ALTE PROPRIETĂȚI ALE ALGEBRELOR BOOLE

~ SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAȚIONALĂ, PARTEA A II-A ~

<u>Propoziție:</u> Orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole.

<u>Demonstrație:</u> Fie I o mulțime şi, pentru fiecare $i \in I$, $\mathcal{B}_i = (B_i, \vee_i, \wedge_i, \bar{\cdot}^{\,i}, \leq_i, 0_i, 1_i)$ o algebră Boole. Notăm cu $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$. Atunci $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, \leq, 0, 1)$, unde $B = \prod_{i \in I} B_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I)(x_i \in B_i)\}$, $\leq = \prod_{i \in I} \leq_i$, $0 = (0_i)_{i \in I}$, $1 = (1_i)_{i \in I}$ şi, pentru orice $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in B$, avem:

$(x_i)_{i \in I} \vee (y_i)_{i \in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i \in I}$,

$(x_i)_{i \in I} \wedge (y_i)_{i \in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i \in I}$,

$\overline{(x_i)_{i \in I}} = (\overline{x_i}^{\,i})_{i \in I}$ $(\vee : B^2 \to B,\ \wedge : B^2 \to B,\ \bar{\cdot} : B \to B,\ 0, 1 \in B,\ \leq \subseteq B^2)$.

Ştim, din proprietăţile relaţiilor binare, că $\leq = \prod_{i\in I} \leq_i = \{(x,y) \mid x=(x_i)_{i\in I}\in B,\ y=(y_i)_{i\in I}\in B,\ (\forall\, i\in I)(x_i \leq_i y_i)\}$ este o relaţie de ordine pe B, ceea ce rezultă şi din (***) de mai jos.

Dacă $I=\emptyset$, atunci B este un singleton: $B=\{x\}$, aşadar $\mathcal{B}=(\{x\},\vee,\wedge,\bar{\ },\leq,x,x)$, cu $x\vee x=x\wedge x=\bar{x}=x$ şi $\leq\ =\{(x,x)\}$, deci $\mathcal{B}=\mathcal{L}_1$: algebra Boole trivială.

Acum să considerăm $I\neq\emptyset$. Fie $x=(x_i)_{i\in I}\in B$, $y=(y_i)_{i\in I}\in B$. Atunci:

$x\vee x=(x_i)_{i\in I}\vee(x_i)_{i\in I}=$

$=(x_i\vee_i x_i)_{i\in I}=(x_i)_{i\in I}=x$;

analog $x\wedge x=x$; (*)

$x\vee y=(x_i)_{i\in I}\vee(y_i)_{i\in I}=$

$=(x_i\vee_i y_i)_{i\in I}=(y_i\vee_i x_i)_{i\in I}=$

$=(y_i)_{i\in I}\vee(x_i)_{i\in I}=y\vee x$; analog

$x\wedge y=y\wedge x$; (**)

$(x \vee y) \vee z =$

$= \left((x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I}\right) \vee (z_i)_{i\in I} =$

$= (x_i \vee_i y_i)_{i\in I} \vee (z_i)_{i\in I} =$

$= \left((x_i \vee_i y_i) \vee z_i\right)_{i\in I} =$

$= \left(x_i \vee_i (y_i \vee_i z_i)\right)_{i\in I} =$

$= (x_i)_{i\in I} \vee (y_i \vee_i z_i)_{i\in I} =$

$= (x_i)_{i\in I} \vee \left((y_i)_{i\in I} \vee (z_i)_{i\in I}\right) =$

$= x \vee (y \vee z)$, analog $(x \wedge y) \wedge z =$

$= x \wedge (y \wedge z)$, $(***)$

$x \vee (x \wedge y) = (x_i)_{i\in I} \vee \left((x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I}\right) =$

$= (x_i)_{i\in I} \vee (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I} =$

$= \left(x_i \vee_i (x_i \wedge_i y_i)\right)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} =$

