**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н. Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

# РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

## *К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*

## *НА ТЕМУ:*

## *Реализация операций тензорного анализа и изучение тензора кривизны Римана в пакете Wolfram Mathematica.*

Студент ФН2-51Б (Группа) (Подпись, дата) А. Р. Ластра-Грек (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы (Подпись, дата) Н. Г. Хорькова (И. О. Фамилия)

2023 г.

# Оглавление

**1. Постановка задачи** . . . 3

**2. Сведения о тензоре кривизны Римана** . . . 3

**3. Программная реализация тензорных операций** . . . 4

3.1. Представление тензоров в библиотеке . . . 4

3.2. Представление связностей в библиотеке . . . 5

3.3. Операции над тензорами . . . 6

**4. Проверка свойств тензора кривизны Римана и тензора Риччи** . . . 7

4.1. Алгебраические свойства тензора кривизны . . . 7

4.2. Свойство тензора Риччи для разных римановых пространств . . . 10

**Заключение** . . . 12

**Список использованных источников** . . . 13

# 1. Постановка задачи

Используя пакет компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, составить программы для выполнения основных алгебраических операций над тензорами, операции ковариантного дифференцирования, а также вычисления тензора кривизны Римана и тензора Риччи. Применить написанные программы для проверки свойств тензора кривизны Римана, нахождения компонент тензора кривизны Римана и тензора Риччи в римановых пространствах различной размерности. Работу оформить в системе верстки LaTeX.

# 2. Сведения о тензоре кривизны Римана

Пусть в области $U \subset \mathrm{R}^n$ задана симметричная аффинная связность $\nabla = \{\nabla_k\}$, где $\nabla_k$ — оператор ковариантного дифференцирования. Как известно, если функция $f(x^1, \ldots, x^n)$ многих переменных дважды непрерывно дифференцируема в $U$, то в этой же области ее вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}$ равны, $k \neq l$. Однако если перейти от частных производных к ковариантным, то такое равенство, в общем случае, выполняться не будет. А именно можно показать, что результат применения оператора $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)$ к векторному полю $T$ имеет вид

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = T^q R^i_{q,\,kl},$$

где

$$R^i_{q,\,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^i_{pl}. \tag{1}$$

Также можно показать, что набор функций $R^i_{q,\,kl}$ образует тензорное поле типа $(1,3)$, называемое тензором кривизны Римана.

Перечислим алгебраические свойства тензора кривизны Римана:

1) $R^i_{j,\,kl} + R^i_{j,\,lk} = 0$;
2) $R^i_{j,\,kl} + R^i_{l,\,jk} + R^i_{k,\,lj} = 0$ — тождество Якоби;
3) если связность $\nabla$ согласована с римановой метрикой $(g_{ij})$, то $R_{ij,\,kl} + R_{ji,\,kl} = 0$, где $R_{ij,\,kl} = g_{i\alpha} R^\alpha_{j,\,kl}$;
4) если связность $\nabla$ согласована с метрикой, то $R_{ij,\,kl} = R_{kl,\,ij}$.

Символы Кристоффеля согласованной связности $\nabla$ можно найти по формуле

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left( \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right), \tag{2}$$

где функции $g^{ij}$ определяются из равенства $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta^j_i$, $\delta^j_i$ — символы Кронекера.

Тензором Риччи называется свертка тензора кривизны Римана этой связности:

$$R_{jl} = R^i_{j,\,il}.$$

Римановой кривизной называется скалярная функция $R = g^{kl}R_{kl}$.

Важным свойством тензора Риччи и римановой кривизны является то, что в случае поверхности в трехмерном пространстве риманова кривизна $R$ равна удвоенной гауссовой кривизне: $R = 2K$.

# 3. Программная реализация тензорных операций

В рамках курсовой работы была разработана библиотека "`TensorOperations`" для системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica для вычислений с тензорами. С ее помощью можно естественным образом обращаться к компонентам тензора, осуществлять основные алгебраические операции и операции из тензорного анализа.

## 3.1. Представление тензоров в библиотеке

В рамках библиотеки объект тензора представлен выражением с заголовком "`TensorType`". В нем хранится информация о размерности пространства, в котором находится тензор, о типе и компонентах тензора. В качестве компонент тензора могут выступать не только числовые значения, но и выражения, содержащие символы, что позволяет использовать `TensorType` для представления тензорных полей.

Для корректного создания объекта `TensorType` используется функция `CreateTensor[dims, type, comps]`, которая принимает в качестве аргументов размерность `dims` пространства, тип тензора `type` в виде списка из двух элементов, и таблицу значений компонент `comps`. В случае, если отсутствует последний аргумент `comps`, функция возвращает тензор, у которого все компоненты равны нулю.

Для обращения к компоненту тензора `T`, представленным объектом типа `TensorType`, используется запись $\mathtt{T}^{\{\mathtt{i}\ldots\}}_{\{\mathtt{j}\ldots\}}$, где `{i...}` и `{j...}` — списки значений верхних и нижних индексов соответствующего компонента. Для присвоения компоненте определенного значения или выражения используется оператор тождественности "`Congruent`": $\mathtt{T}^{\{\mathtt{i}\ldots\}}_{\{\mathtt{j}\ldots\}} \equiv \mathtt{expr}$.

Для вывода компонент тензора используются две специальные функции: `PrintTensor` и `PrintComponents`. Первая выводит таблицу всех ненулевых компонент, а вторая — все компоненты в виде упорядоченной совокупности матриц.

### 3.2. Представление связностей в библиотеке

Для задания аффинной связности внутри библиотеки сначала требуется определить соответствующие символы Кристоффеля. Для этого в рамках библиотеки была реализована функция `CreateChristoffelSymbols[dim, comps]`, которая возвращает объект `ChristoffelSymbols`, представляющий символы Кристоффеля с компонентами `comps` в пространстве размерности `dim`. В случае, когда аффинная связность согласуются с некоторой римановой метрикой, в программе для построения символов Кристоффеля по формуле (2) используется перегрузка `CreateChristoffelSymbols[g, x]`, где `g` — матрица компонент метрики, `x` — список символов, представляющих координаты криволинейной системы координат (сокращенно КСК).

Для вывода всех символов Кристоффеля используется функция `PrintComponents`.

Для представления аффинных связностей в библиотеке используются объекты типа `AffineConnection`. Для их создания используется реализованная функция `CovariantD[G, x]`, принимающая на вход объект символов Кристоффеля `G` и список `x` символов координат КСК. Объект `AffineConnection` можно применить к объекту `TensorType` как функцию, тем самым получая ковариантную производную соответствующего тензорного поля — объект типа `TensorType` .

### 3.3. Операции над тензорами

Приведем таблицу реализованных в библиотеке тензорных операций.

Таблица 1. Реализованные в библиотеке тензорные операции

| Операции/функции | Значение |
|---|---|
| `T` + `S` и `T` − `S` | Сложение и разность тензоров `T` и `S` соответственно |
| `k * T` | Умножение тензора `T` на выражение `k` |
| `T` ⊗ `S` или `CircleTimes[T, S]` | Тензорное произведение тензоров `T` и `S` |
| `Convolution[T, i, j]` | Свертка тензора `T` по `i`-му верхнему и по `j`-му нижнему индексам |
| `Convolution[T, sumIndicies]` | Последовательная свертка тензора `T` по всем парам индексов "верхний-нижний" из списка `sumIndicies` |
| `ChangeCLC[T, oldToNew, new]` | Смена криволинейной системы координат для компонент тензора `T` на новую с символами `new` с указанием зависимости старых координат от новых в списке правил `oldToNew` |
| `ChangeCLC[T, old, newToOld]` | Смена КСК для тензора `T`, `old` — список символов координат старой КСК, `newToOld` — список правил замены символов новой КСК на старые |
| `SwapUpIndicies[T, {f, s}]` | Перестановка местами верхних `f`-го и `s`-го индексов тензора `T` |
| `SwapDownIndicies[T, {f, s}]` | Перестановка местами нижних `f`-го и `s`-го индексов тензора `T` |
| `PermuteUpIndicies[T, perm]` | Перестановка местами верхних индексов тензора `T` при помощи перестановки `perm` |
| `PermuteDownIndicies[T, perm]` | Перестановка местами нижних индексов тензора `T` при помощи перестановки `perm` |

# 4. Проверка свойств тензора кривизны Римана и тензора Риччи

Для проверки свойств тензора кривизны был создан исполняемый файл типа тестовый ноутбук `"Tests for Riemann tensor properties.nb"`, в котором содержаться тесты для проверки всех четырех приведенных выше алгебраических свойства тензора кривизны Римана и геометрического свойства тензора Риччи. Перед запуском тестов проверки свойств необходимо указать размерность `n` пространства, в котором определен тензор кривизны.

## 4.1. Алгебраические свойства тензора кривизны

Приведем пример проверки алгебраических свойств тензора кривизны для случая двумерного пространства. В начале ноутбука задается размерность `n`, а также создается список криволинейных координат, которые понадобятся для создания тензора кривизны Римана.

```
n = 2;
coords = Table[Subscript[x, i], i, n]
```

Затем для проверки первого и второго свойства создается объект Γ символов Кристоффеля симметричной аффинной связности. В качестве самих символов Кристоффеля выступают неопределенные функции $\mathtt{a}_{\mathtt{i,j,k}}[\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_\mathtt{n}]$. Для создания тензора кривизны Римана используется реализованная в библиотеке функция `RiemannTensor[Γ, coords]`, которая возвращает построенный по формуле (1) тензор кривизны для симметричной аффинной связности с символами Кристоффеля Γ, заданных в КСК с координатами `coords`. Для упрощения компонент тензора кривизны используется реализованная в библиотеке функция `SimplifyComponents`.

```
Γ = CreateChristoffelSymbols[n, Array[Subscript[a, ##][Sequence@@coords]
&, Table[n, 3]] /. (Subscript[a_, x_, y_, z_] /; y > z) :> Subscript[a,
x, z, y]];
Γ // PrintComponents
R = RiemannTensor[Γ, coords] // SimplifyComponents;
```

$\Gamma^{\{1\}}_{\{i,j\}}$:

| i \ j | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $a_{1,1,1}[x_1, x_2]$ | $a_{1,1,2}[x_1, x_2]$ |
| 2 | $a_{1,1,2}[x_1, x_2]$ | $a_{1,2,2}[x_1, x_2]$ |

$\Gamma^{\{2\}}_{\{i,j\}}$:

| i \ j | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $a_{2,1,1}[x_1, x_2]$ | $a_{2,1,2}[x_1, x_2]$ |
| 2 | $a_{2,1,2}[x_1, x_2]$ | $a_{2,2,2}[x_1, x_2]$ |

Рис. 1. Полученные символы Кристоффеля в случае двумерного пространства.

Далее для полученного тензора кривизны проводятся два теста для проверки первых двух свойств. Тесты представляют собой отдельный тип исполняемой ячейки в исполняемом файле. Для того, чтобы тест считался успешно пройденным требуется, чтобы выводы в полях `"Input"` и `"Expected Output"` совпадали. В случае успеха выводится надпись `"Success"`, иначе — `"Failure"`.

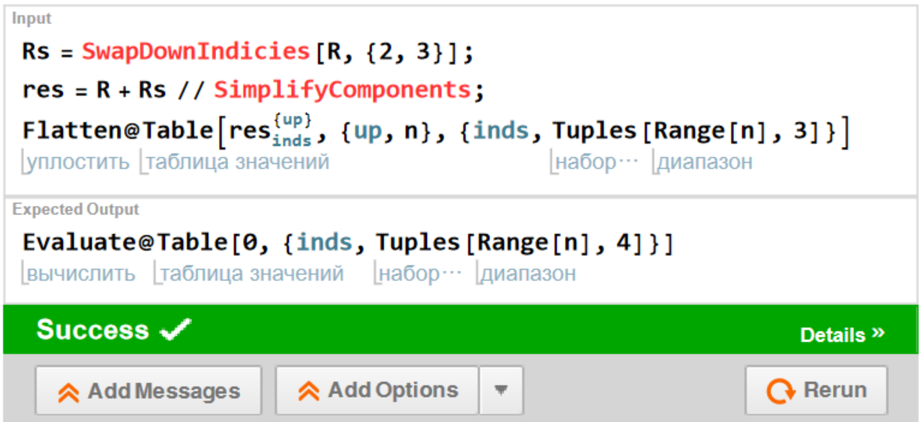


Рис. 2. Тест для проверки первого свойства тензора кривизны.

