Mecánica Clásica Tarea # 12

Favio Vázquez*

Instituto de Ciencias Nucleares. Universidad Nacional Autónoma de México.

Problema 1

Demuestre que entre los paréntesis de Poisson y los de Lagrange existe la relación de inversión

$$\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} = \delta_{\beta\gamma},$$

donde $u_\alpha(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, $\alpha = 1, \dots, 2n$ y (q, p) es un sistema canónico de coordenadas.

Solución:

Para demostrar esto utilizaremos la definición de cada uno de los paréntesis y las sustituiremos directamente. El paréntesis de Lagrange para las coordenadas canónicas (q, p) y aplicados al problema en cuestión se escribe como

$$[u_\alpha, u_\beta] = \sum_i^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha} \right), \tag{1.1}$$

y el paréntesis de Poisson se escribe como

$$\{u_\alpha, u_\gamma\} = \sum_j^n \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right). \tag{1.2}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} &= \sum_{\alpha=1}^{2n}\left[\sum_i^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha} \right)\right]\left[\sum_j^n \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right)\right] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_i^n\sum_j^n \left(\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha} \right)\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2n}\sum_i^n\sum_j^n \left[\frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} - \frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right. \\
&\left. - \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j} + \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j} \right].
\end{aligned}$$

Ahora evaluando estos términos vemos que

*Correo: favio.vazquezp@gmail.com

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j} = \delta^i_j, \tag{1.3}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial q^i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j} = 0, \tag{1.4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial q^j} = 0, \tag{1.5}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial p_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial p_j j} = \delta^i_j. \tag{1.6}$$

Donde δ^i_j es la delta de Kronecker. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} &= \sum_i^n\sum_j^n\left(\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_j}\delta^i_j + \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^j}\delta^i_j\right)\\ &= \sum_i^n\left(\frac{\partial p_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial p_i} + \frac{\partial q^i}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial q^i}\right).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Haciendo ahora la sumatoria en i vemos que esta expresión debe ser igual a la delta de Kronecker para β y γ, por lo tanto

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{2n}[u_\alpha, u_\beta]\{u_\alpha, u_\gamma\} = \delta_{\beta\gamma}.} \tag{1.8}$$

Que era lo que se pidió demostrar, con lo cual vemos que los paréntesis de Poisson y los paréntesis de Lagrange forman matrices inversas la una para la otra.

Problema 2

Demuestre por tres vías distintas que las transformaciones

$$\begin{aligned}q^1 &= \frac{\sqrt{2P_1}\operatorname{sen} Q^1 + P_2}{\sqrt{m\omega}}\\ q^2 &= \frac{\sqrt{2P_1}\cos Q^1 + Q^2}{\sqrt{m\omega}}\\ p_1 &= \frac{\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1}\cos Q^1 - Q^2)}{2}\\ p_2 &= \frac{\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1}\operatorname{sen} Q^1 - P_2)}{2},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}q^1 &= Q^1\cos\lambda + \frac{P_2\operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\\ q^2 &= Q^2\cos\lambda + \frac{P_1\operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\\ p_1 &= -m\omega Q^2\operatorname{sen}\lambda + P_1\cos\lambda\\ p_2 &= -m\omega Q^1\operatorname{sen}\lambda + P_2\cos\lambda,\end{aligned}$$

son canónicas.

Solución:

Problema 3

Considere la función $F(q,p) = pq - \frac{1}{2m}p^2 t$ encuentre TODAS las transformaciones canónicas generadas por esta función.

Solución:

Para dar solución a este problema consideremos una transformación de coordenadas en el espacio extendido (dependiente del tiempo)

$$\begin{aligned} Q &= Q(q,p,t) \\ P &= P(q,p,t) \\ T &= T(q,p,t) = t. \end{aligned}$$

y su inversa

$$\begin{aligned} q &= q(Q,P,T) \\ p &= p(Q,P,T) \\ t &= y(Q,P,T) = t. \end{aligned}$$

que será canónica si al ser (q,p,t) un sistema de coordenadas canónicas, (Q,P,T) también lo es. Véase que el tiempo no se transforma $T = t$, lo cual indica que las coordenadas (Q,P) son coordenadas canónicas para todo valor del tiempo. Recordemos que para las transformaciones canónicas dependientes del tiempo tenemos que la uno forma diferencial para las coordenadas (q,p) se expresa como (para una dimensión)