$= x$; analog $x \wedge (x \vee y) = x$; $(****)$

$x \leq y \Leftrightarrow (x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, i\in I)(x_i \leq_i y_i) \Leftrightarrow (\forall\, i\in I)$

$(x_i \vee_i y_i = y_i) \Leftrightarrow (x_i \vee_i y_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \Leftrightarrow (x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \Leftrightarrow x \vee y = y$. (*****)

(*), (**), (***), (****), (*****) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (B, \vee, \wedge, \leq)$ este latice. (1)

$(\forall i \in I)(0_i \leq_i x_i \leq_i 1_i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0_i)_{i\in I} \leq (x_i)_{i\in I} \leq (1_i)_{i\in I} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$. (2)

Fie $z = (z_i)_{i\in I} \in B$.

$$x \vee (y \wedge z) = (x_i)_{i\in I} \vee \underbrace{\left((y_i)_{i\in I} \wedge (z_i)_{i\in I}\right)}_{= (y_i \wedge_i z_i)_{i\in I}} =$$

$$= (x_i \vee_i (y_i \wedge_i z_i))_{i\in I} =$$

$$= ((x_i \vee_i y_i) \wedge_i (x_i \vee_i z_i))_{i\in I} =$$

$$= \underbrace{(x_i \vee_i y_i)_{i\in I}}_{(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I}} \wedge \underbrace{(x_i \vee_i z_i)_{i\in I}}_{(x_i)_{i\in I} \vee (z_i)_{i\in I}} =$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee z). \quad (3)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow (B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este latice distributivă mărginită. (I)

$$x \vee \bar{x} = (x_i)_{i\in I} \vee \underbrace{\overline{(x_i)_{i\in I}}}_{= \left(\overline{x_i}^{\,i}\right)_{i\in I}} =$$

$$= \left(x_i \vee_i \overline{x_i}^{\,i}\right)_{i\in I} = (1_i)_{i\in I} = 1. \quad \text{(II)}$$

$$x \wedge \bar{x} = (x_i)_{i\in I} \wedge \underbrace{\overline{(x_i)_{i\in I}}}_{= \left(\overline{x_i}^{\,i}\right)_{i\in I}} =$$

$$= \left(x_i \wedge_i \overline{x_i}^{\,i}\right)_{i\in I} = (0_i)_{i\in I} = 0. \quad \text{(III)}$$

(I), (II), (III) $\Rightarrow \mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ este algebră Boole.

Propoziție: Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole. Atunci:

(i) dacă a și b sunt atomi distincți ai lui $\mathcal{B}$, atunci $a \wedge b = 0$;

(ii) dacă $\mathcal{B}$ este finită, atunci disjuncția tuturor atomilor lui $\mathcal{B}$ este 1.

Demonstrație: Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, \leq, 0, 1)$.

(i) $a, b \in B$ atomi distincți ai lui $\mathcal{B}$, $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \prec a, \Leftrightarrow 0 < a \text{ și } (\nexists x \in B)(0 < x < a); \\ 0 \prec b \Leftrightarrow 0 < b \text{ și } (\nexists x \in B)(0 < x < b) \\ \text{și } a \neq b. \end{cases}$

$a \wedge b \leq a$.

Presupunem prin absurd că

$a \wedge b = a. \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} a \leq b \\ a \neq b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < b \\ 0 \prec b \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$. Abs cu $0 < a$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a \wedge b \neq a, \\ a \wedge b \leq a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \wedge b < a \\ 0 \prec a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \wedge b = 0$.

(ii) Considerăm algebra Boole standard:

$\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, \leq, 0, 1)$, cu $L_2 = \{0, 1\}$, cu $0 < 1$,

care $\prec \; = \; < \; = \{(0,1)\}$. (*)

$|B| < \infty \xrightarrow[\text{alg. Boole finite})]{\text{(teor. de structură a}} (\exists\, n \in \mathbb{N}) \left(B \cong \mathcal{L}_2^n \right)$.
(izomorfe ca algebre Boole)

$\mathcal{L}_2^n = (L_2^n, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$, cu:

$0 = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$, $1 = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$,

$L_2^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n}) (x_i \in \{0, 1\}) \}$

Dacă $n = 0$, atunci $B \cong \mathcal{L}_2^0 \cong \mathcal{L}_1$, care nu are atomi, deci a cărei mulțime de atomi este $\emptyset$. $\bigvee_{a \in \emptyset} a = \sup(\emptyset) = \min(B) =$ (rezultat de la poseturi)

$= 0 = 1$, pt. că $B \cong \mathcal{L}_1$.

Acum să presupunem că $n \geq 1$. Fie $f : B \to L_2^n$ un izomorfism boolean de la B la $\mathcal{L}_2^n$, $A \subseteq B$ mulțimea atomilor lui B, iar $M \subseteq L_2^n$ mulțimea atomilor lui $\mathcal{L}_2^n$. Determinăm elementele lui M.

Din formula relației de succesiune a unui produs direct de poseturi avem, în $\mathcal{L}_2^n$:

$\prec = \{((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mid (\forall i \in \overline{1,n})(x_i, y_i \in \{0,1\})$ și $(\exists k \in \overline{1,n})(x_k \prec y_k$ și $(\forall i \in \overline{1,n} \setminus \{k\})(x_i = y_i))\}$. $(**)$

$x_k \prec y_k \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x_k < y_k \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x_k = 0$ și $y_k = 1$

$M = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$ și $0 = (0, 0, \dots, 0) \prec (x_1, \dots, x_n)\} \overset{(**)}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \mid (\exists k \in \overline{1,n})(x_k = 1$ și $(\forall i \in \overline{1,n} \setminus \{k\})(x_i = 0))\} =$

$= \{(0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 1, 0), \dots,$

$$\ldots, (1,0,\ldots,0,0)\}, \Rightarrow \bigvee_{a\in M} a =$$

$$=(0,0,\ldots,0,1)\vee(0,0,\ldots,1,0)\vee$$
$$\vee(1,0,\ldots,0,0)=(0\vee 0\vee\ldots\vee 0\vee 1,$$
$$0\vee 0\vee\ldots\vee 1\vee 0,\ldots, 1\vee 0\vee\ldots\vee 0\vee 0)=$$
$$=(1,1,\ldots,1,1)=1. \quad (\mathrm{I})$$

Știm că izomorfismele booleene duc atomii în atomi. f și $f^{-1}: L_2^n \to B$ sunt izomorfisme booleene. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\forall a\in A)(f(a)\in M);\\ (\forall a\in M)(f^{-1}(a)\in A)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Funcțiile
$$\left\{\begin{array}{l} h=f|_A : A\to M,\\ \quad (\forall a\in A)(h(a)=f(a))\\ \text{și}\\ g=f^{-1}|_M : M\to A,\\ \quad (\forall a\in M)(g(a)=f^{-1}(a))\end{array}\right.$$

sunt corect definite. Au loc:
$(\forall a\in A)(g(h(a))=f^{-1}(f(a)))$ și

$(\forall a \in M)(h(g(a)) = f(f^{-1}(a)))$. $\Rightarrow h \circ g = id_M$ şi $f \circ h = id_A \Rightarrow f = h^{-1}$, funcţiile f şi h sunt inverse una celeilalte, deci sunt bijecţii între A şi M. $\Rightarrow \bigvee_{a \in A} a =$

$$= \bigvee_{x \in M} g(x) = \bigvee_{x \in M} f^{-1}(x) =$$

$$= f^{-1}\left(\bigvee_{x \in M} x\right) \overset{(I)}{=} f^{-1}(1) = 1.$$

Morfismele de latici (în particular morfismele booleene) comută cu disjuncţiile de perechi, aşadar comută cu disjuncţiile (i.e. supremumurile) submulţimilor finite şi nevide ($\Leftarrow$ din aproape în aproape) ale laticilor.
Morfismele de latici mărginite (în particular morfismele booleene) comută cu disjuncţiile (i.e. supremumurile

submulțimilor finite ale laticilor mărginite (pt. $\emptyset$, a se vedea rezultatul de la poseturi folosit la pagina 7). Izomorfismele de latici (în particular izomorfismele booleene) sunt izomorfisme de poseturi, așadar păstrează disjuncțiile (i.e. supremumurile) submulțimilor arbitrare ale laticilor care au supremumuri în acele latici (toate, dacă laticile sunt complete). Aceste proprietăți sunt, desigur, valabile și pt. conjuncții (i.e. infimumuri).

<u>Propoziție</u>: Fie $\mathcal{B}=(B,\vee,\wedge,\bar{\cdot},\leq,0,1)$ o algebră Boole, iar $\rightarrow$ implicația booleană asociată lui $\mathcal{B}$.

(I) Fie $x,y,z\in B$. Atunci:

(a) $x\rightarrow y=1 \Leftrightarrow x\leq y$;

(b) $x\rightarrow(y\rightarrow z)=y\rightarrow(x\rightarrow z)=$
$=(x\wedge y)\rightarrow z$;

(c) <u>legea de reziduație</u>:
$x\leq y\rightarrow z \Leftrightarrow x\wedge y\leq z$;

(d) $\overline{x}\rightarrow\overline{y}=y\rightarrow x$;

(e) $x \leq y \Longrightarrow \begin{cases} z \to x \leq z \to y; \\ y \to z \leq x \to z; \end{cases}$

(f) $\overline{x} = x \to 0;$

(g) $x \wedge (x \to y) \leq y;$

$(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z;$

(h) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1;$

(i) $(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)) = 1.$

(II) Presupunem că B este algebră Boole completă. Fie $a \in B$, I și J mulțimi nevide, iar $(x_i)_{i \in I} \subseteq B$ și $(y_j)_{j \in J} \subseteq B$. Atunci au loc:

- legile de distributivitate generalizată

(j) $a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i)$ și

$\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j \in J} y_j\right) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} (x_i \wedge y_j)$ ($= \bigvee_{j \in J} \bigvee_{i \in I} (x_i \wedge y_j)$, desigur);

(k) $a \vee \left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right) = \bigwedge_{i \in I} (a \vee x_i)$ și

$\left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right) \vee \left(\bigwedge_{j \in J} y_j\right) = \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (x_i \vee y_j)$ ($= \bigwedge_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} (x_i \vee y_j)$, desigur);

• legile lui de Morgan generalizate:

(l) $\overline{\bigvee_{i\in I} x_i} = \bigwedge_{i\in I} \overline{x_i}$;

(m) $\overline{\bigwedge_{i\in I} x_i} = \bigvee_{i\in I} \overline{x_i}$;

sunt valabile și pentru $I=\emptyset$

• următoarele proprietăți: ((n) și (r) sunt valabile și pt. $I=\emptyset$):

(n) $\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \to a = \bigwedge_{i\in I} (x_i \to a)$;

(p) $\left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) \to a = \bigvee_{i\in I} (x_i \to a)$;

(q) $a \to \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) = \bigvee_{i\in I} (a \to x_i)$;

(r) $a \to \left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) = \bigwedge_{i\in I} (a \to x_i)$.

Demonstrație:

(I) (a) "$\Leftarrow$": $x \le y \,/\, \vee\, \overline{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \to y = \overline{x} \vee y \ge \overline{x} \vee x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \to y = 1$;

"$\Rightarrow$": $\overline{x} \vee y = x \to y = 1 \,/\, \wedge\, x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1 \wedge x = (\overline{x} \vee y) \wedge x =$

$= \underbrace{(\overline{x} \wedge x)}_{=0} \vee (y \wedge x) = y \wedge x \le y.$

(b) $(x \wedge y) \to z = \overline{(x \wedge y)} \vee z =$

$$= \overline{x} \vee \underbrace{\overline{y} \vee z}_{= y \to z} = x \to (y \to z);$$

$$\|$$

$$\overline{y} \vee \overbrace{\overline{x} \vee z}^{= x \to z} = y \to (x \to z).$$

