Logică Matematică şi Computaţională
Cursurile I, II și III

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2024–2025, Semestrul II

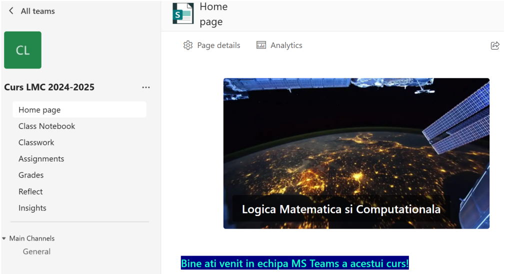
Cuprinsul acestui set de cursuri

Scopul acestui curs

- bază teoretică pentru alte cursuri de matematică și informatică
- exersarea unor tehnici fundamentale de raționament matematic
- formalizarea (adică exprimarea matematică, exprimarea în simboluri matematice a) acestor tehnici de raționament ca metode generale de a raționa, și studiul lor cu mijloace matematice, prin intermediul acestui cadru formal care permite exprimarea lor matematică (vom vedea)
- familiarizarea cu limbajul Prolog (limbaj de programare non–imperativă despre care vom discuta la laborator; a se vedea fișierul .PDF conținând *suportul teoretic pentru laborator*: lecțiile aferente acestui curs sunt *mixte seminar–laborator*)

Cerințe pentru bunul mers al acestui curs

- Pentru anunțuri despre lecții și examen, pentru a putea susține temele colective și, în cazul în care examenul se susține online, și pentru a putea susține examenul, studenții trebuie să fie înscriși în echipa **MS Teams** a acestui curs:



- Studenții trebuie să descarce materialele pentru cursul meu de logică matematică și computațională pe care le postez pe **MS Teams** și să urmărească eventualele actualizări ale acestora.
- Studenții pe care nu i–am înscris în echipa **MS Teams** a cursului trebuie să mă informeze despre acest lucru în chatul **MS Teams**, prin mail sau prin intermediul șefului de grupă.

Cerințe pentru bunul mers al acestui curs

- Lecțiile online se vor ține prin **MS Teams**, prin *întâlniri* desfășurate pe canalul *General* al echipei **MS Teams** a cursului, iar, în cazul în care **MS Teams**–ul nu funcționează, prin **Zoom**.
- Vă voi anunța pe canalul *General* al echipei **MS Teams** a cursului când facem lecțiile (numai) online.
- A se vedea, pe PAGINA DE HOME a echipei **MS Teams** a cursului, link–urile către folderul din *Google drive* cu materialele pentru acest curs de anul trecut și înregistrările lecțiilor online din anii trecuți, precum și cel în care voi posta înregistrările lecțiilor de anul acesta.
- Toți studenții, indiferent din ce serie sau grupă, sunt invitați la cursul și la oricare dintre seminariile și laboratoarele față în față sau online din fiecare săptămână. Și studenții de la seria ID trebuie să urmărească lecțiile seriei IF sau înregistrările acestora.

Modalitatea de examinare la acest curs

- Veți primi prin **MS Teams** TEME COLECTIVE (pentru fiecare grupă a fiecărei serii în parte), care vor fi notate, iar punctajul acumulat din aceste TEME va face parte din nota de la examen.
  La aceste TEME COLECTIVE trebuie să lucrați împreună în cadrul fiecărei grupe (sigur că vă puteți consulta și cu alte grupe din seria voastră sau cealaltă serie participantă la acest curs), și, după ce conveniți asupra celei mai bune redactări pentru fiecare temă, fiecare grupă va trebui să–mi trimită prin **MS Teams** un singur exemplar al acelei rezolvări pentru întreaga grupă.
- Dacă EXAMENUL se va susține online, atunci acesta se va da tot prin **MS Teams**. Indiferent dacă vom da EXAMENUL online sau cu prezență fizică într–o sală de examen, acesta va consta numai din exerciții, cu materialele în față; nu veți avea subiecte de teorie la EXAMEN.

Mai multe detalii pe ultimele slide–uri din acest PDF.

Introducere

- **Logica matematică**: modelare matematică a legilor gândirii;

  mai precis, exprimare în simboluri matematice a modurilor de a raționa, și, pe baza acestei exprimări, studierea tipurilor de raționamente cu mijloace matematice (inclusiv algebrice, topologice, probabiliste etc.; ultimele două enumerate depășesc cadrul acestui curs)

Înainte de a trece la prezentarea unor sisteme logice, este necesar un capitol de preliminarii algebrice, în care:

- vom parcurge câteva noțiuni de bază despre mulțimi, funcții, relații, relații de ordine și mulțimi ordonate, apoi latici;
- vom introduce o structură algebrică numită **algebră Boole**, structură cu foarte multe aplicații în matematică și informatică.

Algebrele Boole ne vor servi la studiul **logicii clasice** cu mijloace algebrice.

Aplicații ale **algebrelor Boole** în informatică:

- la proiectarea circuitelor electronice
- la crearea de sisteme și aplicații software
- în fundamentarea matematică a multor ramuri ale informaticii

Cuprinsul acestui curs

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulțimi, funcții și relații. Relații binare. Relații de echivalență
- Relații de ordine. Mulțimi (parțial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre și congruențe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone *(algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrelor Boole)*. Structura algebrelor Boole finite

Cuprinsul acestui curs

Capitolul 2: Logica propozițională clasică:

- Sintaxa *(o primă prezentare pentru logica propozițională clasică: sistemul Hilbert)*
- Algebra Lindenbaum–Tarski *(o algebră Boole asociată logicii propoziționale clasice)*
- Semantica *(calcul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente: $0 =$ fals, $1 =$ adevărat)*
- Teorema de completitudine *(deducția sintactică, coincide cu deducția semantică)*
- Rezoluția propozițională *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*
- Deducția naturală *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor *(predicat = propoziție cu variabile)*:

- Structuri de ordinul I *(structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate)*
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine *(deducția sintactică, coincide cu deducția semantică)*
- Rezoluția în logica clasică a predicatelor

Bibliografie

Materiale de parcurs obligatoriu:

- Suportul de curs, seminar și laborator de logică matematică și computațională pe care îl postez în cursul semestrului pe **MS Teams**.

Toată materia pentru examen se regăsește în materialele de curs, seminar și laborator pe care le postez pe **MS Teams**.

Materiale ajutătoare pentru parcurgerea suportului de curs, seminar și laborator și în pregătirea pentru examinări (vedeți pe **MS Teams** link–urile către folderele din *Google drive*):

- Exerciții rezolvate de la consultații, exerciții de la examene recente, câteva rezolvate, și exerciții rezolvate de la examene mai vechi, în referate care au apărut în *Revista de logică* a A. Atanasiu, publicată online cu ani în urmă, disponibile în subfolderul cu materiale bibliografice al folderului din *Google drive* cu materiale de curs.
- Înregistrări ale lecțiilor de anul acesta și din anii trecuți postate în *Google drive* și, în cazul celor de anul acesta, disponibile pe canalul *General* al echipei **MS Teams** a cursului, la tab–ul *Files*, în folderul *Recordings*.

Bibliografie

Materiale bibliografice de consultat FACULTATIV, pentru cei care doresc aprofundarea noțiunilor din acest curs:

- I. Bratko, *Prolog Programming for Artifficial Intelligence*, Wokingham: Addison–Wesley, 1986.
- S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.
- D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.
- D. Bușneag, D. Piciu, *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, Craiova, 2003.
- V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București, 1974, 1975, 1976.
- A. A. Fraenkel, Y. Bar–Hillel, A. Levy, *Foundations of Set Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. **67**, 1973.
- J. Gallier, The Completeness of Propositional Resolution: a Simple and Constructive Proof, *Logical Methods in Computer Science* **2**(5:3) (2006), pg. 1-7.

Bibliografie

- G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, București, 1978, disponibilă online (scanată).
- G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, București, 2010 – CARTEA CARE STĂ LA BAZA ACESTUI CURS, CU EXCEPŢIA REZOLUŢIEI PENTRU LOGICA CLASICĂ ŞI A PROGRAMĂRII ÎN PROLOG.
- K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, București, 1969.
- G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*
  - traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică și Programare Logică*, Editura Tehnică, București, 1998.
- S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București, 1982.
- A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulțimilor*, Editura Universității din București, 1996.

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă și numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ș. a. m. d.** = și așa mai departe
- : să se demonstreze că
- : contradicție
- Vom folosi și notația ":=", cu semnificația de atribuire, ca prescurtare pentru scrierea $\stackrel{\text{definiție}}{=}$ sau $\stackrel{\text{notație}}{=}$.

Exemplu

Scrierea "$x := f(y)$" poate semnifica:

- se atribuie lui x valoarea $f(y)$
- se definește x ca fiind $f(y)$
- se notează $f(y)$ cu x

Semnificația exactă se va deduce din context, în fiecare apariție a unei notații de acest tip.

Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

Începem Capitolul 1 al cursului: "Preliminarii algebrice", cu secțiunea "Mulțimi".

- Ce este o **mulțime**?
- **Teoria naivă a mulțimilor** versus **teoria axiomatică a mulțimilor**
- O definiție din **teoria naivă a mulțimilor**: o *mulțime* este o colecție de obiecte **bine determinate** și **distincte**, numite *elementele mulțimii*.
- **distincte**: o mulțime nu conține un același obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulțime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulțime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

Exemplu

Să considerăm mulțimea zerourilor (i. e. a rădăcinilor) funcției zeta a lui Riemann. Nu sunt cunoscute toate elementele acestei mulțimi (a se vedea **ipoteza lui Riemann**, care este o parte din **a 8-a problemă a lui Hilbert**, problemă de un milion de dolari, în enciclopedia online wikipedia sau în cartea *Vârsta de aur a matematicii* a lui Devlin etc.), dar nu există două mulțimi distincte (diferite) fiecare având ca elemente zerourile funcției zeta a lui Riemann, deci această definiție descrie o mulțime, o identifică în mod unic.

Teoria naivă a mulțimilor

Teoria naivă a mulțimilor a fost inițiată de matematicianul Georg Cantor, care, în 1884, a definit pentru prima dată noțiunea de *mulțime*, ca fiind o "grupare într-un tot a unor obiecte distincte ale intuiției sau gândirii noastre".
O mulțime este considerată ca un tot unitar, deci ca un obiect unitar, care poate fi așadar element al altei mulțimi.

- teorie **naivă**: ambiguitatea exprimării în această definiție, care lasă loc de interpretări: ce este un "obiect (al intuiției sau gândirii noastre)", ce este o "grupare într-un tot"?
- teorie **naivă**: din definiții exprimate în limbaj natural (metalimbaj) (vom vedea), adesea ambigue când descriu noțiuni abstracte, se încearcă stabilirea unor proprietăți ale noțiunilor definite
- matematica lucrează cu noțiuni precise $\Rightarrow$ necesitatea fundamentării axiomatice (vom vedea)
- teorie **axiomatică**: se lucrează cu noțiuni distinse inițial doar prin denumirile lor, asupra cărora se impun axiome (vom vedea), proprietăți, reguli de lucru precise cu acele noțiuni; de ce este mai avantajoasă această abordare? pentru că matematica este interesată de **proprietățile** noțiunilor cu care lucrează, nu de **natura** lor; vom relua această discuție când vom vorbi despre **egalitate** versus **izomorfism**

Paradoxul lui Russell $\Rightarrow \nexists$ mulțimea tuturor mulțimilor

Noțiunea de mulțime se dovedește a nu fi suficient de cuprinzătoare: în 1903, Bertrand Russell demonstrează că nu există **mulțimea tuturor mulțimilor**, prin paradoxul care îi poartă numele.
Este unanim acceptat faptul că, dacă M este o mulțime, iar P este o proprietate referitoare la elementele mulțimii M, atunci colecția tuturor elementelor lui M care satisfac (au) proprietatea P este tot o mulțime, notată uzual astfel:

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

Facem apel aici la cunoștințele despre notațiile legate de mulțimi învățate în gimnaziu și liceu, unde se studiază teoria naivă a mulțimilor: M este o literă (o notație, un nume, o variabilă) ce desemnează o mulțime arbitrară (dar fixată), x este o literă ce desemnează un element arbitrar al mulțimii M, $\in$ este *simbolul de apartenență*, scrierea $x \in M$ semnifică faptul că x este un element al mulțimii M, iar scrierea $P(x)$ semnifică faptul că elementul x satisface proprietatea P.
Acoladele încadrează o mulțime, dată fie prin enumerarea elementelor ei separate de virgule, fie prin specificarea unei proprietăți asupra elementelor unei mulțimi "mai mari" și a faptului că mulțimea la care ne referim se obține din acea mulțime "mai mare" prin selectarea elementelor care au acea proprietate, cum este cazul de față.

Vom folosi și simbolul $\notin$, care este negația apartenenței, adică scrierea $x \notin M$ semnifică faptul că nu are loc $x \in M$, i. e. x nu este un element al lui M.

- "arbitrar, (dar) fixat" = care poate fi înlocuit cu **orice** obiect "de același tip" (de exemplu, în cazul de mai sus, cu orice mulțime), dar, din momentul în care l–am denumit și am început să lucrăm cu un astfel de obiect, atunci acel obiect (cu care lucrăm) este **fixat**, adică "nu se schimbă", "nu este înlocuit" cu un alt obiect în timp ce lucrăm cu el

Ce s–ar întâmpla dacă ar exista **mulțimea tuturor mulțimilor**, adică mulțimea având ca elemente toate mulțimile? Să presupunem prin absurd că această mulțime a tuturor mulțimilor există, și s–o notăm cu $\mathcal{S}et$. Am presupus că $\mathcal{S}et$ este mulțime, deci, întrucât $\mathcal{S}et$ conține toate mulțimile, înseamnă că $\mathcal{S}et$ se conține pe sine: $\mathcal{S}et \in \mathcal{S}et$, un fapt "neobișnuit" în condițiile în care până acum am lucrat doar cu mulțimi care nu se conțin pe ele însele ca elemente (mulțimea numerelor naturale conține numai numerele naturale, nu și mulțimea acestor numere, adică pe sine, ca element; și la fel stau lucrurile cu toate mulțimile pe care le–am întâlnit în gimnaziu și liceu).

Acest fapt ne furnizează ideea de a considera proprietatea ca o mulțime să nu se conțină pe sine. Fie așadar P proprietatea referitoare la elementele lui $\mathcal{S}et$, adică la mulțimi, definită astfel: o mulțime A satisface proprietatea P ddacă $A \notin A$ (i. e. A nu se conține pe sine):

$$P(A) : A \notin A$$

Și acum să considerăm mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin pe ele însele, adică mulțimea $\{A \in \mathcal{S}et \mid P(A)\}$ a mulțimilor care satisfac proprietatea P, sau, altfel scris, mulțimea:

$$X := \{A \in \mathcal{S}et \mid A \notin A\}$$

Paradoxul lui Russell: X satisface proprietatea P sau n-o satisface? Adică $X \notin X$ sau $X \in X$ (este adevărat că $X \notin X$ sau că $X \in X$)?
Dacă $X \in X$, atunci, întrucât elementele lui X sunt mulțimile care nu se conțin pe ele însele, înseamnă că X nu se conține pe sine: $X \notin X$. Am obținut o contradicție, pentru că nu pot avea loc simultan proprietățile $X \in X$ și $X \notin X$: una dintre ele este adevărată, cealaltă este falsă, pentru că fiecare dintre aceste proprietăți este negația celeilalte.
Dacă $X \notin X$, atunci, întrucât X conține **toate** mulțimile care nu se conțin pe ele însele, înseamnă că X nu este una dintre mulțimile care nu se conțin pe ele însele, adică X se conține pe sine: $X \in X$. Iarăși am obținut o contradicție.
Sigur că, pentru orice mulțime X, are loc una dintre situațiile: $X \in X$ și $X \notin X$ (și numai una), pentru că, dacă una dintre aceste două proprietăți nu este satisfăcută, atunci cealaltă este satisfăcută (așadar avem ”ddacă”).
Deci oricare dintre cazurile posibile duce la o contradicție. De unde a provenit contradicția? Din presupunerea că există mulțimea tuturor mulțimilor. Înseamnă că această presupunere este falsă, i. e. **nu există mulțimea tuturor mulțimilor**.

Mulțimi versus clase proprii

Totalitatea mulțimilor nu formează o mulțime, ci o **clasă**. Din punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noțiunea de *clasă*, decât că este “ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulțime“. Se consideră că orice mulțime este o clasă, dar nu și invers. Clasele care nu sunt mulțimi se numesc *clase proprii.*

Semnul (simbolul) de apartenență **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparține unui alt obiect. O mulțime poate aparține unei clase (chiar și unei mulțimi), dar nicio clasă proprie nu aparține unei mulțimi, și, mai mult, nicio clasă proprie nu aparține unei clase (sau vreunui alt fel de obiect). În particular, ultima dintre observațiile anterioare arată că **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că s–a impus restricția ca o clasă proprie, i. e. o clasă care nu este mulțime, să nu fie element al niciunui obiect, și deci nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente. Dacă nu s–ar fi impus această restricție, atunci clasele nu s–ar fi deosebit semnificativ de mulțimi, și procesul de a considera mereu obiecte matematice “mai cuprinzătoare“ ar fi continuat la infinit: să denumim ε tipul de obiect în care se încadrează obiectul care are drept elemente toate clasele, să denumim Ω tipul de obiect în care se încadrează obiectul care are drept elemente toate ε–urile, ș. a. m. d..

Teoria axiomatică a mulțimilor

- Ce este o **axiomă**?

Teoria axiomatică a mulțimilor

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O **axiomă** nu se demonstrează, ci pur și simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Orice teorie matematică trebuie să aibă la bază (i. e. ca **fundament**) un sistem (i. e. o colecție) de **axiome**. Pornind de la aceste axiome, se demonstrează teoremele (rezultatele matematice) ale acelei teorii.
- Scopul **axiomatizării**, adică al construirii unui **sistem de axiome** pentru o teorie matematică, este acela de **a elimina ambiguitățile** din definirea noțiunilor, conceptelor cu care lucrează acea teorie matematică.
- Desigur, axiomele unei teorii matematice care modelează un fenomen din lumea înconjurătoare trebuie să reflecte proprietățile acelui fenomen, de regulă obținute experimental. Însă respectiva construcție (teorie) matematică în sine, ca orice teorie matematică, trebuie să beneficieze de un sistem de axiome, din rațiuni ce țin de natura matematicii ca știință, de ceea ce se numește **rigoare matematică**, anume **lipsa ambiguităților**, de necesitatea oricărei teorii matematice de a fi o construcție de sine stătătoare, independent de fenomenul pe care îl modelează. Aceste trăsături ale matematicii sunt esențiale pentru îndeplinirea rolului ei în alte științe, în care este aplicată.

- **Exemplu de axiomă**: **axioma paralelelor** pentru geometria euclidiană: "două drepte paralele tăiate de o secantă formează unghiuri alterne interne congruente".
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmații, chiar dacă la originea sistemelor axiomatice se află "proprietăți observabile", "judecăți primare", fapte considerate "fundamentale", considerate a fi necesare ca "bază" a unei teorii matematice, care nu se demonstrează pornind de la alte fapte, ci tocmai invers, ele servesc la demonstrarea altor fapte în acea teorie matematică.
- Există mai multe sisteme axiomatice pentru geometria euclidiană, iar enunțul denumit mai sus **axioma paralelelor** nu este considerat ca axiomă în toate aceste sisteme. De aceea spunem că acest enunț **nu** are ca **proprietate intrinsecă** faptul de a fi axiomă.
- Acest enunț este **echivalent** cu alte enunțuri, adică acele alte enunțuri se deduc din el (atunci când el este considerat ca **axiomă**), dar și el se deduce din fiecare dintre acele alte enunțuri (atunci când acele enunțuri sunt considerate ca **axiome**, și atunci spunem că acest enunț de mai sus este un rezultat, o **teoremă** a geometriei euclidiene, bazate pe un alt sistem axiomatic).

- Sigur că oricare două **sisteme axiomatice** pentru o **aceeași** teorie matematică trebuie să fie **echivalente**, adică din fiecare dintre ele trebuie să se deducă fiecare altul dintre ele, iar acest lucru înseamnă nimic altceva decât faptul că din oricare două sisteme axiomatice pentru o teorie **se deduc aceleași rezultate**, adică **se construiește aceeași teorie matematică**.
- De exemplu, toate axiomatizările geometriei euclidiene sunt **echivalente**.
- De asemenea, toate axiomatizările teoriei mulțimilor (dintre care vom vedea în continuare una) sunt **echivalente**. De exemplu, **axioma alegerii** și **axioma lui Zorn** (din axiomatizări diferite ale teoriei mulțimilor) sunt **echivalente**, și când prima este aleasă ca axiomă, atunci a doua se numește **lema lui Zorn** (și se deduce din prima), iar când a doua este aleasă ca axiomă, atunci prima se numește **lema alegerii** (și se deduce din a doua). A se vedea alte enunțuri echivalente cu **axioma alegerii**, de exemplu în cartea de A. Scorpan din bibliografia cursului.
- În cazurile date ca exemple mai sus, avem **enunțuri (individuale) echivalente**, dar, așa cum am menționat, putem avea **sisteme de enunțuri echivalente**, caz în care **fiecare enunț** din oricare dintre acele sisteme **se deduce dintr–un întreg alt sistem de enunțuri**, adică **din toate enunțurile acelui alt sistem luate la un loc**.

Teoria axiomatică a mulțimilor

Precum am menționat mai sus, sunt cunoscute mai multe **sisteme axiomatice** (i. e. **sisteme de axiome**) pentru teoria mulțimilor. De exemplu următoarele, denumite astfel după matematicienii care le-au creat:

- **sistemul axiomatic Zermelo–Fraenkel**, care lucrează numai cu mulțimi
- **sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays**, numit și **sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel**, care admite și existența claselor

S-a demonstrat că:

- Orice rezultat **despre mulțimi** care poate fi demonstrat pornind de la (axiomele) sistemul(ui) axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel poate fi demonstrat și pornind de la sistemul axiomatic Zermelo–Fraenkel.

Teoria axiomatică a mulțimilor

Este de menționat faptul că problema fundamentării prin sisteme axiomatice a teoriei mulțimilor (care este ea însăși un fundament al întregii matematici) a dat naștere la controverse care nu sunt încheiate nici în ziua de azi, pentru că **scopul principal al elaborării oricăror sisteme axiomatice**, anume **eliminarea tuturor ambiguităților (de limbaj, din definiții, din formulări de proprietăți etc.) dintr-o teorie matematică**, este foarte greu de atins în cazul teoriei mulțimilor, tocmai datorită caracterului ei primar, de bază, de fundament al întregii matematici.

