

Mecánica Clásica Tarea # 4

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

1. Problema 1

Una partícula de masa m_1 se mueve a lo largo de una recta, otra de masa m_2 lo hace a lo largo de otra recta perpendicular a la primera. Las partículas interactúan entre sí por medio de la gravedad. Encuentra las ecuaciones de movimiento. Usando una computadora trace una trayectoria en el espacio de configuración para algunas masas y condiciones iniciales.

Suponga que $m_2 = m_1 + \epsilon$, donde ϵ es una cantidad pequeña. Encuentre las ecuaciones de movimiento a primer orden en ϵ . Usando una computadora trace una órbita genérica para este caso.

Solución:

Para la primera parte del problema, desarrollaremos las ecuaciones de movimiento para un caso general, y trazaremos las trayectorias en el espacio de configuración usando la computadora. Luego aplicaremos la condición de que $m_2 = m_1 + \epsilon$ y encontraremos las ecuaciones de movimiento a primer orden para ϵ .

En la figura de abajo se muestra la esquematización del problema que tratamos,

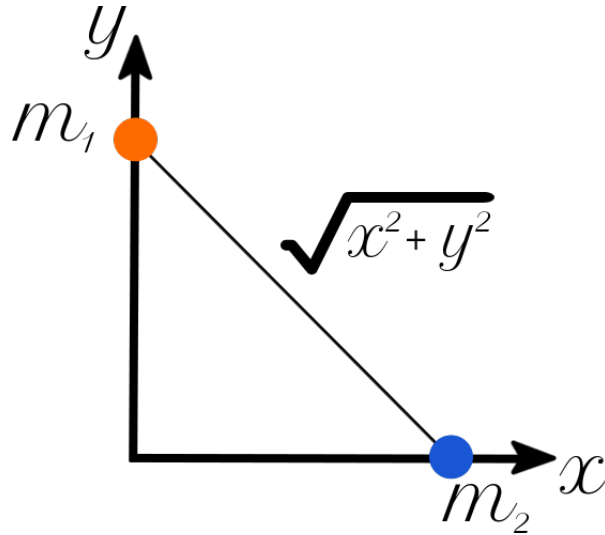


Figura 1: Espacio de configuración del problema general para dos partículas m_1 y m_2 , ambas constreñidas a moverse en una recta, la una perpendicular a la otra.

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

Debido a que ambas partículas están constreñidas a moverse cada una en una recta, el espacio de configuración será el producto cartesiano de dos rectas, por lo tanto tendrá dos dimensiones. Debido a la configuración que planteamos es obvio que debemos trabajar con coordenadas cartesianas para resolver el problema. Comencemos por un tratamiento de las fuerzas que actúan sobre cada partícula; debido a que la única fuerza que actúa sobre ambas es la fuerza gravitacional, y debido a que ambas partículas se mueven sobre una recta, únicamente debemos tomar la componente de la fuerza sobre la recta para ambas partículas. Calculemos entonces la fuerza sobre cada partícula en coordenadas cartesianas (x, y) , donde la distancia que las separa es $\sqrt{x^2 + y^2}$, y obtendremos para la primera partícula

$$F_x = -\frac{Gm_1m_2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (1.1)$$

y para la segunda partícula

$$F_y = -\frac{Gm_1m_2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (1.2)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Es fácil ver que estas dos fuerzas son derivables de un potencial, y ambas del mismo, que es el siguiente

$$V(x, y) = -\frac{Gm_1m_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.3)$$

Por otra parte la energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2) \quad (1.4)$$

El sistema claramente es conservativo, ya que hemos encontrado un potencial que genere las fuerzas que actúan sobre las partículas. Podemos ahora escribir la función lagrangiana $L = T - V$,

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2) + \frac{Gm_1m_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.5)$$

Y utilizando las ecuaciones de Lagrange, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento.

Para m_1 tenemos,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (1.6)$$

$$m_1\ddot{x} + \frac{Gm_1m_2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0, \quad (1.7)$$

Si dividimos por m_1 esta ecuación obtenemos que,

$$\ddot{x} + \frac{Gm_2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0. \quad (1.8)$$

Donde hemos llegado a la importante conclusión que el movimiento de la partícula m_1 , no depende de su masa, sino solamente la masa de la segunda partícula.

Para m_2 tenemos,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (1.9)$$

$$m_2\ddot{y} + \frac{Gm_1m_2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0. \quad (1.10)$$

Si dividimos por m_2 esta ecuación obtenemos que,

$$\ddot{y} + \frac{Gm_1 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0. \quad (1.11)$$

Donde llegamos a la misma conclusión que para la primera partícula. Hemos encontrado las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2 . Para poder resolver numéricamente conviene escribir estas ecuaciones como,

$$\xi = \dot{x}, \quad (1.12)$$

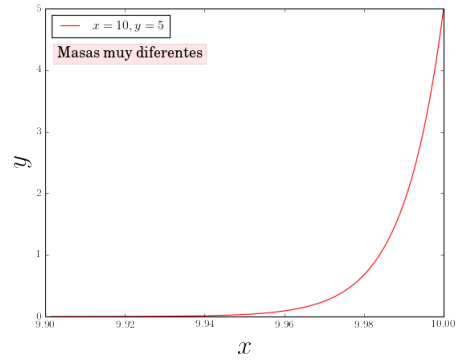
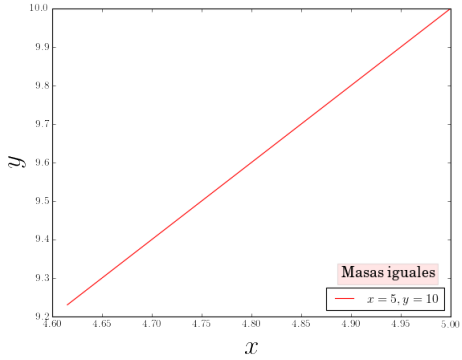
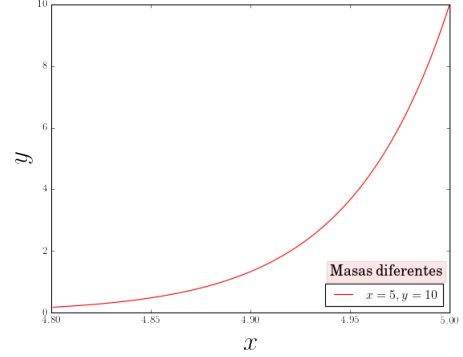
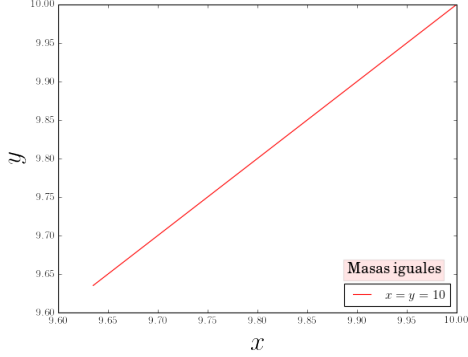
$$\dot{\xi} = \frac{Gm_2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (1.13)$$

Y,

$$\chi = \dot{y}, \quad (1.14)$$

$$\dot{\chi} = -\frac{Gm_1 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (1.15)$$

Para trazar las trayectorias hemos utilizado en todas las gráficas que inicialmente $\xi = \dot{\chi} = 0$, y hemos probado varias combinaciones para las posiciones iniciales y las masas de las partículas. Los códigos con los que realizamos los gráficos son libres y se encuentran en un Notebook de Python, en el siguiente [::link::](#).



Ahora utilizando el hecho de que $m_2 = m_1 + \epsilon$, primero la energía cinética será

$$V(x, y) = -\frac{Gm_1(m_1 + \epsilon)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.16)$$

Y la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}[m_1\dot{x}^2 + (m_1 + \epsilon)\dot{y}^2]. \quad (1.17)$$

Y la lagrangiana será,

$$L = \frac{1}{2}[m_1\dot{x}^2 + (m_1 + \epsilon)\dot{y}^2] + \frac{Gm_1(m_1 + \epsilon)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.18)$$

Las ecuaciones de movimiento serán,

$$m_1\ddot{x} + \frac{Gm_1(m_1 + \epsilon)x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0, \quad (1.19)$$

$$(m_1 + \epsilon)\ddot{y} + \frac{Gm_1(m_1 + \epsilon)y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0. \quad (1.20)$$

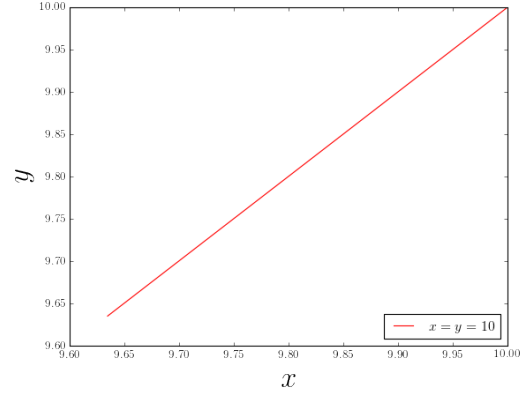
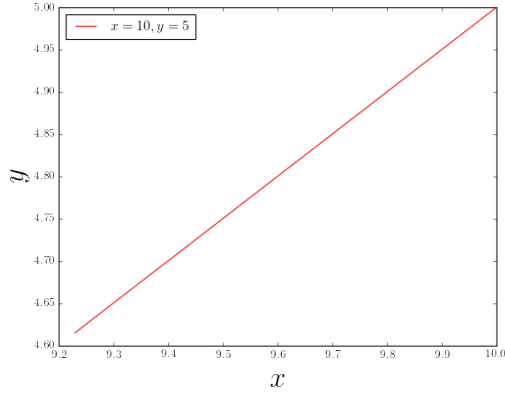
o,

$$\ddot{x} + \frac{G(m_1 + \epsilon)x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0, \quad (1.21)$$

$$\ddot{y} + \frac{Gm_1y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0. \quad (1.22)$$

Que son las ecuaciones de movimiento para primer orden en ϵ .

Para trazar las trayectorias en este caso hemos utilizado distintas condiciones iniciales para la posición de las partículas.



2. Problema 2

Encuentre las ecuaciones de movimiento del péndulo doble usando únicamente métodos vectoriales. El péndulo doble tiene las dos masas iguales y las dos longitudes iguales. Usando una computadora trace la trayectoria (θ_1 vs θ_2) cuando las condiciones iniciales son

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = \pi$$

$$\dot{\theta}_1 = 0$$

$$\dot{\theta}_2 = 0$$

Solución:

En la figura de abajo se muestra un diagrama del problema,

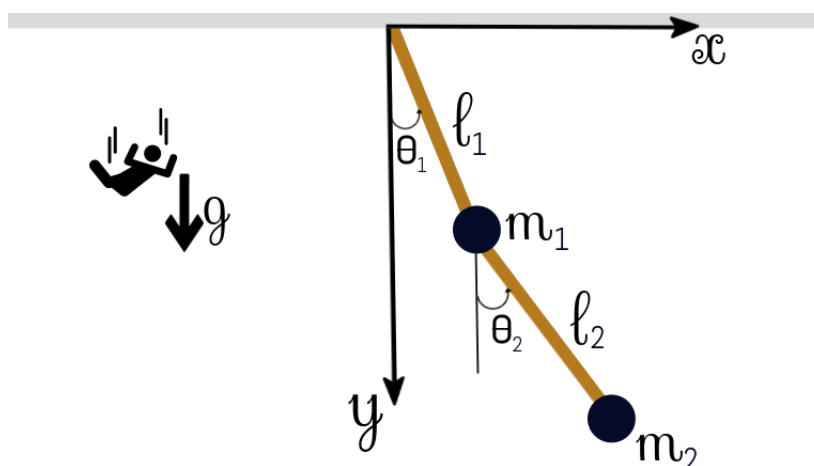


Figura 4: Péndulo doble. Como muestra el muñequito la gravedad va dirigida hacia abajo.

Consideraremos un caso general en el cual las longitudes y masas pueden ser diferentes, y luego haremos la simplificación que el enunciado indica. El doble péndulo consiste en dos masa m_1 y m_2 conectadas por barras sin masa de longitudes l_1 y l_2 , sujetas a la fuerza de gravedad, y constreñidas por las junturas entre las barras a moverse en un plano. Escogeremos un sistema de coordenadas con el origen en el tope del punto de suspensión, y el eje x como un eje horizontal en el plano del movimiento, y el eje y hacia abajo, de manera tal que las fuerzas de gravedad tengan componentes positivas.

El sistema tiene dos partículas, digamos que con posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , cada una con componentes (x_i, y_i, z_i) . Como hemos dicho el sistema se moverá en el plano de $x - y$, por lo tanto consideraremos esto como una restricción, ligadura, o constricción; entonces habrá una de estas constricciones para cada partícula, y hay otras dos más, el hecho de que cada barra tiene una longitud constante. Podemos escribir estas constricciones como:

$$z_1 = 0, \tag{2.1}$$

$$z_2 = 0, \tag{2.2}$$

$$|\mathbf{r}_1| = l_1, \tag{2.3}$$

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = l_2. \tag{2.4}$$

Entonces para el caso que consideremos del péndulo doble, tendremos solamente, dos (2) grados de libertad, debido a que los originales seis (6) se reducen por las cuatro (4) restricciones al movimiento que consideramos.

El lector familiarizado con este problema, ya clásico de la mecánica, recordará que en la formulación lagrangiana de este problema, las coordenadas generalizadas más utilizadas y que simplifican la solución del problema son θ_1 y θ_2 , por lo tanto las ecuaciones de movimiento se expresarán en término de las mismas, para así poder tener una comparación directa con el análisis vectorial del problema que haremos, con el escalar que se trabaja en la formulación lagrangiana. Podemos encontrar expresiones para \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 en términos de los dos ángulos θ_1 y θ_2 (hemos suprimido los vectores unitarios ya que no influirán en el desarrollo del problema, pero debe aclararse que están allí para consistencia vectorial):

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \sin \theta_1 + l_1 \cos \theta_1 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \quad (2.6)$$

Ahora podemos encontrar los vectores de velocidad y aceleración en término de θ_1 y θ_2 , para m_1 ,

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{v}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 = l_1 \dot{\theta}_1 (\cos \theta_1 - \sin \theta_1), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{a}_1 &= l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1, \\ &= l_1 \ddot{\theta}_1 (\cos \theta_1 - \sin \theta_1) - l_1 \dot{\theta}_1^2 (\cos \theta_1 + \sin \theta_1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

y para m_2

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = l_2 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_2 - \sin \theta_2), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - l_1 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2, \\ &= \mathbf{a}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 (\cos \theta_2 - \sin \theta_2) - l_2 \dot{\theta}_1^2 (\cos \theta_2 + \sin \theta_2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para poder construir las ecuaciones de movimiento en la metodología vectorial necesitamos conocer el sentido, dirección y magnitud de las fuerzas que actúan sobre las partículas en consideración. En este caso las fuerzas que actúan para m_1 son la tensión de las dos cuerdas (que llamaremos \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 respectivamente), y la gravedad. La tensión de la cuerda l_1 , sobre m_1 actúa lo largo de $-\mathbf{r}_1$, y la tensión de la cuerda l_2 actúa a lo largo de $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, entonces podemos escribir la fuerza \mathbf{F}_1 como

$$\mathbf{F}_1 = T_1 \frac{-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} + T_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + m_1 \mathbf{g} = -\frac{T_1}{l_1} \mathbf{r}_1 + \frac{T_1}{l_1} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_1 \mathbf{g}. \quad (2.11)$$

Las fuerzas sobre m_2 son la tensión de la cuerda l_2 a lo largo de $-(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ y la gravedad,

$$\mathbf{F}_2 = T_2 \frac{-(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + m_2 \mathbf{g} = -\frac{T_2}{l_2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_2 \mathbf{g}. \quad (2.12)$$

Estamos ahora en posición para escribir las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble utilizando la segunda ley de Newton en cada partícula, $\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{T_1}{l_1} \mathbf{r}_1 + \frac{T_1}{l_1} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_1 \mathbf{g}, \quad (2.13)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{T_2}{l_2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_2 \mathbf{g}. \quad (2.14)$$

Estas ecuaciones no son muy esclarecedoras del problema al cual nos enfrentamos, y ahora es claro por qué debemos expresar las mismas para θ_1 y θ_2 , debido que como veremos estas se convertirán en cuatro ecuaciones diferenciales para cuatro incógnitas, θ_1 , θ_2 , T_1 y T_2 . Escribimos entonces las ecuaciones de movimiento para las dos partículas en sus componentes en el plano¹ ($x - y$), utilizando (2.7) y (2.8) y la figura (4)

Para m_1 ,

$$m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) = -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2, \quad (2.15)$$

$$-m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) = -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 + m_1 g. \quad (2.16)$$

Para m_2 ,

$$m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) = -T_2 \sin \theta_2, \quad (2.17)$$

$$-m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) = -T_2 \cos \theta_2 + m_2 g. \quad (2.18)$$

Haciendo uso de algunas identidades trigonométricas como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, y $\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_1 = \sin (\theta_2 - \theta_1)$, y un largo trabajo algebraico que no aportaría nada colocarlo explícitamente en esta tarea, llegamos a que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como:

$$l_1 \ddot{\theta}_1 = \frac{T_2}{m_1} \sin \theta_2 - \theta_1 - g \sin \theta_1, \quad (2.19)$$

$$l_1 \dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1} \cos (\theta_2 - \theta_1) - g \cos \theta_1, \quad (2.20)$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 = -\frac{T_2}{m_1} \sin \theta_2 - \theta_1, \quad (2.21)$$

$$l_2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{T_2}{m_2} - \frac{T_2}{m_1} - \frac{T_1}{m_1} \cos (\theta_2 - \theta_1). \quad (2.22)$$

Debido a que las ecuaciones no contienen derivadas de T_1 y T_2 , la mejor manera de escribir las ecuaciones para el análisis numérico que realizaremos, es obtener dos ecuaciones diferenciales para θ_1 y θ_2 sin los términos de T_1 y T_2 . Para hacer eso hacemos uso de (2.19) y (2.21), y obtenemos que

$$T_1 = -m_1 \frac{l_2 \ddot{\theta}_2}{\sin (\theta_2 - \theta_1)}, \quad (2.23)$$

$$T_2 = m_1 \frac{l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1}{\sin (\theta_2 - \theta_1)}. \quad (2.24)$$

Sustituimos estas expresiones, primero en (2.20) y obtenemos

$$\begin{aligned} l_1 \dot{\theta}_1^2 &= \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1} \cos (\theta_2 - \theta_1) - g \cos \theta_1, \\ &= -\frac{l_2 \ddot{\theta}_2}{\sin (\theta_2 - \theta_1)} - \frac{l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1}{\sin (\theta_2 - \theta_1)} \cos (\theta_2 - \theta_1) - g \cos \theta_1, \\ &\boxed{\therefore l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos (\theta_2 - \theta_1) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin (\theta_2 - \theta_1) + g \sin \theta_2 = 0.} \end{aligned} \quad (2.25)$$

¹Acá utilizaremos la muy conocida separación de componentes de fuerzas de la mecánica newtoniana

ahora en (2.22) y obtenemos,

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0. \quad (2.26)$$

Que son las conocidas ecuaciones de movimiento para un péndulo doble. Para que sea más fácil el análisis computacional, llamemos a $\omega_1 = \dot{\theta}_1$, y $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, las velocidades respectivas velocidades angulares, con lo cual

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad (2.27)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \quad (2.28)$$

$$l_2\omega_2 + l_1\omega_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_1\omega_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + g \sin \theta_2 = 0 \quad (2.29)$$

$$(m_1 + m_2)l_1\omega_1 + m_2l_2\omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l_2\omega_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0 \quad (2.30)$$

El paso siguiente es puramente manipulación algebraica, la cual cubriría más de una página de puras ecuaciones que no suman a la demostración que queremos hacer, simplemente lo que se hace es despejar ω_2 de (2.29), y luego se sustituye en (2.30), y luego se despeja ω_1 de (2.30), y luego se sustituye en (2.29), y obtendremos lo siguiente (hemos definido $\Delta = \theta_2 - \theta_1$):

$$\omega_1 = \frac{m_2l_1\omega_1^2 \sin \Delta \cos \Delta + m_2g \sin \theta_2 \cos \Delta - m_2l_2\omega_2^2 \sin \Delta + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1}{(m_1 + m_2)l_1 - m_2l_1 \cos^2 \Delta}, \quad (2.31)$$

y

$$\omega_2 = \frac{m_2l_2\omega_2^2 \sin \Delta \cos \Delta + (m_1 + m_2)(g \sin \theta_1 \cos \Delta - l_1\omega_1^2 \sin \Delta - g \sin \theta_2)}{(m_1 + m_2)l_1 - m_2l_2 \cos^2 \Delta}, \quad (2.32)$$

Resolveremos estas ecuaciones diferenciales numéricamente utilizando varias librerías de Python, la primera es NumPy², que nos permite utilizar funciones trigonométricas y definir espacios algebraicos para las soluciones, la segunda es SciPy³, para encontrar las soluciones numéricas a las ecuaciones y Matplotlib⁴ para hacer los gráficos que veremos a continuación. Todo el código que realizamos para la solución de este problema, se encuentra en un repositorio público de GitHub y está disponible para su uso, reproducción y consulta; el mismo se encuentra en un Notebook de Python para su simple visualización, pero en caso de querer el código en Python, envíenme un correo o solicítelo por el repositorio. El repositorio completo se encuentra en [este link](#), y particularmente el Notebook de este problema en [este link](#).

El diagrama completo del sistema, para las condiciones iniciales del enunciado, se anexará en el correo, y también se encuentra en el repositorio. Cabe destacar que el código para realizar

²<http://www.numpy.org/>

³<http://www.scipy.org/>

⁴ <http://matplotlib.org/>

esta simulación en su mayoría fue recopilado de un ejemplo de Matplotlib, con algunas mejoras que realizamos aparte de que puede correr en un Notebook de forma dinámica debido a algunos parámetros que agregamos al código.

Dibujaremos ahora varias combinaciones para el sistema, las cuales nos pintan una imagen completa del movimiento del mismo.

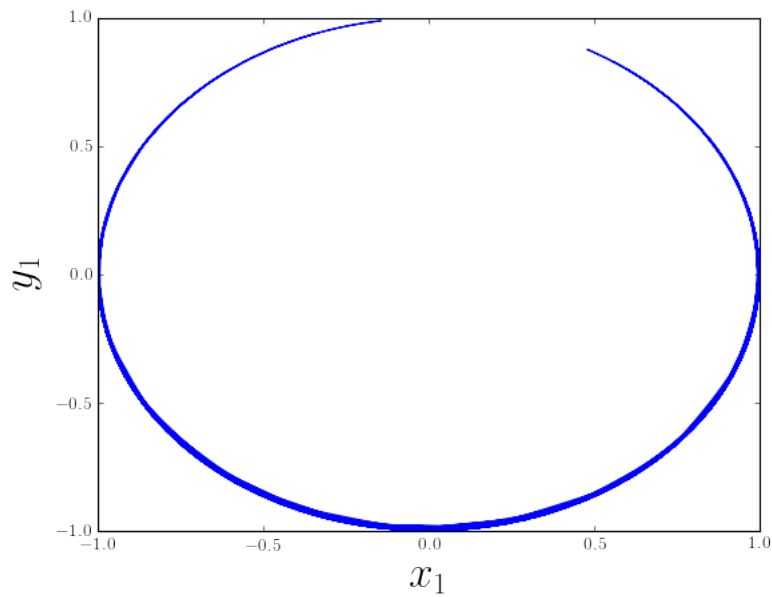


Figura 5: y_1 vs x_1

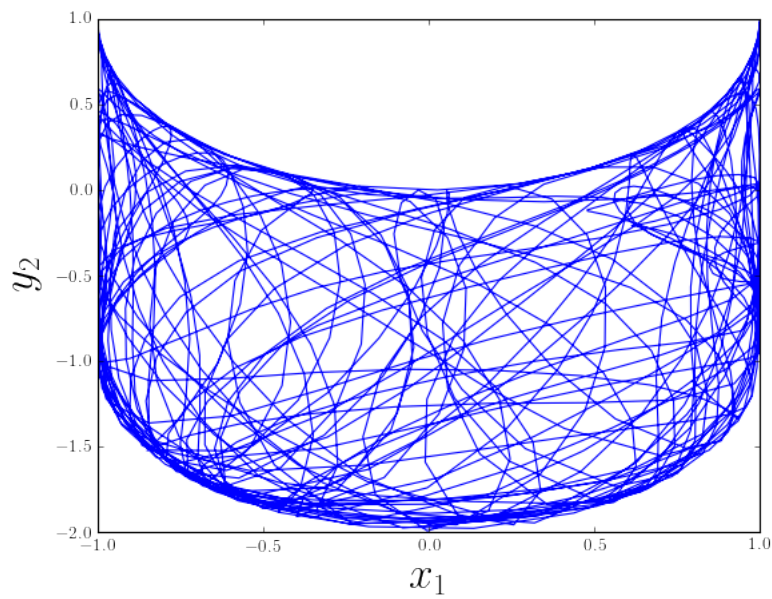


Figura 6: y_2 vs x_1

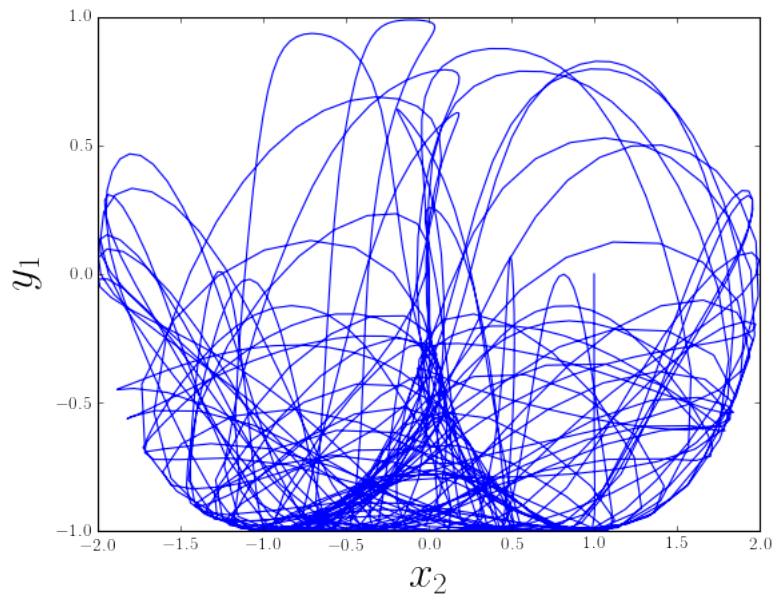


Figura 7: y_1 vs x_2

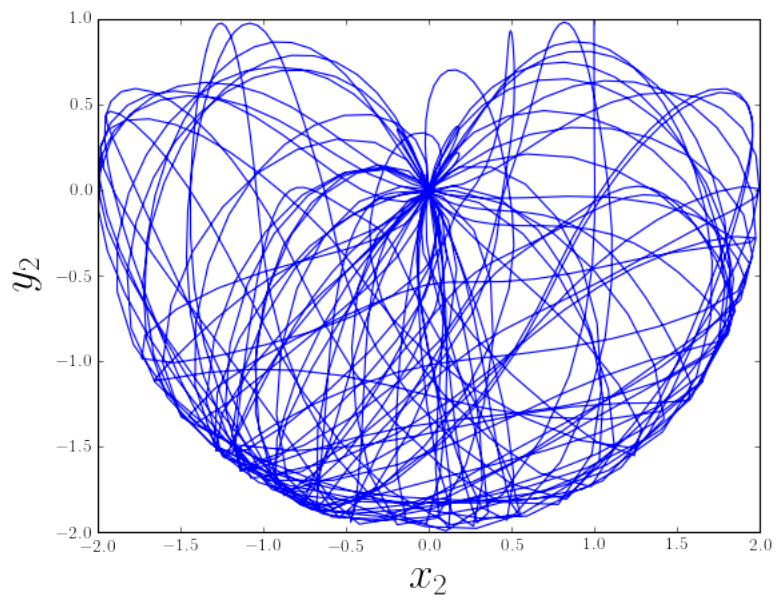


Figura 8: y_2 vs x_2

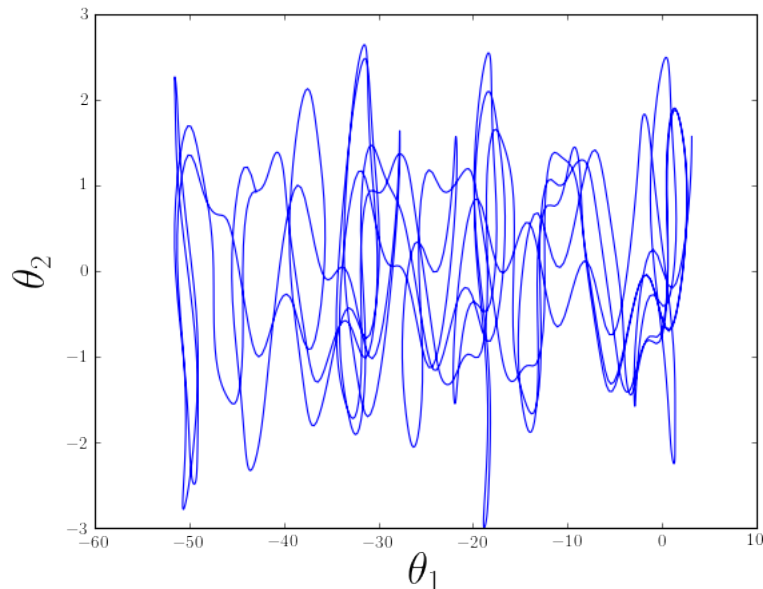


Figura 9: θ_2 vs θ_1

Vemos entonces una gran concordancia con la simulación completa del péndulo doble y las gráficas de distintas proyecciones del movimiento, claramente se ve que en la masa m_1 se mueve en un círculo y la masa m_2 describe el movimiento caótico tan conocido de este sistema.