(c) A se vedea dem. din curs pt. legea de reziduatie. Alta dem.:

$$x \leq y \to z \overset{(a)}{\Leftrightarrow} x \to (y \to z) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(b)}{\Leftrightarrow} (x \wedge y) \to z = 1 \overset{(a)}{\Leftrightarrow} x \wedge y \leq z.$$

(d) $$\overline{x} \to \overline{y} = \underbrace{\overline{\overline{x}}}_{= x} \vee \overline{y} = \overline{y} \vee x = y \to x.$$

(e) $$x \leq y \overset{\vee \overline{z}}{\Rightarrow} \overline{z} \vee x \leq \overline{z} \vee y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \to x \leq z \to y.$$

$$\overset{(a)}{\Updownarrow}$$

$$x \to y = 1 \overset{(d)}{\Leftrightarrow} \overline{y} \to \overline{x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(a)}{\Leftrightarrow} \overline{y} \leq \overline{x} \overset{\vee z}{\Rightarrow} \overline{y} \vee z \leq \overline{x} \vee z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \to z \leq x \to z.$$

(f) $$x \to 0 = \overline{x} \vee 0 = \overline{x}.$$

(g) $$x \wedge (x \to y) = x \wedge (\overline{x} \vee y) =$$

$$= \underbrace{(x \wedge \overline{x})}_{= 0} \vee (x \wedge y) = x \wedge y \leq y. \quad (*)$$

$$\underbrace{x \wedge (x \to y)}_{\overset{(*)}{\leq} y} \wedge (y \to z) \leq y \wedge (y \to z) \overset{(*)}{\leq} z. \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x \to y) \wedge (y \to z) \wedge x \leq z \Leftrightarrow$

$\overset{(c)}{\Leftrightarrow} (x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z.$

(h) $(x \to y) \wedge (y \to z) \overset{(g)}{\leq} x \to z. \overset{(c)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z) \overset{(a)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1.$

(i) $(z \to x) \wedge (x \to y) \overset{(g)}{\leq} z \to y. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \to y) \wedge (z \to x) \leq z \to y \overset{(c)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y) \overset{(a)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)) = 1.$

(II) (j) Fie $b \in B$.

$\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \wedge a \leq b \Leftrightarrow \underline{\quad /\!/ \quad} \bigvee_{i \in I} (x_i \wedge a) \leq b.$ (**)

$\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \wedge a \leq b \overset{(c)}{\Leftrightarrow} \underbrace{\bigvee_{i \in I} x_i}_{= \sup\{x_i \mid i \in I\}} \leq a \to b \Leftrightarrow$

"$\Rightarrow$": $(\forall k \in I)(x_k \leq \sup\{x_i \mid i \in I\})$ şi $\leq$ e tranzitivă

"$\Leftarrow$": dintre majoranţii mulţimii $\{x_i \mid i \in I\}$, $\sup\{x_i \mid i \in I\}$ este cel mai mic

$\Leftrightarrow (\forall i \in I)(x_i \leq a \to b) \Leftrightarrow$

$\overset{(c)}{\Leftrightarrow} (\forall i \in I)(x_i \wedge a \leq b) \underset{\text{ca mai sus}}{\Longleftrightarrow} \bigvee_{i \in I} (x_i \wedge a) \leq b.$

$\le$ e reflexivă, așadar:

$$\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)\wedge a \le \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)\wedge a \overset{(**)}{\Longleftrightarrow}$$

(**), în care luăm $b=\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)\wedge a$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{i\in I}(x_i\wedge a)\le\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)\wedge a. \quad (1^\circ)$$

$$\bigvee_{i\in I}(x_i\wedge a)\le\bigvee_{i\in I}(x_i\wedge a) \overset{(**)}{\Longleftrightarrow}$$

