Mecánica Clásica Tarea # 12

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1

Demuestre que entre los paréntesis de Poisson y los de Lagrange existe la relación de inversión

$$\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} = \delta_{\beta\gamma},$$

donde $u_\alpha(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$, $\alpha = 1, \ldots, 2n$ y (q,p) es un sistema canónico de coordenadas.

<u>Solución:</u>

Para demostrar esto utilizaremos la definición de cada uno de los paréntesis y las sustituiremos directamente. El paréntesis de Lagrange para las coordenadas canónicas (q,p) y aplicados al problema en cuestión se escribe como

$$[u_\alpha, u_\beta] = \sum_i^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha} \right), \tag{1.1}$$

y el paréntesis de Poisson se escribe como

$$\{u_\alpha, u_\gamma\} = \sum_j^n \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right). \tag{1.2}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} &= \sum_{\alpha=1}^{2n} \left[\sum_i^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha} \right) \right] \left[\sum_j^n \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right) \right] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_i^n\sum_j^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha} \right) \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_i^n\sum_j^n \left[\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right. \\
&\left. - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} + \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right].
\end{aligned}$$

Ahora evaluando estos términos vemos que

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j} = \delta^i_j, \tag{1.3}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j} = 0, \tag{1.4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j} = 0, \tag{1.5}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j j} = \delta^i_j. \tag{1.6}$$

Donde δ^i_j es la delta de Kronecker. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} &= \sum_i^n\sum_j^n\left(\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j}\delta^i_j + \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j}\delta^i_j\right)\\ &= \sum_i^n\left(\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_i} + \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^i}\right).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Haciendo ahora la sumatoria en i vemos que esta expresión debe ser igual a la delta de Kronecker para β y γ, por lo tanto

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} = \delta_{\beta\gamma}.} \tag{1.8}$$

Que era lo que se pidió demostrar, con lo cual vemos que los paréntesis de Poisson y los paréntesis de Lagrange forman matrices inversas la una para la otra.

Problema 2

Demuestre por tres vías distintas que las transformaciones

$$\begin{aligned}q^1 &= \frac{\sqrt{2P_1}\operatorname{sen} Q^1 + P_2}{\sqrt{m\omega}}\\ q^2 &= \frac{\sqrt{2P_1}\cos Q^1 + Q^2}{\sqrt{m\omega}}\\ p_1 &= \frac{\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1}\cos Q^1 - Q^2)}{2}\\ p_2 &= \frac{\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1}\operatorname{sen} Q^1 - P_2)}{2},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}q^1 &= Q^1\cos\lambda + \frac{P_2\operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\\ q^2 &= Q^2\cos\lambda + \frac{P_1\operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\\ p_1 &= -m\omega Q^2\operatorname{sen}\lambda + P_1\cos\lambda\\ p_2 &= -m\omega Q^1\operatorname{sen}\lambda + P_2\cos\lambda,\end{aligned}$$

son canónicas.

Solución:

Problema 3

Considere la función $F(q,p) = pq - \frac{1}{2m}p^2 t$ encuentre TODAS las transformaciones canónicas generadas por esta función.

Solución:

Problema 4

Encuentre las funciones generadoras para las transformaciones canónicas del problema 2.

Solución:

Problema 5

Considere una de las regiones acotadas (aquellas donde las trayectorias son regulares y acotadas) del espacio de fase de un péndulo simple, ¿será posible encontrar una transformación canónica de coordenadas de tal forma que, en las nuevas coordenadas, tengamos una coordenada ignorable?, note que esto es similar al caso del oscilador armónico que estudiamos como ejemplo. En caso de una respuesta afirmativa calcule esta transformación (puede dejar algunas integrales indicadas) ¿Será posible esto en las tres regiones acotadas? ¿Será posible esto de manera global?, esto es, una sola transformación para todo el espacio de fase (excepto por algunos puntos o lineas).

Solución:

Problema 6

Al hacer una transformación de punto dependiente del tiempo la hamiltoniana debe cambiarse por medio de

$$H' = H + \sum_j p_j \frac{\partial q^j}{\partial t},$$

ver fórmula (189) de las notas.

Al aplicar una transformación canónica de coordenadas dependiente del tiempo la hamiltoniana debe cambiar por

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

donde F es la función generadora de la transformación.

Encuentre la relación entre estos dos resultados. Así mimos encuentre la relación entre la fórmula para la integral de movimiento ante una simetría que se vio en el contexto de la formulación lagrangiana y los generadores infinitesimales del grupo de dicha simetría.

Solución:

Problema 7

Cuando la hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo las fórmulas para el campo vectorial hamiltoniano $\gamma[\bullet, V_H] = dH$, en el espacio de fase, y $\Gamma[V_H, \bullet] = 0$ en el espacio de fase extendido, son equivalentes. Demuestre esto de manera global, esto es, sin utilizar coordenadas.

Solución: