

# Mecánica Clásica Tarea # 2

Favio Vázquez\*

*Instituto de Física. Universidad Nacional Autónoma de México*

## 1. Problema 1.

Usando una computadora trace el diagrama de fase de estas dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Para la siguiente ecuación diferencial,

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x} - x + x^3 = 0.$$

Trace los campos vectoriales correspondientes (use la computadora). Haga un análisis de los puntos críticos y del comportamiento de las trayectorias en sus entornos.

### Solución:

Para la solución a las primeras dos ecuaciones solo nos piden que tracemos el diagrama de fases usando la computadora. Utilizamos Matplotlib<sup>1</sup> la librería para hacer graficar por excelencia de Python. El código completo de la realización de esta figura se encuentra en un repositorio libre de GitHub, hecho con Jupyter Notebooks. Puede encontrarse en el siguiente link: GitHub-Repo

Podemos ver que claramente hay un punto crítico en el origen y que coexisten en el espacio de fases un foco estable y uno inestable, donde obviamente debe haber una separación entre ellos para que puedan convivir en el espacio, la cual se puede observar claramente también.

El código<sup>2</sup> que finalmente hace el gráfico de la figura (1) es el siguiente:

```
1 Y, X = np.mgrid[-3:3:100j, -3:3:100j]
2 a = np.mgrid[-10:10:100j]
3 U = X - Y - X*(X**2+Y**2)
4 V = X + Y - Y*(X**2+Y**2)
5
```

\*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

<sup>1</sup><http://matplotlib.org/>

<sup>2</sup>La mayoría de los códigos que se utilizaron para hacer las gráficas y figuras de esta tarea se encuentran en el repositorio mencionado

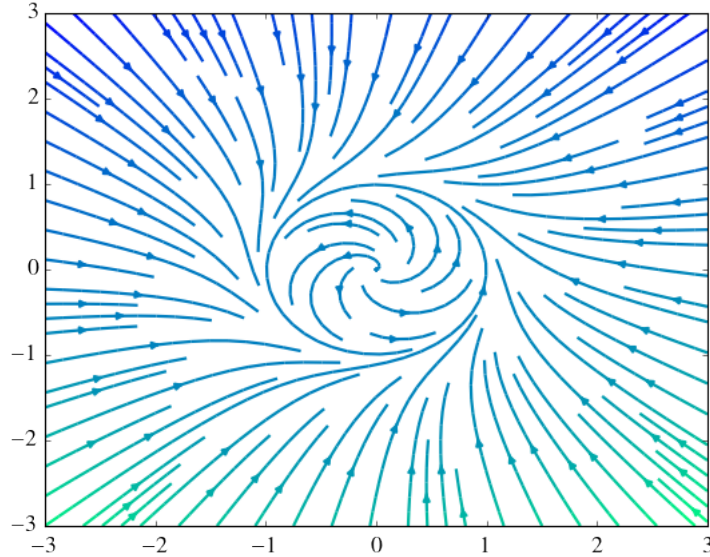


Figura 1: Problema 1 parte 1

```

6 plt.streamplot(X, Y, U, V, color=V, density=[1.2, 1.2],
7               linewidth=2, cmap=plt.cm.winter)
8
9 plt.show()

```

No llenaremos la tarea de código, por lo que para el lector interesado, se recomienda ir al link del repositorio dado. Para la parte dos del problema nos piden que hagamos un análisis de los puntos críticos y del comportamiento de las trayectorias en sus entornos. Para eso podemos reescribir la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\epsilon y + x - x^3\end{aligned}\tag{1.1}$$

Haremos un análisis de estabilidad para estas ecuaciones de una forma muy conocida, utilizando la matriz jacobiana y estudiando el comportamiento de los puntos críticos en la misma, lo cual nos dará información sobre el comportamiento de las trayectorias en sus entornos.

Para eso escribiremos (1.1) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y = f(x, y) \\ \dot{y} &= -\epsilon y + x - x^3 = g(x, y)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Para hallar los puntos críticos hacemos 0 a  $f(x, y)$  y a  $g(x, y)$  en (1.2)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y = 0 \\ g(x, y) &= -\epsilon y + x - x^3 = \epsilon y - x + x^3 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Claramente vemos de (1.3) que  $y = 0$  será siempre parte de los puntos críticos, y  $g(x, y)$  vemos que será cero si  $x = 0$ ,  $x = 1$  o  $x = -1$ . Por lo tanto los puntos críticos son

$$\begin{aligned} (0, 0) \\ (1, 0) \\ (-1, 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para analizar el comportamiento de las trayectorias al rededor de esos puntos, primero escribimos la matriz jacobiana, que se construye como

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 1 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Ahora para analizar el comportamiento debemos evaluar la matriz jacobiana en los puntos críticos y utilizar los conocidos criterios para los puntos críticos.

Para el punto crítico  $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Para encontrar los eigenvalores de (1.6) usamos la ecuación

$$\lambda^2 - (\text{traza } J)\lambda + \det J = 0 \quad (1.7)$$

entonces para  $J(0, 0)$

$$\lambda^2 + \epsilon\lambda - 1 = 0 \quad (1.8)$$

Esta ecuación resulta en que los eigenvalores para  $J(0, 0)$  son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\epsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2} \quad (1.9)$$

Por lo que vemos que tenemos que  $\lambda_1 > 0$  y que  $\lambda_2 < 0$  para todo valor de  $\epsilon$ , y como ambos son reales, tendremos un punto silla. En este tipo de punto crítico tendremos un comportamiento hiperbólico en el que los ejes coordenados son las asíntotas, una de las coordenadas tenderá a infinito, mientras que la otra a cero.

Para los puntos críticos  $(\pm 1, 0)$ ,

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Que tiene por eigenvalores utilizando la ecuación (1.7),

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\epsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 8}}{s} \quad (1.11)$$

Donde vemos que si  $\epsilon > 0 \wedge \epsilon > 8$  tendremos dos valores negativos reales y un nodo estable, en el cual las trayectorias se comprimen asintóticamente hacia cero, si  $\epsilon < 0 \wedge \epsilon > 8$  tendremos dos valores positivos reales y un nodo inestable, en este caso las trayectorias se dilatan asintóticamente hacia el infinito. En el caso que  $\epsilon > 0 \wedge \epsilon < 8$  tendremos eigenvalores complejos pero con la parte real positiva, lo que constituye un foco inestable, en el cual las trayectorias se alejarán exponencialmente (y asintóticamente) de cero, por último cuando  $\epsilon < 0 \wedge \epsilon < 8$ , tenemos de nuevo raíces complejas pero ahora con la parte real negativa, en este caso tenemos un foco estable, en el que las trayectorias se acercan exponencialmente (y asintóticamente) a cero.

Para el caso en que  $\epsilon = 0$ , tendremos dos centros, es decir curvas cerradas concéntricas con el origen. Entonces podemos construir los diagramas de fase y demostrar lo que hemos dicho (arriba).

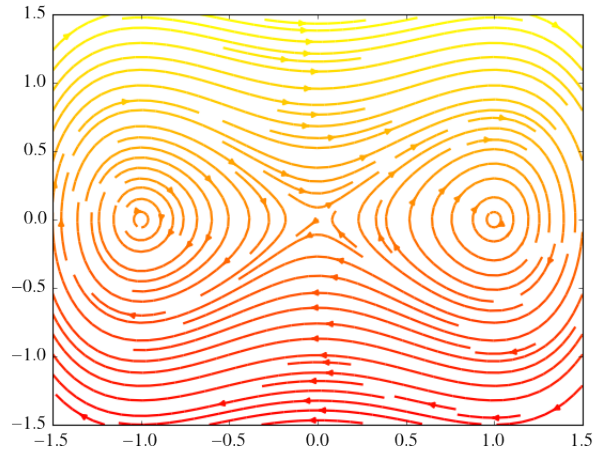


Figura 2: Problema 1 parte 2. Centros

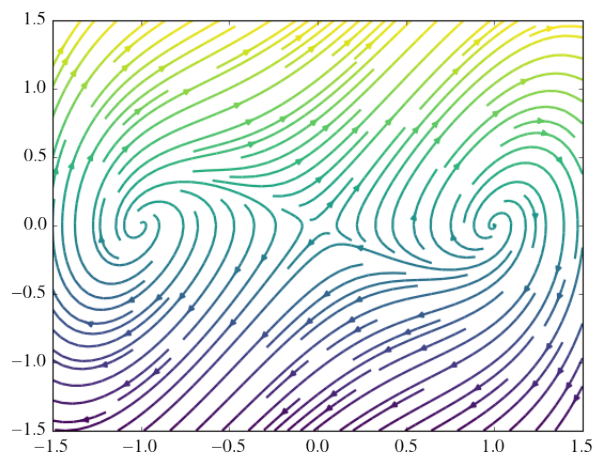


Figura 3: Problema 1 parte 2. Focos inestables

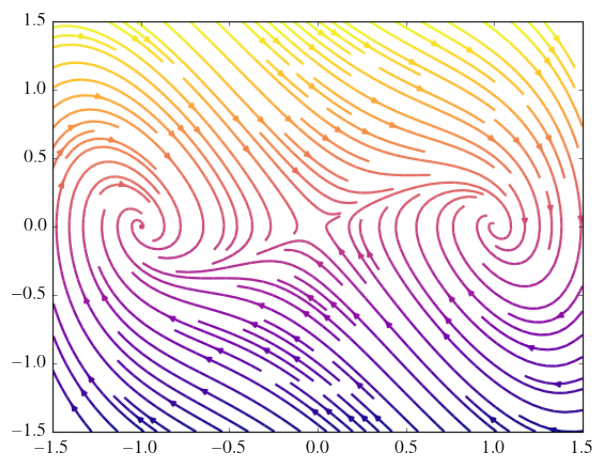


Figura 4: Problema 1 parte 2. Focos estables

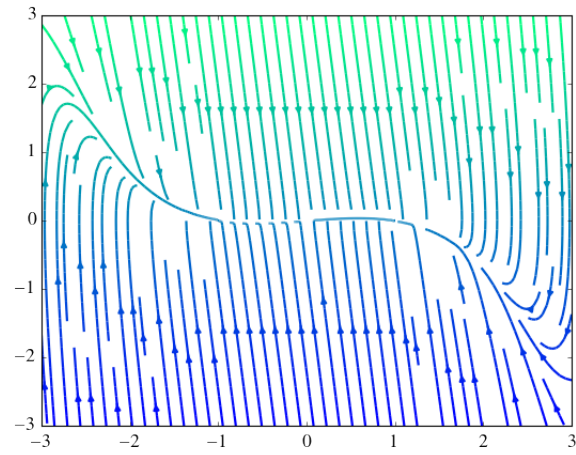


Figura 5: Problema 1 parte 2. Nodos estables

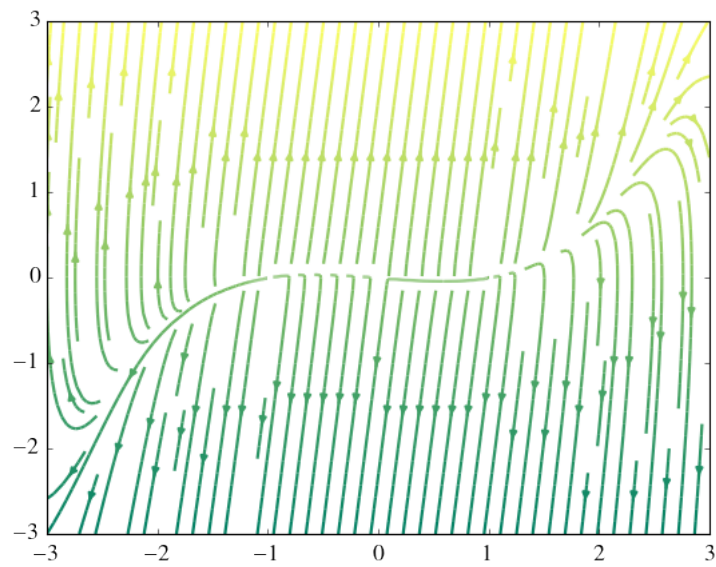


Figura 6: Problema 1 parte 2. Nodos inestables

## 2. Problema 2

¿Podrían las funciones

$$\begin{aligned}x(t) &= at^2 + x_0, \\ y(t) &= ct x_0 + (1-t)y_0,\end{aligned}$$

ser la solución de una ecuación diferencial de la forma?