Notă

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel nu face parte din materia pentru examen: este FACULTATIV.
La fel ca în cazul acestui sistem axiomatic, o parte dintre următoarele rezultate sau secțiuni din curs vor fi marcate pe slide–urile cursurilor ca fiind FACULTATIVE.
Parcurgerea materialelor FACULTATIVE din curs facilitează înțelegerea următoarelor cursuri și seminarii, așa că este recomandată, cel puțin la modul orientativ, intrând în detaliile care vă stârnesc curiozitatea.

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Vom face acum o scurtă prezentare a **sistemului axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel**, după cartea *Foundations of Set Theory*, de Abraham A. Fraenkel, Yehoshua Bar–Hillel și Azriel Levy (seria "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics", volumul 67).

Primul lucru de care vom avea nevoie este o formalizare a limbajului teoriei mulțimilor, care să elimine ambiguitățile din acest limbaj.

- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: "limbajul natural", "vorbirea curentă (obișnuită)", "exprimarea în cuvinte", "fără simboluri matematice"
- un enunț (complet) formalizat nu conține elemente (cuvinte, exprimări) din metalimbaj
- putem transforma, traduce enunțuri exprimate în limbaj natural în enunțuri formalizate, dacă avem, în teoria matematică în care lucrăm, un vocabular suficient de bogat și reguli sintactice care să permită această transformare
- desigur, orice enunț formalizat poate fi exprimat, tradus, în limbaj natural

O paranteză: nivele de limbaj

În capitolele de logică ale cursului, unde vom studia raționamentele logice cu mijloace matematice, obiectele cu care vom lucra vor avea denumirile obișnuite de: axiome, teoreme, deducții, deducții din ipoteze, pentru că vor fi denumite după conceptele pe care le modelează. Despre aceste obiecte, vom formula și vom demonstra leme, propoziții, teoreme, corolare. Vom avea teoreme despre teoreme, vom deduce proprietăți ale deducțiilor.

În acele capitole, vom avea, așadar, două nivele de limbaj: *limbajul* teoriei matematice a logicii clasice (a propozițiilor, apoi a predicatelor), cu vocabularul său de simboluri și denumiri și propriile sale reguli de sintaxă, și *metalimbajul*: vorbirea obișnuită, limbajul natural.

O analogie imediată pentru a înțelege conceptul de *nivele diferite de limbaj* provine din informatică:

- codul mașină
- limbajele de asamblare
- limbajele de programare

sunt limbaje de nivele diferite pe care un computer le poate procesa, traducând codul scris într–un limbaj de programare în limbaj de asamblare, apoi în cod mașină, iar, pe acesta din urmă, transpunând–ul în operații fizice în componentele sale electronice.

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Precum am anunțat mai sus, acest sistem axiomatic operează atât cu **mulțimi**, cât și cu **clase**. Natura mulțimilor și a claselor este neprecizată, în sensul că ele sunt considerate a fi obiecte matematice date doar prin denumirile de **mulțime** și **clasă**, și tot ce știm despre ele sunt proprietățile care vor fi enumerate mai jos (a se vedea mai sus o discuție despre abordarea axiomatică și avantajele ei).
Așadar, primele elemente ale limbajului pe care îl vom construi sunt:

- *mulțimile* și *clasele*, denumite generic *obiecte*, care satisfac condiția că orice mulțime este o clasă (dar nu orice clasă este o mulțime); clasele care nu sunt mulțimi vor fi numite *clase proprii*

Pentru a scrie axiomele, vom avea nevoie să putem atribui (asocia) nume mulțimilor și claselor arbitrare, dar și mulțimilor și claselor precizate, fixate, constante.
Deci vom folosi noțiunile de:

- *variabilă* sau *nume variabil*, care semnifică un nume atribuit unui obiect arbitrar și neprecizat
- *constantă* sau *nume constant*, care semnifică un nume atribuit unui obiect fixat, precizat

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

- **regulă**: în definițiile și axiomele acestui sistem axiomatic, numele variabile și numele constante vor fi litere din alfabetul latin; numele atribuite mulțimilor vor fi litere mici, iar numele atribuite claselor (care pot fi mulțimi, dar despre care nu se precizează dacă sunt sau nu sunt mulțimi) vor fi litere mari
- în prezentarea limbajului acestui sistem axiomatic, vom folosi litere grecești ca nume variabile pentru orice fel de obiecte, i. e. și pentru mulțimi, și pentru clase care pot să nu fie mulțimi
- în majoritatea cazurilor, vom folosi litere de tipurile enumerate mai sus fără a preciza că ele denumesc mulțimi, clase care nu sunt neapărat mulțimi sau obiecte de oricare dintre aceste tipuri, iar convențiile pe care tocmai le–am stabilit ne vor spune la ce fel de obiecte ne vom referi

Vom folosi următoarele simboluri pentru a enunța proprietăți ale obiectelor: $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

$\in$ și $\notin$:

- $\in$ se numește *simbolul de apartenență*; $\alpha \in \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care*) se citește "α aparține lui β" sau "β conține pe α"
- un obiect care aparține unui alt obiect va fi numit *element* sau *membru* al obiectului căruia îi aparține
- simbolul $\notin$ va fi folosit cu semnificația: $\alpha \notin \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care este satisfăcut*) ddacă nu are loc $\alpha \in \beta$ (și se citește "α nu aparține lui β" sau "β nu conține pe α")

Am precizat că obiectele cu care lucrăm se numesc **mulțimi** sau **clase**. Deci orice element la care ne vom referi este la rândul său o mulțime sau o clasă (de fapt un element nu va fi niciodată o clasă care nu e mulțime, i. e. o clasă proprie, ci orice element va fi o mulțime; o clasă proprie nu aparține niciunui obiect; nu vom întâlni în acest sistem axiomatic clase proprii care sunt elemente ale unui obiect; a se vedea o discuție de mai sus referitoare la acest aspect legat de clase și de proprietatea de apartenență).

$=$ și $\neq$:

- $=$ se numește *simbolul de egalitate*; $\alpha = \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care*) se citește "α coincide cu β" și semnifică faptul că α și β sunt *(nume pentru) (denumesc) (reprezintă)* același obiect
- simbolul $=$ se consideră a avea următoarele proprietăți:
    - *reflexivitate*: pentru orice obiect α, are loc $\alpha = \alpha$
    - *simetrie*: pentru orice obiecte α și β, dacă $\alpha = \beta$, atunci are loc și $\beta = \alpha$
    - *tranzitivitate*: pentru orice obiecte α, β și γ, dacă $\alpha = \beta$ și $\beta = \gamma$, atunci are loc și $\alpha = \gamma$
    - *substitutivitate*: pentru orice obiecte α și β și orice proprietate P referitoare la obiecte, dacă $P(\alpha)$ (adică α satisface proprietatea P; am mai folosit această notație) și $\alpha = \beta$, atunci are loc și $P(\beta)$
- simbolul $\neq$ va fi folosit cu semnificația: $\alpha \neq \beta$ (*este un enunț (i. e. o proprietate), care este satisfăcut*) ddacă nu are loc $\alpha = \beta$ (și se citește "α nu coincide cu β")

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Simbolurile $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici*.

- $\neg$ se numește *negația* și se citește "non" sau "not"; dacă E este un enunț (o proprietate) referitor la obiecte, atunci $\neg E$ se citește "non E" sau "not E" și semnifică negația proprietății E, adică acea proprietate care este adevărată ddacă E este falsă (și, desigur, falsă ddacă E este adevărată)
- $\vee$ se numește *disjuncția* și se citește "sau"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \vee F$ se citește "E sau F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă măcar (cel puțin) una dintre proprietățile E și F este adevărată
- $\wedge$ se numește *conjuncția* și se citește "și"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \wedge F$ se citește "E și F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă ambele proprietăți E și F sunt adevărate (i. e. ddacă fiecare dintre proprietățile E și F este adevărată)

Conectorii logici $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ se pot defini pe baza conectorilor logici $\neg$, $\vee$ și $\wedge$, astfel: pentru orice enunțuri E și F:

$$E \rightarrow F \text{ este, prin definiție, enunțul } \neg E \vee F$$

$$E \leftrightarrow F \text{ este, prin definiție, enunțul } (E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)$$

Urmează definițiile lor "în cuvinte".

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

- $\rightarrow$ se numește *implicația* și se citește "implică"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \rightarrow F$ se citește "E implică F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă din E rezultă (i. e. se deduce) F, i. e. acea proprietate care este adevărată ddacă, în situația când E este adevărată, atunci și F este adevărată, i. e. acea proprietate care este adevărată ddacă fie E este falsă, fie F este adevărată (fie ambele)
- definiția de mai sus a *implicației* pare să contrazică intuiția noastră, dar ea ilustrează de fapt foarte bine modul de a raționa matematic: cum demonstrăm că o proprietate E implică o proprietate F? (că din E rezultă F? că din E se deduce F?); ce avem, de fapt, de arătat? avem de arătat că, dacă E este adevărată, atunci și F este adevărată; deci, dacă E este falsă, atunci **nu avem nimic de demonstrat**: faptul că E este falsă nu invalidează implicația "E implică F"; "E implică F" este falsă numai când E e adevărată, dar F e falsă; dacă E este adevărată, atunci trebuie ca F să fie adevărată pentru ca această implicație să fie adevărată; deci, indiferent cum este E, dacă F este adevărată, atunci implicația respectivă este adevărată; și, dacă recitim acest paragraf, observăm că implicația "E implică F" este adevărată **exact atunci când** (adică **atunci și numai atunci când**) fie E este falsă, fie F este adevărată (fie ambele)

Remarcă (schematic, valoarea de adevăr a unei implicații)

(**fals** $\Rightarrow$ **orice**) este **adevărat**

De exemplu, faptul că există numere naturale impare nu invalidează implicația: "dacă n e un număr natural par, atunci ultima cifră a lui n aparține mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$". Pentru a demonstra această implicație, avem de arătat că ultima cifră a lui n aparține mulțimii $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ doar pentru cazul în care n satisface antecedentul implicației, anume faptul că n e număr natural par.

(**adevărat** $\Rightarrow$ **fals**) este **fals**

(**adevărat** $\Rightarrow$ **adevărat**) este **adevărat**

așadar: (**orice** $\Rightarrow$ **adevărat**) este **adevărat**

- $\leftrightarrow$ se numește *echivalența* și se citește "echivalent"; dacă E și F sunt enunțuri (proprietăți) referitoare la obiecte, atunci $E \leftrightarrow F$ se citește "E este echivalentă cu F" și semnifică acea proprietate care este adevărată ddacă au loc și $E \to F$, și $F \to E$, i. e. acea proprietate care este adevărată ddacă E și F sunt simultan false sau simultan adevărate (adică sunt ambele false sau ambele adevărate, i. e. au aceeași "valoare de adevăr")

Exercițiu (temă)

Citiți de mai sus semnificația implicației și justificați (i. e. arătați "în cuvinte") faptul că proprietatea $E \leftrightarrow F$ (adică ambele proprietăți $E \to F$ și $F \to E$, adică proprietatea $(E \to F) \wedge (F \to E)$, după cum arată definiția conjuncției) este adevărată ddacă E și F sunt fie ambele false, fie ambele adevărate).

Observație

Se lucrează numai cu enunțuri (mai precis **propoziții** – vom vedea) care sunt **fie false, fie adevărate,** adică **au valoare de adevăr**, și aceasta poate fi **numai "fals" sau "adevărat".** Cu astfel de enunțuri vom lucra în **logica propozițională clasică**, pe care o vom studia într–o serie de cursuri viitoare.

Observație

Cerința ca un enunț **să aibă valoare de adevăr, și aceasta să fie "fals" sau adevărat", nu este trivială,** nici măcar pentru enunțurile afirmative, dacă ne referim la limbajul natural (cele interogative sau exclamative **nu au valori de adevăr**).

De **exemplu:** ce valoare de adevăr are enunțul A de mai jos? Dar enunțul B?

A : *Mestecenii sunt frumoși.*

B : *Afirmația pe care eu o rostesc în acest moment este falsă.*

În cazul enunțului A, se simte nevoia introducerii a mai mult de două valori de adevăr, din cauza naturii **subiective** a respectivei afirmații.

Enunțul B duce la un **paradox** (binecunoscutul **paradox al mincinosului**) dacă vrem să–i evaluăm valoarea de adevăr la fals sau adevărat (dacă e fals, atunci rezultă că e adevărat, iar, dacă e adevărat, atunci rezultă că e fals). Așadar enunțul B nu este nici fals, nici adevărat.

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Simbolurile $\forall$ și $\exists$ se numesc *cuantificatorii*.

- $\forall$ se numește *cuantificatorul universal* și se citește "oricare ar fi"; dacă α este o variabilă (un nume variabil) și P este o proprietate referitoare la obiecte, atunci $\forall \alpha P(\alpha)$ se citește "pentru orice α, $P(\alpha)$" și este acea proprietate care este adevărată ddacă orice obiect α satisface proprietatea P (α poate fi un nume variabil pentru mulțimi, caz în care condiția anterioară devine: orice mulțime satisface proprietatea P, sau poate fi un nume variabil pentru clase, caz în care condiția anterioară devine: orice clasă satisface proprietatea P)
- $\exists$ se numește *cuantificatorul existențial* și se citește "există"; dacă α este o variabilă (un nume variabil) și P este o proprietate referitoare la obiecte, atunci $\exists \alpha P(\alpha)$ se citește "există α, a. î. $P(\alpha)$" și este acea proprietate care este adevărată ddacă există (măcar, cel puțin) un obiect α care satisface proprietatea P (α poate fi un nume variabil pentru mulțimi, caz în care condiția anterioară devine: există (măcar) o mulțime care satisface proprietatea P, sau poate fi un nume variabil pentru clase, caz în care condiția anterioară devine: există (măcar) o clasă care satisface proprietatea P)

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

- Vom folosi și parantezele rotunde și pătrate, pentru a delimita enunțuri (i. e. proprietăți) și obiecte cu notații compuse din mai multe simboluri (vom vedea ce sunt acestea).

Am prezentat limbajul pe care îl vom folosi. Acum începem prezentarea (efectivă a) acestui sistem axiomatic pentru teoria mulțimilor, prezentarea **axiomelor** care îl compun.
În primul rând, se consideră că există cel puțin o mulțime.

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Definiție

Pentru orice mulțimi x și y, dacă, oricare ar fi z, faptul că $z \in x$ implică $z \in y$ (adică orice element al lui x este și element al lui y), atunci scriem $x \subseteq y$ și spunem că x este o *submulțime* a lui y.

I. Axioma extensionalității de mulțimi:

- *Intuitiv*: Dacă $x \subseteq y$ și $y \subseteq x$, atunci $x = y$.
- *Formal (i. e. formalizat)*: $\begin{cases} \forall x \forall y[(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x = y] \\ \text{sau} \\ \forall x \forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y] \end{cases}$

Dacă citim a doua exprimare formalizată a acestei axiome, observăm că ea spune că două mulțimi cu aceleași elemente coincid.
Pentru cele ce urmează, această primă axiomă arată unicitatea mulțimilor la care ne vom referi mai jos, care sunt descrise prin precizarea elementelor lor.
Reciproca afirmației din această axiomă, anume faptul că două mulțimi care coincid au aceleași elemente, este o consecință a proprietății de **substitutivitate** a simbolului $=$.

Definiție

O mulțime n care nu conține niciun element (i. e. pentru care are loc: $\neg\exists x(x \in n)$)) se numește *mulțime vidă*.

Teoremă

Există o unică mulțime vidă.

În acest punct își are locul doar unicitatea din teorema anterioară, care este o consecință a **Axiomei I**. Pentru a demonstra existența, se aplică **Axioma XI** pentru a arăta că există o clasă N având ca elemente acele obiecte x care satisfac proprietatea $x \neq x$, și **Axioma V** pentru a arăta că "intersecția" dintre clasa N și o mulțime arbitrară a este o mulțime, pe care o notăm cu n. Deci $n = \{x \in a \mid x \neq x\}$, folosind notațiile cunoscute din teoria naivă a mulțimilor. Sigur că niciun obiect x nu satisface proprietatea $x \neq x$, ceea ce înseamnă că n nu are niciun element. Deci partea de existență din această teoremă își are locul după **Axioma XI**.

Notație

Vom nota cu n mulțimea vidă (dacă aceasta există).

n este un **nume constant** (a se vedea mai sus limbajul acestui sistem axiomatic).

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

II. Axioma perechii:

- *Intuitiv*: Pentru orice elemente a și b, există o mulțime y care conține doar a și b.
- *Formal*: $\forall a \forall b \exists y \forall x [x \in y \leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$

Definiție

O mulțime care conține doar elementele a și b se numește *perechea* formată din a și b și se notează $\{a, b\}$ sau $\{b, a\}$. *Perechea ordonată* formată din a și b se notează $\langle a, b\rangle$ și se definește prin: $\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$.

Să remarcăm că, în **Axioma II** și definiția anterioară, nu a fost impusă condiția ca a să nu coincidă cu b.
Ordonarea perechii $\{a, \{a, b\}\}$ este dată de faptul că $a \in \{a, b\}$. Conform **Axiomei a IX–a (a fundării –** a se vedea mai jos), relația de apartenență este *antisimetrică*: nu putem avea două obiecte α, β cu $\alpha \neq \beta$, astfel încât $\alpha \in \beta$ și $\beta \in \alpha$. Conform aceleiași **Axiome a IX–a**, nu putem avea un obiect α cu $\alpha \in \alpha$. Așadar, pentru orice obiecte α, β, $\alpha \in \beta \Rightarrow \beta \notin \alpha$. Prin urmare, faptul că $a \in \{a, b\}$ arată că $\{a, b\} \notin a$.

Definiție

O clasă se numește *relație* ddacă toate elementele ei sunt perechi ordonate.

Definiție

Dacă F este o clasă (relație sau clasă oarecare), atunci definim:

- *domeniul* lui F, notat $D(F)$, ca fiind clasa ce are ca membri exact acele elemente x pentru care există y astfel încât $\langle x, y\rangle \in F$
- *imaginea* lui F, notată $R(F)$, ca fiind clasa ce are ca membri exact acele elemente y pentru care există x astfel încât $\langle x, y\rangle \in F$ (R de la englezescul "range")

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Definiție

O clasă F se numește *funcție* ddacă F este relație și are loc:

$$\forall x \forall y \forall z[(\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, z\rangle \in F) \rightarrow y = z]$$

(intuitiv: pentru orice x, există cel mult un y (desigur, $y \in R(F)$) a. î. $\langle x, y\rangle \in F$, sau, cu o exprimare echivalentă: pentru orice $x \in D(F)$, există un unic y (desigur, $y \in R(F)$) a. î. $\langle x, y\rangle \in F$).

Notație

Să notăm cu Fnc proprietatea care se aplică claselor și spune că o clasă este funcție, adică, pentru orice clasă F, notația $Fnc(F)$ semnifică faptul că F este o funcție.

Notație

Dacă F este o funcție și $x \in D(F)$, atunci notăm cu $F(x)$ unicul element y (desigur, $y \in R(F)$) care verifică: $\langle x, y\rangle \in F$.

III. Axioma reuniunii:

- *Intuitiv*: Pentru orice mulțime a, există mulțimea ale cărei elemente sunt exact membrii membrilor lui a ("exact" = "nici mai mult, nici mai puțin" = "sunt toate acestea și numai acestea").
- *Formal*: $\forall a \exists y \forall x [x \in y \leftrightarrow \exists z (x \in z \wedge z \in a)]$

Definiție

Pentru orice mulțimi a și b, mulțimea ale cărei elemente sunt membrii membrilor perechii $\{a, b\}$ (adică membrii lui a și membrii lui b, adică membrii lui a sau b) se numește *reuniunea* lui a și b și se notează $a \cup b$.

În axioma de mai sus intervine o **reuniune arbitrară** (adică reuniunea unei familii (mulțimi) arbitrare de mulțimi, familie (mulțime) de mulțimi care poate fi infinită; vom vedea) (se reunesc membrii lui a).

IV. Axioma mulțimii părților:

- *Intuitiv*: Pentru orice mulțime a, există mulțimea ale cărei elemente sunt exact submulțimile lui a.
- *Formal*: $\forall a \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \subseteq a)$

Știm că mulțimea submulțimilor unei mulțimi a se mai numește *mulțimea părților* lui a.

V. Axioma submulțimilor:

- *Intuitiv*: Pentru orice clasă P și orice mulțime a, există o mulțime ale cărei elemente sunt exact acei membri ai lui a care sunt și membri ai lui P (în limbajul cunoscut al teoriei naive a mulțimilor, intersecția unei mulțimi cu o clasă este o mulțime, și, prin urmare, orice submulțime a unei mulțimi este, la rândul ei, o mulțime, sau, dacă dorim să renunțăm la restricția simbolului $\subseteq$ la mulțimi, impusă în definiția acestui simbol, care face afirmația anterioară trivială, orice "subclasă" a unei mulțimi este, la rândul ei, o mulțime).
- *Formal*: $\forall P \forall a \exists y \forall x [x \in y \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in P)]$

VI. Axioma infinității:

- *Intuitiv*: Pentru orice element o, există o mulțime z cu următoarele proprietăți: $\begin{cases} o \in z \\ \text{și} \\ \text{dacă } x \in z, \text{ atunci } (x \cup \{x\}) \in z. \end{cases}$
- *Formal*: $\forall o \exists z[o \in z \land \forall x(x \in z \to (x \cup \{x\}) \in z)]$

De ce se numește **axioma infinității** această axiomă? Observăm că această a VI-a axiomă "seamănă" cu **principiul inducției matematice**. În fapt, această axiomă poate fi folosită pentru a defini numerele naturale, pentru a "construi" mulțimea numerelor naturale. Cum? În primul rând, ce vor fi numerele naturale? Ca să fie obiecte în cadrul acestui sistem axiomatic (altfel spus, în teoria matematică fundamentată pe (generată de) acest sistem axiomatic), vor trebui să fie **mulțimi** sau **clase**, pentru că acestea sunt obiectele aici. Ca să fie elemente ale unei mulțimi, pe care o vom numi *mulțimea numerelor naturale*, vor trebui să fie **mulțimi**, pentru că nicio clasă proprie nu va fi element al unui obiect, în particular element al mulțimii numerelor naturale.

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Și atunci, cum putem construi numerele naturale $0, 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots$, și mulțimea lor, notată $\mathbb{N}$, pe baza **axiomei infinității**? Pur și simplu:

- alegem în locul variabilei o din această axiomă un element arbitrar, pe care îl fixăm și îl notăm cu 0,
- mulțimea obținută din această axiomă, din **Axioma XI** (vom vedea) și **Axioma V (a submulțimilor)** pornind de la elementul 0 în locul lui o și neavând niciun element în plus față de elementele obținute din 0 "prin procedeul descris în această axiomă", adică mulțimea având ca elemente exact pe 0 și elementele de mai jos, va fi notată cu $\mathbb{N}$,
- iar numerele naturale "nenule" vor fi definite "recurent", sau "din aproape în aproape": $\begin{cases} 1 := 0 \cup \{0\}, \\ 2 := 1 \cup \{1\}, \\ 3 := 2 \cup \{2\}, \\ \vdots \\ m+1 := m \cup \{m\}, \\ \vdots \end{cases}$

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Iar, cu această construcție, **Axioma I (a extensionalității de mulțimi)** (care spune că două mulțimi cu aceleași elemente coincid) implică **principiul inducției matematice**:

- dacă mulțimea M a numerelor naturale care verifică o anumită proprietate conține pe 0 și, pentru orice număr natural m pe care îl conține, M conține și numărul natural $m+1$, atunci $\mathbb{N} \subseteq M$.

VII. Axioma înlocuirii:

- *Intuitiv*: Dacă F este o funcție și a este o mulțime, atunci există o mulțime ale cărei elemente sunt exact elementele $F(x)$, pentru toți membrii x ai lui a care se află în $D(F)$.
- *Formal*: $\forall F[Fnc(F) \rightarrow \forall a \exists b \forall y[y \in b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge x \in D(F) \wedge y = F(x))]]$

Cine este acea mulțime b, în limbajul cunoscut din teoria naivă a mulțimilor? b este imaginea mulțimii $a \cap D(F)$ prin funcția F, notată uzual cu $F(a \cap D(F))$.

VIII. Axioma alegerii globale:

- *Intuitiv*: Există o funcție F al cărei domeniu conține toate mulțimile nevide și astfel încât, pentru fiecare mulțime nevidă y, $F(y)$ este membru al lui y (desigur, o *mulțime nevidă* este, prin definiție, o mulțime care nu coincide cu mulțimea vidă, n).
- *Formal*: $\exists F[Fnc(F) \wedge \forall y[y \neq n \rightarrow (y \in D(F) \wedge F(y) \in y)]]$

Funcția F "alege" câte un element $F(y)$ din fiecare mulțime nevidă y.

În esență, această axiomă spune că: din fiecare mulțime nevidă se poate alege un element.
Această axiomă asigură corectitudinea începerii demonstrațiilor cu propoziții de forma: "Fie $x \in M$, (arbitrar, fixat).", atunci când M este o mulțime nevidă.

IX. Axioma fundării:

- *Intuitiv*: Orice clasă P care are cel puțin un membru are un membru minimal u, i. e. există un element u cu proprietatea că u este membru al lui P, dar niciun membru al lui u nu este membru al lui P.
- *Formal*: $\forall P[\exists u(u \in P) \rightarrow \exists u[u \in P \wedge \forall x(x \in u \rightarrow x \notin P)]]$

Această axiomă spune că orice șir $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ de membri ai unei clase P, cu $u_1 \in u_0$, $u_2 \in u_1$, $u_3 \in u_2$ ș. a. m. d., este finit (i. e. nu există un astfel de șir infinit; cu notațiile cunoscute din teoria naivă a mulțimilor, nu există un șir $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq P$ cu $u_{m+1} \in u_m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$).

X. Axioma extensionalității claselor:

- *Intuitiv*: Oricare ar fi clasele A și B, dacă, pentru fiecare element x, x este membru al clasei A ddacă x este membru al clasei B, atunci A coincide cu B.
- *Formal*: $\forall A \forall B[\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B]$

Această axiomă spune că două clase cu aceleași elemente coincid, întocmai cum se întâmplă în cazul particular al mulțimilor, în care acest fapt era cunoscut din **Axioma I (a extensionalității de mulțimi)**.

XI. Axioma comprehensiunii predicative:

- *Intuitiv*: Dacă P este o proprietate referitoare la obiecte, care nu conține cuantificatori aplicați unor clase (adică expresii de forma "oricare ar fi o clasă X" sau "există o clasă X astfel încât"), atunci există o clasă având ca membri exact acele elemente x care satisfac proprietatea P.
- *Formal*, pentru o proprietate P ca mai sus: $\exists A \forall x (x \in A \leftrightarrow P(x))$

Așa cum am anunțat mai sus, într–o referire la teoria naivă a mulțimilor și în mai multe aplicații, dacă, în axioma anterioară, elementele x nu sunt oarecare, ci sunt elemente ale unei mulțimi y, atunci, conform **Axiomei V (a submulțimilor)**, A este o mulțime, anume, cu notațiile cunoscute din teoria naivă a mulțimilor, $A = \{x \in y \mid P(x)\}$.

Restricția impusă în această axiomă este cea menționată și mai sus: obiectele care **aparțin** unei clase sunt **mulțimi**.

Sistemul axiomatic Von Neumann–Bernays–Gödel

Motivul pentru care **Axioma XI (a comprehensiunii predicative)** poartă acest nume este faptul că astfel de proprietăți P, care capătă sens *(înțeles, "valoare de adevăr", adică putem spune despre ele că sunt adevărate sau false)* numai atunci când sunt aplicate unor obiecte "concrete", fixate, constante, adică numai atunci când scriem $P(\omega)$, cu ω obiect fixat, constant, se numesc *predicate*, sau *propoziții (enunțuri) cu variabile (variabilă* în acest caz, dar în general putem avea mai multe variabile, și să scriem $P(\alpha, \beta)$, $P(\alpha, \beta, \gamma)$ etc.*)*.
Proprietățile (enunțurile) "fără variabile", care nu se aplică unor obiecte, ci sunt "în sine (ele înseși)" adevărate sau false, se numesc *propoziții*.
Aceste definiții fac parte din limbajul logicii matematice, și vor fi formulate riguros mai târziu.

Exemplu

Enunțul "2 este un număr par" este o *propoziție* (adevărată).
Enunțul "x este un număr par" este un *predicat* cu variabila x, în care înlocuirea lui x cu 2 produce o propoziție adevărată (anume chiar propoziția de mai sus), iar înlocuirea lui x cu 1 produce o propoziție falsă.

Teoria mulțimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

Notă

În restul cursurilor și seminariilor, pentru ușurința exprimărilor, vom adopta punctul de vedere al teoriei naive a mulțimilor, cu excepția cazurilor în care vom menționa că facem apel la o axiomă a teoriei mulțimilor.
A nu se înțelege că aceasta înseamnă ceva distinct de faptul de a ne situa în teoria axiomatică a mulțimilor, întrucât toate rezultatele pe care le cunoaștem din gimnaziu și liceu despre mulțimi și funcții pot fi demonstrate pornind de la orice sistem axiomatic al teoriei mulțimilor, în particular de la cel de mai sus, deci, în orice moment, în ce vom studia, ne vom afla în cadrul acestor sisteme axiomatice.
Definiția **funcției** însă nu o vom da în cazul general de mai sus, ci vom adopta definiția din gimnaziu și liceu, unde o funcție este considerată a fi definită între două mulțimi, nu între două clase oarecare.

Notă

Ce trebuie să rețineți din expunerea de mai sus este definiția naivă a noțiunii de **mulțime**.

Modalitatea de învățare la această materie

Notă

Primele două cursuri sunt introductive, cu noțiuni elementare, care servesc la înțelegerea noțiunilor și proprietăților din materia pentru examen, conținută în următoarele cursuri și seminarii.

Notă

Referitor la noțiunile și proprietățile din cursuri: urmăriți lecțiile și observați cum se lucrează cu aceste noțiuni și proprietăți, nu vă străduiți să le memorați. Noțiunile pe care ar fi bine să le rețineți sunt colectate în breviarul întregului curs (breviarul cel mai rezumativ). Pe celelalte le veți reține în măsura în care veți lucra cu ele.

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Conectorii logici: folosiți pentru a lega enunțuri, formând astfel *enunțuri compuse:*

- *disjuncția:* sau
- *conjuncția:* și
- *negația:* non
- *implicația:* $\Rightarrow$
- *echivalența:* $\Leftrightarrow$

Amintim următoarele proprietăți logice, pe care le–am folosit sau le vom folosi la seminar, pentru demonstrarea unor egalități corespunzătoare între mulțimi, în care conectorii logici sunt înlocuiți cu operații cu mulțimi: dacă p, q și r sunt enunțuri (propoziții, afirmații, proprietăți), atunci au loc echivalențele următoare, în care parantezele sunt folosite pentru a delimita enunțurile compuse:

- $[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ și } q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecință imediată a principiului reducerii la absurd și a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ și } (q \Rightarrow p)]$)

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Amintim, din secțiunea anterioară a cursului, că are loc echivalența:

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$,

ceea ce arată că:

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este adevărată ddacă p e falsă sau q e adevărată ([**fals** implică **orice**] este **adevărat**, și [**adevărat** implică **adevărat**] este **adevărat**),
- implicația $[p \Rightarrow q]$ este falsă ddacă p e adevărată și q e falsă ([**adevărat** implică **fals**] este **fals**),

și că această echivalență poate fi demonstrată astfel:

- implicația directă ($[p \Rightarrow q]$ implică $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$) observând că, dacă are loc $[p \Rightarrow q]$, atunci, când $[\text{non } p]$ e falsă, adică p e adevărată, rezultă că e adevărată și q, așadar, ori de câte ori $[p \Rightarrow q]$ este adevărată, rezultă că și $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$ este adevărată;
- implicația inversă ($[(\text{non } p) \text{ sau } q]$ implică $[p \Rightarrow q]$) prin faptul că, dacă $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$ este adevărată, atunci, când p este adevărată și deci $[\text{non } p]$ este falsă, rezultă că este adevărată q, prin urmare implicația $[p \Rightarrow q]$ este adevărată.

Amintim că lucrăm numai cu enunțuri (afirmații) care sunt **fie false, fie adevărate**.

Cuantificatorii și simbolul $\exists\,!$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* $\forall$
- *cuantificatorul existențial:* $\exists$

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- non $[(\forall\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(\text{non } p(x))$
- non $[(\exists\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(\text{non } p(x))$

Amintesc abrevierea uzuală pentru enunțul: non $[(\exists\, x)\,(p(x))]$: $(\nexists\, x)\,(p(x))$.

Notație

Alăturarea de simboluri $\exists\,!$ semnifică "există un unic", "există și este unic".

Observație

$\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notație prescurtată pentru enunțuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x, atunci scrierea $(\exists\,!\,x)\,(p(x))$ este o abreviere pentru enunțul scris, desfășurat, astfel:

$$(\exists\, x)\,(p(x)) \text{ și } (\forall\, y)\,(\forall\, z)\,[(p(y) \text{ și } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y și z sunt variabile.

Negarea enunțurilor cuantificate

Cum se neagă un enunț cu mai mulți cuantificatori? Aplicând proprietățile de mai sus, și iterând acest procedeu:

Exemplu

Fie x, y, z, t, u variabile, iar $p(x, y, z, t, u)$ o proprietate depinzând de x, y, z, t, u. Atunci:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{non}\ [(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(\exists\, z)\,(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x, y, z, t, u))] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,[\mathrm{non}\ [(\forall\, y)\,(\exists\, z)\,(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x, y, z, t, u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,[\mathrm{non}\ [(\exists\, z)\,(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x, y, z, t, u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,[\mathrm{non}\ [(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x, y, z, t, u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,(\exists\, t)\,[\mathrm{non}\ [(\exists\, u)\,(p(x, y, z, t, u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,(\exists\, t)\,(\forall\, u)\,(\mathrm{non}\ p(x, y, z, t, u))
\end{array}
$$

Nu vom mai aplica acest procedeu pas cu pas. Reținem că procedeul constă în transformarea fiecărui cuantificator universal într–unul existențial și invers, și negarea proprietății de sub acești cuantificatori.

Cuantificatori aplicați fixând un domeniu al valorilor

Fie M o mulțime sau clasă, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M. Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall\, x \in M)\,(p(x)) \stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,(x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists\, x \in M)\,(p(x)) \stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists\, x)\,(x \in M \text{ și } p(x))$

Toate proprietățile logice pentru enunțuri cuantificate din acest curs se scriu la fel și sunt valabile și pentru cuantificatori urmați de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Observație

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile, iar p este o proprietate referitoare la n elemente, atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru aceste enunțuri cu n cuantificatori de același tip:

- $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n\, p(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \forall\, x_1\, \forall\, x_2\, \ldots\, \forall\, x_n\, p(x_1, \ldots, x_n)$;
- $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n\, p(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \exists\, x_1\, \exists\, x_2\, \ldots\, \exists\, x_n\, p(x_1, \ldots, x_n)$.

Cuantificatorii de același fel comută, cei diferiți nu

Fie x și y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x și y. Atunci:

- $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y)\,(\exists\, x)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\substack{\nRightarrow \\ \Leftarrow}\; (\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x, valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunțul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A și B sunt mulțimi sau clase, avem:

- $(\forall\, x \in A)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y \in B)\,(\exists\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\substack{\nRightarrow \\ \Leftarrow}\; (\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată:
$(\forall\, x)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ etc..

Exemplu

Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(\exists\, y \in \mathbb{Z})\,(x + y = 0)$ este adevărat.
Enunțul $(\exists\, y \in \mathbb{Z})\,(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(x + y = 0)$ este fals.

Cuantificatori, disjuncții și conjuncții logice

Să observăm și următoarele proprietăți logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ și $q(x)$ sunt enunțuri referitoare la x, atunci:

- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ și } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ și } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\exists\, x)\,(q(x))$
- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ și } q(x)) \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ și } (\exists\, x)\,(q(x))$

Exemplu

Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)$ este adevărat.
Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x)$ este fals. Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)$ este tot fals. Prin urmare, enunțul $[(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)]$ este fals.

Exemplu

Enunțul $(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0 \text{ și } x \geq 10)$ este fals.
Enunțul $(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0)$ este adevărat. Enunțul $(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)$ este tot adevărat. Prin urmare, enunțul $[(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0) \text{ și } (\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)]$ este adevărat.

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunț care nu depinde de variabila cuantificată

Dacă, în enunțurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunț q care nu depinde de x, atunci:

$$\forall x\, q \;\Leftrightarrow\; q \;\Leftrightarrow\; \exists x\, q,$$

așadar, în acest caz, din proprietățile anterioare obținem:

- $(\forall x)\,(p(x) \text{ și } q) \;\Leftrightarrow\; (\forall x)\,(p(x)) \text{ și } q$
- $(\exists x)\,(p(x) \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; (\exists x)\,(p(x)) \text{ sau } q$

dar au loc și:

1. $(\forall x)\,(p(x) \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; (\forall x)\,(p(x)) \text{ sau } q$
2. $(\exists x)\,(p(x) \text{ și } q) \;\Leftrightarrow\; (\exists x)\,(p(x)) \text{ și } q$

după cum se poate verifica foarte ușor analizând cazurile: $\begin{cases} q \text{ e falsă} \\ \text{și} \\ q \text{ e adevărată.} \end{cases}$

Putem observa și că oricare dintre proprietățile 1 și 2 se deduce din cealaltă folosind modalitatea în care se neagă enunțurile cuantificate și proprietățile:

- $\text{non}\,(p \text{ și } q) \;\Leftrightarrow\; (\text{non}\, p) \text{ sau } (\text{non}\, q)$

  și
- $\text{non}\,(p \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; (\text{non}\, p) \text{ și } (\text{non}\, q)$

pentru orice enunțuri p și q.

Cazurile celorlalți conectori logici în proprietatea anterioară trebuie verificate direct. De exemplu, enunțurile următoare nu sunt echivalente:

- enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2|x \Rightarrow 2|3)$ este fals, pentru că există $x = 4$ pentru care implicația $2|4 \Rightarrow 2|3$ este falsă;
- enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2|x) \;\Rightarrow\; 2|3$ este adevărat, fiind o implicație cu antecedentul fals.

Scrieri echivalente ale enunțurilor din exemplele anterioare, fără domeniu al valorilor după cuantificatori:

$$\begin{array}{l}
(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x) \;\Leftrightarrow \\
(\forall\, x)\,[x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow \\
(\forall\, x)\,[(x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2 \mid x) \text{ sau } (x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2 \nmid x)]; \\
[(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow \\
[(\forall\, x)\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x)\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \nmid x)]; \\
(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0 \text{ și } x \geq 10) \;\Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0 \text{ și } x \geq 10) \;\Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,[(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0) \text{ și } (x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 10)]; \\
[(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0) \text{ și } (\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)] \;\Leftrightarrow \\
[(\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0) \text{ și } (\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 10)].
\end{array}$$

Variantele proprietăților de mai sus cu domenii ale valorilor pentru variabilele cuantificate se pot deduce direct sau din cele fără domenii ale valorilor pentru variabilele cuantificate, folosind proprietățile de mai sus pentru conectori logici și pentru scoaterea domeniilor valorilor și enunțurilor de sub cuantificatori.

Exemplu

Folosind proprietățile de scoatere al domeniului valorilor pentru variabila cuantificată și a enunțurilor care nu depind de variabila cuantificată de sub cuantificatori, precum și exprimarea implicației în funcție de negație și disjuncție, obținem că:

- enunțul adevărat $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z})(x + y = 0)$ este echivalent cu $(\forall x)(\exists y \in \mathbb{Z})(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y = 0)$ și cu $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y)(y \in \mathbb{Z}$ și $x + y = 0)$ și cu $(\forall x)(\exists y)[y \in \mathbb{Z}$ și $(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y = 0)]$;
- enunțul fals $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{N})(x + y = 0)$ este echivalent cu $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x)(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y = 0)$ și cu $(\exists y)(\forall x \in \mathbb{N})(y \in \mathbb{Z}$ și $x + y = 0)$ și cu $(\exists y)(\forall x)[y \in \mathbb{Z}$ și $(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y = 0)]$.

Să demonstrăm că, pentru orice clase A și B, au loc:

1. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(p(x,y)) \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} (\exists y \in B)(\forall x \in A)(p(x,y))$
2. $(\forall x)(\exists y \in B)(p(x,y)) \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} (\exists y \in B)(\forall x)(p(x,y))$
3. $(\forall x \in A)(\exists y)(p(x,y)) \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} (\exists y)(\forall x \in A)(p(x,y))$
4. $(\forall x)(\exists y)(p(x,y)) \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} (\exists y)(\forall x)(p(x,y))$

① "$\nRightarrow$:" Conform exemplului anterior și faptului că, dacă un enunț p este **adevărat**, iar un enunț q este **fals**, atunci enunțul $p \Rightarrow q$ este **fals**, are loc non–implicația $(\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x,y)) \;\nRightarrow\; (\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x,y))$.
"$\Leftarrow$:" Presupunem că are loc $(\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x,y))$, i.e. clasa $\{y \in B \mid (\forall\, x \in A)\,(p(x,y))\}$ este nevidă, prin urmare, conform **Axiomei alegerii**, putem alege un element al ei. Fie, așadar, y_0 un element al acestei clase, adică un element $y_0 \in B$ care satisface $(\forall\, x \in A)\,(p(x,y_0))$. Fie $x_0 \in A$, arbitrar, fixat. Atunci are loc $p(x_0,y_0)$, așadar are loc $(\exists\, y \in B)\,(p(x_0,y))$. În consecință, are loc $(\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x,y))$.
Prin urmare are loc:

$$(\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x,y)) \;\Rightarrow\; (\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x,y)).$$

②,③,④ Analog cu ①, folosind enunțurile din exemplul anterior echivalente pentru "$\nRightarrow$", iar, la "$\Leftarrow$", considerând clasa nevidă $\{y \mid (\forall\, x \in A)\,(p(x,y))\}$, respectiv considerând x_0 arbitrar, fixat, respectiv făcând ambele modificări anterioare.

Temă

1. $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \ \Leftrightarrow \ [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
2. $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \ \overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow} \ [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
3. $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \ \Leftrightarrow \ [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
4. $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \ \overset{\nRightarrow}{\Leftarrow} \ [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
5. $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \ \Leftrightarrow \ [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$
6. $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \ \overset{\Rightarrow}{\nLeftarrow} \ [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
7. $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \ \Leftrightarrow \ [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
8. $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \ \overset{\nRightarrow}{\Leftarrow} \ [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$

Exercițiu (temă)

Dați contraexemple pentru implicațiile directe din proprietățile (2), (4), (6) și (8) de mai sus, i. e., așa cum am procedat în exemplele anterioare, înlocuiți p, q și r cu enunțuri concrete (sau enunțuri arbitrare având valorile de adevăr necesare), astfel încât acele implicații să nu fie satisfăcute pentru respectivele valori (semnificații, instanțieri), sau respectivele valori de adevăr ale lui p, q, r.

Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

Notație

- Păstrăm notația consacrată $\in$ pentru **simbolul de apartenență**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulțime, clasă).
- Păstrăm notația clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulțimi (fie prin enumerare, fie printr–o proprietate a lor).

- Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notație

Păstrăm notațiile cunoscute $\cup$, $\cap$, $\setminus$ și Δ pentru **reuniunea**, **intersecția**, **diferența** și, respectiv, **diferența simetrică** între mulțimi.
Amintim că, pentru orice mulțimi A și B, se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- $A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
- $A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
- $A \Delta B \stackrel{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

- A se revedea proprietățile operațiilor cu mulțimi demonstrate la seminar, precum și cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!
- Vom face mereu apel și la cunoștințe din gimnaziu și liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunțându–le.

Notație

Păstrăm notațiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ și $\supsetneq$ pentru **incluziunile** și **incluziunile stricte** dintre mulțimi **în fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte și cu $\subset$ și respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulțimi A și B:

- $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiție, două mulțimi sunt egale ddacă au aceleași elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B$ și $A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Mulțimea părților unei mulțimi, apoi conectorul xor

Notație

Vom nota cu $\emptyset$ **mulțimea vidă**, adică mulțimea fără elemente, i.e. unica (conform definiției egalității de mulțimi) mulțime care satisface: $(\nexists\, x)\,(x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall\, x)\,(x \notin \emptyset)$.

Definiție

Dacă A și B sunt mulțimi, atunci A se numește:

- *submulțime a lui* B (sau *parte a lui* B) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulțime proprie* (sau *strictă*) *a lui* B ddacă $A \subsetneq B$.

Notație

Pentru orice mulțime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulțimea părților lui** T, i. e. **mulțimea submulțimilor lui** T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunțuri p și q, enunțul (p xor q) este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunțurile p și q este adevărat, adică exact atunci când p și q au valori de adevăr diferite, adică exact atunci când [(p e adevărat și q e fals) sau (q e adevărat și p e fals)]:

- (p xor q) $\Leftrightarrow$ [(p și non q) sau (q și non p)]

Remarcă

Definiția diferenței simetrice arată că, pentru orice mulțimi A și B:

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

Remarcă

Fie A și B mulțimi arbitrare, fixate. Atunci au loc echivalențele:
$A = B$ ddacă $(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ddacă
$(\forall x)\,[(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(x \in B \Rightarrow x \in A)]$ ddacă
$[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(\forall x)\,(x \in B \Rightarrow x \in A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \subseteq A]$.
Faptul că **egalitatea de mulțimi este echivalentă cu dubla incluziune** s–a demonstrat folosind faptul că echivalența logică este echivalentă cu dubla implicație și faptul că un cuantificator universal se distribuie la termenii unei conjuncții logice.

Similar remarcii anterioare, în cele ce urmează, vom enumera o serie de proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi, alături de proprietățile logice (cu enunțuri) în care acestea se transcriu; nu vom mai transcrie în proprietăți logice afirmațiile care se obțin în mod trivial din cele anterioare, de exemplu prin înlocuirea unui enunț arbitrar cu negația lui.

Exercițiu (temă pentru seminar)

Considerăm mulțimile arbitrare A, B, C, D și enunțurile arbitrare p, q, r, s. Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi (datorită următoarelor proprietăți ale conectorilor logici):

- **idempotența reuniunii:** $A \cup A = A$ ((p sau p) $\Leftrightarrow$ p)
- **idempotența intersecției:** $A \cap A = A$ ((p și p) $\Leftrightarrow$ p)
- $A \setminus A = \emptyset$ ((p și non p) este **fals**)
- $A \Delta A = \emptyset$ ((p xor p) este **fals**)
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$ ((p sau q) $\Leftrightarrow$ (q sau p))
- **comutativitatea intersecției:** $A \cap B = B \cap A$ ((p și q) $\Leftrightarrow$ (q și p))
- **comutativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$ ((p xor q)$\Leftrightarrow$(q xor p))
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \stackrel{\text{not.}}{=} A \cup B \cup C$ ([p sau (q sau r)] $\Leftrightarrow$ [(p sau q) sau r], astfel că oricare dintre acestea se poate nota: p sau q sau r)
- **asociativitatea intersecției:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \stackrel{\text{not.}}{=} A \cap B \cap C$ ([p și (q și r)] $\Leftrightarrow$ [(p și q) și r], astfel că oricare dintre acestea se poate nota: p și q și r)
- **asociativitatea diferenței simetrice:**$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \stackrel{\text{not.}}{=} A\Delta B\Delta C$ (se demonstrează foarte ușor cu **funcții caracteristice** – vom vedea; în mod direct se poate demonstra, de exemplu, cu următoarea caracterizare a diferenței simetrice) ([p xor (q xor r)] $\Leftrightarrow$ [(p xor q) xor r], astfel că oricare

dintre acestea se poate nota: p xor q xor r)

Asociativitatea unui operator/conector binar $\star$ permite scrieri fără paranteze: $t_1 \star t_2 \star \ldots \star t_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice operanzi $t_1, \ldots, t_n$ pentru $\star$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice enunțuri $p_1, \ldots, p_n$, orice mulțimi $A_1, \ldots, A_n$ și orice element x:

- p_1 xor ... xor p_n este adevărat ddacă exact un număr impar dintre enunțurile $p_1, \ldots, p_n$ sunt adevărate;
- $x \in A_1 \Delta \ldots \Delta A_n$ ddacă numărul mulțimilor A_i cu $i \in \overline{1, n}$ astfel încât $x \in A_i$ este impar.

- **distributivitatea la stânga a reuniunii față de intersecție:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ([p sau (q și r)] $\Leftrightarrow$ [(p sau q) și (p sau r)])
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii față de intersecție:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ ([(q și r) sau p] $\Leftrightarrow$ [(q sau p) și (r sau p)])
- **distributivitatea la stânga a intersecției față de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ([p și (q sau r)] $\Leftrightarrow$ [(p și q) sau (p și r)])
- **distributivitatea la dreapta a intersecției față de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ ([(q și r) sau p] $\Leftrightarrow$ [(q sau p) și (r sau p)])

Pentru operații comutative, precum reuniunea și intersecția de mulțimi, distributivitatea la stânga față de alte operații este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Proprietăți ale relațiilor între mulțimi

- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(\exists x)\,(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \nsubseteq A]$ $([(p \Rightarrow q)$ și $(p \nLeftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)])$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B$ sau $A = B)$ $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [[(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)]$ sau $(p \Leftrightarrow q)])$
- $A \subseteq A$ $(p \Rightarrow p)$
- non$(A \subsetneq A)$ (non$[(p \Rightarrow p)$ și $(p \nRightarrow p)])$
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: $(A \subseteq B$ și $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ $((p \Rightarrow q)$ și $q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r))$
- $(A \subsetneq B$ și $B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$ $([[(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)]$ și $(q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow p)])$
- $(A \subseteq B$ și $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$ $([(p \Rightarrow q)$ și $[(q \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow q)]] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow p)])$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: $(A \subsetneq B$ și $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$ $([[(p \Rightarrow q)$ și $(q \nRightarrow p)]$ și $[(q \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow q)]] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \nRightarrow p)])$

Proprietăți cu operații și relații între mulțimi

- $A \subseteq A \cup B$ ($p \Rightarrow$(p sau q)); $B \subseteq A \cup B$ ($q \Rightarrow$(p sau q))
- $A \cap B \subseteq A$ ((p și q) $\Rightarrow p$); $A \cap B \subseteq B$ ((p și q) $\Rightarrow q$)
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$ ([(p sau q)$\Leftrightarrow q$] $\Leftrightarrow$ ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$[(p și q)$\Leftrightarrow p$])
- $\emptyset \subseteq A$ ((**fals** $\Rightarrow p$) este **adevărat**)
- $A \cup \emptyset = A$ ((p sau **fals**)$\Leftrightarrow p$)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ ((p și **fals**) este **fals**)
- $A \setminus \emptyset = A$ ((p și (non **fals**))$\Leftrightarrow p$)
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$ ([non (p și non q)] $\Leftrightarrow$ ($p \Rightarrow q$))
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$ ((**fals** și non p) este fals)
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$ ((($p \Rightarrow$**fals**) este **adevărat**) ddacă (p este **fals**); altfel scris: ($p \Rightarrow$ **fals**)$\Leftrightarrow$ (non p))
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$ (((p xor q) este **fals**) ddacă ($p \Leftrightarrow q$); altfel scris: [non (p xor q)] $\Leftrightarrow$ ($p \Leftrightarrow q$))
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ((p și non q) $\Leftrightarrow$ [p și non(p și q)])
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$ ([(p și q) este **falsă**] ddacă ([(p și (non q))$\Leftrightarrow p$] ddacă [(q și (non p))$\Leftrightarrow q$])

Proprietăți cu operații și relații între mulțimi

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p$ sau $r) \Rightarrow (q$ sau $r)))$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p$ și $r) \Rightarrow (q$ și $r)))$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$ $((p \Rightarrow q$ și $r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p$ sau $r) \Rightarrow (q$ sau $s)))$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$ $((p \Rightarrow q$ și $r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p$ și $r) \Rightarrow (q$ și $s)))$
- $(A \subseteq C$ și $B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$ $((p \Rightarrow r$ și $q \Rightarrow r)$ ddacă $(p$ sau $q) \Rightarrow r)$
- $(A \subseteq B$ și $A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$ $((p \Rightarrow q$ și $p \Rightarrow r)$ ddacă $(p \Rightarrow (q$ și $r))$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p$ și non $r) \Rightarrow (q$ și non $r)])$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r$ și non $q) \Rightarrow (r$ și non $p)])$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$ $((p \Rightarrow q$ și $r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p$ și non $s) \Rightarrow (q$ și non $r)))$
- $A \setminus B \subseteq A$ $((p$ și non $q) \Rightarrow p)$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$ $((p$ și p și non $q) \Leftrightarrow (p$ și non $q))$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ $((p$ și q și non $p)$ este **falsă**)

Proprietăți cu trecerea la complementară

Exercițiu (temă pentru seminar)

Considerăm o mulțime T, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Fie p, q și r enunțuri. Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți operațiilor și relațiilor între părțile mulțimii T:

- $\overline{A} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{A} \subseteq T$ (((non p)$\Rightarrow$**adevărat**) este **adevărat**)
- $\overline{\emptyset} = T$ ((non **fals**) $\Leftrightarrow$ **adevărat**)
- $\overline{T} = \emptyset$ ((non **adevărat**) $\Leftrightarrow$ **fals**)
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (dacă $[p \Rightarrow r]$, atunci [[p și (non q)] $\Leftrightarrow$ [p și r și (non q)]])
- **operația de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$ ((non non p) $\Leftrightarrow$ p)
- **legile lui De Morgan:**
$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ (non } (p \text{ sau } q) \Leftrightarrow (\text{non } p \text{ și non } q)) \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ ([non } (p \text{ și } q)] \Leftrightarrow [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]) \end{cases}$$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (ușor de demonstrat folosind proprietățile de mai sus)

Proprietăți cu trecerea la complementară

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)])$ (faptul că trecerea la complementară inversează sensul incluziunii se traduce în principiul reducerii la absurd)
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)])$
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$ $([(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \not\Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [((\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)) \text{ și } ((\text{non } q) \not\Leftrightarrow (\text{non } p))])$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ((p și non p) este **falsă**); mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$ ([(p și q) este **falsă**] ddacă [$p \Rightarrow$(non q)] ddacă [$q \Rightarrow$(non p)])
- $A \cup \overline{A} = T$ ((p sau non p) este **adevărată**); mai mult:
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$ ([(p sau q) este **adevărată**] ddacă [(non q)$\Rightarrow p$] ddacă [(non p)$\Rightarrow q$])
- A **și** B **sunt părți complementare ale lui** T **ddacă fiecare este complementara celeilalte față de** T**:** $\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$ ([[(p sau q) este **adevărată**] și [(p și q) este **falsă**]] ddacă ($p \Leftrightarrow$ non q) ddacă ($q \Leftrightarrow$ non p))

Produsul direct a două mulțimi

Notație (a se vedea definiția axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I)

Pentru orice elemente a și b, notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b.

Definiție (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente)

Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2:

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{și} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, se definește *produsul cartezian* dintre A și B (numit și *produsul direct* dintre A și B) ca fiind mulțimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Remarcă (demonstrația: TEMĂ COLECTIVĂ OBLIGATORIE – a se vedea discuția despre examen de la sfârșitul acestui curs)

Din faptul că $\emptyset$ este mulțimea fără elemente rezultă că, pentru orice mulțime A, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$. De asemenea, se demonstrează ușor că produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta), și păstrează incluziunea, iar produsul cartezian cu mulțimi nevide păstrează și incluziunea strictă, adică, pentru orice mulțimi A, B și C, au loc:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
4. $A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)$ și $(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)$
5. $B \subseteq C \Rightarrow [A \times B \subseteq A \times C$ și $B \times A \subseteq C \times A]$
6. dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subseteq C \Leftrightarrow A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subseteq C \times A$
7. dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subsetneq C \Leftrightarrow A \times B \subsetneq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subsetneq C \times A$

Indicație: se folosesc, în mod direct, definițiile acestor operații cu mulțimi. La (1) se folosește și **distributivitatea conjuncției față de disjuncție**, iar (4) poate fi demonstrată prin calcul direct, pe baza lui (1) și (3). La (3) se pot folosi (6) și o caracterizare a incluziunii stricte din seminar.

Reuniunea disjunctă a două mulțimi

La operațiile cu mulțimi cunoscute până acum ($\cup, \cap, \setminus, \Delta, \times$) adăugăm **reuniunea disjunctă:**

Definiție

Fie A și B două mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a mulțimilor A și B ca fiind mulțimea notată $A \coprod B$ și definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Atunci:

$$A \coprod B = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Reuniunea disjunctă a două mulțimi

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a unui indice corespunzător mulțimii respective (un element diferit de cel atașat elementelor celeilalte mulțimi) (vom vorbi despre **indici** într–o discuție despre **familii arbitrare de mulțimi**).

Într–adevăr, pentru orice mulțimi A și B, $(A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\}) = \emptyset$, pentru că, dacă, prin absurd, ar exista un element $\alpha \in (A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\})$, atunci, conform definiției produsului direct:

$$\alpha \in A \times \{1\}, \text{ adică există } a \in A \text{ a. î. } \alpha = (a, 1)$$

$$\text{și}$$

$$\alpha \in B \times \{2\}, \text{ adică există } b \in B \text{ a. î. } \alpha = (b, 2),$$

$$\text{prin urmare } (a, 1) = \alpha = (b, 2),$$

$$\text{deci } (a, 1) = (b, 2), \text{ adică}$$

$$\begin{cases} a = b \\ \text{și} \\ 1 = 2, & \text{iar această ultimă egalitate nu este satisfăcută,} \\ & \text{ceea ce înseamnă că am obținut o contradicție.} \end{cases}$$

Definiția unei funcții

Definiție

Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește *funcție* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in G)$. Scris desfășurat:

$$(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow [(\exists\, b)\,(b \in B \text{ și } (a, b) \in G) \text{ și}$$
$$(\forall\, c)\,(\forall\, d)\,[(c \in B \text{ și } d \in B \text{ și } (a, c) \in G \text{ și } (a, d) \in G) \Rightarrow c = d]]].$$

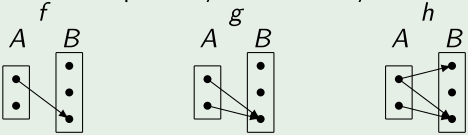
Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulțimea A se numește *domeniul* funcției f, B se numește *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numește *graficul* lui f.

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește *valoarea funcției f în punctul a*.

Exemplu

Care dintre următoarele corespondențe este o funcție de la A la B?



Egalitatea a două funcții

Remarcă ($(a, b) \in G \;\Leftrightarrow\; f(a) = b$)

Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcție ($f : A \to B$), atunci graficul G al lui f este mulțimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiție

Fie $f = (A, F, B)$ și $g = (C, G, D)$ două funcții ($f : A \to B$, iar $g : C \to D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

  $A = C$ (are loc egalitatea domeniilor),
  $B = D$ (are loc egalitatea codomeniilor) și
  $F = G$ (are loc egalitatea graficelor celor două funcții, ceea ce, conform scrierii acestor grafice din remarca anterioară, se transcrie în egalitate punctuală, adică egalitate în fiecare punct: pentru orice $a \in A = C$, $f(a) = g(a)$).

- Dacă X este o mulțime a. î. $X \subseteq A$ și $X \subseteq C$, atunci spunem că *f și g coincid pe X* ddacă f și g au aceleași valori în elementele lui X, adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Există o unică funcție de la $\emptyset$ la o mulțime arbitrară

Notație (putere de mulțimi)

Pentru orice mulțimi A și B, se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Remarcă (pentru orice B, $B^\emptyset$ are exact un element)

Fie B o mulțime oarecare (**poate fi vidă și poate fi nevidă**). Atunci există o unică funcție $f : \emptyset \to B$.
Într–adevăr, o funcție $f : \emptyset \to B$ trebuie să fie un triplet $f = (\emptyset, G, B)$, cu $G \subseteq \emptyset \times B = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, există cel mult o funcție $f : \emptyset \to B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$ este unica posibilitate. Să arătăm că acest triplet satisface definiția funcției:

$$(\forall\, a \in \emptyset)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in \emptyset), \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall\, a)\,[a \in \emptyset \Rightarrow (\exists\,!\, b)\,(b \in B \text{ și } (a, b) \in \emptyset)].$$

Pentru orice element a, proprietatea $a \in \emptyset$ este falsă, așadar, pentru orice element a, implicația $[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată. Iar acest lucru înseamnă exact faptul că întreaga proprietate $(\forall a)[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată, deci f este funcție. Prin urmare, există o unică funcție $f : \emptyset \to B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$.

Nu există nicio funcție de la o mulțime nevidă la $\emptyset$

Remarcă (pentru orice $A \neq \emptyset$, $\emptyset^A = \emptyset$)

Fie A o mulțime **nevidă** (i. e. $A \neq \emptyset$). Atunci nu există nicio funcție $f : A \to \emptyset$. Într–adevăr, o funcție $f : A \to \emptyset$ trebuie să fie un triplet $f = (A, G, \emptyset)$, cu $G \subseteq A \times \emptyset = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, dacă ar exista o funcție $f : A \to \emptyset$, atunci am avea neapărat $f = (A, \emptyset, \emptyset)$. Să vedem dacă acest triplet verifică definiția funcției:

$$(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in \emptyset)\,((a, b) \in \emptyset), \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow [(\exists\, b)\,(b \in \emptyset \text{ și } (a, b) \in \emptyset) \text{ și}$$

$$(\forall\, c)\,(\forall\, d)\,[(c \in \emptyset \text{ și } d \in \emptyset \text{ și } (a, c) \in \emptyset \text{ și } (a, d) \in \emptyset) \Rightarrow c = d]]].$$

Oricare ar fi elementul b, proprietatea $b \in \emptyset$ este falsă, deci, oricare ar fi elementele a și b, conjuncția $(b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset)$ este falsă, deci, oricare ar fi elementul a, proprietatea $(\exists\, b)\,(b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset)$ este falsă, așadar, oricare ar fi elementul a, conjuncția care succede mai sus implicației având ca antecedent pe $a \in A$ este falsă. În schimb, întrucât A este nevidă, rezultă că proprietatea $a \in A$ este adevărată pentru măcar un element a. Prin urmare, implicația $[a \in A \Rightarrow \ldots]$ de mai sus este falsă pentru cel puțin un element a, ceea ce înseamnă că întreaga proprietate $(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow \ldots]$ este falsă, și deci f nu este funcție.

Imaginea și preimaginea printr–o funcție

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, orice funcție $f : A \to B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f*, notată $f(X)$, este submulțimea lui B:
$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$
- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește *imaginea lui f*:
$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$
- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f*, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A:
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Funcții injective, surjective, bijective

Definiție

Fie A și B mulțimi și $f : A \to B$ o funcție. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există (cel puțin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\, a \in A)\,(f(a) = b)$)
  - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - f este simultan injectivă și surjectivă
  - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\,!\, a \in A)\,(f(a) = b)$)

Funcțiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecții*, *surjecții*, respectiv *bijecții*.

Imaginea și preimaginea printr–o funcție

Când notăm $f : A \to B$, subînțelegem că A și B sunt mulțimi.

Remarcă

Pentru orice funcție $f : A \to B$, $f^{-1}(B) = A$.

Remarcă

Pentru orice funcție $f : A \to B$:

- $f(\emptyset) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Într–adevăr:
$f(\emptyset) = \{f(a) \mid a \in \emptyset\} = \emptyset$, întrucât proprietatea $a \in \emptyset$ este **falsă** pentru orice a, așadar $f(\emptyset)$ nu are elemente; altfel redactat:
$f(\emptyset) = \{b \in B \mid (\exists\, a \in \emptyset)\,(f(a) = b)\} = \{b \in B \mid (\exists\, a)\,(a \in \emptyset \text{ și } f(a) = b)\} = \emptyset$, pentru că proprietatea $a \in \emptyset$, deci și $[a \in \emptyset \text{ și } f(a) = b]$, este **falsă** pentru orice a, așadar proprietatea $(\exists\, a)\,(a \in \emptyset \text{ și } f(a) = b)$ este **falsă**, deci nu există elemente $b \in B$ care să satisfacă această proprietate;
$f^{-1}(\emptyset) = \{a \in A \mid f(a) \in \emptyset\} = \emptyset$, întrucât proprietatea $f(a) \in \emptyset$ este **falsă** pentru orice $a \in A$, așadar $f^{-1}(\emptyset)$ nu are elemente.

Remarcă (imaginea și preimaginea păstrează incluziunea nestrictă)

Pentru orice funcție $f : A \to B$:

- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$.

Într–adevăr:
dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, iar $b \in f(X)$, atunci $b = f(a)$ pentru un $a \in X$, deci $a \in Y$, așadar $b \in f(Y)$; prin urmare $f(X) \subseteq f(Y)$;
dacă $V \subseteq W \subseteq B$, iar $a \in f^{-1}(V)$, atunci $f(a) \in V$, deci $f(a) \in W$, așadar $a \in f^{-1}(W)$; prin urmare $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$.

Remarcă (temă – a se vedea și un exercițiu care urmează)

Pentru orice mulțimi nevide A și B și orice funcție $f : A \to B$, au loc incluziunile:

- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiție (funcția identitate a unei mulțimi)

Pentru orice mulțime A, notăm cu id_A *funcția identică a lui A* (numită și *funcția identitate a lui A* sau *identitatea lui A*): $id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiție (compunerea de funcții)

Dacă A, B, C sunt mulțimi, iar $f : A \to B$ și $g : B \to C$ sunt funcții, atunci *compunerea funcției g cu funcția f* este funcția notată cu $g \circ f$ și definită astfel: $g \circ f : A \to C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiție (inversa unei funcții)

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcție $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Următoarele proprietăți sunt cunoscute din liceu. A se vedea și exercițiul următor.

Remarcă (dacă există, inversa unei funcții este unică)

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$ o funcție inversabilă. Atunci există o unică funcție $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Definiție

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$ o funcție inversabilă. Atunci unica funcție $g : B \to A$ cu proprietățile $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \to A$) și se numește *inversa lui f*.

Remarcă

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Proprietăți ale funcțiilor

Exercițiu (caracterizarea surjectivității prin existența unei inverse la dreapta, și a injectivității prin existența unei inverse la stânga – temă)

Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \to B$. Atunci:

1. f este surjectivă ddacă $(\exists\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, conform ③ de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;
2. f este bijectivă ddacă $(\exists\,!\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta și inversă la stânga pentru f;
3. f este injectivă ddacă $(\exists\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, conform ① de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;
4. f este bijectivă ddacă $(\exists\,!\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga și inversă la dreapta pentru f;
5. după cum știm, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists\, j : B \to A)\,(f \circ j = id_B$ și $j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} și se numește *inversa lui f*; dar, conform ① și ③, avem și următoarea caracterizare a bijectivității: f este bijectivă ddacă $(\exists\, g, h : B \to A)\,(f \circ g = id_B$ și $h \circ f = id_A)$; în plus, conform ② și ④, în caz afirmativ, g și h sunt unice și $g = h = f^{-1}$.

Proprietăți ale funcțiilor

Exercițiu (funcțiile imagine directă și imagine inversă – temă)

Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \to B$. Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), & (\forall\, M \subseteq A)\,(f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), & (\forall\, N \subseteq B)\,(f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalențe:

1. f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall\, M \subseteq A)\,(f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;
2. f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall\, N \subseteq B)\,(f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;
3. din 1 și 2, obținem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* și f_* sunt inverse una alteia ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

Numere cardinale

Definiție

Două mulțimi A și B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* ddacă există o funcție bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiție

Pentru orice mulțime A, se numește *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$: $|A| = \{B \in \mathcal{S}et \mid A \cong B\}$.

Este simplu de demonstrat, folosind operații cu bijecții pe care le considerăm cunoscute din gimnaziu și liceu, că:

- pentru orice mulțime A, $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \to A$ este o bijecție), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; așadar avem chiar echivalențele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); așadar avem chiar echivalențele: $A \ncong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Operații cu numere cardinale

Definiție (suma, produsul și puterea de numere cardinale)

Pentru orice mulțimi A și B, avem, prin definiție:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Observăm că operațiile cu numere cardinale au fost definite în funcție de reprezentanți ai claselor date de cardinalele $|A|, |B|$, anume de mulțimile $A \in |A|$ și $B \in |B|$. Pentru ca definiția anterioară să fie corectă (și, în caz afirmativ, spunem că operațiile cu cardinali sunt *bine definite* ca mai sus), trebuie ca, dacă luăm, în definițiile de mai sus ale acestor operații, alți reprezentanți pentru clasele $|A|, |B|$, adică alte mulțimi $A' \in |A|$ și $B' \in |B|$, atunci, prin înlocuirea lui A cu A' și a lui B cu B' în egalitățile de mai sus, să obținem aceleași rezultate, i. e. aceleași cardinale. Această problemă se pune ori de câte ori definim ceva pentru clase prin intermediul unor *reprezentanți ai claselor* respective, adică al unor obiecte din clasele respective, în cazul acesta al unor mulțimi din respectivele clase de cardinal echivalență. Corectitudinea unei astfel de definiții înseamnă *independența* acelei definiții *de reprezentanții claselor*, adică faptul că, indiferent ce reprezentanți alegem pentru acele clase, obiectul definit nu se schimbă.

Operațiile cu numere cardinale sunt bine definite

Propoziție (independența de reprezentanți a operațiilor cu numere cardinale)

Operațiile cu numere cardinale, definite ca mai sus, **nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalență**, *adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Demonstrație: TEMĂ COLECTIVĂ OBLIGATORIE. **Indicație:** dacă $\varphi : A \to A'$ și $\psi : B \to B'$ sunt bijecții, atunci funcțiile $f : A \coprod B \to A' \coprod B'$, $g : A \times B \to A' \times B'$ și $h : B^A \to (B')^{(A')}$, definite prin: pentru orice $a \in A$, orice $b \in B$ și orice $p : A \to B$, $f(a, 1) := (\varphi(a), 1)$, $f(b, 2) := (\psi(b), 2)$, $g(a, b) := (\varphi(a), \psi(b))$ și $h(p) := \psi \circ p \circ \varphi^{-1}$, sunt, de asemenea, bijecții.

Observație

În indicația de mai sus, am folosit **licența de scriere (convenția)** ca în scrierea funcțiilor aplicate unor perechi de elemente să eliminăm o pereche de paranteze: de exemplu, scriem $g(a, b)$ în loc de $g((a, b))$.

Inegalități între numere cardinale

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \to B$

Remarcă

Rezultă imediat, din faptul că o compunere de bijecții este bijecție și compunerea unei bijecții cu o injecție este injecție, că definiția anterioară este **independentă de reprezentanții claselor de cardinal echivalență**, i. e., pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$):

- există o injecție de la A la B ddacă există o injecție de la A' la B';
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, așadar: $A \ncong B$ ddacă $A' \ncong B'$.

Remarcă

Este clar că, dacă A și B sunt mulțimi și $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcția incluziune:** $i : A \to B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarcă (definiții echivalente pentru inegalități între cardinale)

Se demonstrează că, pentru orice mulțimi A și B:

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecție $t : B \rightarrow A$ ddacă [există o mulțime C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecție $t : B \rightarrow A$, dar nu există nicio bijecție $g : B \rightarrow A$] ddacă [există o mulțime nevidă C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Într–adevăr, cu notațiile din definiția anterioară și cele de mai sus, se tratează cazul extrem $A = \emptyset$ separat, iar, în cazul $A \neq \emptyset$:

- pentru implicațiile directe, t și C pot fi definite prin:
  - $t(j(a)) = a$ pentru orice $a \in A$, și $t(b) \in A$, arbitrar, pentru $b \in B \setminus f(A)$; injectivitatea lui j arată că t este corect definită;
  - $C = B \setminus f(A)$,
- iar, pentru implicațiile reciproce, j poate fi definită prin:
  - pentru orice $a \in A$, $j(a) \in \{b \in B \mid t(b) = a\}$, arbitrar; faptul că t e funcție arată că j e injectivă;
  - respectiv $j(a) = (a, 1)$ pentru orice $a \in A$.

Observație

Pentru a demonstra caracterizările anterioare pentru inegalitățile între numerele cardinale, se poate folosi și exercițiul de mai sus privind caracterizarea surjectivității și a injectivității prin existența unei inverse la dreapta, respectiv la stânga.

Remarcă

Inegalitatea $\leq$ este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulțimi A și B, $|A| = |B|$ ddacă $[|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|]$.

Notație

Desigur, folosim și notațiile $\geq$ și $>$, cu semnificația: $|B| \geq |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulțimi A și B.

Exemplu (pentru problema **bunei definiri**)

Amintesc că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\equiv (\text{mod } n)$ este o *relație de echivalență* pe $\mathbb{Z}$ definită prin: $(\forall\, a, b \in \mathbb{Z})\,(a \equiv b (\text{mod } n) \Leftrightarrow n \mid (a - b))$, ale cărei *clase de echivalență* sunt: $(\forall\, a \in \mathbb{Z})\,(a/n\mathbb{Z} = \{b \in \mathbb{Z} \mid n \mid (a - b)\})$ și a cărei *mulțime factor* este: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a/n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{0/n\mathbb{Z}, 1/n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1)/n\mathbb{Z}\}$.
Deocamdată ignorați denumirile în text italic legate de *relații de echivalență*; vom vedea aceste noțiuni într–un curs următor.
$f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$, $(\forall\, x \in \mathbb{Z})\,(f(x/3\mathbb{Z}) = x/5\mathbb{Z})$ nu este bine definită, pentru că, de exemplu, $3 | (0 - 3)$, deci $0 \equiv 3 (\text{mod } 3)$, așadar $0/3\mathbb{Z} = 3/3\mathbb{Z}$, deci ar trebui să avem $f(0/3\mathbb{Z}) = f(3/3\mathbb{Z})$, dar $f(0/3\mathbb{Z}) = 0/5\mathbb{Z} \neq 3/5\mathbb{Z} = f(3/3\mathbb{Z})$, întrucât 5 nu divide pe $0 - 3$, deci $0 \not\equiv 3 (\text{mod } 5)$.

Teoremă (Cantor)

Pentru orice mulțime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Demonstrație: Dacă $X = \emptyset$, atunci unica funcție $f : X = \emptyset \to \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$, este injecție, dar nu este surjecție, deci nu este bijecție.
Într–adevăr, enunțul:

$$(\forall\, a_1, a_2 \in \emptyset)(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$$

este echivalent cu:

$$(\forall\, a_1)\,(\forall\, a_2)\,[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset) \Rightarrow (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)],$$

$$(\text{altfel scris: } (\forall\, a_1)\,(\forall\, a_2)\,[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset \text{ și } f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2])$$

care este adevărat, pentru că, oricare ar fi a_1, a_2, enunțul $a_1 \in \emptyset$ și $a_2 \in \emptyset$ este fals, deci implicația $[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset) \Rightarrow (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)]$ este adevărată. Așadar f este injectivă, deci $|\emptyset| \leq |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Însă, pentru $b := \emptyset \in \{\emptyset\}$, nu există $a \in \emptyset$ cu $f(a) = b$, deoarece nu există $a \in \emptyset$ ($\emptyset$ nu are elemente). Așadar f nu este surjectivă, deci nu e bijectivă. Prin urmare, nu există nicio funcție bijectivă de la $\emptyset$ la $\{\emptyset\}$, deci $|\emptyset| \neq |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Rezultă că $|\emptyset| < |\mathcal{P}(\emptyset)|$.

Inegalități între numere cardinale. Teorema lui Cantor privind cardinalul mulțimii părților unei mulțimi

Pentru cele ce urmează, să presupunem că $X \neq \emptyset$.
Definim $j : X \to \mathcal{P}(X)$, pentru orice $x \in X$, $j(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Funcția j este bine definită și injectivă, pentru că, oricare ar fi $x, y \in X$ cu $j(x) = j(y)$, i. e. $\{x\} = \{y\}$, rezultă $x = y$ (deoarece două mulțimi coincid ddacă au aceleași elemente). Așadar $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$.
Să presupunem prin absurd că există o surjecție $g : X \to \mathcal{P}(X)$. Deci, pentru orice $x \in X$, $g(x) \in \mathcal{P}(X)$, i. e. $g(x) \subseteq X$. Să notăm $A := \{x \in X \mid x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. g este surjectivă, prin urmare există un element $x_0 \in X$ a. î. $g(x_0) = A$.
Paradox: $x_0 \in g(x_0) = A$ sau $x_0 \notin g(x_0) = A$?
Dacă $x_0 \in g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \notin g(x_0) = A$.
Dacă $x_0 \notin g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \in g(x_0) = A$.
Am obținut o contradicție (în fiecare situație posibilă), prin urmare presupunerea făcută este falsă, adică nu există nicio surjecție $g : X \to \mathcal{P}(X)$, deci nu există nicio bijecție $f : X \to \mathcal{P}(X)$, așadar $X \ncong \mathcal{P}(X)$, deci $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.
Așadar $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

O construcție pentru mulțimea numerelor naturale

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr–o construcție echivalentă cu cea menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := |\{0, 1, 2, \ldots, n\}|$. Iar mulțimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu $\mathbb{N}$.
În **definițiile** de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într–un fel sau altul, problema următoare: cu definiția de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparține unei mulțimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanții lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...
Definiția de mai sus pentru **mulțimea** $\mathbb{N}$ **a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducției matematice**:

(Principiul inducției matematice)

Dacă o submulțime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n + 1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Într–o demonstrație prin inducție a unei proprietăți P asupra elementelor lui $\mathbb{N}$, ne referim la submulțimea $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$.

În cadrul *sistemului axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel*, **axioma VI (a infinității)** permite definirea mulțimii $\mathbb{N}$ a numerelor naturale ca mai sus; amintim că această axiomă spune că recurența $\begin{cases} 0 \in S, \\ (\forall\, n)\,(n \in S \Rightarrow n + 1 \in S) \end{cases}$ definește o mulțime S, pe care o notăm $\mathbb{N} := S$.

Având mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, se construiesc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ și se definesc operațiile și relațiile de ordine pe aceste mulțimi în modul cunoscut din liceu.
Mulțimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulțime infinită, mai precis o mulțime numărabilă.

- Ce este o *mulțime finită?*
- Ce este o *mulțime infinită?*
- Ce este o *mulțime numărabilă?*

Mulțimi numărabile

Notație ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$)

Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunțat “alef 0“.

Definiție

O mulțime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarcă

Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$. Într–adevăr, $\mathbb{N}^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, \mathbb{N})\}$, și se arată, la fel ca în demonstrația teoremei lui Cantor de mai sus pentru $(\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$, că $(\emptyset, \emptyset, \mathbb{N})$ este funcție injectivă, dar nesurjectivă, prin urmare $0 = |\emptyset| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Iar, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\{0, 1, 2, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$, așadar $|\{0, 1, 2, \dots, n-1\}| \leq |\mathbb{N}|$, și, pentru orice funcție $f : \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \to \mathbb{N}$, dacă M este cel mai mare dintre numerele naturale $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n-1)$ ($\mathbb{N}$ este ceea ce vom numi o mulțime **total ordonată**, așadar există $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, două câte două distincte, a. î. $f(i_1) \leq \dots \leq f(i_n) = M$), atunci $M + 1 \in \mathbb{N}$, dar $M + 1 \notin Im(f)$, așadar f este nesurjectivă, deci nu e bijectivă, prin urmare $|\{0, 1, 2, \dots, n-1\}| \neq |\mathbb{N}|$. Așadar, $n = |\{0, 1, 2, \dots, n-1\}| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Mulțimi infinite

Notă (material FACULTATIV)

Demonstrația remarcii anterioare nu face parte din materia pentru examen.

Definiție

O mulțime X se zice *infinită*:

1. *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$
2. *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă
3. *în sens obișnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \ncong \{1, 2, \ldots, n\}$

Teoremă

Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Notă (material FACULTATIV)

Pentru demonstrația teoremei anterioare, a se vedea finalul primului capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002. Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

- Demonstrațiile tuturor proprietăților care nu sunt justificate în curs sau seminar nu fac parte din materia pentru examen: aceste **demonstrații** sunt FACULTATIVE, dar **enunțurile** acelorași proprietăți sunt OBLIGATORII dacă nu se specifică altfel.

Mulțimi finite

Desigur, o *mulțime finită* este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite *în sens obișnuit*:

Definiție

O *mulțime finită* este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Pentru a face mai clară legătura dintre mulțimile finite și construcția numerelor naturale prezentată mai sus, putem formula echivalent definiția anterioară, astfel: o mulțime finită este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (unde $n-1$ este predecesorul lui n în $\mathbb{N}$, în construcția anterioară).
Desigur, am folosit **licența de scriere (convenția)**: $\{1, 2, \ldots, n\} = \emptyset$ pentru $n = 0$ (respectiv $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} = \emptyset$ pentru $n = 1$).
Definiția anterioară spune că, în cazul mulțimilor finite, **cardinalul** semnifică **numărul de elemente**.

Remarcă

Conform definiției anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulțimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Mulțimi numărabile sau cel mult numărabile

Remarcă

Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite. În particular, $\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, și orice mulțime numărabilă este o mulțime infinită. Folosind și remarca anterioară, obținem că: orice cardinal finit (i. e. cardinal al unei mulțimi finite, adică număr natural) este strict mai mic decât orice cardinal transfinit.

Definiție

O *mulțime cel mult numărabilă* este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

$\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, deci, conform definiției mulțimilor infinite în sens Dedekind, poate fi pusă în bijecție cu o submulțime proprie (i. e. strictă, i. e. diferită de întreaga mulțime $\mathbb{N}$, i. e. strict inclusă în $\mathbb{N}$) a sa.

Notație

Amintim următoarele notații consacrate pentru un segment al mulțimii $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \ldots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$$

Mulțimi numărabile

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum poate fi cazat un nou turist în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1, pe cel al camerei 1 în camera 2, pe cel al camerei 2 în camera 3 ș. a. m. d.. Iar noul turist este cazat în camera 0.
“Morala:“ cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$? Definim $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f(n) := n + 1$. f este o bijecție.

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum pot fi cazați un milion de noi turiști în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1.000.000, pe cel al camerei 1 în camera 1.000.001, pe cel al camerei 2 în camera 1.000.002 ș. a. m. d.. Iar noii turiști sunt cazați în camerele $0, 1, 2, \ldots, 999.999$.
“Morala:“ cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1.000.000\}$? Definim $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1.000.000$. g este o bijecție.

$\mathbb{Z}$ este numărabilă

Notație

Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$ și orice $M \subseteq \mathbb{Z}$, $aM + b := \{ax + b \mid x \in M\}$.

Exemplu

Pot fi date multe exemple de bijecții între $\mathbb{N}$ și submulțimi proprii ale sale, exemple care, desigur, ilustrează faptul că $\mathbb{N}$ este o mulțime infinită (a se revedea definiția mulțimilor infinite în sens Dedekind), dar și implică faptul că acele submulțimi proprii ale lui $\mathbb{N}$ sunt numărabile. De exemplu, cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu mulțimea $2\mathbb{N}$ a numerelor naturale pare, cu mulțimea $2\mathbb{N} + 1$ a numerelor naturale impare, sau cu mulțimea $7\mathbb{N} + 3$ a numerelor naturale de forma $7k + 3$, cu $k \in \mathbb{N}$? Răspuns: următoarele funcții sunt bijecții:

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ f(n) := 2n; \\ g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} + 1, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ g(n) := 2n + 1; \\ h : \mathbb{N} \to 7\mathbb{N} + 3, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ h(n) := 7n + 3. \end{array}$$

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă. Într–adevăr, funcția $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definită prin: pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -2x - 1, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$ este o bijecție.

$\mathbb{Q}$ este numărabilă

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este numărabilă, fapt care poate fi demonstrat printr–o mare varietate de procedee, cum ar fi: punând mai întâi pe $\mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ în bijecție cu cu $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ prin $x \rightsquigarrow \dfrac{x}{x+1}$, apoi pe $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în bijecție cu $\mathbb{N}$ prin așezarea elementelor lui $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în șirul $\dfrac{0}{1}, \dfrac{0}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{0}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{0}{n}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{0}{n+1}, \ldots$ și eliminarea duplicatelor din acest șir, iar pașii de până acum conduc, prin compunere de bijecții, la existența unei bijecții $\pi : \mathbb{Q} \cap [0, \infty) \to \mathbb{N}$ cu $\pi(0) = 0$ (deci $\pi \mid_{\mathbb{Q} \cap (0,\infty)} : \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \to \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este, la rândul ei, o bijecție), ceea ce permite obținerea unei bijecții $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, definite prin: pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \begin{cases} 2\pi(x), & \text{dacă } x \geq 0, \\ 2\pi(-x) - 1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$ A se vedea alte metode de a construi o bijecție între $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{N}$ în primul capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

Notă

Demonstrarea faptului că $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ nu face parte din materia pentru examen.

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

Definiție

O *mulțime nenumărabilă* este, prin definiție, o mulțime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulțime având cardinalul strict mai mare decât $\aleph_0$.

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă (sigur că este infinită, în baza definiției lui Cantor pentru mulțimile infinite, deoarece include pe $\mathbb{N}$). Acest fapt poate fi arătat, de exemplu, prin **procedeul diagonal al lui Cantor**: să considerăm o funcție arbitrară $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ și, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, să scriem pe $f(n)$ ca fracție zecimală: $f(n) = [f(n)] + 0, a_{n,0}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots a_{n,n}a_{n,n+1}\ldots a_{n,k}\ldots$, unde $[f(n)]$ este partea întreagă a lui $f(n)$ și $a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots$ sunt cifrele zecimale de după virgulă ale lui $f(n)$. Să considerăm un număr real b, cu scrierea ca fracție zecimală: $b = 0, b_0b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$, cu cifrele zecimale $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ și cu proprietatea că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b_n \notin \{0, a_{n,n}, 9\}$ (eliminăm pe 0 și 9 pentru a evita cazul dat de egalitățile $1 = 1,(0) = 1,0000\ldots = 0,(9) = 0,9999\ldots$, ușor verificabile prin exprimarea cu fracții a acestor numere (raționale)). Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b \neq f(n)$, pentru că b și $f(n)$ au a $(n+1)$–a zecimală diferită, ceea ce arată că f nu este surjectivă. Deci nu există nicio surjecție de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{R}$, așadar nu există nicio bijecție între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{R}$. În concluzie, $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

Definiție ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$)

Cardinalul lui $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{C}$ și se numește *puterea continuumului.*

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Remarcă

Nenumărabilitatea lui $\mathbb{R}$ poate fi demonstrată și prin remarca următoare și teorema lui Cantor privind inegalitatea strictă dintre cardinalul unei mulțimi arbitrare X și cardinalul mulțimii părților lui X.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulțime M.

Remarcă ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$)

Se poate arăta că $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$, în numeroase moduri, de exemplu ca mai jos.

Dacă notăm cu $Bin := \{x \in [0,1) \mid x$ are numai cifre de 0 și 1$\}$, atunci următoarea funcție este o bijecție: $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to Bin$, pentru orice $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\varphi(X) := 0, s_0 s_1 \ldots s_n \ldots \in Bin, \text{ unde, pentru orice } n \in \mathbb{N},\ s_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \notin X; \\ 1, & \text{dacă } n \in X. \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

De la $[0,1)$ la *Bin* există o injecție, de exemplu o funcție care înlocuiește cifrele zecimale cu o reprezentare a lor în binar, fie pe același număr de cifre binare pentru fiecare cifră zecimală, fie doar având *proprietatea prefixului:* nu există două cifre zecimale distincte c și d a. î. reprezentarea binară a lui c să fie prefix pentru cea a lui d, adică a. î. reprezentarea binară a lui d să fie concatenarea celei a lui c cu un alt șir de cifre binare. Deci $|[0,1)| \leq |Bin|$. Dar $Bin \subset [0,1)$, deci incluziunea este o injecție de la *Bin* la $[0,1)$, așadar $|Bin| \leq |[0,1)|$. Prin urmare $|[0,1)| = |Bin|$, adică există o bijecție $\psi : [0,1) \to Bin$. Funcțiile $f : \mathbb{R} \to (0,\infty),\ (\forall\, x \in \mathbb{R})\, f(x) := e^x$, $g : (0,\infty) \to (0,1),\ (\forall\, x \in (0,\infty))\, g(x) := x/(x+1)$ și $j : [0,1) \to (0,1),\ (\forall\, x \in [0,1))\, j(x) := \begin{cases} 10^{-1}, & \text{dacă } x = 0, \\ 10^{-n-1}, & \text{dacă } x = 10^{-n}, \text{ pentru un } n \in \mathbb{N}^*, \\ x, & \text{altfel}, \end{cases}$ sunt bijecții.

Așadar, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ j \circ \psi^{-1} \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ este o bijecție.

Notă (material FACULTATIV)

Demonstrația cardinal echivalenței lui $\mathbb{R}$ cu mulțimea părților lui $\mathbb{N}$ nu face parte din materia pentru examen.

Ipoteza continuumului

Tot ce urmează în această secțiune (până la reguli de calcul cu numere cardinale transfinite inclusiv) este material FACULTATIV.

- Este $\mathcal{C} = |\mathbb{R}|$ primul cardinal infinit nenumărabil?
- **Ipoteza continuumului** (propusă de Georg Cantor, 1878; **prima problemă a lui Hilbert**): Nu există niciun cardinal κ cu proprietatea că $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < \kappa < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. (Adică $\mathcal{C} = |\mathbb{R}|$ este primul cardinal infinit nenumărabil.)
- S-a demonstrat (Paul Cohen, 1963) că: **ipoteza continuumului** este o proprietate independentă de sistemele consacrate de axiome pentru teoria mulțimilor (Zermelo–Fraenkel, von Neumann–Bernays–Gödel etc.), i. e. nu poate fi nici demonstrată, nici infirmată pornind de la axiomele din aceste sisteme.
- **Ipoteza generalizată a continuumului** (generalizare a **ipotezei continuumului**, așa cum anunță și denumirea ei): Nu există niciun cardinal κ cu proprietatea că $|\mathbb{N}| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ sau $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$ sau $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|$ ș. a. m. d..
- **Ipoteza generalizată a continuumului** implică **axioma alegerii**.

Cardinalul mulțimii părților unei mulțimi. Șirul cardinalelor

- Faptul că $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ arată că **nu există un cel mai mare cardinal** (după cum a demonstrat G. Cantor), întrucât, presupunând prin absurd că $\mu = |A|$ este cel mai mare cardinal, cu A mulțime, rezultă că $\mu = |A| < |\mathcal{P}(A)|$, deci $|\mathcal{P}(A)|$ este un cardinal strict mai mare decât μ, și avem o contradicție.
- Când vom vorbi despre funcții caracteristice, vom arăta că, oricare ar fi o mulțime X, $\mathcal{P}(X) \cong \{0,1\}^X = \{f \mid f : X \to \{0,1\}\}$, deci $|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = |\{0,1\}|^{|X|} = 2^{|X|}$. Așadar, $\mathcal{C} = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =$ $= 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = 2^{2^{\aleph_0}}$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ ș. a. m. d..
- S–a demonstrat că numerele cardinale sunt total ordonate, i. e. oricare două cardinale κ și μ satisfac $\kappa \leq \mu$ sau $\mu \leq \kappa$.
- Mai mult, s–a demonstrat (Zermelo, 1904) că numerele cardinale sunt **bine ordonate**, ceea ce înseamnă, în esență, că numerele cardinale pot fi puse într–un șir $0 < 1 < 2 < \ldots < n < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$, unde $\aleph_1$ este primul cardinal (infinit) nenumărabil, $\aleph_2$ este primul cardinal (infinit) strict mai mare decât $\aleph_1$ ș. a. m. d..
- Așadar, **ipoteza continuumului** afirmă că $\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, iar **ipoteza generalizată a continuumului** afirmă că $\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, $2^{\aleph_2} = \aleph_3$ ș. a. m. d..
- A nu se înțelege că șirul de mai sus al cardinalelor ar fi numărabil!

Nu există numărul cardinal al tuturor numerelor cardinale

- Într–adevăr, nu numai că există o infinitate nenumărabilă de cardinale transfinite („infinități distincte“), ci chiar totalitatea cardinalelor transfinite nu poate fi cuprinsă într–un număr cardinal transfinit („numărul infinităților distincte este mai mare decât orice infinitate“), pentru că **nu există nicio mulțime de mulțimi care să conțină mulțimi de orice cardinal, adică reprezentanți pentru toate clasele de cardinal echivalență**; altfel spus: o clasă care conține mulțimi de orice cardinal nu este mulțime, ci este o **clasă proprie**. Într–adevăr, pentru orice mulțime de mulțimi S, rezultă că $T = \bigcup_{A \in S} A$ (reuniunea tuturor mulțimilor care sunt elemente ale lui S) este tot o mulțime, iar T are proprietatea că orice $A \in S$ satisface $A \subseteq T$, prin urmare $|A| \leq |T|$ (cu definiția cu funcții injective: funcția incluziune $i : A \to T$, $i(a) = a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă; cu definiția cu sumă de cardinale: $|T| = |A| + |T \setminus A|$), iar, cum $|T| < |\mathcal{P}(T)|$, rezultă că orice $A \in S$ are $|A| < |\mathcal{P}(T)|$, deci nu există în S mulțimi de cardinal mai mare sau egal cu $|\mathcal{P}(T)|$. Așadar, mai mult: cardinalele elementelor oricărei mulțimi de mulțimi sunt mărginite superior (bineînțeles că și inferior, întrucât $0 = |\emptyset|$ este primul număr cardinal).

Inegalități între numere cardinale finite și transfinite

- Sigur că nu există o mulțime a tuturor cardinalelor, pentru că numerele cardinale nenule sunt clase proprii (i. e. clase care nu sunt mulțimi), și, prin convenție, nu se permite unei clase proprii să aparțină unui alt obiect (a se revedea primul curs). Dar, chiar dacă eliminăm această restricție, înlocuind cardinalele nenule cu etichete, de exemplu reprezentanți ai acestor cardinale, considerând câte o mulțime de fiecare cardinal și luând clasa acestor mulțimi, cele de mai sus arată că nu am putea cuprinde toate numerele cardinale într–o mulțime, pentru că o astfel de clasă nu este o mulțime.

Remarcă

Oricare ar fi mulțimile A și B:

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită și $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$; acest fapt rezultă din cel anterior și definiția lui Dedekind a mulțimilor infinite, care arată că, dacă $A \subsetneq B$, atunci nu există o bijecție între A și B ($A \ncong B$).

În plus, după cum arată definiția lui Cantor a mulțimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ și A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ și B este finită, atunci A este finită.

Proprietăți ale numerelor cardinale

- Faptul că există o unică mulțime vidă $\emptyset$ arată că numărul cardinal $0 = |\emptyset| = \{\emptyset\}$ este mulțimea cu unicul element $\emptyset$. Celelalte numere cardinale sunt clase proprii, după cum am menționat și mai sus.
- Dintre proprietățile operațiilor cu cardinale, menționăm: adunarea este asociativă, comutativă și cu elementul neutru 0, iar înmulțirea este asociativă, comutativă, cu elementul neutru 1 și distributivă față de adunare; adunarea, înmulțirea și ridicarea la putere sunt monoton crescătoare în ambele argumente.
- În cele ce urmează, κ, μ și ν vor fi numere cardinale arbitrare, și vom specifica faptul că un număr cardinal λ este finit prin $\lambda < \aleph_0$, iar faptul că un cardinal λ este transfinit prin $\lambda \geq \aleph_0$.

Observație

Conform celor de mai sus, faptul că o mulțime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, în cursurile și seminariile următoare, vom folosi și notația $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulțime A este finită.

Reguli de calcul cu numere cardinale finite și transfinite – nu fac parte din materia pentru examen

- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$ sau $\mu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
- $\kappa \cdot \mu = 0$ ddacă $[\kappa = 0$ sau $\mu = 0]$.
- Dacă $\kappa \neq 0$, $\mu \neq 0$ și $[\kappa \geq \aleph_0$ sau $\mu \geq \aleph_0]$, atunci $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
- $\kappa^0 = 1$. În particular, $0^0 = 1$. Dacă $\kappa \neq 0$, atunci $0^\kappa = 0$.
- $1^\kappa = 1$. $\kappa^1 = \kappa$.
- $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$. $\kappa^{\mu \cdot \nu} = (\kappa^\mu)^\nu$. $(\kappa \cdot \mu)^\nu = \kappa^\nu \cdot \mu^\nu$.
- Dacă $1 < \kappa < \aleph_0$, $1 < \mu < \aleph_0$ și $\nu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\nu = \mu^\nu$.
- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$ și $0 < \mu < \aleph_0$, atunci $\kappa^\mu = \kappa$.
- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
- Dacă $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$, atunci $\kappa^\mu = 2^\kappa$.
- Dacă $2 \leq \kappa < \mu$ și $\mu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\mu = 2^\mu$.

Familii arbitrare de elemente, familii arbitrare de mulțimi

- Ce este un șir de numere reale indexat de $\mathbb{N}$? Un *șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se notează $x_n := f(n) \in \mathbb{R}$.
- Ce este o familie arbitrară de numere reale? Fie I o mulțime arbitrară. Ce este o familie de numere reale indexată de I? O *familie* $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ este o funcție $f : I \to \mathbb{R}$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in \mathbb{R}$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

Dată o mulțime arbitrară A:

- ce este un șir de elemente ale lui A indexat de $\mathbb{N}$?
- ce este o familie arbitrară de elemente ale lui A?

Înlocuind mai sus pe $\mathbb{R}$ cu A, se obțin definițiile acestor noțiuni. Să reținem:

Definiție (familie de elemente ale lui A indexată de I: $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$)

Fie I și A mulțimi arbitrare.
O *familie de elemente ale lui A indexată de I* este o funcție $f : I \to A$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in A$, astfel că familia f se mai notează sub forma $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$.
Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

- Ce este un șir de mulțimi indexat de $\mathbb{N}$?
- Ce este o familie arbitrară de mulțimi?

Egalitatea între familii de elemente

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulțimi arbitrare A, pentru că există o singură funcție de la $\emptyset$ la A (a se vedea și mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăși.

Fie I și A două mulțimi nevide, iar $(a_i)_{i \in I}$ și $(b_i)_{i \in I}$ două familii de elemente din A indexate de I:

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i \in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Conform celor menționate anterior, familiile de elemente din A indexate de I sunt, prin definiție, funcții de la I la A, iar notația lor ca mai sus se adoptă pentru comoditate:

- $(a_i)_{i \in I} = f : I \to A$, unde, pentru orice $i \in I$, $f(i) = a_i$
- $(b_i)_{i \in I} = g : I \to A$, unde, pentru orice $i \in I$, $g(i) = b_i$

Egalitatea între familii de elemente

Egalitatea de funcții semnifică egalitatea domeniilor și a codomeniilor (valabilă pentru f și g, pentru că au ambele domeniul I și codomeniul A) și *egalitatea punctuală*, adică egalitatea în fiecare punct: două funcții cu același domeniu și același codomeniu sunt egale ddacă sunt egale în fiecare punct al domeniului lor comun:

$$f = g \quad \text{ddacă}, \quad \text{pentru orice } i \in I,\ f(i) = g(i).$$

Deci ce semnifică egalitatea a două familii de elemente din aceeași mulțime indexate de aceeași mulțime? *Egalitatea pe componente:* cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{ddacă}, \quad \text{pentru orice } i \in I,\ a_i = b_i.$$

- **Caz particular:** cazul finit nevid: $I = \overline{1, n}$, cu n natural nenul:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{ddacă} \quad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ \quad \vdots \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

Familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime arbitrară. Se numește *șir de submulțimi ale lui T indexat de* $\mathbb{N}$ o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, se notează $A_n := f(n) \in \mathcal{P}(T)$, iar șirul de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Scriem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(T)$.

Definiție

Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i\in I}$. Scriem $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Putem generaliza definițiile anterioare la șiruri de mulțimi oarecare și familii de mulțimi oarecare, nu neapărat părți ale unei mulțimi precizate, dar vom avea nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție, care permite unei funcții f definite pe $\mathbb{N}$, respectiv pe I, să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulțime), anume clasa tuturor mulțimilor în acest caz.

Definiție (operații cu familii arbitrare de mulțimi)

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I.
Se definesc următoarele operații:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulțimea notată $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists\, i)\,(i \in I \text{ și } x \in A_i)\}$$

- *intersecția familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulțimea notată $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i\in I}$ (numit și *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i\in I}$) este mulțimea notată $\prod\limits_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} =$$
$$= \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\},$$

sau, altfel scris (cu scrierea unei familii de elemente ca funcție de la mulțimea de indici la mulțimea în care iau valori acele elemente):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}.$$

Remarcă (la fel ca în cazul operațiilor binare $\cup$ și $\cap$, reuniunea unei familii nevide de mulțimi își include termenii, iar intersecția unei familii nevide de mulțimi este inclusă în termenii săi – demonstrația: TEMĂ COLECTIVĂ OBLIGATORIE)

Pentru orice mulțime nevidă I, orice familie de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$ și orice $k \in I$:

$$A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{și} \quad \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$$

Notație

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $\prod_{i \in \overline{1,n}} A \overset{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^{n} A \overset{\text{notație}}{=} A^n$.

Remarcă (puterile unei mulțimi: caz particular al produsului direct)

În definiția anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ și, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$, așadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f : I \to A, (\forall\, i \in I)\, (f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \to A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\, (a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} = A^{\overline{1,n}} = A^I$.

Remarcă (putem generaliza notația $A^n := A^{\overline{1,n}} = A^I$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice mulțime I cu $|I| = n$)

Pentru orice mulțimi A, I și J, dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independența de reprezentanți a operației de exponențiere asupra numerelor cardinale.

Dar, mai precis, dacă $\varphi : I \to J$ este o bijecție, atunci $\psi : A^I \to A^J$, definită prin: $\psi(f) = f \circ \varphi^{-1}$ pentru orice $i \in I$ este o **bijecție care poate fi identificată cu egalitatea** (i.e. **cu funcția identitate** a lui A^I), întrucât duce familiile de elemente din A^I în ele însele, doar cu mulțimea de indici schimbată din I în J: dacă $(a_i)_{i\in I} \in A^I$ este familia de elemente corespunzătoare unei funcții $f : I \to A$, iar $\psi((a_i)_{i\in I}) = (b_j)_{j\in J}$, atunci, pentru fiecare $i \in I$, $b_{\varphi(i)} = (\psi(f))(\varphi(i)) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(i)) = f(\varphi^{-1}(\varphi(i))) = f(i) = a_i$, deci, pentru fiecare $j \in J$, $b_j = b_{\varphi(\varphi^{-1}(j))} = a_{\varphi^{-1}(j)}$, astfel că $\psi((a_i)_{i\in I}) = (a_{\varphi^{-1}(j)})_{j\in J}$.

Așadar putem considera $A^I = A^J$ și, generalizând cazul finit de mai sus, putem face următoarea notație.

Notație

Pentru orice mulțimi A și I, vom nota: $A^{|I|} := A^I$.

Exercițiu (TEMĂ COLECTIVĂ OBLIGATORIE – distributivitatea produsului cartezian față de reuniuni și intersecții arbitrare)

Fie A o mulțime, I o mulțime nevidă (de fapt, poate fi și vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A\times(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(A\times B_i)$ și $(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)\times A=\bigcup\limits_{i\in I}(B_i\times A)$
- $A\times(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(A\times B_i)$ și $(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)\times A=\bigcap\limits_{i\in I}(B_i\times A)$

Exercițiu (TEMĂ – distributivitatea generalizată a produsului cartezian față de reuniune și intersecție)

Fie I și J o mulțimi nevide (de fapt, cel mult una dintre ele poate fi și vidă), iar $(A_{i,j})_{i\in I,j\in J}$ o familie de mulțimi (indexată de $I\times J$; poate fi scrisă și sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J}A_{i,j}=\bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I}A_{i,j} \quad \text{și} \quad \prod_{i\in I}\bigcup_{j\in J}A_{i,j}=\bigcup_{(j_i)_{i\in I}\in J^I}\prod_{i\in I}A_{i,j_i}$$

Amintesc că am demonstrat la seminar (imediat, din definițiile acestora) asociativitatea reuniunii (pentru orice mulțimi A_1,A_2,A_3,

$(A_1\cup A_2)\cup A_3=A_1\cup(A_2\cup A_3)\overset{\text{notație}}{=}A_1\cup A_2\cup A_3)$

și a intersecției (pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3, $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \overset{\text{notație}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$) ca operații binare, adică operații definite între câte două mulțimi, cum au fost definite în primul curs, nu în cazul general al acestor operații pe familii arbitrare de mulțimi, caz tratat în acest curs.

Propoziție (asociativitatea produsului direct ca operație binară)

Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare. Atunci:

$A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$, *întrucât următoarele funcții sunt bijecții:* $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$, *pentru orice* $a_1 \in A_1$, *orice* $a_2 \in A_2$ *și orice* $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ *și* $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.

În plus, fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ *pentru orice* $a_1 \in A_1$, *orice* $a_2 \in A_2$ *și orice* $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Demonstrație: Din definiția egalității de perechi rezultă că φ și ψ sunt bijecții, întrucât orice element din codomeniul fiecăreia dintre ele este imaginea unuia și numai unuia dintre elementele din domeniul său.

La fel ca pentru orice operator binar, asociativitatea produsului direct semnifică faptul că, într-un șir de produse directe (ca operații binare notate *infixat*, i. e. cu operatorul binar produs direct **între** *argumentele* (*operanzii*, variabilele) sale; a se vedea mai jos), nu contează cum punem parantezele, i. e., indiferent care dintre produsele directe din acel șir sunt efectuate mai devreme și care mai târziu, rezultatul obținut este același (modulo un izomorfism care se identifică, cu egalitatea).

De aceea, asociativitatea produsului direct face legitimă (i. e. corectă) notația următoare pentru un șir de produse directe notate **infixat** (i. e. cu operatorul binar produs direct între argumentele sale, ca mai jos) fără paranteze: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, putem scrie $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ în loc de $(\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n$, iar acest din urmă produs direct, conform asociativității produsului direct, este egal cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = (\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n \overset{\text{notație}}{=} A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n.$$

În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțime A, $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{de } n \text{ ori } A}$.

Produsul direct al unei familii nevide de mulțimi: convenții

Ca și la funcții aplicate unor perechi de elemente, folosim **licența de scriere (convenția):** pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, orice funcție $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Exercițiu (cazul particular finit în exercițiul precedent)

Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ și $(A_{i,j})_{i\in\overline{1,n}, j\in\overline{1,k}}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

1. $(A_{1,1}\cap A_{1,2}\cap\ldots\cap A_{1,k})\times(A_{2,1}\cap A_{2,2}\cap\ldots\cap A_{2,k})\times\ldots\times(A_{n,1}\cap A_{n,2}\cap\ldots\cap A_{n,k}) = (A_{1,1}\times A_{2,1}\times\ldots A_{n,1})\cap(A_{1,2}\times A_{2,2}\times\ldots A_{n,2})\cap\ldots\cap(A_{1,k}\times A_{2,k}\times\ldots A_{n,k})$;
2. $(A_{1,1}\cup A_{1,2}\cup\ldots\cup A_{1,k})\times(A_{2,1}\cup A_{2,2}\cup\ldots\cup A_{2,k})\times\ldots\times(A_{n,1}\cup A_{n,2}\cup\ldots\cup A_{n,k}) = \bigcup_{j_1=1}^{k}\ldots\bigcup_{j_n=1}^{k}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{n,j_n}) = \bigcup_{j_1\in\overline{1,k},\ldots,j_n\in\overline{1,k}}(A_{1,j_1}\times A_{2,j_2}\times\ldots A_{n,j_n}) = \bigcup_{j_1\in\overline{1,k},\ldots,j_n\in\overline{1,k}}\prod_{i=1}^{n}A_{i,j_i} = \bigcup_{(j_1,\ldots,j_n)\in(\overline{1,k})^n}\prod_{i=1}^{n}A_{i,j_i}$,

unde la punctul (2) avem de demonstrat prima egalitate, iar ultimele 3 egalități sunt scrieri alternative ale membrului drept al primeia.

Indicație de rezolvare fără a folosi cazul general din exercițiul precedent: Fie A, B, C, D mulțimi arbitrare. Egalitatea de la (2) poate fi demonstrată prin inducție după n, apoi după k, pornind de la distributivitatea (simplă a) produsului cartezian față de reuniune: $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ și $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$. Același tip de egalitate ca la la (2) rezultă, prin inducție, din distributivitatea produsului cartezian față de intersecție: $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ și $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$, însă, în cazul intersecției, avem, de exemplu, pentru $n = k = 2$: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (A \times D) \cap (B \times C) \cap (B \times D) = (A \times C) \cap (B \times D) = (A \times D) \cap (B \times C)$. Recomand aici generalizarea următorului raționament, bazat pe definițiile intersecției și produsului cartezian și pe comutativitatea și asociativitatea conjuncției logice, care demonstrează egalitatea $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$: pentru orice elemente x și y, avem:

$$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \text{ ddacă } \begin{cases} x \in A \cap B \text{ și} \\ y \in C \cap D \end{cases} \text{ ddacă } \begin{cases} x \in A \text{ și } x \in B \\ \text{și} \\ y \in C \text{ și } y \in D \end{cases}$$

$$\text{ddacă } \begin{cases} x \in A \text{ și } y \in C \\ \text{și} \\ x \in B \text{ și } y \in D \end{cases} \text{ ddacă } \begin{cases} (x, y) \in A \times C \\ \text{și} \\ (x, y) \in B \times D \end{cases} \text{ ddacă } (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D);$$

prin urmare, pentru orice element u, avem:
$u \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ ddacă $(\exists (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)) (u = (x, y))$ ddacă
$(\exists (x, y)) [(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ și $u = (x, y)]$ ddacă
$(\exists x) (\exists y) [(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ și $u = (x, y)]$ ddacă
$(\exists x) (\exists y) [(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$ și $u = (x, y)]$ ddacă
$(\exists (x, y)) [(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$ și $u = (x, y)]$ ddacă
$(\exists (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)) (u = (x, y))$ ddacă $u \in (A \times C) \cap (B \times D)$,
așadar $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Reuniunea disjunctă a unei familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I.

Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Reuniunea disjunctă a unei familii arbitrare de mulțimi

Notație

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Exemplu

La fel ca în exemplul de mai sus pentru reuniunea disjunctă, fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$, aici privită ca reuniunea disjunctă a familiei cu două elemente $\{A, B\}$?
Putem considera că familia de mulțimi $\{A, B\}$ este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Și reuniunea disjunctă, ca operație binară, este asociativă

Notație

La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3, se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate:

$A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod\limits_{i=1}^{3} A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecții cu identitatea, putem scrie:

$$A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^{3} A_i.$$

Operații de diferite arități

Am vorbit mai sus despre produsul direct și reuniunea disjunctă ca operații **binare**. *Aritatea* unei operații a unei structuri algebrice (cu o singură *mulțime suport*, o singură mulțime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operații**. Dacă structura algebrică are mulțimea suport A, iar f este o operație n–ară pe A, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A} \to A$ (f este o funcție cu n argumente din A, cu valori tot în A).

Exemplu

Într–un grup $(G, \circ, ^{-1}, e)$, avem trei operații:

- operația *binară* $\circ$ (**compunerea elementelor grupului, două câte două**) (operație de aritate 2, operație cu două argumente): $\circ : G \times G \to G$
- operația *unară* $^{-1}$ (**inversarea fiecărui element din grup**) (operație de aritate 1, operație cu un singur argument): $^{-1} : G \to G$
- operația *zeroară* (sau *nulară*) e (**elementul neutru al grupului**) (operație de aritate 0, operație fără argumente, i. e. **constantă** din G): $e \in G$

Operațiile zeroare sunt elemente distinse, i. e. constante

De ce operațiile zeroare sunt același lucru cu **elemente distinse, constante** din mulțimea suport a structurii algebrice?

Urmând regula de mai sus, elementul neutru e al grupului G trebuie să fie o funcție de la produsul direct al familiei vide la G.

Produsul direct al familiei vide nu este $\emptyset$, cum s–ar putea crede, ci este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element.

Într–adevăr, dacă recitim de mai sus definiția produsului direct al unei familii arbitrare de mulțimi, observăm că produsul direct al familiei vide este mulțimea funcțiilor de la mulțimea vidă la reuniunea familiei vide, care satisfac o proprietate întotdeauna adevărată (anume $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow \ldots)$, iar $i \in \emptyset$ este fals pentru orice i, deci implicația anterioară este adevărată pentru orice i, deci această proprietate cu variabila i cuantificată universal este adevărată), adică produsul direct al familiei vide este mulțimea funcțiilor de la mulțimea vidă la reuniunea familiei vide, care are un singur element, pentru că de la $\emptyset$ la orice mulțime există o unică funcție, așa cum am văzut mai sus.

Remarcă (reuniunea familiei vide este vidă)

Dacă recitim și definiția reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulțimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiție care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este $\emptyset$.

Operațiile zeroare sunt elemente distinse, i. e. constante

Remarcă (produsul direct al familiei vide este un singleton)

Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulțimea cu unicul element dat de unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$, anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Prin urmare, elementul neutru al grupului G este o funcție φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G: $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \to G$, iar o funcție definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G: $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, și identificăm $\varphi = e$.

Remarcă (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă)

Definiția reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulțimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulțimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulțimi, care este $\emptyset$.

Notă

Vom discuta despre intersecția familiei vide de mulțimi. În cazul intersecției, lucrurile sunt un pic mai complicate.

Exemplu de structură algebrică având mai multe mulțimi suport, i. e. mai multe mulțimi (tipuri) de elemente

Ca o paranteză, o **structură algebrică cu două mulțimi suport** este **spațiul vectorial,** care are ca mulțimi suport **mulțimea scalarilor** (formând un corp, K), și **mulțimea vectorilor** (formând un grup abelian, V). Nu este același lucru cu o structură algebrică având ca unică mulțime suport pe $K \times V$, pentru că nu avem operații pe $K \times V$ (i. e. operații de la $K \times V \times K \times V \times \ldots \times K \times V$ la $K \times V$), ci avem operații de grup pe V, operații de corp pe K și operația de compunere (înmulțire) a scalarilor cu vectorii, de la $K \times V$ la V.

Operații binare asociative și recursii

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $(A_i)_{i \in \overline{1,n}} \overset{\text{notație}}{=} (A_i)_{i=1}^{n}$ o familie de mulțimi. Datorită asociativității reuniunii, intersecției, produsului direct și reuniunii disjuncte: pentru orice $m \in \overline{1,n}$:

- $$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cup A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\prod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\prod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \times A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\coprod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\coprod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \coprod A_m, & \text{dacă } m > 1. \end{cases}$$

Prin recursiile de mai sus putem defini scrierile $\cup$, $\cap$, $\prod$, $\coprod$ ca operatori binari scriși fără paranteze: pentru orice $m \in \overline{3, n}$,
$A_1 \cup \ldots \cup A_m := (A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1}) \cup A_m$, și la fel pentru $\cap$, $\prod$, $\coprod$.

Însă recursiile de mai sus pot porni și de la familia vidă
$((A_i)_{i=1}^{0} = (A_i)_{i \in \overline{1,0}} = (A_i)_{i \in \emptyset})$:

- întrucât reuniunea familiei vide este $\emptyset$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$:
$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cup A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$$
- vom vedea că intersecția familiei vide de mulțimi are sens numai în cazul în care familia vidă este considerată ca familie de părți ale unei mulțimi T, și, în acest caz, intersecția familiei vide este T; așadar, dacă T este o mulțime și $(A_i)_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}(T)$, atunci avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$:
$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} T, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$$

- întrucât, după cum am văzut mai sus, produsul direct al familiei vide este singletonul $\{*\}$, cu $* = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$:
$\displaystyle\prod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \{*\}, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \times A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$ nu este nimic diferit față de recursia anterioară pentru produsul direct, deoarece, oricare ar fi mulțimea A, $A \cong \{*\} \times A$, cu bijecția care duce fiecare $a \in A$ în perechea $(*, a)$, iar această bijecție se poate asimila cu identitatea (funcția identică, egalitatea); similar, vom întâlni izomorfisme (între unele structuri algebrice) care se asimilează cu identitatea (funcția identică, egalitatea);
- întrucât reuniunea disjunctă a familiei vide este $\emptyset$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$: $\displaystyle\coprod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\displaystyle\coprod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \coprod A_m, & \text{dacă } m \geq 1. \end{cases}$

Operații cu familii arbitrare de funcții

Exemplu

Dacă A și B sunt mulțimi, iar $f : A \to B$ și $g : A \to B$, iar pe mulțimea B avem, de exemplu, o operație binară $+$ și o **relație binară** (vom vedea) $\leq$, atunci putem defini, **punctual**, operația $+$, respectiv relația $\leq$, între funcțiile f și g, astfel:

- $f + g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, $(f+g)(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiție, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Totalitatea funcțiilor nu formează o mulțime, ci o clasă, așadar definirea unei familii de funcții indexate de o mulțime I ca o funcție h de la I la totalitatea funcțiilor, care, desigur, și ea ar aparține clasei funcțiilor, pune câteva probleme conceptuale. Dacă, însă, restrângem codomeniul lui h la o mulțime de funcții, atunci lucrurile se simplifică.

Operații cu familii arbitrare de funcții

Definiție (familii de funcții între două mulțimi fixate A și B)

Fie I, A și B mulțimi arbitrare. O *familie de funcții de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulțimii B^A indexată de I, i. e. o funcție $h : I \to B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notație}}{=} h(i) : A \to B$).

Se pot defini și operații cu familii arbitrare de funcții, tot **punctual**:

Exemplu

Dacă I, A și B sunt mulțimi nevide, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \to B$), B este o **mulțime ordonată** (vom vedea) și, pentru orice $x \in A$, submulțimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcția:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \to B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiție (familii de funcții – cazul general – material FACULTATIV)

Fie I o mulțime arbitrară, iar $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ familii de mulțimi indexate de I. O *familie de funcții* $(f_i)_{i\in I}$ *indexată de* I cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulțimii $\bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparținând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcție $h : I \to \bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiție (operațiile cu familii arbitrare de funcții generalizează compunerea de funcții – material FACULTATIV)

Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulțimi, C este o mulțime, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcții și g este o funcție a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \to B_i$, iar $g : \prod\limits_{i\in I} B_i \to C$, atunci putem defini funcția

$g((f_i)_{i\in I}) : \prod_{i\in I} A_i \to C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $g((f_i)_{i\in I}))((x_i)_{i\in I}) := g((f_i(x_i))_{i\in I})$: *operația* g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) *aplicată familiei de funcții* $(f_i)_{i\in I}$, *definită* **punctual**.

Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1,\ldots,f_n) : A_1 \times \ldots \times A_n \to C$, pentru orice $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$, $g(f_1,\ldots,f_n)(x_1,\ldots,x_n) := g(f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n))$.

La fel ca în cazul operațiilor: relații de aritate arbitrară pentru familii arbitrare de funcții – a se vedea în cursul următor definiția unei relații n–are

La fel se pot generaliza relațiile binare între funcții la relații de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i\in I}$ de mai sus, submulțimi ale lui $\prod_{i\in I} B_i$:

relații de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$:

Definiție (material FACULTATIV)

Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulțimi, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcții cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod_{i\in I} B_i$, atunci:

familia $(f_i)_{i\in I}$ *de funcții se află în relația* R, notat $(f_i)_{i\in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i\in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \ldots \times B_n$ este o relație n–ară: $(f_1, \ldots, f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in R$.

Comutări ale imaginii și preimaginii printr–o funcție cu, reuniuni și intersecții arbitrare de mulțimi

Exercițiu

Fie A, B, I și J mulțimi nevide (vom trata cazurile degenerate separat, mai jos), $f : A \to B$, iar $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ și $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

1. $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
2. $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$;
3. $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
4. $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;
5. f este injectivă ddacă, pentru orice mulțime nevidă K și orice $(M_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap\limits_{k\in K} M_k) = \bigcap\limits_{k\in K} f(M_k)$.
6. Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul 4.

Rezolvare: Amintim că **axioma alegerii** ne permite să alegem câte un element din orice clasă nevidă, în particular din orice mulțime nevidă. Vom face apel la această axiomă pentru mulțimile A, B, iar mai jos și I.
Vom folosi definițiile imaginii și preimaginii printr–o funcție.
Fie $a \in A$ și $b \in B$, arbitrare, fixate.
Cum membrii egalităților de la punctele ① și ③ sunt submulțimi ale lui A, pentru a demonstra aceste egalități este suficient să arătăm că a aparține membrului stâng ddacă aparține membrului drept. La fel pentru b în loc de a în egalitățile de la ② și ⑤ și incluziunea de la ④. A se vedea discuția detaliată despre această tehnică de demonstrație la începutul următoarei secțiuni a cursului.

① $a \in f^{-1}(\bigcup\limits_{j \in J} B_j)$ ddacă $f(a) \in \bigcup\limits_{j \in J} B_j$ ddacă $(\exists\, j \in J)\,(f(a) \in B_j)$ ddacă $(\exists\, j \in J)\,(a \in f^{-1}(B_j))$ ddacă $a \in \bigcup\limits_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

② Pentru următorul șir de echivalențe, a se revedea exprimarea cuantificatorilor cu domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată și comutarea cuantificatorilor de același fel, și a se observa extinderea domeniului unui cuantificator peste un enunț care nu conține variabila cuantificată.
$b \in f(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)$ ddacă $(\exists\, x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i)\,(b = f(x))$ ddacă $(\exists\, x)\,(x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ și $b = f(x))$

ddacă $(\exists\, x)\,[(\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)$ și $b = f(x)]$ ddacă $(\exists\, x)\,(\exists\, i \in I)\,(x \in A_i$ și $b = f(x))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(\exists\, x)\,(x \in A_i$ și $b = f(x))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(\exists\, x \in A_i)\,(b = f(x))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(b \in f(A_i))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(b \in f(A_i))$ ddacă $b \in \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$.

③ $a \in f^{-1}(\bigcap\limits_{j \in J} B_j)$ ddacă $f(a) \in \bigcap\limits_{j \in J} B_j$ ddacă $(\forall\, j \in J)\,(f(a) \in B_j)$ ddacă $(\forall\, j \in J)\,(a \in f^{-1}(B_j))$ ddacă $a \in \bigcap\limits_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

④ Pentru început, să observăm că, la fel ca în cazul intersecției a două mulțimi, întrucât familia $(A_i)_{i \in I}$ este nevidă (adică $I \neq \emptyset$), intersecția ei este inclusă în fiecare membru al său.
Fie $i_0 \in I$, arbitrar, fixat.
$a \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ ddacă $(\forall\, i \in I)\,(a \in A_i)$, ceea ce implică $a \in A_{i_0}$. Așadar $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$, prin urmare $f(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \subseteq f(A_{i_0})$, întrucât imaginea printr–o funcție păstrează incluziunile.
Cum i_0 este arbitrar în I, rezultă că: $(\forall\, k \in I)\,(f(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \subseteq f(A_k))$, așadar

$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{k\in I} f(A_k)$, adică $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, întrucât acum putem "reboteza" indicele și parcurge familia de mulțimi $(f(A_k))_{k\in I}$ cu același indice i, cu care este parcursă familia de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$ în membrul stâng al incluziunii.

5 "$\Rightarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că f e injectivă.
Pentru familia arbitrară $(A_i)_{i\in I}$ de părți ale lui A, avem $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ conform punctului 4. Rămâne de demonstrat incluziunea inversă.
Să presupunem că $b \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, adică, pentru fiecare $i \in I$, $b \in f(A_i)$, astfel că putem alege un $a_i \in A_i$ cu proprietatea că $b = f(a_i)$.
Fie $i_0 \in I$, arbitrar, fixat. Atunci $b = f(a_{i_0})$, unde $a_{i_0} \in A_{i_0}$ este ales ca mai sus.
Așadar, pentru fiecare $i \in I$, $f(a_{i_0}) = b = f(a_i)$, de unde, conform injectivității lui f, rezultă că $a_{i_0} = a_i \in A_i$. Deci $(\forall\, i \in I)\,(a_{i_0} \in A_i)$, adică $a_{i_0} \in \bigcap_{i\in I} A_i$, prin urmare $b = f(a_{i_0}) \in f(\bigcap_{i\in I} A_i)$.
Așadar $\bigcap_{i\in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcap_{i\in I} A_i)$, prin urmare $\bigcap_{i\in I} f(A_i) = f(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că imaginea directă a lui f comută cu orice intersecție de părți ale lui A. Să demonstrăm că f e injectivă folosind definiția injectivității.

Fie $x, y \in A$, a.î. $f(x) = f(y)$. Considerăm familia de părți ale lui A formată din $\{x\}$ și $\{y\}$ (luăm $I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{x\}$ și $A_2 = \{y\}$).

Să observăm că $f(\{x\}) = \{f(z) \mid z \in \{x\}\} = \{f(z) \mid z = x\} = \{f(x)\}$ și, analog, $f(\{y\}) = \{f(y)\}$. Conform ipotezei aceste implicații, avem: $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = \{f(x)\} \cap \{f(x)\} = \{f(x)\} \neq \emptyset$, prin urmare $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$, pentru că $f(\emptyset) = \emptyset$; așadar $\{x\}$ și $\{y\}$ au elemente comune, adică există $z \in \{x\} \cap \{y\}$, i.e. $(\exists\, z)(z \in \{x\} \cap \{y\})$, deci $(\exists\, z)(z \in \{x\}$ și $z \in \{y\})$, adică $(\exists\, z)(x = z = y)$, așadar $x = y$.

Deci f e injectivă.

6 Conform punctului 5, funcția f dintr–un astfel de exemplu trebuie să fie neinjectivă. Să luăm cel mai simplu exemplu de funcție neinjectivă: o funcție de la o mulțime cu exact două elemente la un singleton (e suficientă orice funcție injectivă ca exemplu).

Fie $A = \{x, y\}$, cu $x \neq y$, și $B = \{u\}$, astfel că unica funcție $f : A \to B$ este definită prin: $f(x) = f(y) = u$ (e suficient ca $x, y \in A$ cu $x \neq y$ și $u \in B$, iar $f : A \to B$ cu $f(x) = f(y) = u$).

Acum considerăm aceeași familie de părți ale lui A ca la punctul 5. Cum $x \neq y$, $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \{u\} = \{u\} \cap \{u\} = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = f(\{x\}) \cap f(\{y\})$.

Să vedem și cazurile mulțimilor vide în exercițiul anterior.

Pentru intersecțiile familiilor vide, vom avea în vedere faptul că $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$, $(f(A_i))_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(B)$, $(f^{-1}(B_j))_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

⊛ Dacă $J = \emptyset$, atunci, indiferent dacă A, B sunt vide sau nu:

$f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, iar

$f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = f^{-1}(B) = A = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

⊛ Dacă $I = \emptyset$, atunci, indiferent dacă A, B sunt vide sau nu:

$f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = f(\emptyset) = \emptyset = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$, iar $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = f(A)$, în timp ce $\bigcap_{i\in I} f(A_i) = B$, așadar $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$ ddacă f e surjectivă.

Conform punctului ⑤ din exercițiul anterior, dacă A și B sunt nevide, rezultă că: f este bijectivă ddacă, pentru orice mulțime K și orice $(M_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap\limits_{k\in K} M_k) = \bigcap\limits_{k\in K} f(M_k)$.

⊛ Dacă $B = \emptyset$, atunci:

- $A = \emptyset$, întrucât există $f : A \to B$;

- cum $A = \emptyset$, rezultă că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i = \emptyset$, deci $f(A_i) = \emptyset$, așadar, indiferent dacă I e vidă sau nu: $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$, deci
$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = f(\bigcap_{i\in I} A_i) = f(\emptyset) = \emptyset = \bigcup_{i\in I} f(A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i);$$
- pentru fiecare $j \in J$, $B_j = \emptyset$, deci $f^{-1}(B_j) = \emptyset$, așadar, indiferent dacă J e vidă sau nu: $\bigcup\limits_{j\in J} B_j = \bigcap\limits_{j\in J} B_j = \emptyset$, deci
$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

(∗) Dacă $A = \emptyset$, iar $B \neq \emptyset$, atunci:

- f e nesurjectivă, întrucât $f(A) = f(\emptyset) = \emptyset \neq B$;
- pentru fiecare $i \in I$, $A_i = \emptyset$, deci $f(A_i) = \emptyset$, așadar, indiferent dacă I e vidă sau nu: $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I} A_i \emptyset$, deci $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = f(\emptyset) = \emptyset = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$, iar, dacă $I \neq \emptyset$, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} f(A_i) = \emptyset = f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)$, în timp ce, dacă $I = \emptyset$, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} f(A_i) = B \neq \emptyset = f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)$, cum puteam observa și din tratarea cazului $I = \emptyset$ de mai sus și faptul că f e nesurjectivă;

- pentru orice $S \subseteq B$, $f^{-1}(S) \subseteq A = \emptyset$, deci $f^{-1}(S) = \emptyset$, prin urmare, indiferent dacă J e vidă sau nu:
$f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

Tehnica de demonstrație pentru incluziunea sau egalitatea de mulțimi, folosită până acum atât la curs cât și la seminar, poate fi adaptată la cazul particular al submulțimilor unei mulțimi date T, astfel:

- pentru stabilirea incluziunii între două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Rightarrow x \in B$, este suficient să se demonstreze că, pentru orice element $x \in T$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, ceea ce, conform definiției incluziunii între mulțimi, înseamnă că $A \cap T \subseteq B \cap T$;
- pentru a stabili egalitatea a două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, este suficient să se arate că: pentru orice $x \in T$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, ceea ce, conform definiției egalității de mulțimi, arată că: $A \cap T = B \cap T$;
- dar, întrucât $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem că $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$, și rezultă că $A \subseteq B$, respectiv $A = B$.

Desigur, avem "ddacă": în prezența egalităților $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$:

$$(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap T \subseteq B \cap T \Leftrightarrow$$

$$(\forall x \in T)\,[(x \in A \text{ și } x \in T) \Rightarrow (x \in B \text{ și } x \in T)] \Leftrightarrow$$

$$(\forall x)\,[x \in T \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)] \Leftrightarrow (\forall x \in T)\,(x \in A \Rightarrow x \in B);$$

$$(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow A \cap T = B \cap T \Leftrightarrow$$

$$(\forall x \in T)\,[(x \in A \text{ și } x \in T) \Leftrightarrow (x \in B \text{ și } x \in T)] \Leftrightarrow$$

$$(\forall x)\,[x \in T \Rightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)] \Leftrightarrow (\forall x \in T)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcția caracteristică a lui A (raportat la T)*: $\chi_A : T \to \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$$

Observație

În definiția de mai sus pentru funcțiile caracteristice ale submulțimilor unei mulțimi T, am folosit notația (**consacrată**) χ_A pentru funcția caracteristică a unei submulțimi A a lui T, care sugerează faptul că această funcție ar depinde numai de A. Motivul pentru care nu se atașează la această notație și indicele T, pentru a arăta faptul evident că această funcție depinde și de T, este că, în mod uzual, se consideră mulțimea totală T ca fiind fixată atunci când lucrăm cu funcțiile caracteristice ale părților sale.
Și în notația consacrată pentru complementara unei părți a lui T față de T, mulțimea T este omisă.

Funcții caracteristice

Remarcă

Probabil că funcțiile caracteristice au mai fost întâlnite până acum, cel puțin în cazul particular când mulțimea totală T este finită și nevidă: $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. În acest caz, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \ldots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește *vectorul caracteristic al lui A* și poate fi reprezentat printr-un număr scris în baza 2.
După cum se știe, vectorii caracteristici (generați, de exemplu, ca numere în binar, de la 0 la $11\ldots1$) pot fi folosiți la generarea submulțimilor mulțimii finite T: fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este egală cu mulțimea elementelor x_i cu proprietatea că, în vectorul caracteristic al lui A, pe poziția i apare 1.
Ca o anticipare a similarităților dintre calculul cardinalelor pentru mulțimi finite și expresiile funcțiilor caracteristice pe care le vom obține, este interesant de observat că, în cazul particular finit prezentat mai sus, fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este, de asemenea, finită, și are cardinalul: $|A| = \sum\limits_{x \in T} \chi_A(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_A(x_i)$. Acest fapt, împreună cu punctul 7 din propoziția de mai jos privind proprietățile funcțiilor caracteristice, arată că, pentru orice mulțimi finite A și B, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, de unde, prin **inducție matematică** după numărul

Principiul includerii și al excluderii

Propoziție (principiul includerii și al excluderii)

Pentru orice n natural nenul și orice mulțimi finite $M_1, M_2, \ldots, M_n$, are loc egalitatea:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \ldots M_n| =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots M_{i_s}|.$$

Și dual:

$$|\bigcap_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \ldots M_n| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots M_{i_s}|.$$

Funcții caracteristice

Observație

Există, în literatura matematică, numeroase demonstrații pentru **principiul includerii și al excluderii**. Una dintre aceste demonstrații se găsește, de exemplu, în cartea *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, de Dumitru Bușneag și Dana Piciu, inclusă în bibliografia din primul curs. Această demonstrație se poate adapta, lucrând cu funcții caracteristice în locul operațiilor cu mulțimi.
Odată demonstrată prima egalitate din **principiul includerii și al excluderii**, care dă cardinalul unei reuniuni finite de mulțimi finite, a doua se demonstrează analog, dar interschimbând reuniunile cu intersecțiile.
Demonstrația principiului includerii și al excluderii nu face parte din materia pentru examen.

Remarcă

În cele ce urmează vom considera codomeniul funcțiilor caracteristice $\{0,1\} \subset \mathbb{N}$ (sau $\{0,1\} \subset \mathbb{Z}$, sau $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$), iar operațiile aritmetice care vor fi efectuate vor fi operațiile uzuale de pe $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{Z}$, sau $\mathbb{R}$). În schimb, rezultatele operațiilor efectuate se vor afla în mulțimea $\{0,1\}$, așa cum trebuie, pentru că aceste rezultate vor fi valori ale unor funcții caracteristice.

Propoziție (proprietățile funcțiilor caracteristice)

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $0 : T \to \{0,1\}$ și $1 : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $0(x) = 0$ și $1(x) = 1$. Atunci au loc proprietățile:

1. $\chi_\emptyset = 0$ *și* $\chi_T = 1$
2. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
3. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A \subseteq B$ *ddacă* $\chi_A \leq \chi_B$ *(punctual, i. e.: pentru orice* $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$*)*
4. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A = B$ *ddacă* $\chi_A = \chi_B$
5. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
6. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
7. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
8. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
9. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T\setminus A} = 1 - \chi_A$
10. $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Funcții caracteristice

Demonstrație: Pentru început, amintim că egalitatea a două funcții cu același domeniu și același codomeniu semnifică egalitatea punctuală, i. e. în fiecare punct, de exemplu, la punctul (4): $\chi_A = \chi_B$ ddacă (prin definiția egalității de funcții), pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ (întocmai ca la punctul (3), unde am explicitat inegalitatea $\leq$ între două funcții cu același domeniu și același codomeniu).

De asemenea, funcțiile de la punctele (5)–(10), date prin operații aplicate funcțiilor χ_A și χ_B, sunt definite punctual, ca orice operații asupra unor funcții cu același domeniu și același codomeniu, operații care se pot defini între elementele codomeniului respectiv: de exemplu, la punctul (8), funcția $\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B : T \to \{0, 1\}$ se definește prin: pentru orice $x \in T$, $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) := \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Funcții caracteristice

① Din faptul că orice $x \in T$ satisface: $x \notin \emptyset$ și $x \in T$.
② Fie $x \in T$. Avem: $x \in A$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ ddacă $\chi_A(x) \in \{1\}$ ddacă $x \in \chi_A^{-1}(\{1\})$. Așadar $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$.
③ Are loc: $A \subseteq B$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(\chi_A(x) = 1 \Rightarrow \chi_B(x) = 1)$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(\chi_A(x) \leq \chi_B(x))$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este $\{0, 1\}$).
④ Putem folosi punctul ③: $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \subseteq A]$ ddacă $[\chi_A \leq \chi_B$ și $\chi_B \leq \chi_A]$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.
Sau putem folosi punctul ②: $A = B$ ddacă $\chi_A^{-1}(\{1\}) = \chi_B^{-1}(\{1\})$ ddacă $\chi_A = \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este mulțimea cu două elemente $\{0, 1\}$).
⑤ Fie $x \in T$, arbitrar, fixat. Distingem patru cazuri:

- $x \notin A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \notin A$ și $x \in B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \in B$ (deci $x \in A \cap B$)

În primul dintre aceste cazuri, $\chi_{A \cap B}(x) = 0 = 0 \cdot 0 = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$. La fel se analizează celelalte trei cazuri, și rezultă că $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ pentru orice $x \in T$, i. e. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

⑥ Aplicând ⑤ cazului particular $A = B$, obținem: $\chi_A = \chi_{A\cap A} = \chi_A \cdot \chi_A = \chi_A^2$. Sau putem aplica faptul că fiecare dintre elementele 0 și 1 este egal cu pătratul său, iar codomeniul lui χ_A este $\{0, 1\}$.
⑦ Analog demonstrației pentru punctul ⑤.
⑧ Analog demonstrației pentru fiecare dintre punctele ⑤ și ⑦.
⑨ Conform punctelor ⑧ și ①, $\chi_{T\setminus A} = \chi_T - \chi_T \cdot \chi_A = 1 - 1 \cdot \chi_A = 1 - \chi_A$. (Este clar că $1 \cdot \chi_A = \chi_A$. Se putea folosi, ca alternativă, și punctul ⑤, pentru a deduce: $\chi_T \cdot \chi_A = \chi_{T\cap A} = \chi_A$.)
⑩ Putem calcula, conform punctelor ⑦, ⑧, ⑤ și ①: $\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{A\setminus B} \cdot \chi_{B\setminus A} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B - \chi_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \chi_\emptyset = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - 0 = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$.
Am aplicat faptul că orice element al intersecției $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ simultan aparține lui A și nu aparține lui A (și simultan aparține lui B și nu aparține lui B); sigur că nu există un astfel de element, așadar acea intersecție este vidă.

Remarcă

Punctele ③ și ④ ale propoziției precedente ne oferă posibilitatea de a demonstra incluziunea și egalitatea de mulțimi folosind funcțiile caracteristice ale mulțimilor respective.

Funcții caracteristice

Remarcă

- Punctul ⑤ al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile $\chi_{A\cap B}$ și $\chi_A \cdot \chi_B$ au drept codomeniu mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \cap B$ ddacă $x \in A$ și $x \in B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 1$ ddacă $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$, prin urmare avem și: $\chi_{A\cap B}(x) = 0$ ddacă $\chi_{A\cap B}(x) \neq 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) \neq 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 0$.
- De asemenea, punctul ⑧ al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile care intervin în acea egalitate au codomeniul $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\setminus B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \setminus B$ ddacă $x \in A$ și $x \notin B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$, prin urmare, ca mai sus, rezultă că avem și: $\chi_{A\setminus B}(x) = 0$ ddacă $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) = 0$.

Remarcă

A se observa că, în propoziția anterioară, conform punctelor (5), (7) și (8), au loc, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
- $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$

De asemenea, pentru orice $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ (care este domeniul valorilor funcțiilor caracteristice), au loc:

- $\alpha \cdot \beta = \min\{\alpha, \beta\}$
- $\alpha + \beta - \alpha \cdot \beta = \alpha + \beta - \min\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha, \beta\}$

Aceste egalități pot fi demonstrate, de exemplu, prin înlocuirea fiecăruia dintre elementele α și β cu fiecare dintre valorile 0 și 1 în fiecare egalitate.
Din egalitățile de mai sus și punctele (5) și (7) ale propoziției precedente rezultă că, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, au loc:

- $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$

Putem demonstra egalitățile de mai sus și cu metoda folosită în remarca următoare pentru cazul general al familiilor arbitrare de părți ale lui T.

Funcții caracteristice

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze, folosind funcții caracteristice (nu contează față de ce mulțime totală T; se poate lua orice mulțime nevidă T care include mulțimile care intră în discuție, de exemplu se poate lua T egală cu reuniunea acelor mulțimi, reunită cu o mulțime nevidă, de exemplu $\{0\}$, pentru a avea siguranța că T e nevidă), că, pentru orice mulțimi A, B, C:

- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (**indicație:** prin calcul, folosind propoziția precedentă, se obține $\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{(A\Delta B)\Delta C}$, ceea ce este echivalent cu egalitatea $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ care trebuie demonstrată; la fel se poate proceda mai jos)
- **distributivitatea lui $\cup$ față de $\cap$:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea lui $\cap$ față de $\cup$:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$ ddacă $A \cup B = B$
- dacă $A \subseteq B$, atunci $A \cup C \subseteq B \cup C$ și $A \cap C \subseteq B \cap C$
- dacă $A \subseteq B$ și $C \subseteq D$, atunci $A \cup C \subseteq B \cup D$ și $A \cap C \subseteq B \cap D$ (rezultă și prin aplicarea de câte două ori a implicațiilor de la punctul precedent)
- alte rezultate privind calculul cu mulțimi demonstrate la seminar

Funcții caracteristice

Exercițiu (vedeți rezolvarea pe slide–urile următoare)

Fie T o mulțime nevidă. Pentru orice $X \subseteq T$, vom nota cu $\overline{X} := T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Să se demonstreze, folosind funcții caracteristice (raportat la T), că, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

- **operația de trecere la complementară este idempotentă (autoduală, autoinversă, propria ei inversă):** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui de Morgan pentru $\cup$ și $\cap$:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- **trecerea la complementară inversează sensul incluziunii:** $A \subseteq B$ ddacă $\overline{B} \subseteq \overline{A}$; eventual folosind acest fapt obținem și: $A = B$ ddacă $\overline{A} = \overline{B}$; prin urmare avem și: $A \subsetneq B$ ddacă $\overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B}$; $A \setminus \emptyset = A$; $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup B = T$ ddacă $\overline{B} \subseteq A$ ddacă $\overline{A} \subseteq B$
- când A și B sunt **părți complementare ale lui T:** $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$ ddacă $\begin{cases} A \cup B = T \text{ și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$
- alte rezultate demonstrate la seminar implicând complementare de mulțimi

Proprietăți pentru calculul cu mulțimi din exercițiile anterioare demonstrate cu funcții caracteristice

Fie T o mulțime nevidă și $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ și cu χ_X funcția caracteristică a lui X raportat la T. Să demonstrăm că:

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_B \Leftrightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A \Leftrightarrow \chi_{A \cap B} = \chi_A \Leftrightarrow A \cap B = A$.

- $\overline{\overline{A}} = A$

Să ne amintim că $\chi_{\overline{A}} = \chi_{T \setminus A} = 1 - \chi_A$. Avem, așadar:

$\chi_{\overline{\overline{A}}} = 1 - \chi_{\overline{A}} = 1 - (1 - \chi_A) = \chi_A$, prin urmare $\overline{\overline{A}} = A$.

- $A \cup \overline{A} = T$ și $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Întrucât $\chi_A(x) \in \{0, 1\}$ pentru orice $x \in T$, avem:
$\chi_{A \cup \overline{A}} = \max\{\chi_A, \chi_{\overline{A}}\} = \max\{\chi_A, 1 - \chi_A\} = 1$ și
$\chi_{A \cap \overline{A}} = \min\{\chi_A, \chi_{\overline{A}}\} = \min\{\chi_A, 1 - \chi_A\} = 0$.

Alte exemple, din exercițiul precedent

- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ și $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\chi_{\overline{A\cup B}}=1-\chi_{A\cup B}=1-\max\{\chi_A,\chi_B\}=1+\min\{-\chi_A,-\chi_B\}=$ $\min\{1-\chi_A,1-\chi_B\}=\min\{\chi_{\overline{A}},\chi_{\overline{B}}\}=\chi_{\overline{A}\cap\overline{B}}$, așadar $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, prin urmare, folosind idempotența complementării, demonstrată mai sus:
$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}}=\overline{\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}}=\overline{A\cap B}$.

- $A\subseteq B\Leftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$, $A=B\Leftrightarrow\overline{A}=\overline{B}$ și $A\subsetneq B\Leftrightarrow\overline{B}\subsetneq\overline{A}$

$A\subseteq B\Leftrightarrow\chi_A\leq\chi_B\Leftrightarrow-\chi_B\leq-\chi_A\Leftrightarrow 1-\chi_B\leq 1-\chi_A\Leftrightarrow\chi_{\overline{B}}\leq\chi_{\overline{A}}\Leftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$, prin urmare:
$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ și $B\subseteq A\Leftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$ și $\overline{A}\subseteq\overline{B}\Leftrightarrow\overline{A}=\overline{B}$, așadar:
$A\subsetneq B\Leftrightarrow A\subseteq B$ și $A\neq B\Leftrightarrow\overline{B}\subseteq A$ și $\overline{B}\neq\overline{A}\Leftrightarrow\overline{B}\subsetneq\overline{A}$.

- $A\cap\overline{B}=A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$; $A\setminus\emptyset=A$

$\chi_{A\cap\overline{B}}=\chi_A\cdot\chi_{\overline{B}}=\chi_A\cdot(1-\chi_B)=\chi_A-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_{A\setminus B}$, iar, întrucât $\chi_A=\chi_A\cdot\chi_A$, $\chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_A\cdot\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A-\chi_A\cdot\chi_{A\cap B}=\chi_{A\setminus(A\cap B)}$, prin urmare $A\cap\overline{B}=A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.
$\chi_T=1=1-0=1-\chi_\emptyset=\chi_{\overline{\emptyset}}$, așadar $\overline{\emptyset}=T$.
Prin urmare, $A\setminus\emptyset=A\cap\overline{\emptyset}=A\cap T=A$.

Alte exemple, din exercițiul precedent

- $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow \chi_{A\setminus B} = \chi_\emptyset \Leftrightarrow \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B = 0 \Leftrightarrow \chi_A = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\} \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$

Conform unor proprietăți de mai sus: $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow \emptyset = A \setminus \overline{B} = A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$.
Așadar: $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$.

- $A \cup B = T \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B$

Conform unor proprietăți de mai sus:
$A \cup B = T \Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{T} = \overline{\overline{\emptyset}} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{\overline{B}} = B$, așadar:
$\overline{A} \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = T \Leftrightarrow B \cup A = T \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$.

- $A = \overline{B} \Leftrightarrow B = \overline{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = T \text{ și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$

Din cele două proprietăți precedente, eventual aplicând, pentru rapiditatea calculului, și idempotența complementării și faptul că două părți ale lui T sunt egale ddacă au complementarele (față de T) egale, obținem:
$A \cup B = T$ și $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$ și $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow A = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{\overline{B}} = B$.

Funcțiile caracteristice ale unei reuniuni/intersecții arbitrare

Remarcă (generalizare a ultimelor egalități din remarca anterioară)

Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I. Să demonstrăm următoarele egalități satisfăcute de funcțiile caracteristice raportat la T:

- $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Să notăm cu $F := \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\} : T \to \{0, 1\}$, definită, desigur, punctual: pentru orice $x \in T$, $F(x) = \max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\}$. Observăm că maximul unei familii de elemente din mulțimea $\{0, 1\}$ este egal cu 1 ddacă există măcar un element egal cu 1 în acea familie. Pentru orice $x \in T$, avem: $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i}(x) = 1$ ddacă $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(\chi_{A_i}(x) = 1)$ ddacă $\max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\} = 1$ ddacă $F(x) = 1$. Rezultă că $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = F$, întrucât codomeniul acestor două funcții este mulțimea cu două elemente $\{0, 1\}$.

Aveți demonstrarea celei de–a doua egalități ca **temă**. **Indicație:** observați că minimul unei familii de elemente din mulțimea $\{0, 1\}$ este egal cu 1 ddacă toate elementele acelei familii sunt egale cu 1, și rescrieți demonstrația de mai sus înlocuind în ea maximul cu minimul, $\exists$ cu $\forall$ și reuniunea cu intersecția.

Remarcă (legile de distributivitate generalizată pentru $\cup$ și $\cap$ – temă)

Din remarca anterioară și proprietatea ④ din propoziția de mai sus privind funcțiile caracteristice rezultă că, pentru orice mulțime nevidă I, orice mulțime A și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$, au loc egalitățile:

- **distributivitatea generalizată a $\cup$ față de $\cap$:** $A\cup(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(A\cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a $\cap$ față de $\cup$:** $A\cap(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(A\cap A_i)$

Fiecare dintre acestea poate fi folosită pentru a "sparge" simultan (de fapt, pe rând) două paranteze (de fapt, orice număr natural nenul de paranteze, după cum arată un raționament imediat prin inducție matematică): pentru orice mulțimi nevide I și J și orice familii de mulțimi $(B_j)_{j\in J}$ și $(A_i)_{i\in I}$:

- $(\bigcap\limits_{j\in J}B_j)\cup(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J}(B_j\cup A_i)=\bigcap\limits_{j\in J}\bigcap\limits_{i\in I}(B_j\cup A_i)=\bigcap\limits_{(i,j)\in I\times J}(B_j\cup A_i)$
- $(\bigcup\limits_{j\in J}B_j)\cap(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J}(B_j\cap A_i)=\bigcup\limits_{j\in J}\bigcup\limits_{i\in I}(B_j\cap A_i)=\bigcup\limits_{(i,j)\in I\times J}(B_j\cap A_i)$

Am dat câte trei scrieri echivalente pentru ultimii termeni din egalitățile precedente, dintre care prima corespunde "spargerii" mai întâi a celei de–a doua paranteze, a doua corespunde "spargerii" mai întâi a primei paranteze, iar ultima, cu un singur indice, sugerează ideea de "spargere" simultană a parantezelor.

Propoziție

Pentru orice mulțime T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.

Demonstrație: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \cong \{(\emptyset, \emptyset, \{0,1\})\} = \{f \mid f : \emptyset \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\emptyset}$.
În cazul în care $T \neq \emptyset$, considerăm aplicația
$f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T = \{\varphi \mid \varphi : T \to \{0,1\}\}$, definită prin: pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $f(A) = \chi_A$ (funcția caracteristică a lui A raportat la T).
Conform punctului 4 al propoziției conținând proprietățile funcției caracteristice, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem:

- dacă $A = B$, atunci $\chi_A = \chi_B$, adică $f(A) = f(B)$, deci f e **bine definită** (i. e. este funcție, adică asociază unui element din domeniul ei, $\mathcal{P}(T)$, un **unic** element din codomeniul ei, $\{0,1\}^T$)
- și reciproc: dacă $f(A) = f(B)$, adică $\chi_A = \chi_B$, atunci $A = B$, deci f este injectivă.

Fie $\varphi \in \{0,1\}^T$, i. e. $\varphi : T \to \{0,1\}$. Fie $A = \varphi^{-1}(\{1\}) = \{a \in T \mid \varphi(a) = 1\}$. Atunci $\chi_A \in \{0,1\}^T$ are proprietatea că, pentru orice $x \in T$: $\chi_A(x) = 1$ ddacă $x \in A = \varphi^{-1}(\{1\})$ ddacă $\varphi(x) = 1$. Cum χ_A și φ au ca domeniu al valorilor mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$, rezultă că $\varphi = \chi_A = f(A)$, deci f este și surjectivă.
Am demonstrat că $f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T$ este o bijecție, deci $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.

Corolar

Pentru orice mulțime T, $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

Demonstrație: Conform propoziției anterioare,
$|\mathcal{P}(T)| = |\{0,1\}^T| = |\{0,1\}|^{|T|} = 2^{|T|}$.

Notă

- La fel cum am procedat în unele exerciții enunțate mai sus, și în cursurile care urmează unele proprietăți vor fi doar enunțate, demonstrarea lor fiind lăsată ca **temă**. Aceste **teme** vor fi rezolvate **la seminar**, în limita timpului disponibil. Cele care nu vor fi rezolvate la seminar vor rămâne ca **teme pentru acasă**.
- Dintre **temele pentru acasă**, o parte vor fi selectate ca TEME COLECTIVE OBLIGATORII și date prin assignments **MS Teams**.

Forme de examinare

- Rezolvările TEMELOR COLECTIVE OBLIGATORII, redactate complet, tipărite, scanate sau fotocopiate, îmi vor fi trimise prin **MS Teams** în câte un singur exemplar de fiecare grupă a fiecărei serii.
- *Examenul* va avea loc în *sesiune* și va consta dintr–un exercițiu din PRELIMINARIILE ALGEBRICE, un exercițiu din LOGICA PROPOZIȚIONALĂ și un exercițiu din LOGICA PREDICATELOR, și, în cazul (puțin probabil) în care se va susține online, se va desfășura tot prin **MS Teams**.

Subiecte și calculul notei

- **Subiectele de examen** vor consta numai din *exerciții* bazate pe teoria predată la curs și aplicațiile rezolvate la seminar. Nu vor exista la examen subiecte de teorie pură (de tipul enunțare și demonstrare a unor teoreme din curs, spre exemplu).
- În rezolvarea exercițiilor din TEMELE COLECTIVE și de la EXAMEN se poate folosi direct, fără a fi redemonstrat, orice rezultat demonstrat sau doar enunțat în lecții (doar cele precedente în cazul TEMELOR COLECTIVE) sau în materialele pentru consultații și cele cu exerciții de examen.
- **Nota** la această materie se va calcula în modul următor: **1 punct** din oficiu + **punctajul** (de maxim **3 puncte**) acumulat pentru TEMELE COLECTIVE OBLIGATORII + **punctajul** (de maxim **6 puncte**) obținut la EXAMEN, împărțit astfel:
  2 puncte: exercițiu din primul capitol, de preliminarii algebrice, al cursului;
  2 puncte: exercițiu din logica propozițională clasică;
  2 puncte: exercițiu din logica clasică a predicatelor.
  Punctajul fiecărui exercițiu va fi impărțit astfel:
  - **1 punct:** cerință matematică;
  - **1 punct:** cerință de programare în Prolog.

Materiale permise la examen

- La toate EXAMINĂRILE ONLINE, desfășurate prin **MS Teams**, care, cu excepția TEMELOR COLECTIVE, se vor da cu subiecte individuale, este permisă folosirea oricăror materiale bibliografice.
- La toate EXAMINĂRILE FAŢĂ ÎN FAŢĂ, care se vor da cu subiecte comune, este permisă doar folosirea de materiale bibliografice tipărite sau scrise de mână.

Recomand printarea **breviarului rezumativ** al întregului curs, precum și a **breviarelor extinse** din capitolele cursului, care vor conține toate rezultatele teoretice din curs, dar într–un format compact și fără demonstrații sau exemple. Voi posta aceste breviare în **MS Teams** și le voi actualiza periodic, așadar este bine să le printați la finalul semestrului, înainte de examen.
De asemenea, recomand printarea formelor finale ale **fișierelor .pl** (bazele de cunoștințe) din lecțiile de LABORATOR și din TEMELE COLECTIVE, întrucât, la examen, puteți folosi (fără a le rescrie):

- orice predicat predefinit;
- orice predicat implementat la LABORATOR sau în rezolvarea unei TEME COLECTIVE, cu directiva de includere a uneia sau mai multor baze de cunoștințe în baza de cunoștințe curentă.

De exemplu, pentru a folosi:

- predicatele din LABORATORUL 6, dacă ultima variantă a bazei de cunoștinte pentru acest laborator pe care o voi fi încărcat în **MS Teams** se numește **lab6lmc4.pl**,
- și predicatele cerute în TEMA COLECTIVĂ 9, se va presupune că predicatele respective au argumentele cerute și funcționează în modul cerut în enunțul acestei teme și se va alege un nume sugestiv pentru baza de cunoștințe care ar trebui predată ca rezolvare pentru această temă, de exemplu **tema9.pl**,

și se va folosi directiva:

```
:- [lab6lmc4,tema9].
```

subînțelegând că fișierele **lab6lmc4.pl** și **tema9.pl** vor fi puse în folderul care conține baza de cunoștințe pentru rezolvarea exercițiului de la examen pentru a o rula în Prolog.