

# Mecánica Clásica Tarea # 14

Favio Vázquez\*

*Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.*

## Problema 1

Utilizando únicamente la ecuación de la eikonal deduzca la ley de Snell.

Solución:

Recordemos la expresión para la ecuación de la eikonal,

$$|\nabla S|^2(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Esta ecuación es simplemente el módulo de la ecuación de Huygens que puede escribirse como

$$\nabla S = n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}, \quad (1.2)$$

y también sabemos que el gradiente de esta ecuación define el vector de rayo de magnitud  $|\mathbf{n}| = n$ . Si ahora recordamos que la integración del gradiente sobre un camino cerrado se hace cero, tenemos que

$$\oint_P \nabla S(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_P \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.3)$$

Consideremos ahora el caso en que el camino cerrado  $P$  rodea una frontera que separa dos medios diferentes. Si hacemos que los lados del bucle perpendicular a la interfaz vayan a cero, entonces únicamente las partes de la integral de línea tangenciales al camino de la interfaz contribuirán en la misma. Ahora debido a que estas contribuciones deben sumar cero, las componentes tangenciales de los vectores de rayo deben preservarse, esto es

$$(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (1.4)$$

donde el primo se refiere al lado de la frontera al cual el rayo es transmitido, cuyo vector normal es  $\hat{\mathbf{z}}$ . Ahora imaginemos a un rayo atravesando la frontera y pasando a través de la región encerrada por el bucle de integración. Si  $\theta$  y  $\theta'$  son los ángulos de incidencia y transmisión, respectivamente, medidos desde la normal  $\hat{\mathbf{z}}$  a través de la frontera, entonces la preservación de la componente tangencial del vector de rayo significa que, tomando en cuenta (1.4) y la definición del producto vectorial,

$$\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{n}' \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (1.5)$$

$$n \sin \theta - n' \sin \theta' = 0, \quad (1.6)$$

---

\*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

esto debido a que  $|\dot{\mathbf{z}}| = 1$ , por lo tanto

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (1.7)$$

Que es la ley de la refracción de Snell, descubierta primero por Ibn Sahl en 984 [1], y luego por Willebrod Snellius en 1621 [2]. Un análisis similar puede aplicarse al caso de los rayos reflejados para mostrar que el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión.

## Problema 2

En el curso se mostró que la ecuación de la eikonal es una aproximación de onda pequeña de la ecuación de ondas. Encuentre ahora, a partir únicamente del principio de Fermat, las ecuaciones diferenciales que determinan los rayos de luz y la ecuación de la eikonal. Comente sobre la situación análoga entre las ecuaciones de movimiento de la mecánica y el principio de Hamilton.

Solución:

En gran parte esta discusión y pruebas fueron tomadas de [2]. Matemáticamente, el principio de Fermat establece que el camino un rayo  $\mathbf{r}(s)$  de un punto  $A$  a un punto  $B$  en el espacio es un extremal de la longitud óptica, definida por

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}(s)) ds = 0. \quad (2.1)$$

Donde  $n(\mathbf{r})$  es el índice de refracción en el punto espacial  $\mathbf{r}$  y

$$ds^2 = d\mathbf{r}(s) \cdot d\mathbf{r}(s) \quad (2.2)$$

es el elemento de la longitud de arco  $ds$  a lo largo del camino del rayo  $\mathbf{r}(s)$  a través del punto.

**Definición:** El **eje óptico** se define como la dirección principal de propagación de la luz.

Si se escogen coordenadas de manera que el eje  $z$  coincida con el eje óptico y se exprese el elemento de longitud de arco  $ds$  en términos del incremento a lo largo del eje óptico,  $dz$ , como

$$\begin{aligned} ds &= [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2} \\ &= [1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} dz = \frac{1}{\gamma} dz, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la notación  $\dot{x} \equiv dx/dz$ ,  $\dot{y} \equiv dy/dz$  y  $\gamma \equiv dz/ds$ , entonces el principio de Fermat puede interpretarse como un principio de acción estacionaria, con  $z$  jugando el papel del tiempo (de aquí en adelante escribiremos  $t$  en vez de  $z$ ),

$$0 = \delta S \equiv \delta \int_{t_A}^{t_B} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) dt. \quad (2.3)$$