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

Solución:

Si las ecuaciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial, entonces deben cumplir con todas las propiedades de una solución a una ecuación diferencial. Dando un vistazo a las ecuaciones dadas, podremos demostrar que estas ecuaciones no cumplen con todas las propiedades para ser solución a una ecuación diferencial. Principalmente es que podemos encontrar una infinidad de valores para el cual el “espacio de fases” es multivaluado, es decir que le asigna más de un vector a un punto. Podemos ver esto de un modo simple, si fijamos el valor de  $x_0$  como  $y_0/c$ , entonces obtendremos que

$$\begin{aligned}x(t) &= at^2 + \frac{y_0}{c} \\ y(t) &= \cancel{ct} \frac{y_0}{\cancel{c}} + 1 - ty_0 = \cancel{ty_0} + 1 - \cancel{ty_0} = 1\end{aligned}\tag{2.1}$$

Tenemos entonces una familia de curvas que se intersectan en el punto  $(a, cx_0)$ . Podemos graficar un ejemplo de estas curvas para unos valores de  $a$  entre -10 y 10, y de  $x_0$ , igual lo cual verifica nuestra proposición. Debido que para este valor de  $x_0$ , las curvas tienen este comportamiento, es una condición suficiente para decir que estas ecuaciones no pueden ser solución de una ecuación diferencial de la forma planteada.

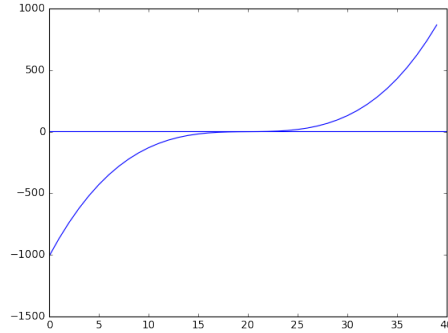


Figura 7: Problema 2.

### 3. Problema 3.

Haga una clasificación de los puntos críticos regulares en un espacio de fase de tres dimensiones y trace un diagrama de fase para cada uno de ellos.

Solución:

En este caso la ecuación característica será cúbica real. Una ecuación cúbica real puede tener tres raíces reales o una real y dos complejas, donde las complejas son complejas conjugadas. Son posibles entonces varios casos, dependido del lugar de las raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  en el plano de la variable compleja  $\lambda$ .

Para la clasificación seguiremos la de V.I Arnold en [1]. En la cual debemos fijarnos en el orden y signo de partes reales. Existen 10 casos “robustos”, y una serie de casos “degenerados” cuando la parte real de una de las raíces es cero o igual a la parte real de una raíz que no es su complejo conjugado, para la solución de este problema solo nos enfocaremos en estudiar los robustos.

En la figura (8) podemos ver una representación pictórica de los 10 casos posibles que consideramos.

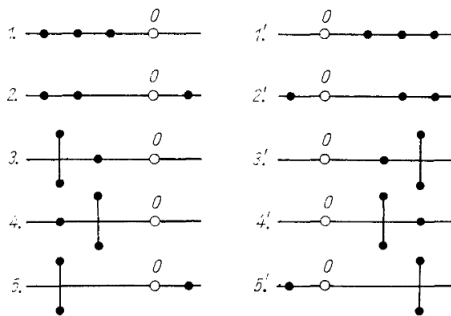


Figura 8: Los eigenvalores de un operador real  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$



**Caso 1.**  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ : El espacio de fase consiste en contracciones asimptóticas a lo largo de las tres direcciones.

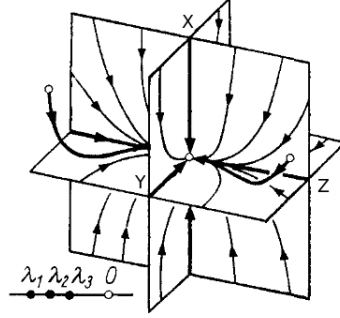


Figura 9: Caso 1.  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$

**Caso 2.**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ : El espacio de fase consiste en contracciones asimptóticas en dos direcciones y dilatación asimptótica a lo largo del tercero.

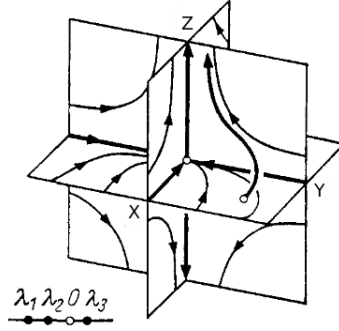


Figura 10: Caso 2.  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$

**Caso 3.**  $\text{Re } \lambda_{1,2} < \lambda_3 < 0$ : El espacio de fase consiste en una contracción asimptótica en la dirección de  $Z$ , y una rotación con una contracción asimptótica más rápida en el plano  $(X, Y)$ .

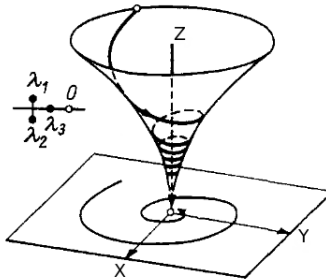


Figura 11: Caso 3.  $\text{Re } \lambda_{1,2} < \lambda_3 < 0$

**Caso 4.**  $\lambda_3 < \text{Re } \lambda_{1,2} < 0$  : El espacio de fase consiste en en una contracción asintótica en la dirección de  $Z$ , y una rotación con una contracción asintótica menos rápida en el plano  $(X, Y)$ .

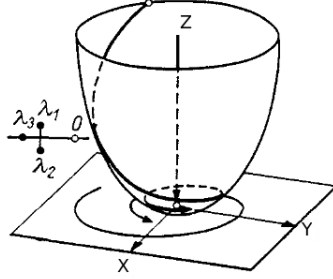


Figura 12: Caso 4.  $\lambda_3 < \text{Re } \lambda_{1,2} < 0$

**Caso 5.**  $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$ : El espacio de fase consiste en una dilatación asintótica en la dirección de  $Z$ , y rotación con contracción asintótica en el plano  $(X, Y)$

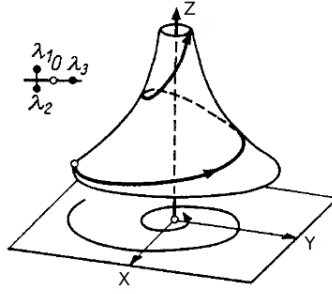


Figura 13: Caso 5.  $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$

**Caso 6.**  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ : El espacio de fase consiste en dilataciones asintóticas a lo largo de las tres direcciones.

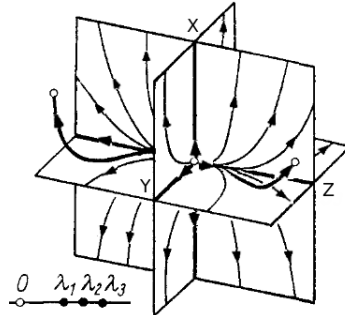


Figura 14: Caso 6.  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$

**Caso 7.**  $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$ : El espacio de fase consiste en dilataciones asintóticas en dos direcciones y contracción asintótica en la tercera.

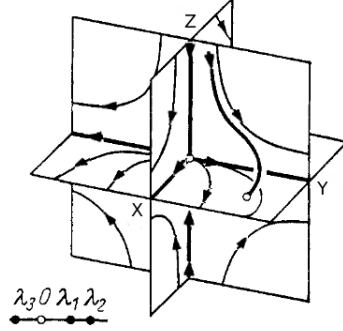


Figura 15: Caso 7.  $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$

**Caso 8.**  $0 > \lambda_3 > \text{Re } \lambda_{1,2}$ : El espacio de fase consiste en una dilatación asintótica en la dirección de  $Z$  y rotación con una dilatación más rápida en el plano  $(X, Y)$ .

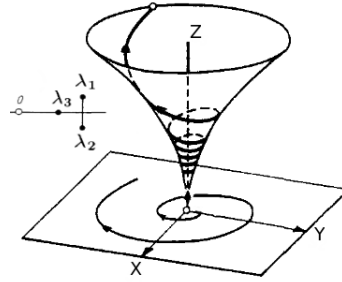


Figura 16: Caso 8.  $0 > \lambda_3 > \text{Re } \lambda_{1,2}$

**Caso 9.**  $0 > \text{Re } \lambda_{1,2} > \lambda_3$ . El espacio de fases consiste en una dilatación asintótica en la dirección de  $Z$ , y rotación con una dilatación asintótica menos rápida en el plano  $(X, Y)$ .

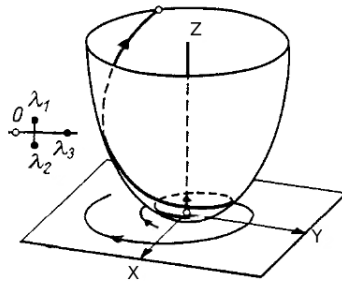


Figura 17: Caso 9.  $0 > \text{Re } \lambda_{1,2} > \lambda_3$

**Caso 10.**  $\lambda_3 > 0 > \operatorname{Re} \lambda_{1,2}$ . El espacio de fases consisten en una contracción asintótica en la dirección de  $Z$ , y una dilatación asintótica en el plano  $(X, Y)$ .

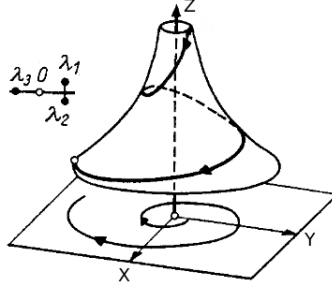


Figura 18: Caso 10.  $\lambda_3 > 0 > \operatorname{Re} \lambda_{1,2}$

#### 4. Problema 4.

Se han encontrado cuatro puntos críticos de una ecuación diferencial en la esfera de dos dimensiones ( $R^2$  cerrado al incluir el punto al infinito). Uno es un foco estable y los otros tres son puntos silla. ¿Será posible que la ecuación no tenga más puntos críticos? Explique su respuesta.

Solución:

Debido a que nos dan cuatro puntos críticos, debemos considerar si éstos pueden coexistir en la esfera. El índice de una esfera debe ser dos. Debido a que tenemos 3 puntos sillar, y cada uno tiene índice -1, entonces es imposible construir un diagrama de fases apropiado con solamente tres puntos silla y un foco estable que tiene índice +1. Harían falta completar con otros puntos críticos para que la esfera tenga índice +2.

#### 5. Problema 5.

Dé una demostración formal de la equivalencia matemática entre una ecuación diferencial y un flujo.

Solución:

Para poder demostrar la equivalencia matemática entre una ecuación diferencial y un flujo, primero hay que demostrar la equivalencia entre una ecuación diferencial y un campo vectorial. No demostraremos todas las definiciones y teoremas (encubiertos) que utilizaremos debido a que se haría extremadamente complicada, y larga la solución al problema, lo mismo para la segunda parte de la demostración.

Asumamos que en cada punto de una cierta región del plano, se ha escogido una línea recta que pasa por este punto. En este caso diremos en que ha sido

definido un campo direccional en la región. Se dice que un campo direccional es continuo si las líneas en el campo dependen continuamente del punto de adjunción. Una línea, que en cada uno de sus puntos, es tangente a un campo vectorial es llamada una línea integral del campo direccional.

El problema geométrico de encontrar curvas integrales es escrito analíticamente como el problema de encontrar soluciones a una ecuación diferencial. Una condición necesaria y suficiente para que el gráfico de una función  $\phi$  sea una curva integral es que se cumpla la siguiente relación para todo  $t$  en un intervalo dado:

$$\frac{d\phi}{dt} = v(t, \phi(t)) \quad (5.1)$$

Llamamos a una función  $\phi$  una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = v(t, x) \quad (5.2)$$

Si satisface la ecuación (5.1), es decir si se hace una identidad cuando la función  $\phi$  se sustituye por  $x$  en la ecuación.

La solución  $\phi$  satisface la condición inicial  $(t_0, x_0)$  si  $\phi(t_0) = x_0$ . Por lo que una solución es una función definida en el intervalo cuyo gráfico es una curva integral; la solución satisface la condición inicial  $(t_0, x_0)$  si la integral pasa por el punto dado.

Dadas estas simples definiciones entonces podemos decir que cada ecuación diferencial (5.2) determina un campo direccional en el plano: la línea adjunta al punto  $(t, x)$  tiene pendiente  $v(t, x)$ . Este campo se llama el campo de direcciones de  $v$  o el campo direccional de la ecuación (5.2).

Si ahora consideramos la ecuación, y usando las definiciones anteriores

$$\dot{x} = v(t), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

Esta ecuación describe un proceso evolutivo con un espacio de fases unidimensional. El lado derecho de (5.3) define un campo vectorial (de velocidades de fase): un vector  $v(x)$  está adjunto al punto  $x$ . Por simpleza hemos asumido una ecuación autónoma, pero la generalidad no se pierde. Podemos decir ahora que la solución  $x = \phi(t)$  de la ecuación  $\dot{x} = v(x)$  con un lado derecho continuo no igual a cero, que satisface la condición inicial  $(t_0, x_0)$  está dada por la fórmula de Barrow <sup>3</sup>, la cual también define una solución en el caso de campos direccionales.

Hemos entonces encontrado la equivalencia matemática entre ecuaciones diferenciales y campos vectoriales, para ser completos en la demostración, puede probarse además que la solución  $\phi$  de la ecuación  $\dot{x} = v(x)$  con condiciones iniciales  $(t_0, x_0)$  y definida en un intervalo  $I$  del eje real

- Existe para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $x_0 \in I$
- Es única en el sentido que dos soluciones con la misma condición inicial coinciden en alguna vecindad del punto  $t_0$

---

<sup>3</sup> $t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)}$

- Está dada por la fórmula de Barrow:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\phi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad \text{si } v(x_0) \neq 0,$$

$$\phi(t) \equiv x_0, \quad \text{si } v(x_0) = 0$$

Estamos ahora en posición para la demostración solicitada. Comenzamos por definir una transformación como un mapeo de uno a uno de un conjunto en si mismo. El producto  $fg$  de las transformaciones  $f$  y  $g$  de un conjunto es la transformación obtenida aplicando primer  $g$  y luego  $f$ , i.e.  $(fg)(x) = f(g(x))$ . La transformación inversa  $f^{-1}$  a  $f$  está definida por la condición de que si  $f$  lleva a  $x$  a  $y$ , entonces  $f^{-1}$  lleva a  $y$  a  $x$ .

Una colección de transformaciones de un conjunto se llama un grupo de transformación si contiene la inversa de cada una de sus transformaciones, y el producto de cualquiera de sus transformaciones. Podemos ver un grupo de una manera muy interesante: Sea  $A$  un grupo de transformación en el conjunto  $X$ . La multiplicación y la inversión definen mapeos  $A \times A \rightarrow A$  y  $A \rightarrow A$  (el par  $(f, g)$  va a  $fg$ , y el elemento  $g$  a  $g^{-1}$ ). Un conjunto dotado de estos dos mapeos se le llama un grupo abstracto, o simplemente un *grupo*. Entonces el concepto de grupo puede ser obtenido desde el de grupo de transformación simplemente ignorando que el conjunto siendo transformado.

Sea  $G$  un grupo y  $M$  un conjunto. Decimos que la *acción* del grupo  $G$  sobre el conjunto  $M$  está definida si a cada elemento  $g$  del grupo  $G$  le corresponde una transformación  $T_g : M \rightarrow M$  del conjunto  $M$ , al producto de cualquiera dos elementos del grupo le corresponde el producto de las transformaciones correspondientes de esos elementos, y a cualquiera dos elementos mutuamente inversos les corresponden transformaciones mutuamente inversas:  $T_{fg} = T_f T_g, T_{g^{-1}} = (T_g)^{-1}$ .

Un mapeo  $\phi : G \rightarrow H$  del grupo  $G$  al grupo  $H$  se llama un homeomorfismo si toma productos a productos e inversas a inversas:

$$\phi(fg) = \phi(f)\phi(g); \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1} \quad (5.4)$$

Entonces la acción de un grupo  $G$  en un conjunto  $M$  es un homeomorfismo del grupo  $G$  al grupo de todas las transformaciones del conjunto  $M$ .

Decimos que un grupo es conmutativo o *Abeliano* si el producto es independiente del orden de los factores  $fg = gf$  para cualquier dos elementos del grupo. Llamamos *grupo uniparamétrico de transformaciones de un conjunto* a la acción sobre el conjunto por el grupo de todos los números reales. Usualmente se denotan como una colección de transformaciones  $g^t$  parametrizadas por un parámetro real  $t$  tal que para cualquiera dos números  $s$  y  $t$ ,

$$g^{s+t} = g^s g^t, \quad g^{-t} = (g^t)^{-1} \quad (5.5)$$

Usualmente el parámetro  $t$  es llamado tiempo, y la transformación,  $g^t$  es llamada la transformación en tiempo  $t$ .

A los grupos uniparamétricos de transformaciones de un conjunto  $M$  se les llama flujos, con el espacio fase  $M$  (el espacio fase puede pensarse como lleno de un fluido, donde una partícula  $x$  pasa por el punto  $g^t x$  durante el tiempo  $t$ ). A las *órbitas* del flujo se llaman curvas de fase (o trayectoria).

Asumamos ahora que el conjunto  $M$  bajo consideración está dotado con la estructura de una variedad suave, y que está definido en un dominio abierto del espacio euclidiano. Un difeomorfismo es un mapeo que es suave, junto con su inversa. Podemos definir entonces a un *grupo uniparamétrico de difeomorfismos* como un grupo uniparamétrico de transformaciones cuyos elementos son difeomorfismos, y satisfacen una condición adicional, el que  $g^t x$  dependa suavemente de ambos argumentos  $t$  y  $x$ . También podemos definir un grupo uniparamétrico de transformaciones lineales como un grupo uniparamétrico de difeomorfismos cuyos elementos son transformaciones lineales.

Consideremos un grupo  $g^t$  uniparamétrico de difeomorfismos e un dominio de  $M$ . Definimos el vector de velocidad de fase del flujo  $g^t$  en el punto  $x$  en  $M$ , como la velocidad con la que el punto  $g^t x$  deja  $x$ , i.e.,

$$v(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g^t x) \quad (5.6)$$

Los vectores de velocidad de fase de un flujo en todos los puntos del dominio  $M$  forman un campo vectorial suave debido a que  $g^t$  depende suavemente de  $t$  y  $x$ . Y es llamado el campo de velocidades de fase.

Fijemos un punto  $x_0$  y estudiemos su movimiento bajo la acción del flujo  $g^t$ . En otras palabras consideremos el mapeo  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow M$ , definido como:  $\phi(t) = g^t x_0$ . Llegamos entonces al teorema principal que queremos demostrar:

**Teorema.** El mapeo  $\phi$  es una solución de la ecuación  $\dot{x} = v(x)$  con condición inicial  $\phi(0) = x_0$ .

En otras palabras, bajo la acción del flujo, el punto se mueve de manera tal que su vector de velocidad en cualquier instante, es igual al vector de velocidad de fase en el punto del espacio de fase en el que el punto que se mueve está localizado.

**Prueba.** La prueba surge simplemente de la propiedad de grupo:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=\tau} g^t x = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} g^{\tau+\epsilon} x = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} g^\epsilon (g^\tau x) = v(g^\tau x). \quad (5.7)$$

□

Entonces a cada grupo uniparamétrico de difeomorfismos (flujo) está asociada una ecuación diferencial (definida por el campo vectorial de velocidades de fase); las soluciones a esta ecuación son los movimientos de los puntos de fase bajo la acción del flujo. Lo cual culmina la demostración.

## Referencias

- [1] V.I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlang, 3ra edición, 1992.