Mecánica Clásica Tarea # 13

Favio Vázquez[*]

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1

Una partícula de masa m se mueve sobre el eje de las x sujeta a un potencial

$$V = a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right),$$

encuentre la trayectoria por el método de Hamilton-Jacobi.

Solución:

Tenemos una partícula que se mueve en sólo una dimensión en el eje x, por lo tanto podemos escribir la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2m}p_x^2, \tag{1.1}$$

y considerando la expresión que tenemos para el potencial, podemos escribir la hamiltoniana del sistema como[1]

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right). \tag{1.2}$$

Podemos ahora construir la ecuación de Hamilton-Jacobi, que queda expresada como

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right) = -\frac{\partial G}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Claramente esta ecuación se puede resolver por el método de separación de variables, y proponemos entonces que

$$G(x,t) = W(x) + T(t), \tag{1.4}$$

entonces la ecuación (1.3) se convierte en

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right) = -\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1.5}$$

[*] Correo: favio.vazquezp@gmail.com

[1] Debido a que la lagrangiana $L = T - V$ del sistema es independiente del tiempo y la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades, entonces la cantidad de Jacobi es la energía total del sistema, y al escribir a la cantidad de Jacobi en términos de x y p_x tenemos que también la hamiltoniana es la energía total del sistema, es decir $H = T + V$.

Debido a que el lado izquierdo de (1.5) depende únicamente de x y el derecho de t, el único modo de que esta expresión se cumpla es que ambos términos sean iguales a una misma constante que llamaremos α_1. Entonces,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right) = \alpha_1, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha_1. \tag{1.7}$$

De la segunda ecuación vemos que

$$T(t) = -\alpha_1 t, \tag{1.8}$$

y de la primera ecuación

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \left\{2m\left[\alpha_1 - a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right)\right]\right\}^{1/2}. \tag{1.9}$$

y entonces

$$W(x) = \int \left\{2m\left[\alpha_1 - a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right)\right]\right\}^{1/2} dx. \tag{1.10}$$

Por lo tanto tenemos que

$$G(x,t) = \int \left\{2m\left[\alpha_1 - a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right)\right]\right\}^{1/2} dx - \alpha_1 t. \tag{1.11}$$

Podemos hallar ahora $\beta_1 = \frac{\partial G}{\partial \alpha_1}$,

$$\beta_1 = -t + \int \frac{m dx}{\left\{2m\left[\alpha_1 - a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right)\right]\right\}^{1/2}} dx. \tag{1.12}$$

De la última ecuación podemos encontrar una ecuación para la trayectoria, $x(t)$, pero resulta casi imposible despejar a x de la misma, pero se ha encontrado en términos generales la trayectoria del sistema, ya que con encontrar estas expresiones, aunque quedan en términos de integrales, se considera resuelto el sistema, esto también se da ya que hemos encontrado una expresión para G que contiene toda la información del sistema, y obviamente la trayectoria. Para ser completos se muestra debajo el resultado de integrar la anterior ecuación, si se desea una expresión concreta para x se pueden utilizar algunas aproximaciones o series de potencia.

$$\frac{l\sec\left(\frac{x}{l}\right)\sqrt{\alpha_1\cos\left(\frac{2x}{l}\right)}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1 - a\sec^2\left(\frac{x}{l}\right)}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2\alpha_1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{l}\right)}{\alpha_1\cos\left(\frac{2x}{l}\right)+\alpha_1-2a}\right)}{2\sqrt{\alpha_1}} = -t - \beta_1. \tag{1.13}$$

Problema 2

Usando los ángulos de Euler como coordenadas, establezca la ecuación de Hamilton-Jacobi del trompo simétrico. ¿Se podrá resolver esta ecuación por separación de variables?; de ser esto posible encuentre la solución. Puede dejar integrales indicadas.

Solución:

En la figura de abajo se muestra un diagrama para trompo el simétrico,

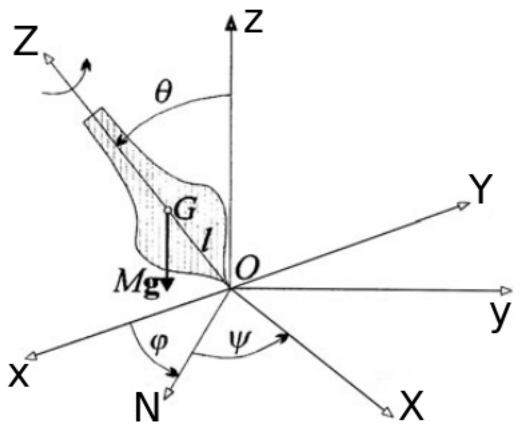

Figura 1: Trompo simétrico y los ángulos de Euler.

Para estudiar el trompo primero tomamos un sistema inercial (x, y, z) cuyo origen coincide con el punto fijo y el eje z coincidente con la vertical. Construimos también un sistema de referencia (X, Y, Z) anclado al cuerpo con el mismo origen y colocado a lo largo de los ejes principales de inercia del trompo, pondremos al eje Z coincidente con el eje de simetría. Utilizaremos la convención de denotar las componentes de un vector con respecto a los ejes del sistema inercial con letras minúsculas y con mayúsculas a las componentes con respecto al sistema anclado al cuerpo. El trompo simétrico presenta dos simetrías, una debida a que la fuerza de gravedad es siempre vertical, por lo que una rotación en torno a un eje vertical deja invariante al sistema y una segunda debida a la simetría propia del trompo. Por esta razón escogemos un sistema de coordenadas que contenga a un ángulo de rotación en torno al eje vertical y otro en torno al eje del trompo, y este sistema de coordenadas son los conocidos ángulos de Euler. En la figura (1) los ángulos de Euler quedan definidos en su forma estándar como los ángulos (θ, ϕ, ψ). Para no alargar más la discusión se asume que ya se conoce lo necesario referente a los ángulos de Euler, y que en estas coordenadas el vector de velocidad angular puede descomponerse en tres componentes, una de magnitud $\dot{\theta}$ en la dirección de la línea de nodos, N en la figura (1), una segunda de magnitud $\dot{\phi}$ en dirección del eje z y una de magnitud $\dot{\psi}$ en la dirección del eje Z. Utilizando esto y la figura (1) vemos que las componentes del vector velocidad angular pueden obtenerse de estas últimas por medio de

$$\begin{aligned}
\Omega_X &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi, \\
\Omega_Y &= -\dot{\theta}\operatorname{sen}\psi + \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi, \\
\Omega_Z &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

La energía cinética puede calcularse fácilmente en las coordenadas del cuerpo, ya que el tensor de inercia es constante y diagonal, aparte de que como tratamos con un trompo simétrico $I_X = I_Y = I$, y entonces

$$T = \frac{1}{2}[I(\Omega_X^2 + \Omega_Y^2) + I_Z\Omega_Z^2], \tag{2.2}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}\left[I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta) + I_Z(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2\right]. \tag{2.3}$$

La única fuerza que interviene es la de la gravedad cuyo potencial es

$$V = Mgl\cos\theta, \tag{2.4}$$

donde M es la masa del trompo, l es la distancia entre el centro de masa y el punto fijo, y g es la aceleración de la gravedad. Entonces la lagrangiana $L = T - V$ del trompo simétrico puede escribirse como

$$L = \frac{1}{2}\left[I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + I_Z(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2\right] - Mgl\cos\theta. \tag{2.5}$$