(**), în care luăm $b=\bigvee_{i\in I}(x_i\wedge a)$

$$\Leftrightarrow \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)\wedge a\le\bigvee_{i\in I}(x_i\wedge a). \quad (2^\circ)$$

$$(1^\circ),(2^\circ)\Rightarrow \bigvee_{i\in I}(x_i\wedge a)=\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)\wedge a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{i\in I}(a\wedge x_i)= a\wedge\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right).$$

Din această egalitate rezultă și:

$$\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)\wedge\left(\bigvee_{j\in J} y_j\right)=\bigvee_{i\in I}\underbrace{\left(x_i\wedge\left(\bigvee_{j\in J} y_j\right)\right)}_{=\bigvee_{j\in J}(x_i\wedge y_j)}=$$

$$=\bigvee_{i\in I}\bigvee_{j\in J}(x_i\wedge y_j);$$

$$\left(\bigvee_{j\in J} y_j\right)\wedge\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)=\bigvee_{j\in J}\bigvee_{i\in I}(y_j\wedge x_i)=$$

$$= \bigvee_{j\in J} \bigvee_{i\in I} (x_i \wedge y_j).$$

(k) $\Leftarrow$ (j), prin dualitate.

(l) Pentru $I = \emptyset$, folosim acelaşi rezultat despre poseturi pe care l-am utilizat şi la pagina 7:

$$\overline{\bigvee_{i\in\emptyset} x_i} = \overline{\sup(\emptyset)} = \overline{\min(B)} = \overline{0} = 1 = \max(B) = \inf(\emptyset) = \bigwedge_{i\in\emptyset} \overline{x_i}.$$

Acum să presupunem că $I \neq \emptyset$. Atunci:

$$\bigvee_{i\in I} x_i \vee \left(\bigwedge_{j\in I} \overline{x_j}\right) \overset{(k)}{=} \bigwedge_{j\in I}\left(\bigvee_{i\in I} x_i \vee \overline{x_j}\right) =$$

avem nevoie să denumim indicii diferit

$$= \bigwedge_{j\in I}\underbrace{\left(\bigvee_{i\in I\setminus\{j\}} x_i \vee \underbrace{x_j \vee \overline{x_j}}_{=1}\right)}_{=1} =$$

$$= \bigwedge_{j\in I} 1 = 1. \quad (3°)$$

$$\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \wedge \bigwedge_{j\in I} \overline{x_j} \overset{(j)}{=} \bigvee_{i\in I}\left(x_i \wedge \bigwedge_{j\in I} \overline{x_j}\right) =$$

$$= \bigvee_{i\in I} \underbrace{\left(\underbrace{x_i \wedge \overline{x_i}}_{=0} \wedge \bigwedge_{j\in I\setminus\{i\}} \overline{x_j}\right)}_{=0} = \bigvee_{i\in I} 0 = 0. \quad (4°)$$

$(3^\circ),(4^\circ) \Longrightarrow \overline{\bigvee_{i\in I} x_i} = \bigwedge_{j\in I} \overline{x_j} =$ (ALG. BOOLE, PG. 18)

$= \bigwedge_{i\in I} \overline{x_i}.$

(m) $\Leftarrow$ (l), prin dualitate,

(n) Pt. $I=\emptyset$, cu proprietatea de la poseturi folosită și la pagina 7 (la fel și mai jos, la (r)):

$$\left(\bigvee_{i\in\emptyset} x_i\right) \to a = 0 \to a = \overline{0} \vee a = 1 \vee a = 1 = \bigwedge_{i\in\emptyset}(x_i \to a).$$

Acum fie $I\neq\emptyset$. Atunci:

$$\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \to a = \overline{\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right)} \vee a \overset{(l)}{=} \left(\bigwedge_{i\in I} \overline{x_i}\right) \vee a \overset{(k)}{=} \bigwedge_{i\in I}(\overline{x_i} \vee a) =$$

$$= \bigwedge_{i\in I}(x_i \to a).$$

(p) Pt. $I\neq\emptyset$: $\left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) \to a =$

$$= \overline{\left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right)} \vee a \overset{(m)}{=}$$

$$= \bigvee_{i\in I} \overline{x_i} \vee a \overset{I\neq\emptyset \text{ și } \vee \text{ e idempotentă}}{=}$$

$$= \bigvee_{i\in I}(\overline{x_i} \vee a) = \bigvee_{i\in I}(x_i \to a).$$

(r) Pt. $I\neq\emptyset$: $a \to \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) =$

$$= \overline{a} \vee \bigvee_{i \in I} x_i \overset{(I \neq \emptyset \text{ și } \vee \text{ e idempotentă})}{=} \bigvee_{i \in I} (\overline{a} \vee x_i) = \bigvee_{i \in I} (a \to x_i).$$

(r) Pt. $I = \emptyset$: $a \to \left(\bigwedge_{i \in \emptyset} x_i\right) =$
$$= a \to 1 = \overline{a} \vee 1 = 1 = \bigwedge_{i \in \emptyset} (a \to x_i).$$

Pt. $I \neq \emptyset$: $a \to \left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right) =$
$$= \overline{a} \vee \left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right) \overset{(k)}{=} \bigwedge_{i \in I} (\overline{a} \vee x_i) = \bigwedge_{i \in I} (a \to x_i)$$

<u>Exercițiu:</u> Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \overline{\cdot}, \leq, 0, 1)$ o algebră Boole și $S \subseteq B$ o sublatice mărginită a (laticii mărginite, $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, subiacente) lui $\mathcal{B}$, având $|S| = 4$. Să se demonstreze că: S e subalgebră Boole a lui $\mathcal{B} \Leftrightarrow (S, \leq)$ nu e lanț.

RESOLVARE:

<u>"$\Rightarrow$":</u> S e subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$. $\Rightarrow (S, \vee, \wedge, \overline{\cdot}, \leq, 0, 1)$ este algebră Boole. $\Rightarrow$

Presupunem prin absurd că $(S, \leq)$ e lanț. $\left.\begin{matrix} \\ |S| = 4. \end{matrix}\right\} \Rightarrow (S, \leq) \cong \mathcal{L}_4$ (izomorfe ca poseturi).

$\Rightarrow$ ✗ cu faptul că singurele algebre Boole total ordonate sunt $\mathcal{L}_1$ și $\mathcal{L}_2$. $\Rightarrow (S, \leq)$ nu e lanț.

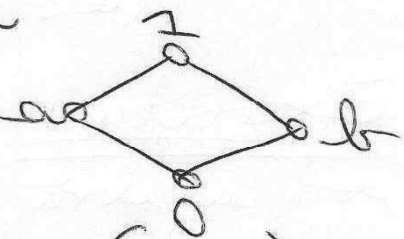
"$\Leftarrow$": Fie $S=\{0,a,b,1\}$.

$(S,\leq)$ nu e lanț.

S e sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$. $\Rightarrow (S,\vee,\wedge,\leq,0,1)$ e latice mărginită.

$|S|=4$.

$\Rightarrow S\cong \mathcal{L}_2^2$ (izomorfe ca latici mărginite):



$(S,\leq)$

$\Rightarrow \begin{cases} a\vee b=1 \\ a\wedge b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}=b\in S \\ \overline{b}=a\in S \end{cases}$

$\begin{cases} 0\vee 1=1 \\ 0\wedge 1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{0}=1\in S \\ \overline{1}=0\in S. \end{cases}$

$\Rightarrow (\forall\, x\in S)(\overline{x}\in S)$.

S e sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ S e subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$.

Exercițiu temă: Să se enumere sublaticile mărginite cu exact 4 elemente ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2^3$ (cubul), și să se observe care dintre ele sunt lanțuri și care sunt subalgebre Boole ale lui $\mathcal{L}_2^3$.

Iar sublaticile cu exact 4 elemente ale cubului care nu sunt sublatici marginite ale cubului sunt exact fetele cubului (izomorfe cu rombul).