prin urmare $s_1(\varphi) = \bigwedge_{a\in A} s_1[{}^x_a](\psi) = \bigwedge_{a\in A} s_2[{}^x_a](\psi) = s_2(\varphi)$.

Așadar mulțimea $\{\varphi \in Form(\mathcal{L}_\tau) \mid P(\varphi)\}$ este închisă la aplicarea cuantificatorului universal.

Prin urmare $\{\varphi \in Form(\mathcal{L}_\tau) \mid P(\varphi)\}$ include cea mai mică mulțime care include mulțimea formulelor atomice și este închisă la negație, implicație și cuantificatori universali, anume întreaga mulțime $Form(\mathcal{L}_\tau)$, așadar $\{\varphi \in Form(\mathcal{L}_\tau) \mid P(\varphi)\} = Form(\mathcal{L}_\tau)$, adică orice formulă $\varphi \in Form(\mathcal{L}_\tau)$ satisface proprietatea $P(\varphi)$: $s_1 \mid_{FV(\varphi)} = s_2 \mid_{FV(\varphi)} \Rightarrow s_1(\varphi) = s_2(\varphi)$.

Corolar (cum enunțurile nu au variabile libere (i.e. $FV(\varphi) = \emptyset$ pt. orice enunț φ), rezultă că, într–un enunț, toate interpretările au aceeași valoare)

Dacă φ este un enunț, atunci $s(\varphi)$ nu depinde de interpretarea $s : Var \to A$.

Demonstrație: Fie $s_1, s_2 : Var \to A$. Atunci, conform remarcii precedente, $s_1 \mid_{FV(\varphi)} = s_1 \mid_{\emptyset} = s_2 \mid_{\emptyset} = s_2 \mid_{FV(\varphi)}$, de unde, conform propoziției anterioare, rezultă că $s_1(\varphi) = s_2(\varphi)$.

Notație

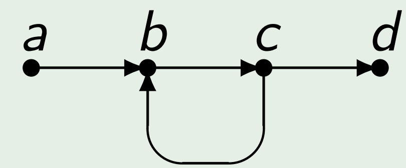
Corolarul anterior ne permite să notăm, pentru orice enunț φ și orice interpretare $s : Var \to A$, pe $s(\varphi)$ cu $||\varphi||_{\mathcal{A}}$ sau $||\varphi||$.

Exercițiu (renunțăm temporar la fixarea lui τ, $\mathcal{A}$ și s)

Fie signatura $\tau = (1; 2; \emptyset)$ și structura de ordinul I de această signatură $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}; R^{\mathcal{A}}; \emptyset)$, unde $A = \{a, b, c, d\}$ este o mulțime cu 4 elemente, iar funcția $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ și relația binară $R^{\mathcal{A}}$ pe A vor fi notate respectiv cu f și R, și sunt definite prin: $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = a$ și $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\} \subset A^2$:

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	b	c	d	a

$R^{\mathcal{A}}$:



Să se calculeze valorile de adevăr ale enunțurilor: $\exists x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))$ și $\exists x\, \forall y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))$ în structura algebrică $\mathcal{A}$.

Rezolvare: Fixăm o interpretare arbitrară $s : Var \to A$. Conform definiției extinderii acesteia $s : Term(\mathcal{L}_\tau) \cup Form(\mathcal{L}_\tau) \to A \cup \mathcal{L}_2$, pentru orice termeni $t, u \in Term(\mathcal{L}_\tau)$:

$$s(R(t, u)) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (s(t), s(u)) \in R^{\mathcal{A}}, \\ 0, & \text{dacă } (s(t), s(u)) \notin R^{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

Așadar, notând ca mai sus, având în vedere că valoarea de adevăr a unui enunț într–o interpretare nu depinde de acea interpretare și observând că, de exemplu, $s(R(a^{ct}, f(b^{ct})) = s(R(a^{ct}, f^{\mathcal{A}}(b)^{ct})) = s(R(a^{ct}, c^{ct}))$:

$$||\exists x\,(R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))||_{\mathcal{A}}=\bigvee_{e\in A}s[{}^{x}_{e}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))=$$

$$s[{}^{x}_{a}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))\vee s[{}^{x}_{b}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))\vee$$

$$||\exists x\,(R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))||=\bigvee_{e\in A}s[{}^{x}_{e}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))=$$

$$s[{}^{x}_{a}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))\vee s[{}^{x}_{b}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))\vee$$

$$s[{}^{x}_{c}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))\vee s[{}^{x}_{d}](R(x,f(x))\wedge R(f(x),x))=$$

$$(s[{}^{x}_{a}](R(x,f(x)))\wedge s[{}^{x}_{a}](R(f(x),x)))\vee(s[{}^{x}_{b}](R(x,f(x)))\wedge s[{}^{x}_{b}](R(f(x),x)))\vee(s[{}^{x}_{c}$$

$$](R(x,f(x)))\wedge s[{}^{x}_{c}](R(f(x),x)))\vee(s[{}^{x}_{d}](R(x,f(x)))\wedge s[{}^{x}_{d}](R(f(x),x)))=$$

$$(s(R(x,f(x))[{}^{x}_{a}])\wedge s(R(f(x),x)[{}^{x}_{a}]))\vee(s(R(x,f(x))[{}^{x}_{b}])\wedge s(R(f(x),x)[{}^{x}_{b}$$

$$]))\vee(s(R(x,f(x))[{}^{x}_{c}])\wedge s(R(f(x),x)[{}^{x}_{c}]))\vee(s(R(x,f(x))[{}^{x}_{d}])\wedge s(R(f(x),x)[{}^{x}_{d}]))=$$

$$(s(R(a^{ct},f(a^{ct}))\wedge s(R(f(a^{ct}),a^{ct}))\vee(s(R(b^{ct},f(b^{ct}))\wedge s(R(f(b^{ct}),b^{ct}))\vee$$

$$(s(R(c^{ct},f(c^{ct}))\wedge s(R(f(c^{ct}),c^{ct}))\vee(s(R(d^{ct},f(d^{ct}))\wedge s(R(f(d^{ct}),d^{ct}))=$$

$$(s(R(a^{ct},b^{ct})\wedge s(R(b^{ct},a^{ct}))\vee(s(R(b^{ct},c^{ct})\wedge s(R(c^{ct},b^{ct}))\vee(s(R(c^{ct},d^{ct})\wedge$$

$$s(R(d^{ct},c^{ct}))\vee(s(R(d^{ct},a^{ct})\wedge s(R(a^{ct},d^{ct}))=$$

$$(s(R(a^{ct},f^{\mathcal{A}}(a)^{ct})\wedge s(R(f^{\mathcal{A}}(a)^{ct},a^{ct}))\vee(s(R(b^{ct},f^{\mathcal{A}}(b)^{ct})\wedge s(R(f^{\mathcal{A}}(b)^{ct},b^{ct}))\vee$$

$$(s(R(c^{ct},f^{\mathcal{A}}(c)^{ct})\wedge s(R(f^{\mathcal{A}}(c)^{ct}),c^{ct}))\vee(s(R(d^{ct},f^{\mathcal{A}}(d)^{ct})\wedge s(R(f^{\mathcal{A}}(d)^{ct},d^{ct}))=$$

$$(s(R(a^{ct},b^{ct})\wedge s(R(b^{ct},a^{ct}))\vee(s(R(b^{ct},c^{ct})\wedge s(R(c^{ct},b^{ct}))\vee(s(R(c^{ct},d^{ct})\wedge$$

$s(R(d^{ct},c^{ct}))\vee(s(R(d^{ct},a^{ct})\wedge s(R(a^{ct},d^{ct}))=1$, întrucât

$s(R(b^{ct},c^{ct})\wedge s(R(c^{ct},b^{ct})=1\wedge 1=1$;

pentru a doua formulă nu mai explicităm în etape, ca mai sus:
$||\exists x \forall y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))||_{\mathcal{A}} = \bigvee_{e \in A} \bigwedge_{g \in A} s[{}^x_e][{}^y_g$

$](R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y)) = \bigvee_{e \in A} \bigwedge_{g \in A} s[{}^x_e][{}^y_g](R(y, f(f(x)))) \vee s[{}^x_e][{}^y_g$

$](R(f(x), y))) = \bigvee_{e \in A} \bigwedge_{g \in A} s(R(y, f(f(x)))[{}^x_e][{}^y_g]) \vee s(R(f(x), y)[{}^x_e][{}^y_g])) =$

$$\bigvee_{e \in A} \bigwedge_{g \in A} (s(R(g^{ct}, f(f(e^{ct})))) \vee s(R(f(e^{ct}), g^{ct}))) =$$

$$\left(\bigwedge_{g \in A} (s(R(g^{ct}, f(f(a^{ct})))) \vee s(R(f(a^{ct}), g^{ct})))\right) \vee$$

$$\left(\bigwedge_{g \in A} (s(R(g^{ct}, f(f(b^{ct})))) \vee s(R(f(b^{ct}), g^{ct})))\right) \vee$$

$$\left(\bigwedge_{g \in A} (s(R(g^{ct}, f(f(c^{ct})))) \vee s(R(f(c^{ct}), g^{ct})))\right) \vee$$

$$\left(\bigwedge_{g \in A} (s(R(g^{ct}, f(f(d^{ct})))) \vee s(R(f(d^{ct}), g^{ct})))\right) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0,$$ pentru că:

$(a,c),(b,a)\notin R^{\mathcal{A}}$, așadar
$s(R(a^{ct},f(f(a^{ct}))))\vee s(R(f(a^{ct}),a^{ct}))=s(R(a^{ct},c^{ct}))\vee s(R(b^{ct},a^{ct}))=0\vee 0=0$,
deci $\bigwedge\limits_{g\in A}(s(R(g^{ct},f(f(a^{ct}))))\vee s(R(f(a^{ct}),g^{ct})))=0$;
$(a,d),(c,a)\notin R^{\mathcal{A}}$, așadar
$s(R(a^{ct},f(f(b^{ct}))))\vee s(R(f(b^{ct}),a^{ct}))=s(R(a^{ct},d^{ct}))\vee s(R(c^{ct},a^{ct}))=0\vee 0=0$,
deci $\bigwedge\limits_{g\in A}(s(R(g^{ct},f(f(b^{ct}))))\vee s(R(f(b^{ct}),g^{ct})))=0$;
$(a,a),(d,a)\notin R^{\mathcal{A}}$, așadar
$s(R(a^{ct},f(f(c^{ct}))))\vee s(R(f(c^{ct}),a^{ct}))=s(R(a^{ct},a^{ct}))\vee s(R(d^{ct},a^{ct}))=0\vee 0=0$,
deci $\bigwedge\limits_{g\in A}(s(R(g^{ct},f(f(c^{ct}))))\vee s(R(f(c^{ct}),g^{ct})))=0$;
$(d,b),(a,d)\notin R^{\mathcal{A}}$, așadar $s(R(d^{ct},f(f(d^{ct}))))\vee s(R(f(d^{ct}),d^{ct}))=$
$s(R(d^{ct},b^{ct}))\vee s(R(a^{ct},d^{ct}))=0\vee 0=0$, deci
$\bigwedge\limits_{g\in A}(s(R(g^{ct},f(f(d^{ct}))))\vee s(R(f(d^{ct}),g^{ct})))=0$.

Definiție

Pentru orice enunț φ, notăm:

$$\mathcal{A}\vDash\varphi \text{ ddacă } ||\varphi||_{\mathcal{A}}=1.$$

Redactare minimală permisă la examen

Pentru examen, în exercițiul anterior ar fi suficient să observați că:

- $||\exists\, x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))||_{\mathcal{A}} = 1$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \exists\, x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))$ ddacă are loc: $(\exists\, u \in A), ((u, f^{\mathcal{A}}(u)) \in R^{\mathcal{A}}$ și $(f^{\mathcal{A}}(u), u) \in R^{\mathcal{A}})$, care este satisfăcută, întrucât, pentru $u = b$, avem $(u, f^{\mathcal{A}}(u)) = (b, f^{\mathcal{A}}(b)) = (b, c) \in R^{\mathcal{A}}$ și $(f^{\mathcal{A}}(u), u) = (c, b) \in R^{\mathcal{A}}$;
- $||\exists\, x\, \forall\, y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))||_{\mathcal{A}} = 1$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \exists\, x\, \forall\, y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))$ ddacă are loc: $(\exists\, u \in A)\, (\forall\, v \in A)\, ((v, f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u))) \in R^{\mathcal{A}}$ sau $(f^{\mathcal{A}}(u), v) \in R^{\mathcal{A}})$, care nu e satisfăcută, după cum putem observa considerând fiecare valoare $u \in A = \{a, b, c, d\}$.

Spunem că $\mathcal{A}$ *satisface enunțul* φ sau φ *este adevărat în* $\mathcal{A}$ sau $\mathcal{A}$ *este model pentru* φ ddacă $\mathcal{A} \vDash \varphi$.
Pentru orice mulțime Γ de enunțuri, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* Γ sau că $\mathcal{A}$ *este model pentru* Γ ddacă $\mathcal{A} \vDash \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$; notăm acest lucru cu $\mathcal{A} \vDash \Gamma$.

Exemplu

Cu notațiile din exercițiul anterior: $\mathcal{A} \vDash \exists x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))$ și $\mathcal{A} \nvDash \exists x \forall y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))$.

Exemplu (renunțăm temporar la fixarea lui τ și a lui $\mathcal{A}$)

Considerăm signatura $(2, 1; 2; 0)$, un simbol de operație binară f, unul de operație binară g, unul de relație binară R și unul de constantă c în limbajul de ordinul I de această signatură.
Fie $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ o algebră de această signatură, astfel că: $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$, $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ și $c^{\mathcal{A}} \in A$. Fie $x, y, z \in Var$.
Atunci operația binară $f^{\mathcal{A}}$ pe A:

- este idempotentă ddacă $\mathcal{A} \vDash \forall x\, (f(x, x) = x)$,
- este comutativă ddacă $\mathcal{A} \vDash \forall x \forall y\, (f(x, y) = f(y, x))$,
- este asociativă ddacă $\mathcal{A} \vDash \forall x \forall y \forall z\, (f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z))$,
- are elementul neutru la stânga $c^{\mathcal{A}}$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \forall x\, (f(c, x) = x)$,
- are elementul neutru la dreapta $c^{\mathcal{A}}$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \forall x\, (f(x, c) = x)$,