Aquí, hemos definido la lagrangiana óptica como

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = n(x, y, t) [1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} = \frac{n(x, y, t)}{\gamma}, \quad (2.4)$$

con

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \leq 1. \quad (2.5)$$

Podemos pensar en  $(x, y, t) = (\mathbf{q}, t)$  donde  $\mathbf{q} = (x, y)$  es un vector con componentes en el plano perpendicular al eje óptico a un desplazamiento en un tiempo  $t$ . En esta formulación, el principio de Fermat implica la ecuación eikonal, lo cual establecemos en el siguiente teorema:

**Teorema:** El principio de Fermat

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt, \quad (2.6)$$

para la lagrangiana óptica

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = n(\mathbf{q}, t) [1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2]^{1/2} \equiv \frac{n}{\gamma}, \quad (2.7)$$

con

$$\gamma \equiv \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}} \leq 1, \quad (2.8)$$

implica la ecuación de la eikonal

$$\gamma \frac{d}{dt} \left( n(\mathbf{q}, t) \gamma \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}}, \quad \text{con} \quad \frac{d}{ds} = \gamma \frac{d}{dt} \quad (2.9)$$

**Prueba:** Consideremos una familia de curvas  $C^2 \mathbf{q}(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^2$  que representan los posibles caminos de rayos desde un punto  $A$  a un punto  $B$  en el espacio. Estos caminos satisfacen

$$\mathbf{q}(t, 0) = \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{q}(t_A, \epsilon) = \mathbf{q}(t_A) \quad \text{y} \quad \mathbf{q}(t_B, \epsilon) = \mathbf{q}(t_B), \quad (2.10)$$

para un parámetro  $\epsilon$  en algún intervalo cerrado. Si definimos la variación de la acción óptica (2.3) usando este parámetro como

$$\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt, \quad (2.11)$$

entonces

$$\delta S = \frac{d}{d\epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}(t, \epsilon), \dot{\mathbf{q}}(t, \epsilon)) dt. \quad (2.12)$$

Diferenciando con respecto a  $\epsilon$  bajo el signo de la integral, denotando la derivada variacional como

$$\delta \mathbf{q}(t) \equiv \frac{d}{d\epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \mathbf{q}(t, \epsilon), \quad (2.13)$$

e integrando por parte produce la siguiente variación de la acción óptica,

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{t_A}^{t_B} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{q}} \right) dt \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \cdot \delta \mathbf{q} + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta \mathbf{q} \right]_{t_A}^{t_B}. \end{aligned}$$

Donde hemos asumido que las derivadas cruzadas son iguales evaluadas en  $\epsilon = 0$ , y por lo tanto podemos cambiar el orden de derivación y escribir

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}. \quad (2.14)$$

Los términos evaluados en los puntos  $t_A$  y  $t_B$  de la última ecuación se hacen cero debido a que  $\delta \mathbf{q}(t_A) = 0 = \delta \mathbf{q}(t_B)$ . Esto es porque la variación del camino del rayo debe hacerse cero en los puntos espaciales  $A$  y  $B$  en  $t_A$  y  $t_B$  a lo largo del eje óptico. Debido a que  $\delta \mathbf{q}$  es arbitrario, el principio de acción estacionaria es equivalente a la siguiente ecuación, la cual es la conocida ecuación de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (2.15)$$

Ahora introduciendo la lagrangiana óptica (2.7) en la ecuación de Lagrange (2.15), nos resulta en

$$\frac{d}{dt} \left( n(\mathbf{q}, t) \frac{\dot{\mathbf{q}}}{\sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}} \sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}, \quad (2.16)$$

y utilizando la definición de  $\gamma = 1/\sqrt{1 + |\dot{\mathbf{q}}|^2}$  tenemos entonces

$$\gamma \frac{d}{dt} \left( n(\mathbf{q}, t) \gamma \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{q}}, \quad (2.17)$$

que es exactamente (2.9). ■

Ahora para encontrar la ecuación de la eikonal que vimos en clase, que es en realidad la llamada ecuación eikonal escalar, comenzamos por escribir (2.9) en tres dimensiones, para un camino de rayo  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  como

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial (d\mathbf{r}/ds)} \right) = \frac{d}{ds} \left( n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.18)$$

Y ahora con el siguiente teorema probaremos lo que queremos:

**Teorema:** La ecuación de la eikonal (2.18) obtenida del principio de Fermat, se puede obtener de la ecuación de ondícula (wavelet) de Huygens,

$$\nabla S(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (2.19)$$

diferenciándola a lo largo del camino del rayo.

**Prueba:** Podemos probar este teorema aplicando la operación

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla = \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla, \quad (2.20)$$

a la ecuación de Huygens (2.19). Esto producirá la ecuación de la eikonal (2.18), con el siguiente razonamiento,

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla (\nabla S) = \frac{1}{2n} \nabla |\nabla S|^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \nabla n. \quad (2.21)$$

En estas ecuaciones el primer paso sustituye

$$\frac{d}{ds} = n^{-1} \nabla S \cdot \nabla. \quad (2.22)$$

El segundo paso cambia el orden de las derivadas. El tercer paso usa el módulo de la ecuación de Huygens (2.19) e invoca la propiedad  $|\mathbf{dr}/ds|^2 = 1$ . Demostrando así el teorema y encontrando la ecuación de la eikonal.

■

Y para obtener la ecuación escalar de la eikonal, que fue la que vimos en clase, solo debemos obtener el módulo de la ecuación de Huygens, que como probamos produce la misma ecuación de la eikonal que del principio de Fermat, y nos queda

$$|\nabla S|^2(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}). \quad (2.23)$$

Y hemos obtenido lo que pedía el problema, hemos encontrado la ecuación diferencial que determinan los rayos de luz que es la ecuación (2.18) y aparte hemos encontrado la ecuación de la eikonal en su forma vectorial (2.9) y escalar que fue como se vio en clases en la ecuación (2.23).

Ahora por otra parte, hablaremos un poco sobre la analogía entre la mecánica y la óptica geométrica que es la que hemos estado tratando. El principio de Fermat es un ejemplo de la relevancia de los principios variacionales en la física, y la analogía entre la mecánica y la óptica geométrica está basada en el hecho de que ambas teorías pueden ser formuladas en términos de principios variacionales. Aún más, existe una analogía muy cercana entre la ecuación de la eikonal en la óptica y la ecuación de Hamilton-Jacobi en la mecánica, y por lo tanto entre los rayos de luz y las trayectorias en un sistema mecánico, esto está bien establecido y probado en extensión en [3]. Podemos decir que, en pocas palabras, la analogía mecánica del principio de Fermat en la óptica es el principio de Maupertuis, que establece que las órbitas para una energía fija

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + V, \quad (2.24)$$

donde  $I_{ij}$  es el tensor de inercia, sigue del problema variacional

$$\delta \int \sqrt{(E - V) I_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} = 0. \quad (2.25)$$

De este principio podemos obtener las ecuaciones diferenciales que rigen la mecánica clásica, que pueden expresarse de forma equivalente en las ecuaciones de Newton, Lagrange, Hamilton o Hamilton-Jacobi. Para pasar de este principio a la determinación de rayos de luz tenemos que hacer  $E = 0$ , debido a la ecuación de la eikonal (2.23).

### Problema 3

En el curso se demostró que la función principal de Hamilton es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente. ¿Será cierto el enunciado inverso de este, esto es, que una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede ver como la función principal de Hamilton? Argumente su respuesta.

Solución:

Para no alargar demasiado la prueba de este enunciado, tomaremos por cierto y completamente probado el hecho de la función principal de Hamilton es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente, y por lo tanto cuando se conoce la función principal de Hamilton, puede obtenerse la solución completa para el movimiento del sistema por un proceso de diferenciación y manipulación algebraica. Sin embargo, recordemos algunas cosas sobre la función principal, y algunos resultados que nos serán de utilidad en el camino de la argumentación. La mayoría del tratamiento que se hace en esta solución es una extensión y argumentación de [4] y [5].

Recordemos que la función principal de Hamilton se define como

$$S(q_0, q_1, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad (3.1)$$

donde  $L$  es la lagrangiana del sistema,  $(q_0, t_0)$  es la posición y tiempo inicial y  $(q_1, t_1)$  es la posición y tiempo final a la que llega el sistema. La función  $S$  se asume ser dos veces diferenciable en todos sus argumentos. Recordemos además que la función principal  $S$  es la integral canónica  $I = \int_{t_0}^{t_1} L dt$  expresada como una función de los puntos iniciales y finales de la trayectoria en el espacio de configuración extendido, así que podemos identificar  $\delta S$  con  $\delta I$  y por lo tanto debe cumplirse que (integrando)

$$\delta S = \left[ \sum_i p_i \delta q^i - H \delta t \right]_{t_0}^{t_1}. \quad (3.2)$$

Ahora si escribimos esta ecuación en forma diferencial, obtenemos que,

$$dS = \sum_i p_{i1} dq^{i1} - \sum_i p_{i0} dq^{i0} - H_1 dt_1 + H_0 dt_0, \quad (3.3)$$

donde hemos utilizado la notación de las notas de clase. Por otra parte, una diferenciación directa de  $S(q_0, q_1, t_0, t_1)$  da

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^{i1}} dq^{i1} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^{i0}} dq^{i0} + \frac{\partial S}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial S}{\partial t_0} dt_0. \quad (3.4)$$

Debido a que los  $(2n+2)$  argumentos de la función principal puede ser variados independientemente, los coeficientes de (3.3) y (3.4) deben ser iguales, y por lo tanto encontramos lo mismo que se llegó en las notas

$$p_{i1} = \frac{\partial S}{\partial q^{i1}}, \quad p_{i0} = \frac{\partial S}{\partial q^{i0}}, \quad (3.5)$$

y

$$H_1 = -\frac{\partial S}{\partial t_1}, \quad H_0 = -\frac{\partial S}{\partial t_0}. \quad (3.6)$$

Y asumiendo que

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^{i0} \partial q^{ji}} \right| \neq 0, \quad (3.7)$$

podemos resolver para cada  $q^{i1}$  como función de las condiciones iniciales y el tiempo, y luego sustituir para obtener  $p_{i1}$  completando la solución al sistema, dando el movimiento en el espacio de fase como una función del tiempo.

Hemos pues probado de una forma un poco más compacta que en las notas, lo que se asumió como cierto, el hecho de que cuando se conoce la función principal de Hamilton, puede obtenerse una solución completa para el movimiento del sistema. Es decir, que la función principal es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Ahora para la parte que nos interesa para la solución del problema debemos preguntarnos, si será posible que toda solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi puede verse como la función principal de Hamilton. Para ver si esto es así, consideremos de nuevo la forma diferencial

$$dS = \sum_i p_{i1} dq^{i1} - \sum_i p_{i0} dq^{i0} - H_1 dt_1 + H_0 dt_0, \quad (3.8)$$

que también debemos recordar que está asociada con una transformación canónica que relaciona los puntos iniciales y finales de un camino en el espacio de fases. Ahora supongamos que las condiciones iniciales son especificadas por  $n$   $\alpha$ 's y  $n$   $\beta$ 's, donde

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha_i(q^{10}, \dots, q^{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}), \\ \beta^i &= \beta^i(q^{10}, \dots, q^{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}),\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde debemos notar que estas funciones no son arbitrarias, sino que representan una transformación canónica homogénea. Entonces haciendo esta transformación, la ecuación (3.8) se escribe como

$$dS = \sum_i p_{i1} dq^{i1} - \sum_i \beta^i d\alpha_i - H_1 dt_1 + H_0 dt_0\tag{3.10}$$

y ahora consideramos a  $S$  como una función de  $(q^{i1}, \alpha_i, t_1, t_0)$ . Por lo tanto podemos escribir

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^{i1}} dq^{i1} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial S}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial S}{\partial t_0} dt_0.\tag{3.11}$$

Ahora asumamos que el determinante

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^{i1} \partial \alpha_i} \right| \neq 0,\tag{3.12}$$

Entonces es posible resolver para las  $\alpha$ 's en términos de  $\partial S / \partial q^{i1}$ , que, podrán identificarse con los  $p_1$ 's. Esto implica que las  $q_1$ 's y las  $\alpha$ 's son variables independientes, y por lo tanto podemos igualar los coeficientes de (3.10) y (3.11) y obtener

$$-\beta^i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i},\tag{3.13}$$

$$p_{i1} = \frac{\partial S}{\partial q^{i1}}.\tag{3.14}$$

Y como antes obtenemos,

$$H_1 = -\frac{\partial S}{\partial t_1}, \quad H_0 = -\frac{\partial S}{\partial t_0}.\tag{3.15}$$

La ecuación (3.10) puede simplificarse arbitrariamente haciendo el tiempo inicial  $t_0$  igual a cero, con lo que  $dt_0 = 0$ . Y como se hizo en las notas de clase, medimos el tiempo desde este instante y dejamos de usar el subíndice 1 por conveniencia. Entonces obtenemos

$$dS = \sum_i p_i dq^i - \sum_i \beta^i d\alpha_i - H dt.\tag{3.16}$$

Otra forma más general es considerar las trayectorias correspondientes en los espacios de fases  $(\alpha, \beta)$  y  $(q, p)$  como funciones de un mismo tiempo  $t$ . Estas variables están relacionadas por una transformación canónica, como ya fue establecido, que puede ser especificada igualando la diferencial total la diferencia de dos formas de Pfaffian [4], que son,

$$\sum_i p_i dq^i - H dt,\tag{3.17}$$

y

$$\sum_i \beta^i d\alpha_i - H' dt,\tag{3.18}$$

donde  $H'(\alpha, \beta, t)$  es la función hamiltoniana que resulta de considerar a las  $\alpha$ 's y  $\beta$ 's como variables. Por lo tanto obtenemos

$$dS = \sum_i p_i dq^i - \sum_i \beta^i d\alpha_i - H dt + H' dt. \quad (3.19)$$

Ahora, aunque consideramos a las  $\alpha$ 's y  $\beta$ 's como variables en la formulación hamiltoniana, querríamos que fueran las  $2n$  constantes de movimiento requeridas, en una solución completa. En otras palabras, queremos que en toda la trayectoria en el espacio de fase  $(\alpha, \beta)$  consista de un solo punto fijo. Un modo de asegurar esto es que  $H'$  sea cero. Y debido a las ecuaciones canónicas, encontramos que  $\dot{\alpha}_i$  y  $\dot{\beta}^i$  son cero, y por lo tanto las  $\alpha$ 's y  $\beta$ 's son constantes. Haciendo estas consideraciones la ecuación (3.16) también sería una forma diferencial pero sin el término de  $H'$ . Vemos de la ecuación (3.16) la función principal es de la forma  $S(q, \alpha, t)$ . Por lo tanto su diferencial total puede escribirse como

$$S = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt, \quad (3.20)$$

de nuevo asumimos un determinante no cero, i.e.,

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^1 \partial \alpha_i} \right| \neq 0, \quad (3.21)$$

y ahora igualando los coeficientes de las ecuaciones (3.16) y (3.20) obtenemos

$$-\beta^i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad (3.22)$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (3.24)$$

La ecuación (3.22) puede resolverse para las  $q$ 's como función de  $(\alpha, \beta, t)$  y esto provee la solución a el problema lagrangiano. Y luego sustituyendo las  $q$ 's en (3.23) obtenemos expresiones para las  $p$ 's como función de  $(\alpha, \beta, t)$ , por lo tanto completando la solución del problema de Hamilton. Claramente lo que también hemos hecho en la demostración es obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi, debido a que si luego de obtener las  $p$ 's sustituimos en (3.24), podemos escribir esta como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \quad (3.25)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi. Vemos entonces que hemos demostrado que una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi da la función principal de Hamilton  $S(q, \alpha, t)$  que provee el camino del sistema en el espacio de fases por diferenciación y manipulación algebraica. Entonces consideramos que el enunciado es afirmativo.

Para ser aún todavía más convincente esta demostración, podemos hacernos esta otra pregunta: ¿es necesaria cierta solución para  $S$  y así obtener una integración completa de las ecuaciones canónicas, o si cualquier solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi servirá?, que es prácticamente la misma pregunta que hemos respondido afirmativamente arriba, y claramente la respuesta a esta también sera afirmativa, pero nos da paso a formular el teorema de Jacobi, que enunciamos sin demostrar,



**Teorema:** Si  $S(q, \alpha, t)$  es cualquier solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \quad (3.26)$$

y si las ecuaciones

$$-\beta^i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad (3.27)$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad (3.28)$$

donde las  $\beta$ 's son constantes arbitrarias, son usadas para resolver para  $q^i(\alpha, \beta, t)$  y  $p_i(\alpha, \beta, t)$ ; entonces estas expresiones proveen la solución general de las ecuaciones canónicas asociadas con la hamiltoniana  $H(q, p, t)$ .

