha + IC\omega^2}{b\omega} \\
D &= -\frac{N_0\alpha + I\frac{ID\omega}{b}\omega^2}{bw} \\
D &= -\frac{N_0\alpha}{b\omega} + \frac{I^2 D\omega^3}{b^2\omega} \\
D &= -\frac{N_0\alpha}{b\omega} + \frac{I^2 D\omega}{b^2} \\
D - \frac{I^2 D\omega}{b^2} &= -\frac{N_0\alpha}{b\omega} \\
D\left(1 - \frac{I^2\omega}{b^2}\right) &= -\frac{N_0\alpha}{b\omega} \\
D\left(\frac{b^2 - I^2\omega}{b^2}\right) &= -\frac{N_0\alpha}{b\omega} \\
D &= -\frac{N_0\alpha}{b\omega} \div \left(\frac{b^2 - I^2\omega}{b^2}\right) \\
\therefore D &= -\frac{N_0\alpha b}{\omega(b^2 - I\omega^2)}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$C = -\frac{I\omega}{b}\frac{N_0\alpha b}{\omega(b^2 - I\omega^2)} \Rightarrow C = -\frac{IN_0\alpha}{b^2 - I\omega^2}$$

Entonces la solución particular es igual

$$\theta_p = -\frac{IN_0\alpha}{b^2 - I\omega^2}\cos\omega t - \frac{N_0\alpha b}{\omega(b^2 - I\omega^2)}\operatorname{sen}\omega t - \frac{N_0}{b} \tag{7.7}$$

Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial es

$$\theta = A + B\mathrm{e}^{-\frac{I}{b}t} - \frac{IN_0\alpha}{b^2 - I\omega^2}\cos\omega t - \frac{N_0\alpha b}{\omega(b^2 - I\omega^2)}\operatorname{sen}\omega t - \frac{N_0}{b} \tag{7.8}$$

El movimiento estacionario de la hélice es el que ocurrirá cuando el factor $\mathrm{e}^{-\frac{I}{b}t}$, se haga casi cero, lo cual ocurrirá mientras el tiempo avance, debido a que es un factor de decaimiento exponencial, entonces cuando $\mathrm{e}^{-\frac{I}{b}t} \approx 0$, el movimiento de la hélice podrá ser descrito por el siguiente θ,

$$\boxed{\theta = A - \frac{IN_0\alpha}{b^2 - I\omega^2}\cos\omega t - \frac{N_0\alpha b}{\omega(b^2 - I\omega^2)}\operatorname{sen}\omega t - \frac{N_0}{b}} \tag{7.9}$$

El cálculo de las constantes de integración podrá hacerse si se conocen las condiciones iniciales para la ecuación diferencial (7.3).

8. Problema 8

8.- Dos cuerpos rígidos extensos (no puntuales) chocan elásticamente. ¿Es posible que después del choque ambos queden únicamente con energía cinética de rotación en torno a sus centros de masa?. De ser así de un ejemplo.

Solución:

Cuando chocan dos cuerpos rígidos, suelen intercambiar cantidad de movimiento y momentum cinético. En dicho intercambio se conservan la cantidad de movimiento total y si es central la fuerza de intercambio entre los cuerpos, el momentum cinético total. Debido a que somos enfrentados en el problema con un choque elástico, se conservará también la energía cinética total del sistema.

Para demostrar la posibilidad del enunciado consideremos el caso de dos barras moviéndose, ambas de masa m y longitud d, la una hacia la otra, ambas con velocidad del centro de masa V, y chocan justo en el borde quedando unidas (tenían algún tipo de pegamento en los bordes, o gancho), entonces debido a que debe conservarse el momentum lineal, y el momento cinético , estos deben ser iguales antes y después del choque, pero como el choque es tal que después que queden unidas la barras, se muevan la una en dirección opuesta a la otra y por las condiciones iniciales de cantidad de movimiento para cada barra, la energía cinética de rotación será tal que solo dependerá del centro de masa del sistema. Por lo tanto se demuestra en términos cualitativos que si es posible el enunciado del problema. Debajo podemos ver una ilustración del ejemplo planteado.

