LOGICĂ MATEMATICĂ şi COMPUTAŢIONALĂ, SEMINAR

LOGICA PROPOZIŢIONALĂ CLASICĂ: MULŢIMI CONSISTENTE (⇔ SATISFIABILE), SISTEME DEDUCTIVE

Ne situăm în cadrul sistemului formal al logicii propoziţionale clasice.

Exerc.: Considerăm următorul text:

(a) Dacă nu am chef şi îmi displace materia predată, atunci nu mă duc la curs.

(b) Nu îmi displace materia predată pentru că am chef.

(c) Mă duc la curs, dacă mi se dau subiectele de examen.

(d) Dacă nu mă duc la curs, atunci mi se dau subiectele de examen.

(e) Îmi displace materia predată.

Să se arate că acest text este inconsistent (sinonim în limbaj natural: „contradictoriu").

REZOLVARE:

Fie $p, q, r, s \in V$ (= mulţimea variabilelor propoziţionale; a se revedea notaţiile din acest capitol cursului), (2 câte 2 distincte), cărora le dăm următoarele valori: p: "îmi displace materia predată",

q: "am chef",

r: "mă duc la curs",

s: "mi se dau subiectele de examen".

Considerăm enunțurile care corespund frazelor din textul dat:

(a) not. $\varphi = (\neg q \wedge p) \rightarrow \neg r \in E$ (= mulțimea enunțurilor);

(b) not. $\psi = q \rightarrow \neg p \in E$,

(c) not. $\chi = s \rightarrow r \in E$,

(d) not. $\gamma = \neg r \rightarrow s \in E$,

(e) $p \in V \subseteq E$.

Not. $\Sigma = \{\varphi, \psi, \chi, \gamma, p\} \subset E$.

Avem de dem. că mulțimea de enunțuri Σ este inconsistentă.

Pp. prin absurd că mulțimea Σ este consistentă.

Prop. din curs: orice mulțime consistentă admite un model. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists\, h: V \to L_2 = \{0,1\})(h \vDash \Sigma) \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\chi) = \tilde{h}(\xi) = \tilde{h}(p) = 1.$

$\tilde{h}$ = unica prelungire a lui h la E care transformă conectorii logici în operații booleene în $\mathcal{L}_2$ (= algebra Boole standard).

Prin urmare, avem:

$\tilde{h}(p) = 1. \quad (*)$

$1 = \tilde{h}(\varphi) = \overline{(\tilde{h}(q) \wedge \underbrace{\tilde{h}(p)}_{=1,\ \text{cf. } (*)})} \to \overline{\tilde{h}(r)} =$

$= \overline{\tilde{h}(q)} \to \overline{\tilde{h}(r)} = \overline{\overline{\tilde{h}(q)}} \vee \overline{\tilde{h}(r)} =$

în orice algebră Boole: $a \to b = \bar{a} \vee b$.

în orice algebră Boole, $\bar{\bar{a}} = a$

$= \tilde{h}(q) \vee \overline{\tilde{h}(r)}. \quad (**)$

$1 = \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(q) \to \underbrace{\overline{\tilde{h}(p)}}_{= \bar{1} = 0,\ \text{cf. } (*)} =$

$= \tilde{h}(q) \to 0 \Longrightarrow \tilde{h}(q) = 0. \quad (***)$

$\tilde{h}(q) \in L_2 = \{0,1\}$, $1 \to 0 = 0$, $0 \to 0 = 1$

$(*), (**), (***) \Rightarrow 1 = 0 \vee \overline{\tilde{h}(r)} = \overline{\tilde{h}(r)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{h}(r) = \overline{\tilde{h}(r)} = \overline{1} = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{h}(r) = 0.$ (I)

$1 = \tilde{h}(x) = \tilde{h}(s) \to \overbrace{\tilde{h}(r)}^{=0,\ cf.\ (I)} = \tilde{h}(s) \to$

$\to 0. \Rightarrow \tilde{h}(s) = 0.$ (II).

ca mai sus

$1 = \tilde{h}(y) = \overline{\tilde{h}(r)} \to \tilde{h}(s) \overset{(I),(II)}{=}$

$= \overline{0} \to 0 = 1 \to 0 = 0. \Rightarrow 0 = 1;$ contradicție

cu $0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$.

$\Rightarrow \Sigma$ este inconsistentă.

Exercițiu*: Dem. că orice mulțime de enunțuri care admite un model este consistentă. (Aceasta este reciproca unei prop. din curs.)

(Iar acea prop., cu această reciprocă, $\Rightarrow$ Mulțimile consistente coincid cu mulțimile care admit modele.)

REZOLVARE:

Fie $\Sigma \subseteq E$, a.î. $\exists\, h: V \to L_2 = \{0, 1\}$, cu $h \vDash \Sigma$ (i.e. h este model pt. Σ).

Pp. prin absurd că Σ este

inconsistentă $\xLeftrightarrow{\text{(prop. din curs)}} (\exists \varphi \in E)(\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi) \xRightarrow{\text{(TCT)}} \begin{cases} \Sigma \vDash \varphi \text{ și} \\ \Sigma \vDash \neg\varphi. \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vDash \varphi \\ h \vDash \Sigma \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(def.)}} \tilde{h}(\varphi) = 1$

$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vDash \neg\varphi \\ h \vDash \Sigma \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(def.)}} \tilde{h}(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow \overline{\tilde{h}(\varphi)} = 1$

$\Leftrightarrow \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)}} = \overline{1} \Leftrightarrow \tilde{h}(\varphi) = 0.$

$\Rightarrow 0 = 1$; ✗ cu $0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma$ nu este inconsistentă. $\xLeftrightarrow{\text{(def.)}}$

$\xLeftrightarrow{\text{(def.)}} \Sigma$ este consistentă.

<u>Exerciții</u>: Să se demonstreze că nu există sisteme deductive finite.

REZOLVARE:

Fie $\Sigma \subseteq E$, $|\Sigma| < \infty$. Pp. prin absurd că Σ este sistem deductiv. $\xRightarrow{\text{(prop. din curs)}} T \subseteq \Sigma$. $(*)$

mulțimea teoremelor formale.

Not. cu A mulțimea axiomelor. Vom păstra această notație în tot restul acestui seminar.

$$A = \{\varphi \to (\psi \to \varphi),\ [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)],\ (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\},$$

$$\left.\begin{array}{l} |V| \not< \infty, \\ V \subseteq E \end{array}\right\} \Rightarrow |E| \not< \infty, \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow |A| \not< \infty, \\ A \subseteq T, \end{array}\right\} \Rightarrow |T| \not< \infty, \\ \text{cf. } (*),\ T \subseteq \Sigma, \end{array}\right\} \Rightarrow |\Sigma| \not< \infty; \text{ contradicție cu alegerea lui } \Sigma.$$

$\Rightarrow \Sigma$ nu e sistem deductiv.

<u>Exerc.:</u> Demonstrați că:

(a) $\emptyset$ admite ca model orice interpretare;

(b) $\emptyset$ este consistentă;

(c) T admite ca model orice interpretare,

(d) T este consistentă,

(e) orice submulțime a lui T admite ca model orice interpretare,

(f) orice submulțime a lui T este consistentă,

(g) A admite ca model orice interpretare,

(h) A este consistentă.

REZOLVARE:

(a) Fie $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$.

$h \vDash \emptyset$.

$$\underbrace{(\forall \varphi)\underbrace{(\underbrace{\varphi \in \emptyset}_{\text{fals}, \forall \varphi} \Rightarrow \tilde{h}(\varphi) = 1)}_{\text{adevărat}, \forall \varphi}}_{\text{adevărat}} \Rightarrow h \vDash \emptyset,$$

(b) $\exists\ h: V \to L_2 = \{0,1\}$ (de exemplu: $(\forall p \in V)(h(p) = 0)$, sau: $(\forall p \in V)(h(p) = 1)$); de fapt, $\exists$ $|L_2|^{|V|} = 2^{\infty} = \infty$ de interpretări, unde am notat cu $\infty = |V|$ un cardinal transfinit arbitrar). (I).

(a), (I) $\Rightarrow (\exists\ h: V \to L_2)(h \vDash \emptyset) \xRightarrow{(\text{Exerc.}*)}$ $\emptyset$ este consistentă.

(c) Fie $h: V \to L_2$. $\underline{h \vDash T}$:

Fie $\varphi \in T$. $\overset{(\text{not.})}{\Leftrightarrow} \vdash \varphi \overset{(\text{TC})}{\Leftrightarrow} \vDash \varphi \overset{(\text{def.})}{\Leftrightarrow}$

$\overset{(\text{def.})}{\Leftrightarrow} (\forall f: V \to L_2)(\tilde{f}(\varphi) = 1) \Rightarrow \tilde{h}(\varphi) = 1$.

$\Rightarrow h \vDash T$.

(d) (c), (I) $\Rightarrow (\exists\ h: V \to L_2)(h \vDash T)$.

$\xRightarrow{(\text{Exerc.}*)}$ T este consistentă.

(e) Fie $S \subseteq T$.

Fie $h: V \to L_2 \overset{(c)}{\Rightarrow} h \vDash T \Rightarrow$

$\Rightarrow h \vDash S$,

(f) Fie $S \subseteq T$. $\xRightarrow{(e),(I)}$

$\Rightarrow (\exists h : V \to L_2)(h \vDash S) \xRightarrow{\text{(Exerc.*)}}$

$\Rightarrow S$ este consistentă.

(g) $\Leftarrow$ (e) şi faptul că $A \subseteq T$,

(h) $\Leftarrow$ (f) şi faptul că $A \subseteq T$.

Obs.: Avem şi: (a) $\Leftarrow$ (e) şi faptul că $\emptyset \subseteq T$; (b) $\Leftarrow$ (f) şi faptul că $\emptyset \subseteq T$.

Exerc.: Demonstraţi că:

(a) mulţimea sistemelor deductive este familie Moore (sistem de închidere) pe $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ (pe E),

aceste variante de formulări cu aceeaşi semnificaţie (respectiv parte) pt. fiecare pereche în

(b) pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$.

REZOLVARE:

(a) Avem de demonstrat că mulțimea sistemelor deductive este închisă la intersecții arbitrare.

În posetul $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, $\underbrace{\bigcap \emptyset}_{\text{intersecția familiei vide}} = E$, iar E este sistem deductiv (o putem scrie și sub forma: $\bigcap\limits_{\Sigma \in \emptyset} \Sigma$).

Acum fie $I \neq \emptyset$ și $(\Sigma_i)_{i \in I}$ o familie (nevidă) de sisteme deductive, iar $\Sigma \overset{(\text{not.})}{=} \bigcap\limits_{i \in I} \Sigma_i$. Avem de dem. că Σ este sistem deductiv. Vom folosi o propoziție din curs pe care am numit-o

Propoziție * (a se revedea cursul).

Fie $\varphi \in E$, a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. $\Rightarrow \varphi \in \Sigma$.

$$\left.\begin{array}{l} I \neq \emptyset, \\ \Sigma = \bigcap_{i \in I} \Sigma_i, \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\forall i \in I)(\Sigma \subseteq \Sigma_i), \\ \Sigma \vdash \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{(\text{Prop.} *)} (\forall i \in I)(\Sigma_i \vdash \varphi), \\ \forall i \in I,\ \Sigma_i \text{ este sistem deductiv.} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{def.})}$$

$\Rightarrow (\forall i \in I)(\varphi \in \Sigma_i) \Leftrightarrow \varphi \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi \in \Sigma. \Rightarrow \Sigma$ este sistem deductiv.

$\Rightarrow$ Mulțimea sistemelor deductive este închisă la intersecții arbitrare, adică este familie Moore.

(b) Fie $\Sigma \subseteq E$. $D(\Sigma) \overset{(\text{not. din curs})}{=}$

$= \bigcap S$ (= intersecția sistemelor deductive care includ pe Σ")
$S \subseteq E$,
$\Sigma \subseteq S$,
$S \to$ sistem deductiv

$(a) \Rightarrow D(\Sigma) = \min(\{S \subseteq E \mid \Sigma \subseteq S, S \to$ sistem deductiv$\}, \subseteq)$ (= cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, raportat la $\subseteq$). (Tot din $(a) \Rightarrow D : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ este un operator de închidere.) ($D(\Sigma) \overset{(def)}{=}$ sistemul deductiv generat de Σ.)

Not. $\Delta = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$.

Avem de demonstrat că $D(\Sigma) = \Delta$, ceea ce, conform scrierii anterioare pentru $D(\Sigma)$, înseamnă că Δ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ (cel mai mic raportat la $\subseteq$), adică:

$$\begin{cases} \Sigma \subseteq \Delta, \# \\ \Delta \text{ este sistem deductiv}, \# \\ (\forall S \subseteq E)(\Sigma \subseteq S \text{ și } S \to \text{sistem deductiv} \Rightarrow \Delta \subseteq S). \# \end{cases}$$

Fie $\varphi \in \Sigma$, $\xrightarrow[\text{sintactice}]{\text{(def. deducției}} \Sigma \vdash \varphi. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi \in \Delta. \Rightarrow \Sigma \subseteq \Delta.$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } \psi \in E, \text{ a.î. } \Delta \vdash \psi. \\ (\forall \varphi \in \Delta)(\Sigma \vdash \varphi). \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\xrightarrow{\text{(Prop. *)}} \Sigma \vdash \psi. \Leftrightarrow \psi \in \Delta. \xrightarrow{\text{(def.)}}$

$\Rightarrow \Delta$ este sistem deductiv, (2).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } S \text{ un sistem deductiv} \\ \text{cu proprietatea că } \Sigma \subseteq S. \\ \text{Fie } \varphi \in \Delta. \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\xrightarrow{\text{(Prop. *)}}$

$$\left.\begin{array}{l} S \vdash \varphi. \\ S \text{ este sistem deductiv.} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(def.)}} \varphi \in S. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta \subseteq S$. (3).

(1), (2), (3) $\Rightarrow \Delta = D(\Sigma)$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$.

Exerc.: dem. că operatorul de închidere D este finitar, i.e., pt. orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma) = \underbrace{\bigcup_{\substack{\Gamma \subseteq \Sigma, \\ |\Gamma| < \infty}} D(\Gamma)}_{\overset{\text{not.}}{=} M(\Sigma)}$.

REZOLVARE:

Fie $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, arbitrare fixate.

Dacă $\varphi \in D(\Sigma) \overset{\text{(exerc. anter., (b))}}{\Longleftrightarrow} \Sigma \vdash \varphi \Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{(Prop. * (2) / curs)}} (\exists \Gamma \subseteq \Sigma)(|\Gamma| < \infty$ și $\Gamma \vdash \varphi)$

$\overset{\text{(exerc. anter., (b))}}{\Longleftrightarrow} (\exists \Gamma \subseteq \Sigma)(|\Gamma| < \infty$ și $\varphi \in D(\Gamma))$

$\Leftrightarrow \varphi \in M(\Sigma)$. (*)

Dacă $\varphi \in M(\Sigma) \Leftrightarrow (\exists \Gamma \subseteq \Sigma)(|\Gamma| < \infty, \varphi \in D(\Gamma)) \overset{\text{(exerc. anter., (b))}}{\Longleftrightarrow} \Gamma \vdash \varphi \xrightarrow[\text{(Prop. * (1) / curs)}]{(\Gamma \subseteq \Sigma)}$

$\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \overset{\text{(exerc. anter. (b))}}{\Longleftrightarrow} \varphi \in D(\Sigma)$. (**).

(*), (**) $\Longrightarrow D(\Sigma) = M(\Sigma)$. (Q.E.D.)