Podemos ver de la lagrangiana que las coordenadas ϕ y ψ son ignorables y por lo tanto se conservarán sus impulsos asociados. Para construir la lagrangiana necesitamos los impulsos generalizados conjugados a las coordenadas, que son los siguientes

$$p_\phi = \dot{\phi}(I\operatorname{sen}^2\theta + I_Z\cos^2\theta) + I_Z\dot{\psi}\cos\theta = \alpha_2, \tag{2.6}$$

$$p_\psi = I_Z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = \alpha_3, \tag{2.7}$$

$$p_\theta = I\dot{\theta}. \tag{2.8}$$

Con un poco de álgebra podemos escribir la hamiltoniana como

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{p_\theta^2}{I} + \frac{p_\psi^2}{I_Z} + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{I\operatorname{sen}^2\theta}\right] + Mgl\cos\theta. \tag{2.9}$$

Y la ecuación de Hamilton-Jacobi será entonces

$$\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{2I\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial G}{\partial\phi} - \frac{\partial G}{\partial\psi}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2I_Z}\left(\frac{\partial G}{\partial\psi}\right)^2 + Mgl\cos\theta = -\frac{\partial G}{\partial t}. \tag{2.10}$$

Como la hamiltoniana no depende del tiempo, ni de ϕ ni ψ proponemos una solución de la forma

$$G = \alpha_1 t + W(\phi,\theta,\psi) = -\alpha_1 t + \alpha_2\phi + \alpha_3\psi + \Theta(\theta). \tag{2.11}$$

Si ahora sustituimos esta expresión en (2.10) obtenemos

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{I_Z} + \frac{1}{I}\frac{(\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right] + Mgl\cos\theta = \alpha_1, \tag{2.12}$$

que como vemos es un ecuación que solo depende de θ y puede integrarse para obtener

$$\Theta(\theta) = \int \frac{\sqrt{2I\operatorname{sen}^2\theta(\alpha_1 - A - Mgl\cos\theta) - (\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)^2}}{\operatorname{sen}\theta}d\theta, \tag{2.13}$$

donde $A = \frac{\alpha_3^2}{2I_Z}$. Por lo tanto la solución para la función que contiene toda la información del sistema, G, es

$$\boxed{G = -\alpha_1 t + \alpha_2\phi + \alpha_3\psi + \int \frac{\sqrt{2I\operatorname{sen}^2\theta(\alpha_1 - A - Mgl\cos\theta) - (\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)^2}}{\operatorname{sen}\theta}d\theta.}$$

Ahora solo nos falta calcular las β^i y los impulsos utilizando la formulación de Hamilton-Jacobi. Entonces

$$\beta^1 = \frac{\partial G}{\partial\alpha_1} = -t + \int \frac{I\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2I\operatorname{sen}^2\theta(\alpha_1 - A - Mgl\cos\theta) - (\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)^2}}d\theta, \tag{2.14}$$

$$\beta^2 = \frac{\partial G}{\partial\alpha_2} = \phi + \int \frac{\csc\theta(\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)}{\sqrt{2I\operatorname{sen}^2\theta(\alpha_1 - A - Mgl\cos\theta) - (\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)^2}}d\theta, \tag{2.15}$$

$$\beta^3 = \frac{\partial G}{\partial \alpha_3} = \psi + \int \frac{\cot\theta(\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)}{\sqrt{2I\operatorname{sen}^2\theta(\alpha_1 - A - Mgl\cos\theta) - (\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)^2}} d\theta. \tag{2.16}$$

Por último expresamos los impulsos,

$$p_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2I\operatorname{sen}^2\theta(\alpha_1 - A - Mgl\cos\theta) - (\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta)^2}}{\operatorname{sen}\theta}, \tag{2.17}$$

$$p_\phi = \frac{\partial G}{\partial \psi} = \alpha_2, \tag{2.18}$$

$$p_\psi = \frac{\partial G}{\partial \psi} = \alpha_3. \tag{2.19}$$

Con lo cual vemos un significado directo para α_2 y α_3, que ya lo sabíamos de antemano pero quisimos probarlo al final. Puede verse fácilmente entonces viendo estas ecuaciones que α_1 será la energía total del trompo simétrico. Con esto hemos demostrado que el problema del trompo simétrico utilizando los ángulos de Euler como coordenadas generalizadas, se puede resolver por separación de variables y hemos encontrado una solución completa al mismo.

Problema 3

Demuestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi de una partícula atraída por dos centros gravitatorios iguales que se encuentran a una distancia fija l es separable en coordenadas elípticas confocales.

Solución:

Nota: El profesor nos dijo que podíamos resolver el problema en dos dimensiones.

Notación: Cambiaremos l por a debido a que es más fácil de distinguir tanto para las imágenes como para las ecuaciones.

Las coordenadas elípticas confocales u y v están relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y) por

$$x = a\cosh u\cos v, \tag{3.1}$$
$$y = a\operatorname{senh} u\operatorname{sen} v. \tag{3.2}$$

Los rangos de u y v son $0 \leq u < \infty$ y $0 \leq v < 2\pi$. Para encontrar las curvas coordenadas primero hacemos u constante, y tenemos que

$$\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{senh}^2 u} = a^2, \tag{3.3}$$

y llamando a $A = \cosh u$ y $B = \operatorname{senh} u$ tenemos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = a^2, \tag{3.4}$$

y vemos claramente que las curvas de u constante son elipses. Ahora consideremos a v constante, tenemos que

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 v} = a^2, \tag{3.5}$$

y llamando a $C = \cos v$ y $D = \operatorname{sen} v$ tenemos

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{y^2}{D^2} = a^2, \tag{3.6}$$

y vemos que cada curva de v constante es una hipérbola que se abre en las direcciones de $\pm x$. Puede probarse [1] que todas estas curvas tienen los mismos focos en $y = 0$, $x = \pm a$ y que las elipses intersectan a las hipérbolas en ángulos rectos. Debajo se encuentra una representación gráfica de estas coordenadas con los resultados que hemos obtenido.

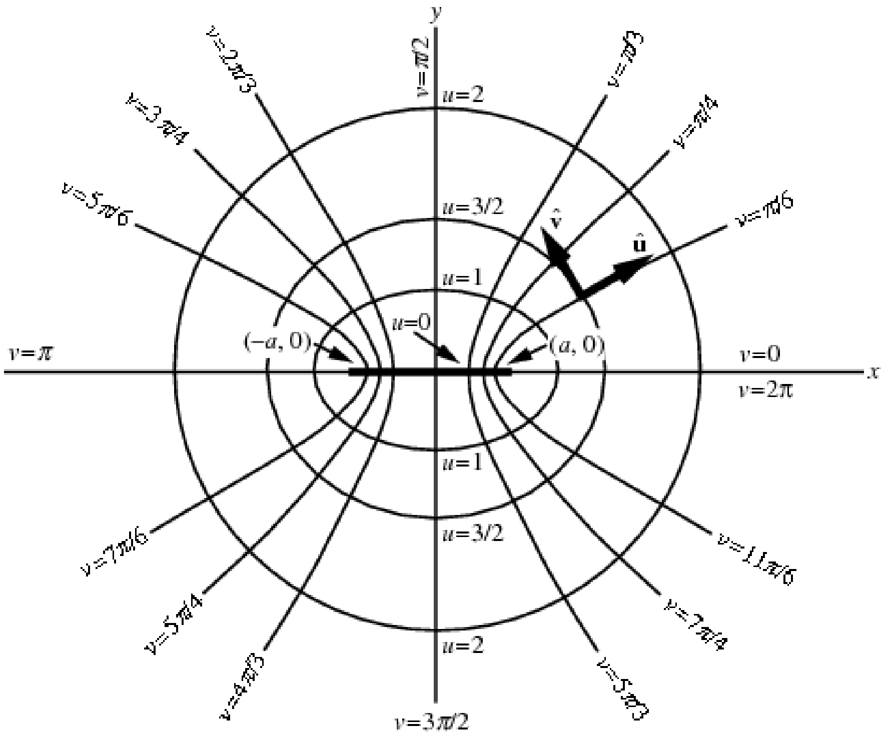

Figura 2: Coordenadas confocales elípticas (u, v) en el plano. Las curvas de u constante son elipses y las de v constante son hipérbolas.

Para resolver este problema fijaremos los focos de las coordenadas elípticas en los centros gravitatorios fijos $(x, y) = (\pm a, 0)$, ver figura (2). La hamiltoniana es entonces

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r_1, r_2), \tag{3.7}$$

donde el potencial V depende de las distancias r_1 y r_2 hacia los dos centros de fuerza y está dado por

$$V(r_1, r_2) = -\left(\frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}\right) = \left(\frac{\alpha_1}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{\alpha_2}{(x+a)^2 + y^2}\right), \tag{3.8}$$

donde las α_i son las fuerzas de los centros de fuerza. Ahora reescribiremos H en términos de (u, v), para eso utilizamos el hecho de podemos escribir al potencial en términos de (u, v) como (utilizando (3.3) y (3.5))

$$V(u, v) = -\frac{\alpha \cosh u - \alpha' \cos v}{\cosh^2 u - \cos^2 v}, \tag{3.9}$$

donde $\alpha \equiv \alpha_1 + \alpha_2$ y $\alpha' \equiv \alpha_1 - \alpha_2$. Y ahora reescribiremos la energía cinética en términos de los impulsos conjugados

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}}, \tag{3.10}$$

$$p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{v}}, \tag{3.11}$$

debido a que V es independiente de $\dot{u}$ y $\dot{v}$. Entonces

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}a^2 m(\cosh^2 u - \cos^2 v)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2), \tag{3.12}$$

por lo tanto

$$p_u = a^2 m(\cosh^2 u - \cos^2 v)\dot{u}, \tag{3.13}$$

y

$$p_v = a^2 m(\cosh^2 u - \cos^2 v)\dot{v}, \tag{3.14}$$

y encontramos ahora una expresión para $\dot{u}$ y $\dot{v}$ en términos de p_u y p_v,

$$\dot{u} = \frac{p_u}{a^2 m(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \tag{3.15}$$

y

$$\dot{v} = \frac{p_v}{a^2 m(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \tag{3.16}$$

y entonces

$$T = \frac{1}{2}a^2 m(\cosh^2 u - \cos^2 v)\left(\frac{p_u^2}{a^4 m^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)^2} + \frac{p_v^2}{a^4 m^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)^2}\right). \tag{3.17}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}\left(\frac{p_u^2 + p_v^2}{a^2 m(\cosh^2 u - \cos^2 v)}\right). \tag{3.18}$$

Podemos ahora escribir la hamiltoniana en estas nuevas coordenadas como

$$H = T + V = \frac{1}{2a^2 m}\left(\frac{p_u^2 + p_v^2}{\cosh^2 u - \cos^2 v}\right) - \frac{\alpha \cosh u - \alpha' \cos v}{\cosh^2 u - \cos^2 v}, \tag{3.19}$$

$$\therefore H = \frac{1}{2a^2 m}\left(\frac{p_u^2 + p_v^2 - 2a^2 m\alpha \cosh u + 2a^2 m\alpha' \cos v}{\cosh^2 u - \cos^2 v}\right) \tag{3.20}$$

Ahora escribimos la ecuación de Hamilton-Jacobi como

$$\frac{1}{2a^2 m}\left(\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2 - 2a^2 m\alpha \cosh u + 2a^2 m\alpha' \cos v}{\cosh^2 u - \cos^2 v}\right) = -\frac{\partial G}{\partial t}. \tag{3.21}$$

Para comprobar si esta ecuación en derivadas parciales es soluble por el método de separación de variables proponemos una solución del estilo

$$G(u, v, t) = W(u, v) + T(t), \tag{3.22}$$

y entonces la ecuación (3.21) se transforma en

$$\frac{1}{2a^2m}\left(\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2-2a^2m\alpha\cosh u+2a^2m\alpha'\cos v}{\cosh^2 u-\cos^2 v}\right)=-\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3.23}$$

Vemos que el único modo de que se cumpla la igualdad (3.23) es que ambos lados sean iguales a una constante que llamaremos ζ_1, y tenemos entonces

$$\frac{1}{2a^2m}\left(\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2-2a^2m\alpha\cosh u+2a^2m\alpha'\cos v}{\cosh^2 u-\cos^2 v}\right)=\zeta_1, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\zeta_1. \tag{3.25}$$

De la segunda de estas ecuaciones vemos que

$$\boxed{T(t)=-\zeta_1 t,} \tag{3.26}$$

y la primera la podemos reescribir como

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2=2a^2m\zeta_1(\cosh^2 u-\cos^2 v)+2a^2m\alpha\cosh u-2a^2m\alpha'\cos v. \tag{3.27}$$

Ya hemos separado la parte temporal, ahora proponemos una solución del tipo

$$W(u,v)=W_u(u)+W_v(v), \tag{3.28}$$

y entonces tenemos que

$$\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2=2a^2m\zeta_1(\cosh^2 u-\cos^2 v)+2a^2m\alpha\cosh u-2a^2m\alpha'\cos v, \tag{3.29}$$

reescribiendo vemos que

$$\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2-2a^2m\zeta_1\cosh^2 u-2a^2m\alpha\cosh u=-\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2-2a^2m\zeta_1\cos^2 v-2a^2m\alpha'\cos v. \tag{3.30}$$

Como vemos el lado izquierdo de (3.30) solo depende de u y el lado derecho de v por lo tanto el único como de que se mantenga esta igualdad es que ambos lados sean iguales a una misma constante que llamaremos ζ_2, y entonces

$$\boxed{\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2-2a^2m\zeta_1\cosh^2 u-2a^2m\alpha\cosh u=\zeta_2.} \tag{3.31}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2+2a^2m\zeta_1\cos^2 v+2a^2m\alpha'\cos v=-\zeta_2.} \tag{3.32}$$

Y con estas dos ecuaciones finales hemos demostrado que el sistema en separable si se utilizan coordenadas elípticas confocales.

Problema 4

Establezca la ecuación de Hamilton-Jacobi de una partícula libre en dos dimensiones en coordenadas polares. Encuentre una solución completa de esta ecuación. Haga un análisis de las superficies de nivel de esta solución y de su relación con el movimiento. Establezca el significado de las constantes α y β.

Solución:

Debido a que la partícula está libre, tenemos que la lagrangiana de la misma en coordenadas cartesianas será

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{4.1}$$

y en coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \tag{4.2}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{4.3}$$

la lagrangiana se escribe como

$$L = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2). \tag{4.4}$$

Ahora para obtener la expresión para la hamiltoniana debemos encontrar los momentos conjugados,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{4.5}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \tag{4.6}$$

y ahora encontramos expresiones de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ en términos de p_r y p_θ,

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \tag{4.7}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \tag{4.8}$$

y con estas expresiones podemos construir la hamiltoniana, que se escribe como

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2}. \tag{4.9}$$

Y ahora la ecuación de Hamilton-Jacobi para el sistema será

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\frac{\partial G}{\partial t}. \tag{4.10}$$

Vemos que en esta ecuación el tiempo el separable, por lo que proponemos una solución de la forma $G(r,\theta,t) = W(r,\theta) + T(t)$, y al sustituir en la ecuación anterior nos queda

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{4.11}$$

Vemos que el único modo de que se cumpla la igualdad anterior es que ambos lados sean iguales a una constante que llamaremos α_1, y tenemos entonces

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right]=\alpha_1, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\alpha_1, \tag{4.13}$$

más una constante aditiva de integración que consideramos, sin perder generalidad, como cero. De la segunda ecuación

$$T(t)=-\alpha_1 t. \tag{4.14}$$

Ahora para la primera ecuación proponemos una solución del tipo $W(r,\theta)=W_r(t)+W_\theta(\theta)$ y tenemos que

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2\right]=\alpha_1. \tag{4.15}$$

Toda la dependencia en θ de esta ecuación está en el término $\partial W_\theta/\partial\theta$, por lo que este debe ser constante, llamaremos a esta constante α_2. Entonces

$$W_\theta(\theta)=\alpha_2\theta, \tag{4.16}$$

más una constante de integración que también haremos cero como anteriormente. Finalmente W_r, deberá, para que se cumpla la ecuación de Hamilton-Jacobi, cumplir con

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]=\alpha_1. \tag{4.17}$$

Para resolver esta ecuación despejamos el término de la derivada

$$\frac{\partial W_r}{\partial r}=\sqrt{2m\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}, \tag{4.18}$$

e integramos

$$W_r=\int\sqrt{2m\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}dr. \tag{4.19}$$

Y la solución completa será

$$G=\int\sqrt{2m\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}dr+\alpha_2\theta-\alpha_1 t. \tag{4.20}$$

.
Ahora obtengamos las constantes β^i,

$$\beta^1=\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}=\int\frac{m}{\sqrt{2m\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr-t, \tag{4.21}$$

$$\beta^2=\frac{\partial G}{\partial \alpha_2}=-\int\frac{\alpha_2}{r^2\sqrt{2m\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}dr+\theta. \tag{4.22}$$

Por último utilicemos las expresiones para los impulsos generalizados en la formulación de Hamilton-Jacobi,

$$p_r=\frac{\partial G}{\partial r}=\sqrt{2m\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}, \tag{4.23}$$

$$p_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} = \alpha_2. \tag{4.24}$$

Podemos ahora darle sentido físico a las constantes α_i y β^i, tenemos que de (4.24) α_2 es el impulso p_θ o impulso angular de la partícula. De la ecuación (4.23) podemos despejar α_1,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) \tag{4.25}$$

y por lo tanto podemos ver que α_1 es la energía total de la partícula que llamaremos E. Ahora si reescribimos la ecuación (4.22) como

$$\theta = \beta^2 - \int \frac{p_\theta}{r^2\sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} dr, \tag{4.26}$$

podemos identificar a β^2 con θ_0. Y al escribir (4.21) como

$$t = \int \frac{m}{\sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} dr - \beta^1, \tag{4.27}$$

podemos identificar a β^1 con r_0. Podemos escribir ahora la solución completa del problema como

$$\boxed{G = \int \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}} dr + p_\theta \theta - Et.} \tag{4.28}$$

Ahora culminemos el problema haciendo un breve análisis de las superficies de nivel para G constante, es decir ver a W como un campo escalar en la variedad de configuración parametrizado por las α_i que ya sabemos que no son más que la energía total E y el impulso angular p_θ de la partícula. Entonces tenemos que las superficies de nivel que forma W están dadas por

$$\int \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2}} dr + p_\theta \theta = c, \tag{4.29}$$

donde hemos llamado c a la constante. Desde esta ecuación podemos trazar las curvas de nivel para distintos valores de las constantes y encontrar la siguiente gráfica

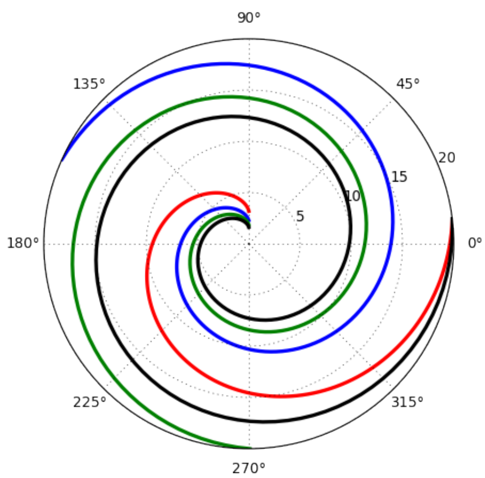

Figura 3: Superficies de nivel para una partícula libre en coordenadas polares.