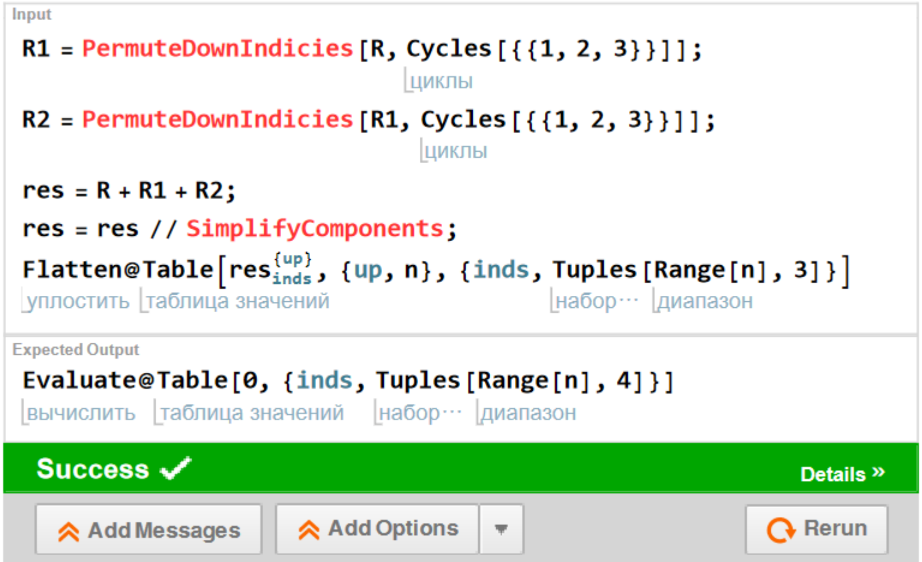


Рис. 3. Тест для проверки второго свойства тензора кривизны.

Для проверки третьего и четвертого свойства нужно определить символы Кристоффеля для аффинной связности, согласованной с некоторой римановой метрикой с симметричной матрицей компонент `g`. В качестве элементов матрицы `g` выступают неопределенные функции $\mathtt{a}_{i,j}$`[`$\mathtt{x}_1$`,...,`$\mathtt{x}_n$`]`.

```
g = Array[Subscript[a, ##][Sequence @@ coords] &, Table[n, 2]] /.
(Subscript[a_, x_, y_] /; x > y) :> Subscript[a, y, x];
g // MatrixForm
Γ = CreateChristoffelSymbols[g, coords];
R = RiemannTensor[Γ, coords] // SimplifyComponents;
```

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}[x_1, x_2] & a_{1,2}[x_1, x_2] \\ a_{1,2}[x_1, x_2] & a_{2,2}[x_1, x_2] \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Полученная матрица `g` в случае двумерного пространства.

Далее для полученного тензора кривизны проводятся два теста для проверки третьего и четвертого свойств.

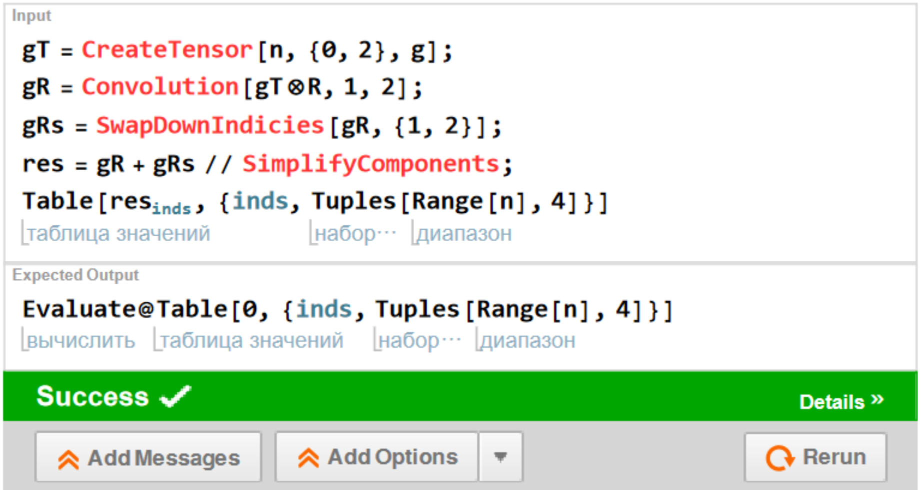


Рис. 5. Тест для проверки третьего свойства тензора кривизны.

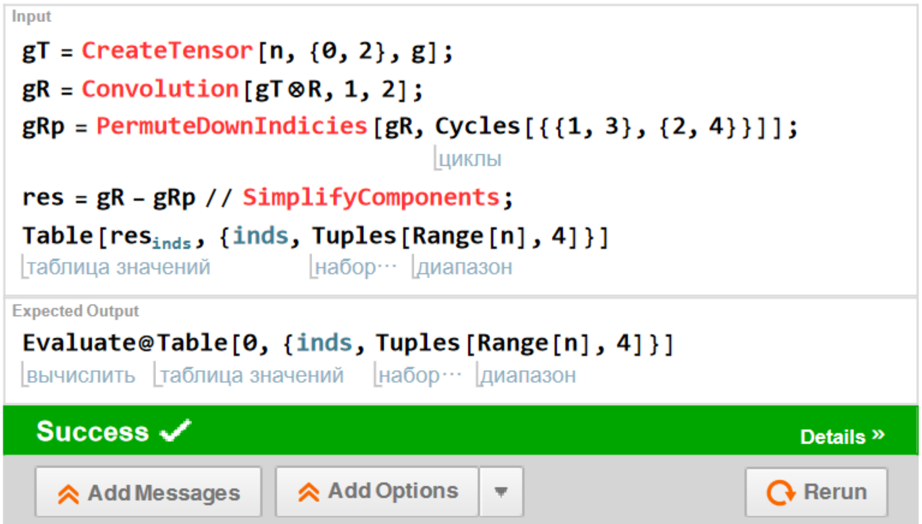


Рис. 6. Тест для проверки четвертого свойства тензора кривизны.

### 4.2. Свойство тензора Риччи для разных римановых пространств

Проверим свойство $R = 2K$, где $R = g^{kl}R_{kl}$ — риманова кривизна, $K$ — гауссова кривизна, для разных двумерных римановых пространств. Для этого рассмотрим два случая: поверхность сферы и плоскость Лобачевского.

Для поверхности сферы $K = 1/r^2$, что подтверждается результатами вычислений в Wolfram Mathematica:

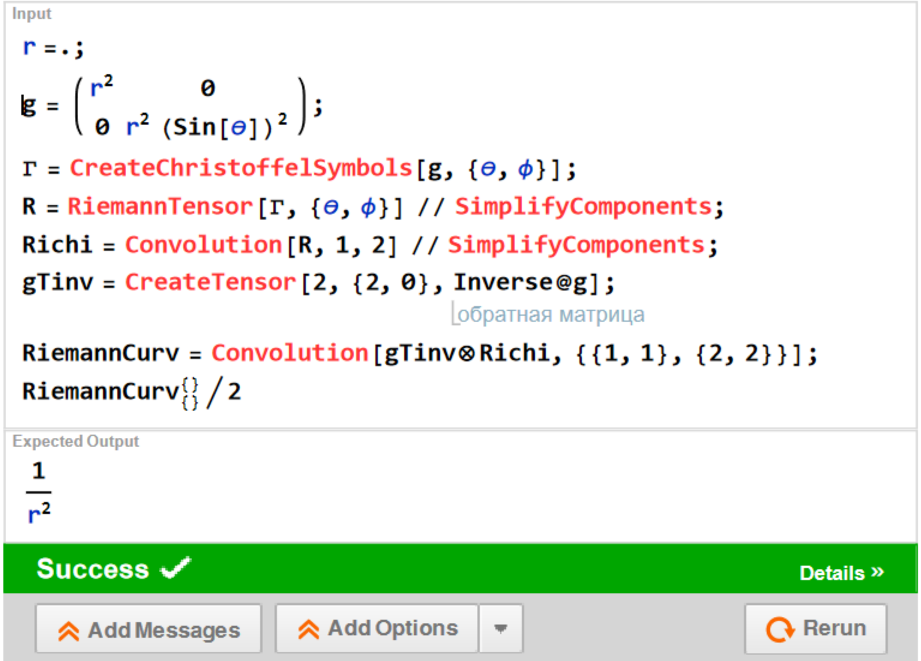


Рис. 7. Тест для проверки свойства тензора Риччи в случае поверхности сферы.

Для плоскости Лобачевского $K = -1$, что также подтверждается результатами вычислений в Wolfram Mathematica:

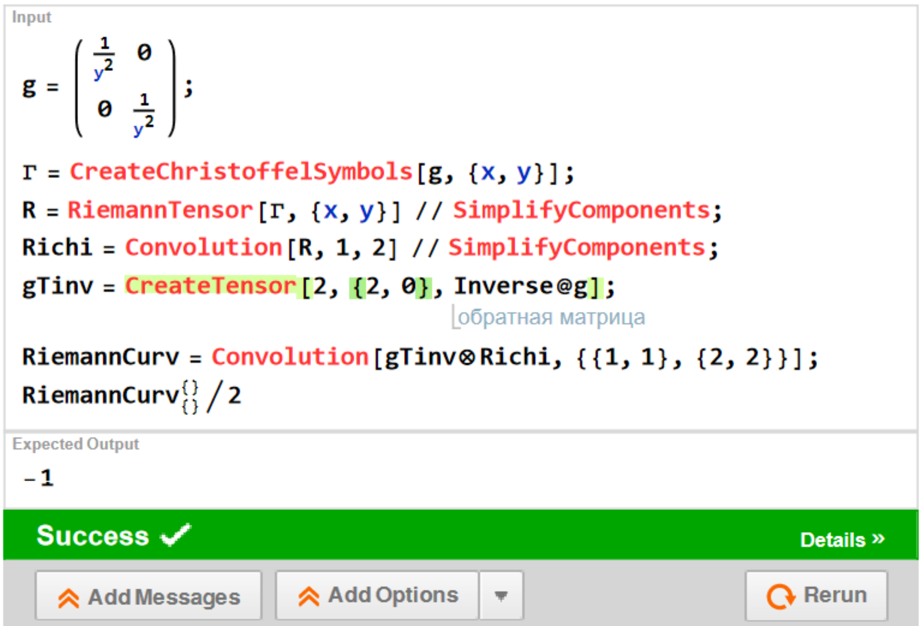


Рис. 8. Тест для проверки свойства тензора Риччи в случае плоскости Лобачевского.

Дополнительно рассмотрим четырехмерное пространство с метрикой Шварцшильда. В таком пространстве риманова кривизна $R = 0$, что подтверждается результатами вычислений в Wolfram Mathematica:

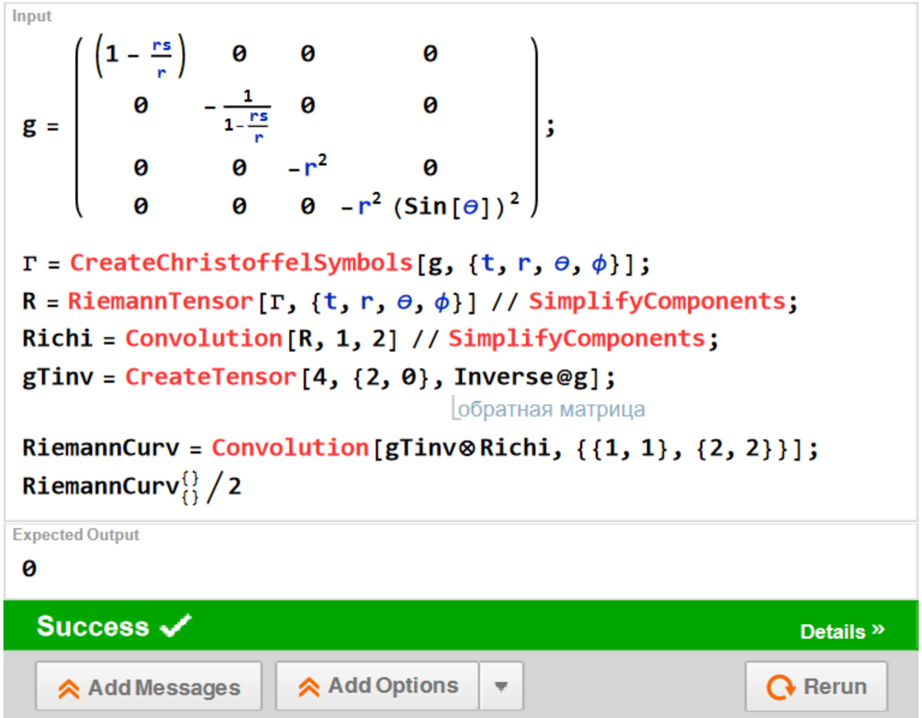


Рис. 9. Тест для проверки свойства тензора Риччи в случае пространства с метрикой Шварцшильда.

# Заключение

В рамках курсовой работы с использованием пакета компьютерной алгебры Wolfram Mathematica была разработана библиотека "TensorOperations" для работы с тензорами. В ней реализованы основные операции тензорной алгебры и тензорного анализа. Составлен исполняемый файл типа тестовый ноутбук, использующий написанную библиотеку, в котором собраны тесты для проверки алгебраических свойств тензора кривизны Римана, а также тесты для проверки свойства римановой кривизны.

# Список использованных источников


1. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии — М.: Факториал Пресс, 2000. — 448 с.
2. Львовский С. М. Набор и верстка в системе LaTeX. — 5-е изд., переработанное. — М.: МЦНМО, 2014. — 400 с.
3. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. — М.: ДМК Пресс, 2010. — 624 с.: ил.