Este teorema debe quedar claro por la primera parte de la demostración, pero ahora sumando la segunda parte, y demostrando que es afirmativa, entonces vemos ahora claramente que cualquier solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser considerada como una función principal de Hamilton, sí y solo sí esta puede expresarse de la forma  $S(q, \alpha, t)$ , y como hemos visto podemos hacer esto sin perder generalidad asegurando que el resultado que hemos obtenido es consistente. Esto también puede verse por el hecho de que  $S$  es una función generadora de transformaciones canónicas, y cualquier función del espacio de fases decente es una función generadora del algún tipo, o de la suma de ellos, y por lo tanto esta  $S$  puede tener la forma de cualquier solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi y, ser una función generadora de transformaciones canónicas y ser la función principal de Hamilton del sistema.

## Problema 4

Demuestre que un sistema es integrable sí y solo sí existen sistemas de coordenadas canónicas en las que la ecuación de Hamilton-Jacobi es totalmente separable.

Solución:

Primero probemos el sentido  $\Rightarrow$ , es decir, que si un sistema es integrable entonces existen sistemas de coordenadas canónicas en las que la ecuación de Hamilton-Jacobi es totalmente separable.

Decimos un sistema hamiltoniano de  $n$  grados de libertad con hamiltoniana  $H(q, p)$ , donde  $(q, p)$  son algunas coordenadas canónicas, es integrable si existen  $n$  integrales de movimiento  $I_i$  linealmente independientes y en involución, i.e.

$$\{I_i, I_j\} = 0. \quad (4.1)$$

Sea entonces un sistema integrable, tenemos  $n$  integrales de movimiento y  $2n$  coordenadas  $(q, p)$ , podemos por la independencia lineal, despejar  $n$  de las coordenadas en función de las otras  $n$  y de las integrales de movimiento, y lo haremos para los impulsos  $p$

$$p_i = \pi_i(q, I). \quad (4.2)$$

En coordenadas  $(q, I)$  la uno forma diferencial  $\omega = \sum_i p_i dq^i$  estará dada por

$$\omega = \sum_i \pi_i(q, I) dq^i, \quad (4.3)$$

y la forma simpléctica  $\gamma = d\omega$  toma la forma

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum ik \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial \pi_i}{\partial I_k} dI_k \right) \wedge dq^i \\ &= \sum_{k < i} \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial q^k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial q^i} \right) dq^k \wedge dq^i + \sum_{ik} \frac{\partial \pi_i}{\partial I_k} dI_k \wedge dq^i.\end{aligned}$$

Ahora debido a que  $\{I_l, I_m\} = \gamma[V_{I_m}, V_{I_l}]$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\{I_l, I_m\} &= \sum_{k < i} \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial q^k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial q^i} \right) dq^k \wedge dq^i [V_{I_m}, V_{I_l}] + \sum_{ik} \frac{\partial \pi_i}{\partial I_k} dI_k \wedge dq^i [V_{I_m}, V_{I_l}] \\ &= \sum_{k < i} \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial q^k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial q^i} \right) (\{q^k, I_m\}\{q^i, I_l\} - \{q^i, I_m\}\{q^k, I_l\}) \\ &\quad + \sum_{ik} \frac{\partial \pi_i}{\partial I_k} (\{I_k, I_m\}\{q^i, I_l\} - \{I_k, I_l\}\{q^i, I_m\}),\end{aligned}$$

y como las  $I_i$  están en involución, sus paréntesis de Poisson son cero y tendremos que para que se cumpla  $\{I_l, I_m\}$  necesariamente debe cumplirse que

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q^k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial q^i} = 0. \quad (4.4)$$

Y con esta expresión, si consideramos a las  $I$  como parámetros independientes, vemos que la expresión

$$\sum_i \pi_i(q, I) dq^i, \quad (4.5)$$

es integrable, esto es, existe una función  $F(q, I)$  tal que

$$\pi_i(q, I) = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad (4.6)$$

pero  $\pi_i$  es  $p_i$ , por lo que  $F(q, I)$  puede ser utilizada como una función generadora de transformaciones canónicas de tipo dos, y al complementarla con

$$Q^i = \frac{\partial F}{\partial I_i}, \quad (4.7)$$

obtenemos una transformación canónica de coordenadas

$$(q, p) \leftrightarrow (Q, I), \quad (4.8)$$

que nos lleva a un sistema canónico de coordenadas donde los impulsos son las integrales de movimiento. En estas coordenadas la hamiltoniana resulta ser función únicamente de las  $I$ , i.e.

$$H = H(I_1, \dots, I_n). \quad (4.9)$$

Si ahora recordamos la expresión para la ecuación de Hamilton-Jacobi para una hamiltoniana independiente del tiempo,

$$H(q^1, \dots, q^n, \frac{\partial G}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial q^n}) = -\frac{\partial G}{\partial t}. \quad (4.10)$$

con

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q^i}. \quad (4.11)$$

Y la expresamos para nuestro sistema con  $H(I)$ , tendríamos que

$$H\left(\frac{\partial G}{\partial Q^i}\right) = -\frac{\partial G}{\partial t}, \quad (4.12)$$

donde

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial Q^i} = I_i = c_i \quad (4.13)$$

donde  $c_i$  son los valores constantes para las integrales de movimiento. Claramente esta ecuación de Hamilton-Jacobi es completamente separable debido a que como cada lado depende de solamente una variable, el único modo de que se cumpla esta igualdad es que ambos lados de (4.12) sean iguales a una misma constante, lo cual nos permite separar esta ecuación directamente. Con esto hemos demostrado que si el sistema es integrable, existen transformaciones canónicas que nos llevan a que la ecuación de Hamilton-Jacobi sea completamente totalmente separable.

Ahora probemos  $\Leftarrow$ , es decir si existe un sistema canónico de coordenadas en que la ecuación de Hamilton-Jacobi es totalmente separable, entonces el sistema es integrable.

Sea entonces un sistema canónico de coordenadas  $(Q, I)$  tal que se cumpla que

$$\frac{\partial G}{\partial Q^i} = c_i, \quad (4.14)$$

donde la  $G$  es una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, y las  $c_i$  son unas constantes. Pero sabemos que el hecho de que la ecuación de Hamilton-Jacobi sea separable implica que

$$\frac{\partial G}{\partial Q^i} = I_i, \quad (4.15)$$

por lo tanto  $I_i = c_i$ , y estas se escogen de manera tal que sean integrales de movimiento en involución. Ahora debido a que las  $I$  son constantes, por las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial Q^i} = 0, \quad (4.16)$$

por lo tanto la hamiltoniana solo será función de las  $I$ , es decir

$$H = H(I_i). \quad (4.17)$$

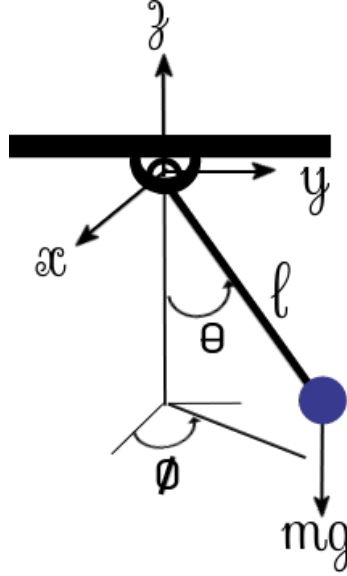
Esto quiere decir que en nuestra hamiltoniana, al no depender de las  $Q$ , existirán  $n$  integrales de movimiento, que están aseguradas como integrales de movimiento debido a que partimos de una hamiltoniana que no dependía del tiempo. Ahora estas  $I$  deben ser linealmente independientes para poder considerarse como coordenadas y además cumplir las relaciones principales de Poisson [6], con las que aseguramos que las  $I$  serán integrales de movimiento en involución. Por lo tanto hemos encontrado unas coordenadas en las que la ecuación de Hamilton-Jacobi es totalmente separable, que también nos garantizan que existirán  $n$  integrales de movimiento linealmente independientes y en involución, y por lo tanto el sistema es integrable, lo cual culmina la segunda parte de la demostración. Destacamos que no es el único modo de demostrar esto, y existen modos mucho más formales, los cuales pueden encontrarse en [6].

## Problema 5

Reduzca a cuadraturas por el método de Liouville el ejemplo del péndulo esférico.

Solución:

Debajo se encuentra un diagrama del péndulo esférico,



**Figura 1:** Péndulo esférico.

recordamos que para el péndulo esférico la lagrangiana se escribe como

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta, \quad (5.1)$$

podemos ahora escribir la hamiltoniana del sistema, primero obteniendo los momentos conjugados para las variables  $\theta$  y  $\phi$ ,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad (5.2)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta, \quad (5.3)$$

de donde obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \quad (5.4)$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.5)$$

y ahora utilizando

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^2(q, p) - L, \quad (5.6)$$

la hamiltoniana del péndulo esférico resulta

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta. \quad (5.7)$$

Podemos notar ahora dos cosas. Primero, debido a que la coordenada  $\phi$  es ignorable según la forma de la lagrangiana, entonces su momento conjugado se conservará, es decir que  $p_\phi$  es constante, y además debido a que la energía cinética es una forma cuadrática de las velocidades y que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, entonces la hamiltoniana es igual a la energía total del sistema, que también será una integral de movimiento. Usando la notación del método de Liouville, podemos escribir esto de la siguiente forma

$$\frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta = I_1 = E, \quad (5.8)$$

$$p_\phi = I_2. \quad (5.9)$$

Ahora hemos encontrado entonces dos integrales de movimiento, nos preguntamos ahora si están en involución, es decir si

$$\{I_1, I_2\} = 0, \quad (5.10)$$

para ver esto recordamos la expresión para los paréntesis de Poisson,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \theta} \frac{\partial I_2}{\partial p_\theta} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\theta} \frac{\partial I_2}{\partial \theta} + \frac{\partial I_1}{\partial \phi} \frac{\partial I_2}{\partial p_\phi} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\phi} \frac{\partial I_2}{\partial \phi} = 0. \quad (5.11)$$

Por lo tanto hemos demostrado que las dos integrales de movimiento que hemos encontrado están en involución, y debido a que hay tantas integrales de movimiento en involución como grados de libertad el sistema es integrable. Esto quiere decir que la uno forma  $\omega = \sum_i p_i dq^i$ , que en términos de nuestras coordenadas y definiciones tiene la forma (despejando  $p_\theta$  de (5.8)),

$$\omega = \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)} d\theta + I_2 d\phi, \quad (5.12)$$

utilizando el teorema de Liouville es integrable, y al integrarla obtenemos

$$F = \int \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)} d\theta + I_2 \phi. \quad (5.13)$$

Y en vistas del mismo teorema podemos ver entonces a  $F(q, I)$  como una función generadora de tipo dos, que al complementarla con

$$Q^i = \frac{\partial F(q, I)}{\partial I_i}, \quad (5.14)$$

obtenemos una transformación canónica de coordenadas

$$(q, p) \leftrightarrow (Q, I), \quad (5.15)$$

que nos lleva a un sistema canónico de coordenadas donde los impulsos son las integrales de movimiento. Ahora calculando las  $Q^i$  utilizando (5.14), obtenemos

$$Q^1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = \int \frac{ml^2}{\sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta, \quad (5.16)$$

$$Q^2 = \phi - \int \frac{I_2}{\sin^2 \theta \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta. \quad (5.17)$$

Y en nuestro nuevo sistema canónico  $(Q^1, Q^2, I_1, I_2)$  tenemos

$$H = I_1 = E, \quad (5.18)$$

por lo que

$$\dot{Q}^1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = 1, \quad (5.19)$$

y

$$\dot{Q}^2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = 0. \quad (5.20)$$

Y de estas ecuaciones podemos escribir, llamando a las constantes de integración  $\beta^1$  y  $\beta^2$  respectivamente,

$$Q^1 = t + \beta^1, \quad (5.21)$$

$$Q^2 = \beta^2, \quad (5.22)$$

y utilizando estos resultados las ecuaciones (5.16) y (5.17), quedan como

$$t = -\beta^1 + \frac{\partial F}{\partial I_1} = \int \frac{ml^2}{\sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta. \quad (5.23)$$

$$\phi = \beta^2 + \int \frac{I_2}{\sin^2 \theta \sqrt{2ml^2 \left( I_1 - mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right)}} d\theta. \quad (5.24)$$

Con lo cual hemos reducido el péndulo esférico a cuadraturas utilizando el método de Liouville.

## Referencias

- [1] R. Rashed, “*Géométrie et dioptrique au Xe siècle: Ibn Sahl, Al-Quhi et Ibn Al-Haytham*”, Las Belles Lettres, 1993.
- [2] D. Holm, *Geometric Mechanics, Part I: Dynamics and Symmetry*, World Scientific, Imperial College Press, 2008.
- [3] H. Römer, *Theoretical Optics: An introduction*, Wiley-VCH, 2005.
- [4] D. Greenwood, *Classical Dynamics*, Dover Publications, 1997.
- [5] M. Ardema, *Analytical Dynamics: Theory and Applications*, Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2005.
- [6] R. Abraham y J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2da edición, Addison-Wesley, 1978.