3. Problema 3

Se encuentran un compañero de la prepa que no veían desde que salieron de ella. El amigo estudio derecho y le ha ido muy bien; se toman un café y cuando le dicen que estudiaron física el se pone contento y les dice: “que bien, mira siempre he tenido la curiosidad de saber qué son esas cosas que ustedes tanto usan y admira: los tensores, dime ¿qué son?”. Escriba en media cuartilla la respuesta que le darían a su compañero de la prepa que estudió derecho.

Solución:

Supongamos que mi amigo se llama Roger⁵. Comencemos la charla:

Roger: Epa Favio, entonces los tensores, dime ¿qué son?

Favio: Bueno Roger, los tensores son unas entidades matemáticas, pero será más fácil describirte qué son en términos físico-matemáticos para usar un poco la intuición que a veces puede ser de mucha ayuda. En la física nos gusta ser precisos con la forma en que expresamos, representamos y medimos cantidades, y los tensores nos ayudan mucho en esto. Supongamos que te pregunto, cuántos pesos llevas contigo, ¿qué me responderías?

Roger: Eh..., déjame revisar..., ¡ajá!, 300.

Favio: Perfecto, lo que dices responde satisfactoriamente lo que te pregunté, el solo número 300 bastó para proveer la información que buscaba. Ahora, si yo te preguntara cuán lejos queda tu casa de donde estamos, y me respondes “20”, te miraría un poco desconcertado y te preguntaría “¿20 qué?”, claramente para responder a esta pregunta necesitarías darme más información, por ejemplo, “20 km”. Ahora que le has dado nombre a 20, representa

⁵Lo hago en alusión a mi matemático (vivo) preferido, Roger Penrose.

una cantidad de kilómetros. Pero con esta información, ¿crees que llegaría a tu casa desde acá?.

Roger: Eh..., no creo. ¿Tendría que decirte qué dirección tomar no?

Favio: Exacto Roger. Si me dijeras camina 20 km hacia el norte, entonces ya me habrás dado una información direccional adicional con la que probablemente llegue a tu casa, o al menos iría en el sentido correcto. En física, matemáticas e ingeniería le decimos a estas cantidades con nombre y dirección “vectores”. Ah, y por cierto, a las primeras cantidades con nombre y sin dirección les llamamos “escalares”. Ya con estas nociones puedo decirte un poquito sobre los tensores, aunque la intuición no será tan fácil ahora de utilizar.

Roger: Ok, ¡pero apúrate por favor que ya tengo que ir a clase de derecho civil!

Favio: Jajaja, bueno Roger, me apuraré. Con los vectores y escalares podemos hacer una serie de operaciones bien definidas, como sumarlos, multiplicarlos, restarlos, dividirlos, y otras. Aunque no es muy riguroso como te lo diré, aquí va. Si multiplicas un vector por un escalar obtienes otro vector con una magnitud distinta pero con la misma dirección; si multiplicas un vector por otro vector puedes obtener o un escalar, lo que llamamos el producto punto o escalar, o un vector con el llamado producto cruz o vectorial, pero este nos limita a cambiar su dirección en ángulos de 90° . ¿Qué tal si queremos cambiar la magnitud y la dirección de un vector arbitrariamente?, para ello necesitamos una nueva entidad matemática, y estos son los tensores. Entonces un tensor es una entidad matemática muy útil cuando queremos expresar cantidades que tienen una magnitud pero pueden tener varias direcciones. ¿Me sigues?

Roger: ¡Sí claro continúa!

Favio: ¡Ajá!, bueno estos son necesarios en las teorías más elegantes e interesantes de la física y matemática, y nos permiten escribir de forma muy compacta artículos que tomarían toda una resma de papel, porque hay algo muy bonito, los escalares de los que te hablé son tensores de orden 0, y los vectores son tensores de orden 1, ¡ahora solo con un concepto podemos capturar varios! Aparte que representan cantidades complicadas como la gravedad, el estrés de los materiales, permeabilidad en materiales complejos y muchas otras cosas que te podría mencionar en otro momento. Bueno Roger, espero que esta pequeña introducción hayas entendido un poco mejor qué son los tensores.

Roger: ¡Gracias Favio!, me quedó un poco más claro y ahora tengo una idea de qué son. Luego leeré un poco más para complementar lo que me dices. Espero verte pronto para hacerte otras preguntas, una de ellas es, ¿qué es un Twistor? Jaja, chao...

Favio: ¡Jajaja chao!, para esa pregunta si necesitaré que me brindes el almuerzo, y vengas con tiempo porque no será tan fácil. ¡Éxitos!

4. Problema 4

Demuestre que si la torca aplicada sobre un cuerpo rígido simétrico está a lo largo del eje de simetría (digamos que el eje z), entonces $\omega_x^2 + \omega_y^2$ es una constante.

Solución:

Comencemos escribiendo la expresión general para las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido⁶, en el cual pueden existir torques actuando sobre el,

$$(I_i - I_j)\omega_i\omega_j \sum_k (I_k\dot{\omega}_k - \tau_k)\varepsilon_{ijk} = 0. \quad (4.1)$$

Donde I_j es el tensor de inercia para la coordenada j , ω_j es la velocidad angular para la coordenada j , τ_j es el torque aplicado sobre la coordenada j y ε_{ijk} es el símbolo de permutación, también conocido como la densidad de *Levi-Civita*, que para el lector no familiarizado está definido por

⁶Ver siguiente problema para una descripción más completa de las ecuaciones de Euler.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si cualquier índice es igual a otro índice,} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forman una permutación par de } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forman una permutación impar de } 1, 2, 3. \end{cases}$$

Entonces las ecuaciones de Euler toman la siguiente forma para un cuerpo rígido de tres dimensiones (x, y, z) .

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = \tau_x, \quad (4.2)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x = \tau_y, \quad (4.3)$$

$$I_x \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_y \omega_x = \tau_z. \quad (4.4)$$

Ahora, tomando en consideración que tratamos con un cuerpo rígido simétrico, cuyo eje de simetría es el eje z , tenemos que $I_x = I_y$, y debido a que el torque se aplica sobre el eje de simetría, las ecuaciones de Euler quedan como

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_x - I_z) \omega_y \omega_z = 0, \quad (4.5)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_y \omega_x = 0, \quad (4.6)$$

$$I_x \dot{\omega}_z = \tau_z. \quad (4.7)$$

Llegar a la demostración es muy simple. Para ello consideremos las ecuaciones (4.5) y (4.6). Multiplicaremos (4.5) por ω_x y (4.6) por ω_y y las sumaremos, con lo cual obtenemos⁷,

$$I_x \omega_x \dot{\omega}_x - \cancel{(I_x - I_z) \omega_y \omega_z \omega_x} + I_x \omega_y \dot{\omega}_y - \cancel{(I_z - I_x) \omega_y \omega_x \omega_y} = 0, \quad (4.8)$$

debido a que $-(I_x - I_z) = (I_z - I_x)$, nos queda entonces

$$I_x \omega_x \dot{\omega}_x + I_x \omega_y \dot{\omega}_y = 0,$$

$$I_x (\omega_x \dot{\omega}_x + \omega_y \dot{\omega}_y) = 0,$$

Y debido a que asumimos de entrada que $I_x \neq 0$, nos queda

$$\omega_x \dot{\omega}_x + \omega_y \dot{\omega}_y = 0. \quad (4.9)$$

Con un tratamiento simple de esta ecuación llegamos a,

$$\begin{aligned} \omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \frac{d\omega_y}{dt} &= 0 \\ d\omega_x \omega_x &= -d\omega_y \omega_y \\ \int d\omega_x \omega_x &= - \int d\omega_y \omega_y \\ \frac{1}{2} \omega_x^2 &= -\frac{1}{2} \omega_y^2 + C \\ \omega_x^2 &= -\omega_y^2 + C \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\omega_x^2 + \omega_y^2 = C} \quad (4.11)$$

Que era lo que se pidió demostrar. Esta ecuación nos expresa el hecho de que cuando a un cuerpo rígido simétrico se le aplica un torque sobre el eje de simetría, la suma de las otras dos velocidades angulares (no la del eje de simetría) es una constante.

⁷Claramente esta suma es igual a cero debido a que ambas ecuaciones suman cero, y al sumar ceros, solo podemos obtener cero (hasta ahora nadie ha demostrado algo diferente).

5. Problema 5

En las notas del curso se presenta una figura con la construcción de Poinot y se trazan las polodas, trace una figura similar en la que se muestren las herpolodas.

Solución:

La solución de este problema conlleva a mucho más que solo trazar las curvas pedidas, y me fue imposible hacer un código en Python completo que describiera esta construcción y lograra graficarla. Por suerte, existen algunas librerías de *Mathematica*, que me ayudaron en la construcción de esta solución. En los libros [1, 2], se encuentran códigos para la construcción de Poinot hecho en *Mathematica*, pero al intentar probarlos estos no funcionaron. El mejor código y descripción del problema se encuentran en [1], pero debido a que el libro es muy viejo (con respecto a la versión actual del programa), el código estaba obsoleto. Luego de una revisión exhaustiva de las librerías y códigos que utilizaron los autores, pude rehacer el código para implementarlo en la última versión de *Mathematica*. Este código se encuentra en un paquete de *Mathematica* que he creado y puede encontrarse en el siguiente [link](#).

Para ser completos en la descripción que haremos debemos establecer primero una teoría mínima acerca de la construcción de Poinot, ya que esto facilitará el entendimiento del código que se realizó. Comenzaremos con una adaptación a la teoría que se encuentra en [2], para luego describir lo que el programa, que se encuentra originalmente en [1], hace, tomando en cuenta de que, como ya se dijo, tuvo que actualizarse en gran medida el mismo. La notación que utilizaremos no es la estándar que vimos en clase, pero debido a que el código se realizó usando la notación de [1, 2], tomaremos la misma para desarrollar la solución del problema.

Definición: Las fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido \mathcal{B} pueden ser divididas en dos clases: **fuerzas activas** y **fuerzas reactivas**. Una fuerza pertenece a la primera clase si podemos asignar la fuerza *a priori*. Las fuerzas reactivas están dadas por el contacto entre \mathcal{B} y los obstáculos externos (constricciones).

Definición: Sea \mathcal{B} un cuerpo rígido constreñido a moverse alrededor de un punto fijo suave O . Si la restricción es realizada con una bisagra suave, las fuerzas reactivas son ortogonales a la superficie de contacto esférica. Consecuentemente, las líneas rectas de su aplicación contienen el punto O , y el torque relativo total reactivo a O se hace cero:

$$\mathbf{M}_O^{(r)} = 0. \quad (5.1)$$

Utilizaremos la condición anterior como una definición de un punto fijo suave, cual sea el dispositivo que realiza el punto fijo O .

La posición de \mathcal{B} está determinada por los ángulos de Euler ψ , ϕ y θ formados por el sistema del cuerpo (O, e'_i) con el sistema de laboratorio (O, e_i) . Consecuentemente, necesitamos encontrar tres ecuaciones diferenciales que puedan determinar estas variables como funciones del tiempo. En vista de (5.1), el balance de momentum angular asume la forma

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{(a)}. \quad (5.2)$$

El torque $\mathbf{M}_O^{(a)}$ de las fuerzas activas debe depender de la posición de \mathcal{B} , su campo de velocidad, y el tiempo. Debido a que la velocidad de cualquier punto $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ está dada

por la fórmula $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del movimiento rígido, podemos establecer que

$$\mathbf{M}_O^{(a)} = \mathbf{M}_O^{(a)}(\psi, \phi, \theta, p, q, r, t), \quad (5.3)$$

donde p, q y r son las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ en el sistema del cuerpo. Por otra parte, puede probarse que el momento angular relativo a el sistema de referencia de laboratorio de un sólido con un punto fijo, cuando es proyectado hacia el sistema de referencia del cuerpo, está dado por (donde A, B y C son los respectivos tensores de inercia, llamados I_i en la notación más típica):

$$\mathbf{K}_O = A p \mathbf{e}'_1 + B q \mathbf{e}'_2 + C r \mathbf{e}'_3. \quad (5.4)$$

La derivada temporal de (5.4), está dada por⁸,

$$\dot{\mathbf{K}}_O = A \dot{p} \mathbf{e}'_1 + B \dot{q} \mathbf{e}'_2 + C \dot{r} \mathbf{e}'_3 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O. \quad (5.5)$$

Introduciendo las expresiones (5.3) y (5.5) para $\mathbf{M}_O^{(a)}$ y $\dot{\mathbf{K}}_O$ en la ecuación de balance para el momentum angular, obtenemos la siguiente ecuación para un cuerpo rígido con un punto fijo suave:

$$A \dot{p} \mathbf{e}'_1 + B \dot{q} \mathbf{e}'_2 + C \dot{r} \mathbf{e}'_3 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^{(a)}(\psi, \phi, \theta, p, q, r, t). \quad (5.6)$$

Finalmente, proyectando esta ecuación a lo largo de los ejes del cuerpo (que son los ejes principales de inercia relativos al punto fijo O), obtenemos las ecuaciones de Euler

$$A \dot{p} - (B - C)qr = M_{O_{x_1}}(\psi, \phi, \theta, p, q, r, t) \quad (5.7)$$

$$B \dot{q} - (C - A)rp = M_{O_{x_2}}(\psi, \phi, \theta, p, q, r, t) \quad (5.8)$$

$$C \dot{r} - (A - B)pq = M_{O_{x_3}}(\psi, \phi, \theta, p, q, r, t) \quad (5.9)$$

Estas tres ecuaciones, debido a que contienen seis incógnitas $\psi(t)$, $\phi(t)$, $\theta(t)$, $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$, no pueden determinar el movimiento de \mathcal{B} . Sin embargo si tomamos en cuenta las relaciones cinemáticas de Euler [2, 3],

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \phi + q \cos \phi), \quad (5.10)$$

$$\dot{\phi} = -(p \sin \phi + q \cos \phi) \cot \theta + r, \quad (5.11)$$

$$\dot{\theta} = p \cos \phi - q \sin \phi, \quad (5.12)$$

obtenemos un sistema que, bajo la hipótesis general de la regularidad de las funciones que aparecen en los lados derechos de (5.7, 5.8, 5.9), admite una y sólo una solución que satisface los datos iniciales

$$\psi(0) = \psi_0, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (5.13)$$

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad r(0) = r_0, \quad (5.14)$$

que corresponda las posiciones iniciales y el campo de velocidad de \mathcal{B} .

Las ecuaciones no-lineales (5.7)-(5.12) exhiben una forma muy compleja. Es muy difícil, casi imposible encontrar soluciones explícitas para ellas, aún en los casos más simples [2].

⁸Recordar que para un cuerpo rígido la relación entre la aceleración relativa y absoluta está dada por $\ddot{\mathbf{r}}_p = \ddot{\mathbf{r}}'_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_p + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'_p$

Por lo tanto, debemos intentar analizar estas ecuaciones sin la necesidad de resolver estas ecuaciones explícitamente, utilizando un análisis cualitativo y numérico que nos permita obtener información relevante sobre el comportamiento del movimiento.

Definición: Llamamos rotaciones libres o *movimientos de Poinsot* a todos los movimientos de un cuerpo rígido \mathcal{B} con un punto fijo suave en la ausencia de un torque total activo $\mathbf{M}_O^{(a)}$:

$$\mathbf{M}_O^{(a)} = 0. \quad (5.15)$$

En otras palabras, estos movimientos corresponden a las soluciones de las ecuaciones de Euler cuando sus lados derechos son cero. Aún en este caso, no es posible encontrar estas soluciones de manera simple o analítica. Sin embargo, Poinsot en su *Théorie nouvelle de la rotation des corps* de 1851 [4], propuso un muy interesante análisis cualitativo de las rotaciones libres. Como resultado de este análisis, podemos determinar las configuraciones que asume \mathcal{B} durante el movimiento, aunque no podamos dar el instante en el cual \mathcal{B} ocupa una de ellas.

El siguiente análisis está basado en las leyes de conservación del momentum angular y la energía cinética:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_O(0), \quad T = T(0). \quad (5.16)$$

Sea E_0 el elipsoide de inercia B , relativo al punto O , y denotemos por $r(t)$ el eje instantáneo de rotación, esto es, la línea recta paralela a la velocidad angular $\omega \equiv |\omega|\mathbf{u}$ y que contiene a O . Finalmente denotemos por $P(t)$ el punto de intersección de $r(t)$ y E , en la figura de abajo podemos ver mejor esto,

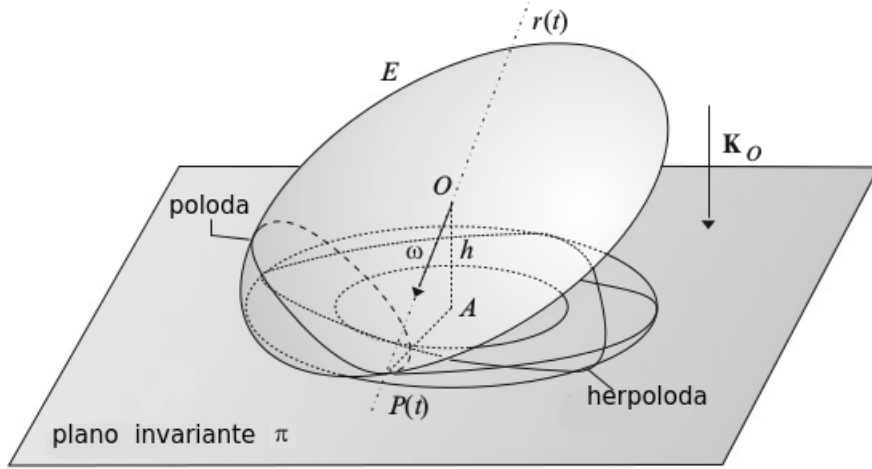


Figura 10: Construcción de Poinsot. Se observa el elipsoide de inercia, el plano invariante, la poloda y la herpoloda.

Puede probarse que el momentum angular \mathbf{K}_O es ortogonal al plano π tangente al elipsoide de inercia en el punto $P(t)$. Y debido a que, en vista de (5.16), \mathbf{K}_O es un vector constante, podemos establecer que durante el movimiento, este plano tangente permanece paralelo a sí mismo. Puede probarse también [2], que la conservación de la energía cinética implica que la distancia h , de π desde O , es constante durante el movimiento, y es igual

$$h = \frac{\sqrt{2T(0)}}{\mathbf{K}_O(0)}. \quad (5.17)$$

En conclusión, durante el movimiento de \mathcal{B} , el plano π tangente al elipsoide de inercia E en el punto P , donde P es la intersección del eje instantáneo de rotación con E , no cambia de posición. Para entender la consecuencias de este resultado en el movimiento de \mathcal{B} , asignamos la velocidad angular inicial $\omega(0)$. Este vector determina los valores iniciales de \mathbf{K}_O y T_O y, consecuentemente, debido a (5.17), la posición invariante del plano π relativo a O y la posición inicial $P(0)$ de $P(t)$.

Debido a que $P(t) \in E \cap r(t)$, su velocidad es cero. Finalmente podemos concluir, lo que también se establece en las notas, *durante un movimiento de Poinsot de \mathcal{B} sobre O , el elipsoide de inercia E rueda sin resbalar sobre el plano invariante π .*

Durante el movimiento, el punto $P(t)$ describe una curva sobre E , llamada la poloda⁹, y una curva en π , conocida como la herpoloda¹⁰. Puede probarse que la poloda es una curva cerrada sobre E [6], que puede reducirse a un punto. En contraste, la herpoloda puede ser una curva abierta. Más precisamente, si consideramos el arco γ descrito por $P(t)$ durante una vuelta completa sobre el elipsoide E , y sea α el ángulo sustendido por γ , teniendo el vértice en la proyección ortogonal A de O sobre π . Como probamos en la tarea 2, si $\alpha = 2\pi(m/n)$ donde m y n son enteros, es decir que son conmensurables, entonces la herpoloda es cerrada, de otra manera es abierta. También puede probarse que la herpoloda está contenida en un anillo σ cuyo centro es A , siempre es cóncava hacia A , y, cuando es abierta, cubre densamente a σ .

Si la velocidad angular inicial $\omega(0)$ es paralela a un eje principal de inercia, entonces el momento angular \mathbf{K}_O es siempre paralelo a $\omega(0)$, y h es igual a la mitad de la longitud del eje de E . Por lo tanto, la poloda y la herpoloda se reducen a un punto. Si el elipsoide E tiene una simetría de revolución sobre un eje a , entonces la poloda y la herpoloda se convierten en dos círculos. Finalmente, si E se reduce a una esfera, la poloda y la herpoloda se reducen a un punto y el movimiento es siempre una rotación uniforme.

Luego de esta breve exposición de algunas formalidades teóricas sobre la rotación del cuerpo rígido libre, y de la construcción de Poinsot, podemos entonces dibujar utilizando el código que adaptamos de *Mathematica* las herpolodas.