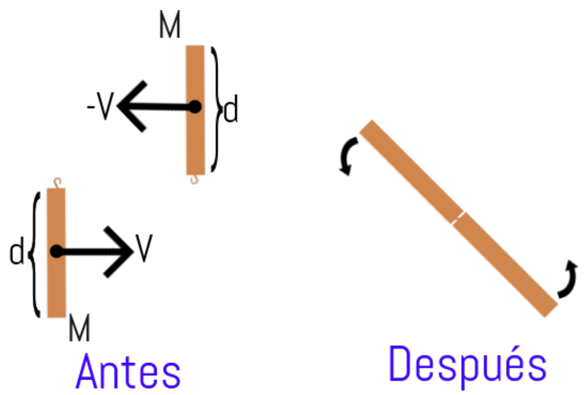

Figura 4: Problema 8

9. Problema 9

Un meteorito choca con la Tierra en el Polo Norte haciendo un ángulo θ con el eje de la tierra. El meteorito tiene una masa igual a $10^{-}17$ de la masa de la Tierra y llega con la velocidad de escape. ¿En qué forma se verá perturbado el movimiento de rotación de la Tierra? (Desprecie el cambio en el momento de inercia de la Tierra debido a la incrustación del meteorito).

Solución:

El problema al cual nos vemos enfrentados a resolver podemos imaginarlo representado por la figura (5)

Figura 5: Problema 9

Consideraremos a la Tierra como un cuerpo rígido ideal, lo cual simplificará grandemente la solución del problema. Como hemos establecido anteriormente no existe un cuerpo rígido con dimensiones físicas reales, y ciertamente la tierra no es uno de ellos, pero la simplificación nos permitirá encontrar relaciones que dan una gran idea de cómo se comportará un choque realista. De la teoría de cuerpos rígidos sabemos que en ausencia de un impulso exterior, el momentum cinético y desde luego, la cantidad de movimiento permanecen constantes. Por lo que las variaciones de la cantidad de movimiento y del momentum cinético total se deberán únicamente a un impulso exterior.

Supongamos entonces que el choque del meteorito es tal que le aplica un impulso instantáneo $\mathbf{J}$ a la tierra. La variación de la cantidad de movimiento $\Delta\mathbf{P} = \mathbf{J}$ es independiente del punto de aplicación, pero la variación del momentum cinético depende del punto de aplicación. Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de la Tierra, que consideraremos que es el vector de posición del centro de masa de la Tierra, y ella es quien recibe el impulso, entonces la variación del momentum cinético[8] total de la tierra será

$$\Delta\mathbf{L_t} = \mathbf{R_t} \times \mathbf{J} \tag{9.1}$$

Pero debido a que $\Delta\mathbf{P} = \mathbf{J}$, entonces podemos reescribir (9.1) como

$$\Delta\mathbf{L_t} = \mathbf{R_t} \times \Delta\mathbf{P} \tag{9.2}$$

Debido a que estamos tratando al impulso $\mathbf{J}$ como instantáneo y que consideramos que la cantidad de movimiento de la tierra permanece constante luego de la aplicación del mismo, entonces $\Delta\mathbf{P} = m_m v_m$, donde m_m es la masa del

[8]Cuando hablamos de momentum cinético nos referimos al momentum angular, pero en la notación clásica de cuerpos rígidos es más común hablar de momentum cinético.

meteorito y v_m es la velocidad del meteorito. Sustituyendo esto en (9.2) nos queda

$$\boxed{\mathbf{\Delta L_t} = \mathbf{R_t} \times m_m \mathbf{v_m} = R_t m_m v_m \operatorname{sen}\theta} \tag{9.3}$$

La ecuación (9.3) nos da una expresión de cómo se verá perturbado el movimiento de rotación de la tierra luego del choque del meteorito, lo cual es lo que pide el problema. Claramente llegar a esta ecuación fue sencillo, debido a que el enunciado del problema indica que se puede despreciar el cambio de momento de inercia de la Tierra debido a incrustación el meteorito. Podemos ponerle números a la ecuación (9.3) y ver cuánto es modificado el momentum cinético de la Tierra, sustituyendo tenemos que

$$\boxed{\mathbf{\Delta L_t} = (6,371 \times 10^6 m)(5,972 \times 10^7 kg)(11,2 \times 10^3 ms^{-1}) \operatorname{sen}\theta} \tag{9.4}$$

La ecuación (9.4) es la solución final al problema, donde solo nos queda como incógnita el valor del ángulo θ que hace el meteorito al chocar, pero podemos ver claramente que si el choque es tal que $\operatorname{sen}\theta = 1$, entonces será máximo el cambio, dando un cambio de aproximadamente $\boxed{4,26 \times 10^{18} Js}$, lo cual sería el cambio en el momentum angular de la Tierra. Es un resultado algo significativo debido a que la masa del meteorito era relativamente grande y llegó con una gran velocidad, pero igual no es lo suficiente para alterar notablemente el movimiento de rotación de la Tierra[9],cabe destacar que el análisis de unidades es correcto debido a que el momentum angular se expresa en Joules por segundo, y es exactamente lo que hemos obtenido. El ángulo que hace el impacto sea máximo es entonces de 90°, y el cambio será cero si el ángulo es de 0°.

10. Problema 10

Uno de los postulados básicos de la mecánica clásica es el de la relatividad galileana, nos dice que la mecánica clásica debe ser invariante ante las transformaciones de Galileo, esto es las leyes de la física básica deben ser las mismas en todos los sistemas inerciales de referencia y la transformación entre un sistema inercial y otro es la de Galileo ($\hat{r}' = \hat{r} - \hat{v}'t$ donde $\hat{v}'$) es la velocidad constante entre los dos sistemas de referencia).

- En la formulación de Newton de 1687 se consideraba la existencia de un sistema absoluto de referencia que permitía definir el estado de reposo de un cuerpo, Newton lo veía como un sistema anclado a las estrellas fijas o uno muy cercano a este. La visión moderna se desarrolló en el siglo XIX, elimina la idea del reposo absoluto y hace uso del postulado que mencionamos. Describa brevemente el cambio entre la visión estrictamente newtoniana y la del siglo XIX.

- Muestre, a manera de ejemplo del cumplimiento del postulado anterior, que las ecuaciones de movimiento del oscilador armónico tridimensional son invariantes ante las transformaciones de Galileo.

[9]Esto puede comprobase fácilmente si se calcula el momentum de rotación de la Tierra.

Solución:

La mecánica newtoniana es la expresión del pensamiento de siglos de avances teóricos en el estudio del movimiento. Newton, basado en investigaciones previas de Copérnico, Galileo, Brahe, Kepler y algunos otros grandes, junto con sus concepciones propias del espacio y tiempo, formuló una teoría del movimiento de los cuerpos que desafiaba a las conocidas teorías griegas que permearon el pensamiento humano por muchos siglos. En sus *Principia* Newton establece con suma claridad sus pensamientos sobre la estructura del tiempo, el espacio y el movimiento. Para el el tiempo era absoluto, verdadero y matemático, y por su naturaleza fluye siempre uniformemente, así sea perturbado por algún agente externo. El espacio también es absoluto, y siempre se mantiene similar e inmóvil así sea perturbado por un agente externo. El movimiento para Newton era absoluto, y era la traslación de un cuerpo de un lugar absoluto a otro del espacio.

Newton en sus *Principia* también establece que son los tiempos, espacios y movimientos relativos los que usamos en el día a día para hacer mediciones, junto con una serie de ejemplos para probar sus puntos. Claramente "relativo" hacía alusión al principio de relatividad galileana, del cual Newton se basó fuertemente para formular su teoría, debido a que en muchos aspectos, la mecánica galileana encaminó a la newtoniana, claro con algunos errores que Galileo cometió, y que Newton solventó.

La mecánica newtoniana definió una serie de marcos de referencia, los llamados marcos de referencia inerciales, en el cual las leyes de la naturaleza toman la forma dada en los *Principia.* La formulación de las ecuaciones de movimiento con el principio de relatividad galileana se dejan para el siguiente problema para no alejarnos de la situación que discutimos. No hay que convencer a nadie de la importancia y utilidad de la mecánica newtoniana, nos ha permitido dilucidar cuestiones que fueron oscuras por milenios y permitió el avance de la ciencia y tecnología modernas. Sin embargo en su momento, fue rechazada por algunos importantes filósofos de la época. Su mayor oponente Leibniz, argumentaba que no había una necesidad filosófica para ninguna concepción del espacio, aparte del de la relación de objetos materiales. Este tema fue debatido por filósofos y matemáticos de la época, unos a favor como Euler, Kant y otros en contra como Berkeley y claro el mismo Leibniz. Sin embargo es considerado que el primer ataque constructivo en la noción de Newton del espacio absoluto fue la de el filósofo austríaco Ernst Mach, con el conocido principio de Mach, que puede parafrasearse como que hay una influencia de "la masa de la Tierra, y los otros cuerpos celestes" que determinan los marcos de referencia inerciales.

Sin embargo, la teoría que comenzó a marcar diferencia (no al comienzo) en el marco de la mecánica newtoniana, fue la electrodinámica presentada por Maxwell en 1864, la cual claramente no satisfacía el principio de relatividad galileana. Por una parte, las ecuaciones de Maxwell predecían que la velocidad de la luz en el vacío eran una constante universal c, pero si eso es verdad en un sistema de coordenadas (x^i, t), entonces no será cierto en un sistema de coordenadas en movimiento (x'^i, t') en el cual se definen las ecuaciones de transformación galileanas. Maxwell, fiel creyente de la mecánica newtoniana, creía que las ondas electromagnéticas viajaban por un medio, el éter luminoso, para que sus ecuaciones se cumplieran solo en un caso limitado de los marcos inerciales galileanos, , aquellos en los cuales las coordenadas del marco estuvieran en reposo con respecto al éter. Muchas mediciones de la velocidad de la tierra con respecto a la éter fallaron, el más importante de ellos fue el de Michelson y Morley, que demostraron en 1887 que la velocidad de la luz es la misma, con un error de 5 km/s, para luz viajando en la dirección del movimiento orbital de la tierra y el transversal a él.

La persistente falla experimental en descubrir los efectos del movimiento de la tierra a través del éter, llevaron a teóricos, entre ellos George Fitzgerald, Hendrik Lorentz y Jules Poncairé, a sugerir razones por la que los efectos del "cambio con respecto al éter" no eran observables. Poincaré en particular tuvo unas ideas con implicaciones revolucionarias sobre las implicaciones de esto en la mecánica y algunos historiadores dan el crédito de la relatividad especial a Poncairé y Lorentz. Pero es seguro decir que una solución comprensiva del problema de relatividad en mecánica y electrodinámica, fue dada por primera vez por Albert Einstein en 1905. Einstein propuso que la transformación galileana debía ser reemplazada por una transformación diferente de 10 parámetros del espacio-tiempo, llamadas las transformaciones de Lorentz, que dejaban a las ecuaciones de Maxwell y a la velocidad de la luz invariantes.

Las ecuaciones de Newton no son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz, por lo tanto Einstein tuvo que modificar las ecuaciones de movimiento para que fueran invariantes bajo las mismas. La nueva física, que consistía en la electrodinámica de Maxwell, y la mecánica einsteniana, satisfacían ahora un nuevo principio de relatividad, el principio de relatividad especial, que dice que todas las ecuaciones físicas deben ser invariantes bajo las transformaciones de Lorentz. Esta nueva mecánica abolía el concepto de espacio, tiempo y movimiento absoluto, el del éter y propuso una nueva forma de entender las leyes y estructura del universo.

Para la segunda parte del problema nos piden que demostremos que las ecuaciones de movimiento del oscilador armónico tridimensional son invariantes ante las transformaciones de Galileo.

Comencemos por escribir las ecuaciones para un oscilador armónico en tres dimensiones. Las fuerzas que actúan sobre cada componente de fuerza, son función únicamente de la coordenada correspondiente. Asumiremos que no hay fuerza de amortiguamiento ni conducción y que las constantes de los resortes son k_x, k_y y h_z. Podemos representar el problema como en la figura (6).

Las ecuaciones que describen los movimientos del oscilador armónico tridimensional son

$$
\begin{aligned}
F_x &= m\ddot{x} - k_x x \\
F_y &= m\ddot{y} - k_y y \\
F_z &= m\ddot{z} - k_z z
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

Para poder hacer la demostración debemos considerar que dos observadores harán mediciones sobre el oscilador, uno en el sistema S, y otro en el sistema

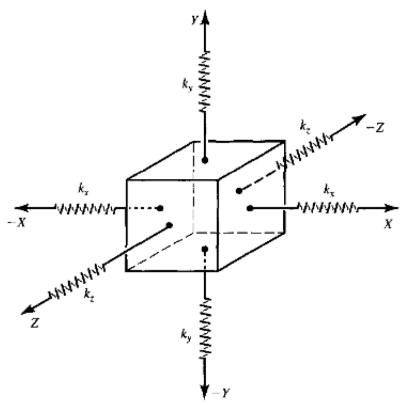

Figura 6: Problema 10. Oscilador armónico en tres dimensiones.

S', que se mueve con una velocidad constante v, con respeto al sistema S a lo largo de los ejes $X - X'$. Para describir un evento (fenómeno físico) en un sistema inercial, un observador debe especificar, en adición a las tres coordenadas espaciales, una cuarta coordenada, el tiempo. De acuerdo con la noción primero galileana y luego newtoniana del tiempo, esta cuarta coordenada es una cantidad absoluta independiente del marco de referencia. Esto implica que $t = t'$, y lleva a la invariancia galilana de las leyes de la mecánica newtoniana bajo las transformaciones galileanas que podemos escribir como:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{10.2}$$

De estas ecuaciones notamos que como $t = t'$ entonces los operadores d/dt y d/dt' son idénticos.

Luego,

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \qquad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \tag{10.3}$$

y

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{10.4}$$

Entonces demostramos que las aceleraciones son las mismas vistas en ambos sistemas. Hay que destacar que los términos individuales, pueden no ser invariantes, pero cada término se transforma de acuerdo al mismo esquema. Cuando esto ocurre decimos que los términos son covariantes.

Con la ecuación (10.4) podemos entonces demostrar que las fuerzas que actúan sobre la partícula, en cada una de las direcciones de x, y y z, será la misma vista desde ambos sistemas. Con lo que queda terminada la demostración.

Referencias

[1] S. Thronton y J. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, Thomson Brooks/Cole, 5ta edición, 2004.

[2] J. Taylor, *Classical mechanics*, University Science Books, 2005.

[3] D. Zill y W. Wright, *Differential equations with Boundary-Value Problems*, Brooks/Cole, 8va edición, 2013.

[4] A. Arya, *Introduction to classical mechanics*, Pretince-Hall, 1era Edición, 1990.

[5] G. Fowles y G. Cassiday, *Analytical Mechanics*, Thomson Brooks/Cole, 7ma edición, 2005.