Si trazamos las perpendiculares a estas curvas vemos entonces que para distintos valores de las constantes estas generarán trayectorias de líneas rectas sobre el plano, las cuales son equivalentes a las rectas que deben encontrarse para coordenadas cartesianas, solo que estas rectas estarán parametrizadas por las coordenadas polares en este caso.

Problema 5

Utilizando el método de Hamilton-Jacobi reduzca a cuadraturas el péndulo simple.

Solución:

En la figura de abajo se muestra una ilustración del péndulo simple

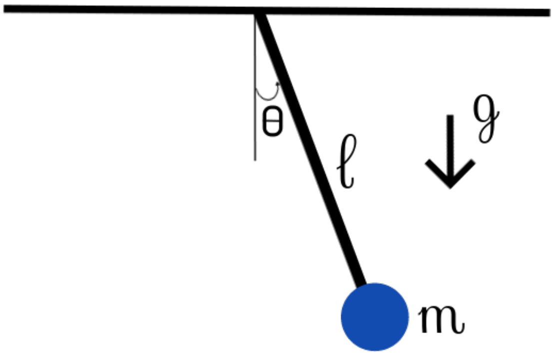

Figura 4: Péndulo simple.

Recordemos que su lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta, \tag{5.1}$$

el momento p_θ conjugado a θ es

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \tag{5.2}$$

y por lo tanto la cantidad de Jacobi del sistema es

$$H = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta, \tag{5.3}$$

ahora para escribir la hamiltoniana del sistema escribimos la cantidad de Jacobi en términos de θ y p_θ,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta. \tag{5.4}$$

Claramente la hamiltoniana es igual a la energía total del sistema debido a que la lagrangiana no depende del tiempo y la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades. Ahora podemos escribir la ecuación de Hamilton-Jacobi como

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = -\frac{\partial G}{\partial t} \tag{5.5}$$

Proponemos una solución de la forma

$$G(\theta, t) = W(\theta) + T(t), \tag{5.6}$$

y entonces la ecuación (5.5) queda como

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = -\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{5.7}$$

Debido a que el lado izquierdo de (5.7) depende únicamente de θ y el derecho de t, el único modo de que esta expresión se cumpla es que ambos términos sean iguales a una misma constante que llamaremos α_1. Entonces

$$\frac{1}{2ml^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = \alpha_1, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha_1, \tag{5.9}$$

de la segunda ecuación vemos directamente que

$$\boxed{T(t) = -\alpha_1 t.} \tag{5.10}$$

Si utilizamos la definición de p_θ podemos reescribir (5.8) como

$$\frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta = \alpha_1, \tag{5.11}$$

y entonces podemos asociar a α_1 con la energía total del sistema E. Volviendo a (5.8) podemos despejar de ella $\partial W/\partial\theta$ para encontrar

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\theta)}, \tag{5.12}$$

y por lo tanto

$$\boxed{W(\theta) = \int \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\theta)}d\theta.} \tag{5.13}$$

Y entonces

$$\boxed{G(\theta, t) = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\theta)}d\theta - Et.} \tag{5.14}$$

Por último calculemos β,

$$\boxed{\beta = \frac{\partial G}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial G}{E} = -t + ml^2 \int \frac{d\theta}{\sqrt{2ml^2(E + mgl\cos\theta)}}.} \tag{5.15}$$

con lo cual hemos reducido el problema del péndulo simple a cuadraturas.

Referencias

[1] G. Arfken y H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6ta edición, Elsevier Academic Press, 2005.