El código contiene una función llamada `Poinsot` la cual tiene la siguiente estructura:

$$\text{Poinsot}[A, B, CO, r0, \theta0, T, \alpha, \text{steps}],$$

donde A, B, CO , son los momentos de inercia del cuerpo rígido con respecto a los tres ejes Ox', Oy' y Oz' respectivamente, $\theta0$ es el ángulo entre Oz' y el eje del sistema del laboratorio Oz , que se escoge paralelo a la velocidad angular inicial \mathbf{K}_O . Luego, $r0$ es la componente inicial de la velocidad angular a lo largo del eje Oz' , T es el límite superior del intervalo de tiempo $(0, T)$ en el cual el movimiento es analizado, α es un ángulo que fija la parte del elipsoide de inercia donde se representará la poloda, y `steps` representa el número de pasos en la integración numérica.

La salida de `Poinsot` está constituida por:

1. El gráfico de la herpoloda y las dos circunferencias en las cuales está contenida, en el intervalo $(0, T)$,
2. El gráfico de la poloda en la parte escogida del elipsoide de inercia E , que está determinada por el valor de α , por ejemplo $\alpha = \pi/2$ corresponde a la mitad de E , mientras que $\alpha = \pi$ corresponde a todo el elipsoide.

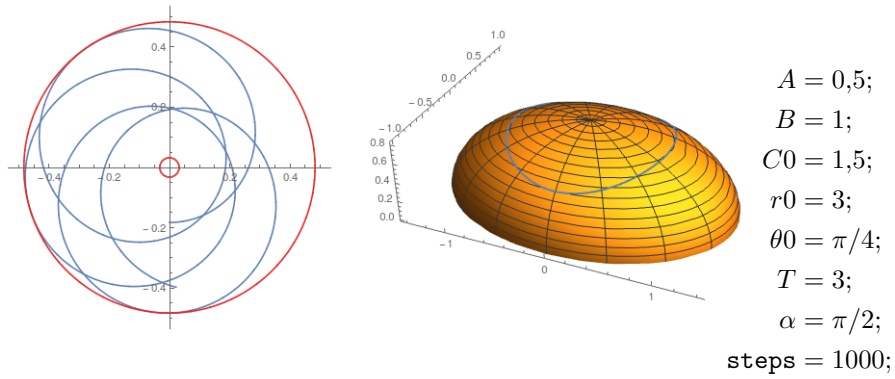
⁹ Del griego $\pi\sigma\lambda\sigma\theta$ = polo, terminal y $\sigma\delta\theta\theta$ = camino, ruta [5].

¹⁰El nombre “herpoloda”, fue utilizado por Poinsot haciendo alusión a la apariencia de serpiente, o serpiente de la curva [5].

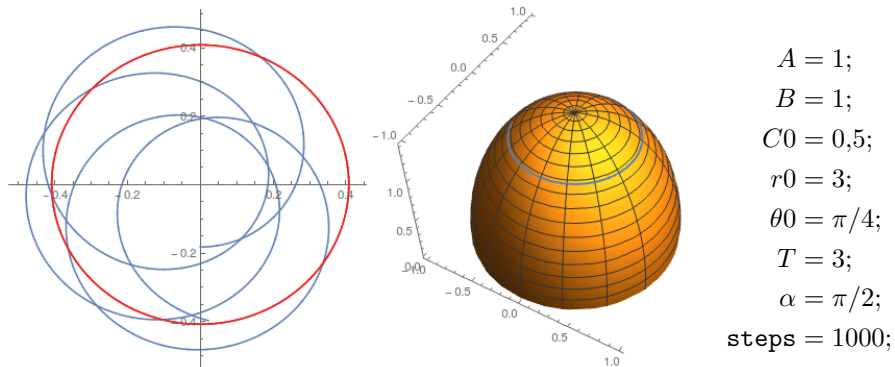
Cabe resaltar que si la herpoloda no es cerrada en el tiempo T , no es posible concluir que es abierta, y consecuentemente densa en todas partes de un anillo. De hecho, la propiedad de ser cerrada puede aparecer en un intervalo de tiempo más grande. Pero podemos decir que, si luego de un tiempo T lo suficientemente grande la herpoloda aún está abierta, solo existe la posibilidad de que sea abierta.

Mostramos ahora algunos resultados del código adaptado, que constituyen solo una pequeña muestra de la gran cantidad de posibles configuraciones que podemos utilizar.

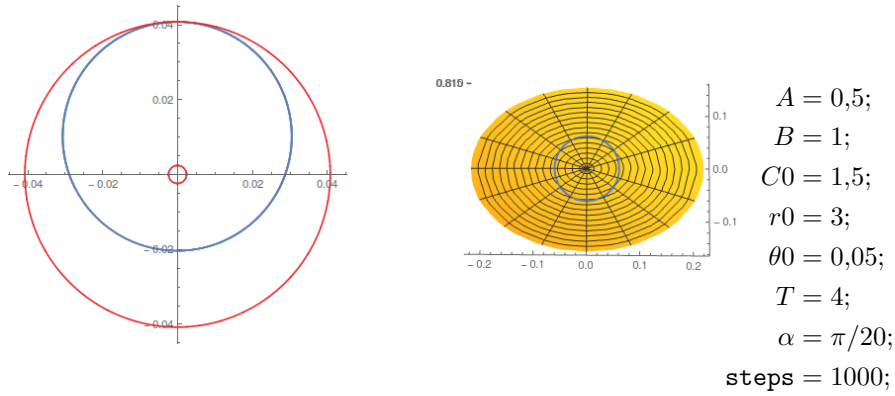
Ejemplo 1:



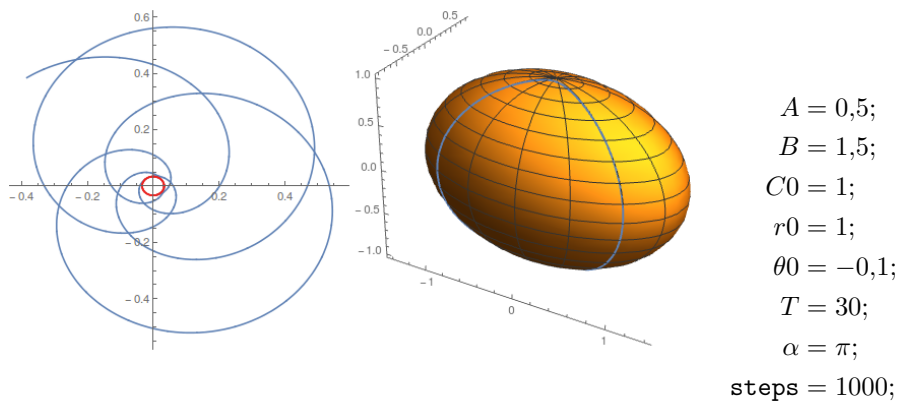
Ejemplo 2:



Ejemplo 3:



Ejemplo 4:



Referencias

- [1] A. Marasco y A. Romano, *Scientific Computing with Mathematica®*, Birkhäuser-Springer, 2001.
- [2] A. Romano, *Classical Mechanics with Mathematica®*, Birkhäuser-Springer, 2012.
- [3] J. José y E. Saletan, *Classical dynamics: A contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] L. Poinsoy, *Théorie nouvelle de la rotation des corps (Première et deuxième Parties)*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, pp. 9-129, 1851.
- [5] M. Spivak, *Physics for mathematicians: Mechanics I*, Publish or Perish, 2010.
- [6] E. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press, 2da edición. 1917.