$$\omega = pdq - Hdt, \tag{3.1}$$

donde $H(q,p,t)$ es la función hamiltoniana, y para las coordenadas (Q,P,T)

$$\Omega = PdQ - H'dt \tag{3.2}$$

donde $H'(q,p,t)$ es la nueva hamiltoniana. Ahora si la transformación es canónica debe cumplirse que las diferenciales de ω y Ω sean iguales, lo que quiere decir que la diferencia entre ω y Ω debe ser la diferencial de una función el espacio de fase, que es la que nos da el problema. Tenemos entonces que

$$pdq - Hdt - PdQ + H'dt = dF, \tag{3.3}$$

diferenciando con respecto la tiempo tenemos

$$p\dot{q} - H - P\dot{Q} + H' = \dot{F} \tag{3.4}$$

pero $Q = Q(q,f,t)$ y $F = F(q,p,t)$ por lo tanto

$$p\dot{q} - H - P\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right) + H' = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{3.5}$$

Para que esta igualdad se mantenga, deben ser iguales los coeficientes de $\dot{q}$ y $\dot{p}$, entonces para $\dot{q}$

$$p - \frac{\partial Q}{\partial q} P = \frac{\partial F}{\partial q} = p, \tag{3.6}$$

de esta expresión vemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 0 \quad \text{ó} \quad P = 0, \tag{3.7}$$

ahora para $\dot{p}$

$$-\frac{\partial Q}{\partial p} P = \frac{\partial F}{\partial p} = q - \frac{pt}{m}, \tag{3.8}$$

de donde vemos claramente que $P \neq 0$, por lo tanto de (3.7) vemos que obligatoriamente $\partial Q / \partial q = 0$, entonces necesariamente Q es solo una función de (p, t). Entonces de lo que acabamos de probar tenemos que

$$\boxed{Q = \xi(p, t),} \tag{3.9}$$

con $\xi(p, t)$ arbitraria y de (3.8) vemos que

$$\boxed{P = \frac{pt/m - q}{\partial \xi / \partial p}.} \tag{3.10}$$

Para verificar que esta transformación es canónica entonces debe cumplirse que $\{Q, P\} = 1$,

$$\{Q, P\} = \cancelto{0}{\frac{\partial Q}{\partial q}} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right) \left(-\frac{1}{\frac{\xi}{\partial p}}\right) = -\frac{\partial \xi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \xi} = -1. \tag{3.11}$$

Lo cual finaliza el problema. Claramente tenemos una gran cantidad de transformaciones canónicas que puede generar esta función generadora debido a que $\xi(p, t)$ es arbitraria.

Problema 4

Encuentre las funciones generadoras para las transformaciones canónicas del problema 2.

Solución:

En el problema 2 demostramos que estas transformaciones son canónicas, ahora para encontrar las funciones generadoras para estas transformaciones canónicas debemos partir de la tabla de la página 50 de las notas, verificar que tipo (o tipos) de función generadora es, y luego integrar las ecuaciones que resultan hasta encontrar la (o las) funciones generadoras para cada transformación canónica. La primera transformación canónica es

$$\begin{aligned}
q^1 &= \frac{\sqrt{2P_1} \operatorname{sen} Q^1 + P_2}{\sqrt{m\omega}} \\
q^2 &= \frac{\sqrt{2P_1} \cos Q^1 + Q^2}{\sqrt{m\omega}} \\
p_1 &= \frac{\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1} \cos Q^1 - Q^2)}{2} \\
p_2 &= \frac{\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1} \operatorname{sen} Q^1 - P_2)}{2},
\end{aligned}$$

Si asumimos que la función generadora es de tipo 1 entonces debe cumplirse que $F_3 = F_3(p, Q)$, y que

$$
\begin{aligned}
q^1 &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_1}, \\
q^2 &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_2}, \\
P_1 &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q^1}, \\
P_2 &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q^2}.
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que

$$
q^1 = \frac{\sqrt{2P_1}\,\mathrm{sen}\,Q^1 + P_2}{\sqrt{m\omega}} = \frac{\partial F_3}{\partial p_1}, \tag{4.1}
$$

$$
q^2 = \frac{\sqrt{2P_1}\cos Q^1 + Q^2}{\sqrt{m\omega}} = \frac{\partial F_3}{\partial p_2}, \tag{4.2}
$$

$$
P_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q^1\sqrt{m\omega} - P_2}{\mathrm{sen}\,Q^1}} = \frac{\partial F_3}{\partial Q^1} \tag{4.3}
$$

$$
P_2 = \sqrt{2P_1}\,\mathrm{sen}\,Q^1 + q^1\sqrt{m\omega} = \frac{\partial F_3}{\partial Q^2}. \tag{4.4}
$$

De la primera ecuación vemos que

$$
F_3 = \frac{p_1(\sqrt{2P_1}\,\mathrm{sen}\,Q^1 + P_2)}{\sqrt{m\omega}} + G(Q^1, P_2, P_1), \tag{4.5}
$$

de la segunda ecuación vemos que

$$
F_3 = \frac{p_2(\sqrt{2P_1}\cos Q^1 + Q^2)}{\sqrt{m\omega}} + H(Q^1, Q^2, P_1), \tag{4.6}
$$

y de la cuarta ecuación vemos

$$
F_3 = Q^2\sqrt{2P_1}\,\mathrm{sen}\,Q^1 + Q^2 q^1\sqrt{m\omega} + I(P_1, Q^2, q^1), \tag{4.7}
$$

tenemos ahora una serie de equivalencias para la función generadora F_3, y lo que resta es calcular el valor de las funciones arbitrarias G, H, I y podemos encontrar una sola expresión para la función generadora. Dejamos planteadas estas ecuaciones debido a la complejidad de aplicar métodos estándares para hallar una expresión simple para F_3 por la forma de las coordenadas canónicas. En el siguiente apartado, para las segundas transformaciones si se puede hallar de una forma más simple una sola expresión para F.

Calculemos la función generadora ahora para la segunda transformación,

$$
\begin{aligned}
q^1 &= Q^1\cos\lambda + \frac{P_2\,\mathrm{sen}\,\lambda}{m\omega} \\
q^2 &= Q^2\cos\lambda + \frac{P_1\,\mathrm{sen}\,\lambda}{m\omega} \\
p_1 &= -m\omega Q^2\,\mathrm{sen}\,\lambda + P_1\cos\lambda \\
p_2 &= -m\omega Q^1\,\mathrm{sen}\,\lambda + P_2\cos\lambda,
\end{aligned}
$$

Proponemos que la función generadora de esta transformación canónica es de tipo $F_4 = F_4(p, P)$, es decir que son independientes las p_i de las P_1, esto podemos verlo ya que podemos escribir a las otras variables en términos de p_1, p_2, P_1, P_2,

$$\begin{aligned}
q^1 &= \left(\frac{p_2 - P_2 \cos\lambda}{-m\omega}\right)\cos\lambda + \frac{P_2 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega} \\
q^2 &= \left(\frac{p_1 - P_1 \cos\lambda}{-m\omega}\right)\cos\lambda + \frac{P_1 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega} \\
Q^1 &= \frac{P_2 \cos\lambda - p_2}{m\omega \operatorname{sen}\lambda} \\
Q^2 &= \frac{P_1 \cos\lambda - p_1}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}
\end{aligned}$$

Proponemos entonces que

$$dF_4(p_1, p_2, P_1, P_2) = -q^1 dp_1 - q^2 dp_2 + Q^1 dP_1 + Q^2 dP_2 \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
dF_4(p_1, p_2, P_1, P_2) = &- \left[\left(\frac{p_2 - P_2 \cos\lambda}{-m\omega}\right)\cos\lambda + \frac{P_2 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\right] dp_1 \\
&- \left[\left(\frac{p_1 - P_1 \cos\lambda}{-m\omega}\right)\cos\lambda + \frac{P_1 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\right] dp_2 \\
&+ \left(\frac{P_2 \cos\lambda - p_2}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}\right) dP_1 + \left(\frac{P_1 \cos\lambda - p_1}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}\right) dP_2 \\
= &- \left[\frac{p_2 \cos\lambda - P_2 \cos^2\lambda}{-m\omega} + \frac{P_2 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\right] dp_1 \\
&- \left[\frac{p_1 \cos\lambda - P_1 \cos^2\lambda}{-m\omega} + \frac{P_1 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\right] dp_2 \\
&+ \left(\frac{P_2 \cos\lambda - p_2}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}\right) dP_1 + \left(\frac{P_1 \cos\lambda - p_1}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}\right) dP_2 \\
= &\left[\frac{p_2 \cos\lambda - P_2 \cos^2\lambda}{m\omega} - \frac{P_2 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\right] dp_1 \\
&\left[\frac{p_1 \cos\lambda - P_1 \cos^2\lambda}{m\omega} - \frac{P_1 \operatorname{sen}\lambda}{m\omega}\right] dp_2 \\
&+ \left(\frac{P_2 \cos\lambda - p_2}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}\right) dP_1 + \left(\frac{P_1 \cos\lambda - p_1}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}\right) dP_2 \\
= &\frac{p_2 \cos\lambda dp_1}{m\omega} - \frac{P_2 \cos^2\lambda dp_1}{m\omega} - \frac{P_2 \operatorname{sen}\lambda dp_1}{m\omega} \\
&+ \frac{p_1 \cos\lambda dp_2}{m\omega} - \frac{P_1 \cos^2\lambda dp_2}{m\omega} - \frac{P_1 \operatorname{sen}\lambda dp_2}{m\omega} \\
&+ \frac{P_2 \cos\lambda dP_1}{m\omega \operatorname{sen}\lambda} - \frac{p_2 dP_1}{m\omega \operatorname{sen}\lambda} \\
&+ \frac{P_1 \cos\lambda dP_2}{m\omega \operatorname{sen}\lambda} - \frac{p_1 dP_2}{m\omega \operatorname{sen}\lambda}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\therefore dF_4(p_1, p_2, P_1, P_2) = d\left(\frac{\cos\lambda}{m\omega} p_1 p_2 + \frac{\cos\lambda}{m\omega \operatorname{sen}\lambda} P_1 P_2 - \frac{1}{m\omega \operatorname{sen}\lambda} p_1 P_2 - \frac{\cos^2\lambda}{m\omega} p_2 P1\right),$$

debido a que esta es una diferencial exacta entonces tenemos que

$$\boxed{F_4(p_1,p_2,P_1,P_2) = \frac{\cos\lambda}{m\omega}p_1p_2 + \frac{\cos\lambda}{m\omega\operatorname{sen}\lambda}P_1P_2 - \frac{1}{m\omega\operatorname{sen}\lambda}p_1P_2 - \frac{\cos^2\lambda}{m\omega}p_2P1} \tag{4.10}$$

Problema 5

Considere una de las regiones acotadas (aquellas donde las trayectorias son regulares y acotadas) del espacio de fase de un péndulo simple, ¿será posible encontrar una transformación canónica de coordenadas de tal forma que, en las nuevas coordenadas, tengamos una coordenada ignorable?, note que esto es similar al caso del oscilador armónico que estudiamos como ejemplo. En caso de una respuesta afirmativa calcule esta transformación (puede dejar algunas integrales indicadas) ¿Será posible esto en las tres regiones acotadas? ¿Será posible esto de manera global?, esto es, una sola transformación para todo el espacio de fase (excepto por algunos puntos o lineas).

Solución:

Problema 6

Al hacer una transformación de punto dependiente del tiempo la hamiltoniana debe cambiarse por medio de

$$H' = H + \sum_j p_j \frac{\partial q^j}{\partial t},$$

ver fórmula (189) de las notas.

Al aplicar una transformación canónica de coordenadas dependiente del tiempo la hamiltoniana debe cambiar por

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

donde F es la función generadora de la transformación.

Encuentre la relación entre estos dos resultados. Así mimos encuentre la relación entre la fórmula para la integral de movimiento ante una simetría que se vio en el contexto de la formulación lagrangiana y los generadores infinitesimales del grupo de dicha simetría.

Solución:

Problema 7

Cuando la hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo las fórmulas para el campo vectorial hamiltoniano $\gamma[\bullet, V_H] = dH$, en el espacio de fase, y $\Gamma[V_H, \bullet] = 0$ en el espacio de fase extendido, son equivalentes. Demuestre esto de manera global, esto es, sin utilizar coordenadas.

Solución: