Logică Matematică şi Computaţională
Cursurile VI și VII

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2023–2024, Semestrul I

Cuprinsul acestui set de cursuri

Relații de ordine

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică. Într–adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică și antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică și antisimetrică;
- așadar: R e simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică și antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ și $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară și faptul că Δ_A este tranzitivă.

Obținerea unei relații de ordine dintr–o relație de preordine

Remarcă (continuare)

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relație reflexivă pe A, în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relație de echivalență pe A și cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Remarcă (temă; aplicație: ordinele de complexitate ale algoritmilor)

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație de preordine pe A.
Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă [xRy și yRx]).
Se demonstrează că $\sim$ este o relație de echivalență pe A.
Considerăm mulțimea factor $A/_\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe $A/_\sim$ definim relația binară $\leq$, astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy.
Se demonstrează că $\leq$ este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanți**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) și $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalența: xRy ddacă zRt. Și se demonstrează că $\leq$ este o relație de ordine pe $A/_\sim$.

Ordine versus ordine strictă

Remarcă

Dacă A e o mulțime nevidă, atunci nu există nicio relație binară pe A care să fie și reflexivă, și ireflexivă, prin urmare nu există nicio relație binară pe A care să fie și relație de ordine, și relație de ordine strictă.
Într–adevăr, dacă ar exista $R \subseteq A^2$ a. î. R să fie și reflexivă, și ireflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$ și $\Delta_A \cap R = \emptyset$, deci $\emptyset = \Delta_A \cap R = \Delta_A$, prin urmare $\Delta_A = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu $A \neq \emptyset$.

Exemplu

Δ_A este cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Ordine versus ordine strictă

Exercițiu (temă)

Fie A o mulțime, O mulțimea relațiilor de ordine pe A și S mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A.

Să se demonstreze că aplicațiile $\varphi : O \to S$ și $\psi : S \to O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y$ și $x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y$ sau $x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ și $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
  - scăzând din orice relație de ordine pe A diagonala lui A, se obține o relație de ordine strictă pe A;
  - reunind orice relație de ordine strictă pe A cu diagonala lui A, se obține o relație de ordine pe A;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ și $\varphi \circ \psi = id_S$ (acest din urmă fapt poate fi verificat foarte ușor pornind de la observația că orice relație de ordine pe A include Δ_A și orice relație de ordine strictă pe A este disjunctă de Δ_A, și văzând cum se comportă și proprietățile de tranzitivitate, antisimetrie și asimetrie vizavi de operațiile de scădere a diagonalei mulțimii, respectiv reuniune cu diagonala mulțimii), ceea ce înseamnă că φ și ψ sunt bijecții între O și S.

Ordine versus ordine strictă

Definiție

Fie A o mulțime, $\leq$ o relație de ordine pe A și $<$ o relație de ordine strictă pe A. Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$ se numește *relația de ordine strictă asociată lui* $\leq$;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numește *relația de ordine asociată lui* $<$.

(A se vedea exercițiul anterior.)

Remarcă

Relația de ordine strictă asociată unei relații de ordine totale este o relație totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulțimea pe care este definită este $\emptyset$).

Notație

Pentru orice mulțime A, orice $R \subseteq A^2$ și orice $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$, vom nota faptul că $a_1 R a_2,\ a_2 R a_3, \ldots$ și prin: $a_1 R a_2 R a_3 \ldots$.

Exemple de relații de ordine

Exemplu

Se verifică ușor (**temă**) că:

- $\leq$ este o relație de ordine totală (i. e. liniară) pe fiecare dintre mulțimile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, numită *relația de ordine naturală* pe aceste mulțimi (desigur, am notat cu $\leq$ relația de ordine "uzuală" pe fiecare dintre aceste mulțimi, definită prin: $x \leq y$ ddacă există un număr nenegativ a, a. î. $y = x + a$, unde numerele nenegative și adunarea pot fi definite în diverse moduri în fiecare dintre aceste mulțimi; de exemplu, se poate porni de la construcția cu numere cardinale pentru numerele naturale și operațiile cu ele, apoi, pe baza numerelor naturale, se pot construi $\mathbb{Z}$, apoi $\mathbb{Q}$, apoi $\mathbb{R}$, în modurile cunoscute)
- fie relația binară pe $\mathbb{C}$ pe care o vom nota cu $\sqsubseteq$ și pe care o definim prin: pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + bi \sqsubseteq c + di$ ddacă $a \leq c$ și $b \leq d$, unde $\leq$ este ordinea naturală pe $\mathbb{R}$; atunci $\sqsubseteq$ este o relație de ordine pe $\mathbb{C}$ care nu este totală (pentru că, de exemplu, $(2 + 5\mathrm{i}, 5 + 2\mathrm{i}) \notin \sqsubseteq$ și $(5 + 2\mathrm{i}, 2 + 5\mathrm{i}) \notin \sqsubseteq$, sau $(1, i) \notin \sqsubseteq$ și $(i, 1) \notin \sqsubseteq$)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{N}$ ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$) este o relație de ordine care nu este totală (pentru că, de exemplu, 3 nu divide 7 și 7 nu divide 3)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{Z}$ ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^2$) este o preordine care

Exemple de relații de ordine

Exemplu (continuare)

nu este relație de ordine (pentru că, de exemplu, $5|(-5)$ și $(-5)|5$, dar $5 \neq -5$, prin urmare $|$ pe $\mathbb{Z}$ nu este antisimetrică)

Exemplu

Pentru orice mulțime T, $\subseteq$ este o relație de ordine pe $\mathcal{P}(T)$, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$; într–adevăr:

- dacă $T = \emptyset$, atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că $\emptyset \subseteq \emptyset$
- dacă $T = \{\star\}$ (*singleton*, i. e. mulțime cu un singur element, mulțime de cardinal 1), atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\{\star\}) = \{\emptyset, \{\star\}\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset, \{\star\}\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că: $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \subseteq \{\star\}$ și $\{\star\} \subseteq \{\star\}$
- dacă $|T| \geq 2$, adică T are cel puțin două elemente distincte, atunci: alegând (la întâmplare, i. e. arbitrar) două elemente $a, b \in T$ cu $a \neq b$, rezultă că $\{a\} \in \mathcal{P}(T)$, $\{b\} \in \mathcal{P}(T)$, și $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ și $\{b\} \nsubseteq \{a\}$

Notă

Vom folosi adesea notația $\leq$ pentru relații de ordine, chiar dacă nu este vorba de relația de ordine uzuală pe o mulțime de numere.

Mulțimi ordonate

Definiție

- O mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează $(A, \leq)$ și se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set").
- Dacă, în plus, $\leq$ este o relație de ordine totală, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Exemplu

- Posetul $(\mathbb{N}, \leq)$ este lanț (unde $\leq$ este relația de ordine naturală pe $\mathbb{N}$).
- Posetul $(\mathbb{N}, |)$ nu este lanț.

A se vedea și celelalte exemple de relații de ordine de mai sus.

Observație

Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operații**, ci cu o **relație binară.**

Mulțimi ordonate

Observație (continuare)

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notațiile din definiția anterioară, A se numește *mulțimea elementelor*, sau *mulțimea suport*, sau *mulțimea subiacentă* posetului $(A, \leq)$; vom vedea și noțiunile de **substructură** a unui poset și **morfism** de poseturi.

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<:=\leq \setminus \Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ și } a \neq b\}$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq$.
Relației de ordine $\leq$ pe A i se asociază *relația de succesiune* (numită și *relația de acoperire*), notată $\prec$ și definită astfel:
$\prec := \{(a, b) \in A^2 \mid a < b \text{ și nu există } x \in A \text{ a. î. } a < x < b\} \subseteq A^2$.
Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numește *succesor al lui a* (se mai spune că *b acoperă pe a*)
- a se numește *predecesor al lui b* (sau se spune că *a este acoperit de b*)

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, $\prec$ e asimetrică (deci și ireflexivă) și nu e tranzitivă.

Mulțimi ordonate

Notație (notații uzuale într–un poset)

Cu notațiile din definiția anterioară: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Exemplu (temă)

- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{N}$ este relația "sunt numere consecutive", i. e. relația $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ este $\emptyset$, pentru că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$ (sau $a, b \in \mathbb{R}$) cu $a < b$, există $x \in \mathbb{Q}$ (sau $x \in \mathbb{R}$), a. î. $a < x < b$.

- Proprietatea observată mai sus a mulțimilor ordonate $(\mathbb{Q}, \leq)$ și $(\mathbb{R}, \leq)$ se numește *densitate* și, de obicei, se enunță pentru mulțimi **total** ordonate, dar poate fi definită și în cazul general al poseturilor, astfel:

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<$ ordinea strictă asociată lui $\leq$. Spunem că mulțimea A este *densă raportat la ordinea* $\leq$, sau că $\leq$ este o *ordine densă pe* A ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$.

- Așadar, $\leq$ este o ordine densă pe $\mathbb{Q}$ și pe $\mathbb{R}$.

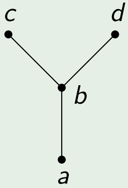
Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Amintim că relațiile binare (pe mulțimi finite și nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relațiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ține seama de proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie ale unei relații de ordine pentru a elimina redundanțele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăți. Această reprezentare grafică a unei relații de ordine se numește *diagramă Hasse*.
- Și această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relații (de ordine) pe mulțimi finite și nevide.
- Dacă $(A, \leq)$ este un poset finit și nevid (i. e. cu A finită și nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ este graful neorientat având mulțimea nodurilor egală cu A și mulțimea muchiilor egală cu relația de succesiune $\prec$ asociată lui $\leq$ și a cărui reprezentare grafică respectă regula:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găsește în relația de ordine strictă $<$ asociată lui $\leq$, i. e. nodurile "strict mai mari" decât el.**

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Exemplu

Posetul $(A, \leq)$ dat de $A = \{a, b, c, d\}$ și $\leq = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}$ are următoarea diagramă Hasse:



Observație (diagrama Hasse: reprezentare minimală, fără redundanțe)

Într–o diagramă Hasse, buclele sunt eliminate (orice ordine este reflexivă, deci nu e nevoie să se deseneze arce între un vârf și el însuși), și orice arc care rezultă prin tranzitivitate din altele este, de asemenea, eliminat. Mai mult, antisimetria unei ordini arată că nu există circuite în graful orientat asociat unei ordini (graf orientat asociat la fel ca în cazul relațiilor binare oarecare), iar acest fapt permite reprezentarea printr–un graf neorientat, cu acea convenție privind poziționarea nodurilor.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Faptul că, într–un poset finit și nevid $(A, \leq)$, două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $<:=\leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y și
- x și y sunt conectate printr–un lanț (mai precis, prin cel puțin un lanț; aici, **lanț** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulțimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulțime total ordonată a posetului $(A, \leq)$, adică este un lanț cu ordinea indusă).

Observație

În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Diagrama Hasse a unei **mulțimi liniar ordonate** este "liniară".
Amintim că o **mulțime liniar ordonată** se mai numește **mulțime total ordonată** sau **lanț**.

Notație

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanțul cu** k **elemente** prin $\mathcal{L}_k$ (articolul hotărât va fi explicat în remarca următoare). De obicei, mulțimea suport a lanțului $\mathcal{L}_k$ se notează cu L_k. Evident, orice mulțime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanțul cu k elemente.

Remarcă

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanțul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulțime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

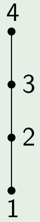
Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Remarcă (continuare)

Mai precis, dacă L_k este o mulțime cu exact k elemente, iar $\leq$ și $\sqsubseteq$ sunt două ordini totale pe L_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ și $(L_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k și M_k sunt mulțimi cu exact k elemente, iar $\leq$ este o ordine totală pe L_k și $\sqsubseteq$ este o ordine totală pe M_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ și $(M_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulțumim cu explicația intuitivă: două poseturi finite și nevide sunt **izomorfe** ddacă **au aceeași diagramă Hasse.**

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente: $\mathcal{L}_4 = (L_4, \leq)$, cu $L_4 := \{1, 2, 3, 4\}$ și $\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$, are următoarea diagramă Hasse:



- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie $(A, \leq)$ un poset și $X \subseteq A$.

Remarcă

Este imediat faptul că relația binară pe X dată de mulțimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X, și că, dacă ordinea $\leq$ pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiție

Ordinea pe X din remarca anterioară se numește *ordinea indusă de* $\leq$ *pe* X și se notează tot cu $\leq$.
Posetul $(X, \leq)$ se numește *subposet* sau *submulțime (parțial) ordonată a lui* $(A, \leq)$.
Dacă $(X, \leq)$ este un lanț (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci $(X, \leq)$ se numește *submulțime total ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $a \in A$ se numește:

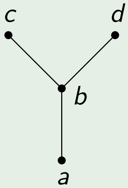
- *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarcă

X poate avea mai mulți minoranți (majoranți), și poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minoranții a și b și nu are niciun majorant.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

- Un minorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numește *minim al lui* X sau *prim element al lui* X sau *cel mai mic element al lui* X și se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numește *maxim al lui* X sau *ultim element al lui* X sau *cel mai mare element al lui* X și se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarcă

După cum arată primul exemplu de mai jos, minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui $\leq$ implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notația de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru maxim.

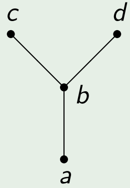
Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit*. (Minimul și maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiția anterioară.)

Elemente distinse într–un poset

Exemplu

În posetul având diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minimul b și nu are maxim, iar întreaga mulțime $\{a, b, c, d\}$ (întregul poset) are minimul a și nu are maxim.

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente este un poset mărginit (la fel ca orice lanț finit și nevid; a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*).

Remarcă

O mulțime care are minim sau maxim are cel puțin un element (pentru că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi și la fel și maximul), deci nu poate fi vidă.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $x \in X$ se numește:

- *element minimal al lui* X ddacă este minimul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui* X ddacă este maximul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarcă

Din definiția anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X și minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Reprezentarea prin diagrame Hasse a poseturilor finite se bazează pe următoarele rezultate, care pot fi demonstrate simplu, prin reducere la absurd și inducție matematică, ajungându–se la contradicție cu finitudinea posetului (a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*); a treia remarcă de mai jos arată că orice diagramă Hasse corespunde unui unic poset:

Remarcă (temă)

Orice poset finit și nevid are elemente maximale și elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit și nevid $(A, \leq)$, există un element minimal e și un element maximal E în posetul $(A, \leq)$, cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, orice element care nu este element maximal are cel puțin un succesor, și orice element care nu este element minimal are cel puțin un predecesor.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, închiderea tranzitivă a relației de succesiune este relația de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relației de succesiune (i. e. preordinea generată de relația de succesiune) este relația de ordine.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Infimumul lui X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulțimii minoranților lui X, și se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.
Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulțimii majoranților lui X, și se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

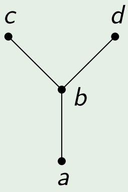
Remarcă

După cum arată exemplele de mai jos, infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulțimea minoranților este nevidă.
Dar, fiind maximul unei mulțimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât și notația, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru supremum.

Elemente distinse într–un poset

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



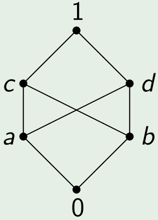
submulțimea $\{c, d\}$ are infimumul b și nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților lui $\{c, d\}$ este vidă și, deci, nu are minim.

Observație

Într–o diagramă Hasse, nodurile sunt marcate prin cerculețe. Nu toate intersecțiile de muchii sunt noduri, după cum ilustrează următorul exemplu.

Exemplu

Notăm relația de ordine a posetului dat de următoarea diagramă Hasse cu $\leq$, iar relația de ordine strictă asociată ei cu $<$.



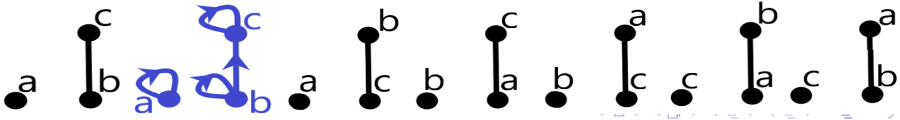
În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c < 1$, $d < 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 < a$, $0 < b$ și a și b sunt incomparabile).

Exercițiu

Să se determine toate relațiile de ordine pe o mulțime cu exact 3 elemente.

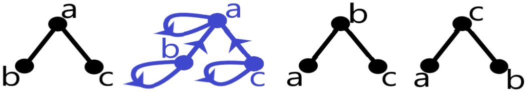
Rezolvare: Fie $A = \{a, b, c\}$, având $|A| = 3$ (i.e. cu $a \neq b \neq c \neq a$).
Enumerăm relațiile de ordine pe A în ordinea crescătoare a cardinalelor acestora.
Pentru fiecare set de poseturi izomorfe (vom vedea), adică având diagramele Hasse de aceeași formă, vom face diagrama prin graf orientat a relației de ordine dintr–unul singur dintre aceste poseturi.
Ca pentru orice mulțime A, cea mai mică relație de ordine pe A este Δ_A, având $|\Delta_A| = 3$; posetul (A, Δ_A) este *antilanțul* cu mulțimea suport A, adică posetul $(A, \leq)$ în care oricare două elemente diferite nu sunt comparabile: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \neq y$, atunci $x \nleq y$ și $y \nleq x$. Așadar, în acest caz, antilanțul cu exact 3 elemente:

Relațiile de ordine de cardinal 4: câte două elemente comparabile, al treilea incomparabil cu fiecare dintre ele:

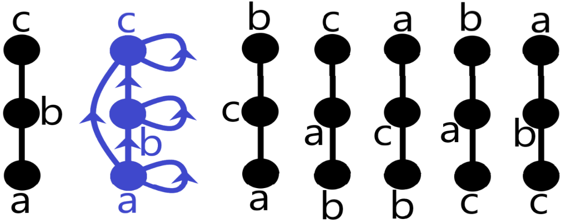


Relațiile de ordine de cardinal 5 formând poseturi care au minim și câte două elemente maximale distincte:

Relațiile de ordine de cardinal 5 formând poseturi care au maxim și câte două elemente minimale distincte:



Relațiile de ordine de cardinal 6, anume relațiile de ordine totale (adică liniare) pe A, i.e. cele care formează lanțuri $(A, \leq)$ (în acest caz lanțuri cu exact 3 elemente), și singurele din acest caz $|A| = 3$ în care $<= \mathcal{T}(\prec) \neq \prec$:



În total, există 19 relații de ordine pe A, de 5 tipuri, adică formând 5 poseturi modulo izomorfism, adică maxim 5 poseturi două câte două neizomorfe.

Remarcă

Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparține mulțimii ddacă este minimul mulțimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, și atunci $\min(X) = \inf(X)$. Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparține mulțimii ddacă este maximul mulțimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, și atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarcă

Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Elemente distinse într–un poset

Lemă

Fie $(L, \leq)$ *un poset. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $x \leq y$
2. *există în* L $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în* L $\sup\{x, y\} = y$

Demonstrație: Vom folosi definițiile infimumului, supremumului, minimului și maximului unei submulțimi a unui poset, și le vom aplica acestui caz particular al submulțimilor cu 1 sau 2 elemente.

Fie $x, y \in L$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Dacă $x \leq y$, atunci $x = \min\{x, y\} = \inf\{x, y\}$ în L.

(1) $\Rightarrow$ (3): Dacă $x \leq y$, atunci $y = \max\{x, y\} = \sup\{x, y\}$ în L.

(2) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\inf\{x, y\}$, atunci $\inf\{x, y\} \leq y$, prin urmare, dacă, în plus, $\inf\{x, y\} = x$, atunci $x \leq y$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\sup\{x, y\}$, atunci $x \leq \sup\{x, y\}$, prin urmare, dacă, în plus, $\sup\{x, y\} = y$, atunci $x \leq y$.

Corolar

Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *x și y sunt comparabile în posetul L*
2. *există în L $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$*
3. *există în L $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$*

Demonstrație: x și y sunt comparabile în L ddacă $x \leq y$ sau $y \leq x$ ddacă există în L $\min\{x, y\}$ ddacă există în L $\max\{x, y\}$.
Desigur, $x \leq y$ ddacă $\min\{x, y\} = x$ ddacă $\max\{x, y\} = y$ în L, în timp ce $y \leq x$ ddacă $\min\{x, y\} = y$ ddacă $\max\{x, y\} = x$ în L.
Conform lemei anterioare, $x \leq y$ ddacă există în L $\inf\{x, y\} = x = \min\{x, y\}$ ddacă există în L $\sup\{x, y\} = y = \max\{x, y\}$, în timp ce $y \leq x$ ddacă există în L $\inf\{x, y\} = y = \min\{x, y\}$ ddacă există în L $\sup\{x, y\} = x = \max\{x, y\}$.
Prin urmare: x și y sunt comparabile ddacă $x \leq y$ sau $y \leq x$ ddacă există în L $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ ddacă există în L $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Principiul dualității pentru poseturi

- **Principiul dualității pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset* **arbitrar (fapt esențial)** $(A, \leq)$ *rămâne valabil dacă înlocuim* $\leq$ *cu* $\leq^{-1}$ *(notată* $\geq$*, ca mai sus;* conform definiției inversei unei relații binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare*),* $<$ *cu* $<^{-1}$ *(notată* $>$*),* $\prec$ *cu* $\prec^{-1}$ *(notată* $\succ$*), toți minoranții cu majoranți (ca noțiuni) și vice–versa, toate elementele minimale cu elemente maximale și vice -versa, toate minimurile cu maximuri și vice -versa și toate infimumurile cu supremumuri și vice–versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este ușor de observat din faptul că: pentru orice ordine $\leq$, $\geq$ este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relația de succesiune $\succ$, $\leq$ este totală ddacă $\geq$ este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranții lui $(X, \leq)$ sunt exact majoranții lui $(X, \geq)$ și vice–versa, elementele minimale ale lui $(X, \leq)$ sunt exact elementele maximale ale lui $(X, \geq)$ și vice–versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ și vice–versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, și, atunci când există, sunt egale; la fel vice–versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ și vice–versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noțiunile de minorant și majorant sunt *duale una alteia*, și la fel pentru noțiunile de element minimal și element maximal, minim și maxim, infimum și supremum, respectiv.

Într–adevăr:

- $\geq = \leq^{-1}$ este o relație de ordine pe A,

pentru că $\leq$ este o relație de ordine pe A și deci:
$\leq$ e reflexivă, așadar $\Delta_A \subseteq \leq$, prin urmare $\Delta_A = \Delta_A^{-1} \subseteq \leq^{-1} = \geq$, deci $\geq$ e reflexivă;
$\leq$ e tranzitivă, așadar $\leq \circ \leq \subseteq \leq$, prin urmare
$\geq \circ \geq = \leq^{-1} \circ \leq^{-1} = (\leq \circ \leq)^{-1} \subseteq \leq^{-1} = \geq$, deci $\geq$ e tranzitivă;
$\leq$ e antisimetrică, așadar $\leq \cap \leq^{-1} \subseteq \Delta_A$, prin urmare
$\geq \cap \geq^{-1} = \leq^{-1} \cap (\leq^{-1})^{-1} = \leq^{-1} \cap \leq \subseteq \Delta_A$, deci $\geq$ e antisimetrică;

- $> = <^{-1}$ este relația de ordine strictă pe A asociată relației de ordine $\geq$,

pentru că $> = <^{-1} = (\leq \setminus \Delta_A)^{-1} = \leq^{-1} \setminus \Delta_A^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$;

- $\succ = \prec^{-1}$ este relația de succesiune asociată relației de ordine $\geq$,

pentru că, oricare ar fi $a, b \in A$, avem: $(b, a) \in \succ = \prec^{-1}$ ddacă $(a, b) \in \prec$ ddacă $a < b$ și $(\nexists x \in A)\,(a < x < b)$ ddacă $b > a$ și $(\nexists x \in A)\,(b > x > a)$;

- și, pentru orice $a \in A$ și orice $X \subseteq A$, au loc următoarele:

• a e minorant pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $(\forall x \in X)\,(a \geq x)$ ddacă $(\forall x \in X)\,(x \leq a)$ ddacă a e majorant pentru X în posetul $(A, \leq)$;
• a e majorant pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $(\forall x \in X)\,(x \geq a)$ ddacă $(\forall x \in X)\,(a \leq x)$ ddacă a e minorant pentru X în posetul $(A, \leq)$;

Principiul dualității pentru poseturi

- a e element minimal pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(x > a)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(a < x)$ ddacă a e element maximal pentru X în posetul $(A, \leq)$;
- a e element maximal pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(a > x)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(x < a)$ ddacă a e element minimal pentru X în posetul $(A, \leq)$;

m $a = \min(X, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(a \geq x)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(x \leq a)$ ddacă $a = \max(X, \leq)$;

M $a = \max(X, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(x \geq a)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(a \leq x)$ ddacă $a = \min(X, \leq)$;

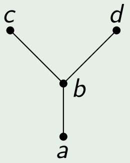
- $a = \inf(X, \geq)$ ddacă $a = \max(\{m \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(m \geq x)\}, \geq)$ ddacă (aplicând proprietatea M de mai sus) $a = \min(\{m \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(m \geq x)\}, \leq)$ ddacă $a = \min(\{m \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(x \leq m)\}, \leq)$ ddacă $a = \sup(X, \leq)$;
- $a = \sup(X, \geq)$ ddacă $a = \min(\{M \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(x \geq M)\}, \geq)$ ddacă (aplicând proprietatea m de mai sus) $a = \max(\{M \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(x \geq M)\}, \leq)$ ddacă $a = \max(\{M \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(M \leq x)\}, \leq)$ ddacă $a = \inf(X, \leq)$.

Principiul dualității pentru poseturi

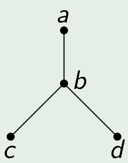
- Posetul $(A, \geq)$ se numește *posetul dual* al posetului $(A, \leq)$.
- Este evident că dualul dualului unui poset $(A, \leq)$ este chiar $(A, \leq)$.
- De acum încolo, ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualității pentru poseturi** în demonstrații, vom scrie, simplu, “prin dualitate“.

Exemplu

- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obține prin “răsturnarea diagramei Hasse“ a acelui poset “cu susul în jos“.



$(P, \leq)$



$(P, \geq) =$ dualul lui $(P, \leq)$

- Lanțurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarcă

Fie $(A, \leq)$ un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \nleq b$;
- dacă $(A, \leq)$ este lanț, atunci: $b < a$ ddacă $a \nleq b$.

Exemplu

Se poate demonstra că orice submulțime finită și nevidă a unui lanț are un minim și un maxim, astfel: arătând prin inducție după cardinalul submulțimii existența minimului, iar existența maximului rezultă **prin dualitate**.

Observație

O consecință a remarcii din exemplul anterior este faptul că orice lanț finit și nevid este un poset mărginit (fapt menționat și mai sus).

Remarcă

Fie $(L, \leq)$ un poset și $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ și $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.
Într–adevăr, cum $X \neq \emptyset$, rezultă că există $x \in X$. $\inf(X)$ este un minorant al lui X, iar $\sup(X)$ este un majorant al lui X, prin urmare $\inf(X) \leq x \leq \sup(X)$, deci $\inf(X) \leq \sup(X)$ prin tranzitivitate.

Elemente distinse într–un poset

Caracterizarea supremumului si a infimumului de mai sus fac demonstrațiile următoarelor remarci foarte simple.

Remarcă

Pentru orice mulțime T, în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup\limits_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap\limits_{A \in X} A$

Remarcă (temă: scrieți această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$)

Fie $(L, \leq)$ un poset și $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(X)$ și $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ și $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare.

Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

Într–un poset $(L, \leq)$, $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, și, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$.

Într–adevăr, $\sup(\emptyset) \overset{\text{definiție}}{=} \min\{x \mid x \in L, \text{ a. î. } (\forall y)(y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x)\} = \min\{x \mid x \in L\} = \min(L)$ ($\sup(\emptyset)$ și $\min(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale), pentru că, oricare ar fi un element y, afirmația $y \in \emptyset$ este falsă, și deci implicația $y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x$ este adevărată pentru orice element x. Dual, $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale.

Propoziție

Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L;*
2. *pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L.*

Demonstrație: Condiția (1) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are minim, iar condiția (2) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are maxim. Deci, dacă $(L, \leq)$ satisface una dintre condițiile (1) și (2), atunci L este nevidă.

Elemente distinse într–un poset

(1) $\Rightarrow$ (2) : Ipoteza acestei implicații, anume existența în $(L, \leq)$ a infimumurilor tuturor submulțimilor lui L, implică faptul că:

- L este nevidă;
- în $(L, \leq)$ există $\inf(\emptyset) = \max(L)$, conform remarcii anterioare; deci $(L, \leq)$ are maxim;
- în $(L, \leq)$ există $\inf(L) = \min(L)$; deci $(L, \leq)$ are minim.

Conform remarcii anterioare, rezultă că în $(L, \leq)$ există $\sup(\emptyset) = \min(L)$.
Fie, acum, $\emptyset \neq A \subseteq L$ și $M := \{m \in L \mid (\forall x \in A)\,(x \leq m)\} \subseteq L$, i. e. M este mulțimea majoranților lui A. $M \neq \emptyset$, pentru că $\max(L) \in M$.
Faptul că $(L, \leq)$ satisface condiția (1) arată că există $s := \inf(M) \in L$.
Pentru orice $x \in A$ și orice $y \in M$, are loc $x \leq y$, conform definiției mulțimii M (am putut aplica axioma alegerii lui A și M, întrucât sunt ambele nevide). Deci orice element x al mulțimii nevide A este minorant al lui M. Definiția infimumului arată acum că $x \leq \inf(M) = s$, oricare ar fi $x \in A$. Deci $s = \inf(M)$ este un majorant al lui A, adică $s = \inf(M) \in M$, conform definiției lui M. Dar $s = \inf(M) \in M$ înseamnă că $s = \min(M)$, adică s este cel mai mic majorant al lui A, adică $s = \sup(A)$, conform definiției supremumului.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Definiție

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie arbitrară de mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Notație

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Notație

Dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A, B, C, se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și o identificare de indici, adică o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A \coprod (B \coprod C) = (A \coprod B) \coprod C$.

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$? Putem considera că familia de mulțimi {A,B} este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \dot{+} (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$, unde $\leq \dot{+} \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod B$: $\leq \dot{+} \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$:
  $\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care $(A, \leq)$ are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar $(B, \sqsubseteq)$ are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod (B \setminus \{0\})$, cu aceleași identificări ca mai sus: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Observație

Definiția de mai sus a relației binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiției unui

produs direct arbitrar de relații binare, prezentate într–un curs anterior.
În unele cărți și articole se folosesc următoarele denumiri:

- *suma ordinală* definită ca mai sus e numită *sumă alipită*;
- *suma directă* definită ca mai sus e numită *sumă ordinală*.

În cursurile mele mai vechi puteți găsi notațiile $\dot{+}$ și $\oplus$ pentru sumele directe, respectiv ordinale inversate. La **examen** este necesar să le folosiți pe cele din cursul de anul acesta.

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \dot{+} \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, și sumă ordinală, $\leq \oplus \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \coprod B$, $A \times B$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică:$(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.
Acest fapt se demonstrează prin verificarea directă, cu definiția, a proprietăților unei relații de ordine (reflexivitate, tranzitivitate, antisimetrie).
În cazul sumei directe și a sumei ordinale, se analizează toate cazurile în care se pot afla câte două elemente $x, y \in A \coprod B$ vizavi de mulțimile “din care provin“ acestea: sunt ambele din A, ambele din B, sau unul din A și unul din B.
În cazul produsului direct, acest fapt se obține dintr–un rezultat mai general, dintr–un curs anterior, rezultat privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Se observă din diagramele Hasse care urmează și se demonstrează ușor că:

- **suma directă** și **suma ordinală** de poseturi **sunt asociative**, dar **nu sunt comutative**;
- **produsul direct** de poseturi **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ și $(C, \leq_C)$, există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c)))$ și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiția unui produs direct de algebre).

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi.

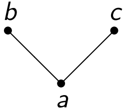
1. Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
2. Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
3. Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq)$ sunt izomorfe.
4. Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.
5. Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarcă

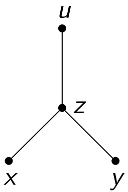
Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanț nevid $(L, \leq)$ este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu $(L, \leq)$ și fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Să vedem cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct și sumă ordinală între două poseturi finite**.
Fie, pentru exemplificare, următoarele două poseturi:



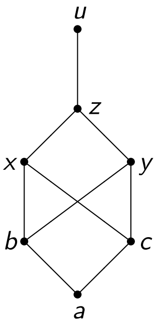
$(A, \leq)$



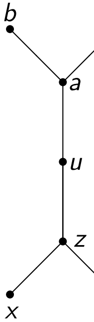
$(B, \sqsubseteq)$

Suma directă de poseturi

Diagrama Hasse a sumei directe $(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$ se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$, apoi se unește fiecare element maximal al lui A cu fiecare element minimal al lui B:



$(A, \leq) \dot{+} (B, \sqsubseteq) = (A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$



$(B, \sqsubseteq) \dot{+} (A, \leq) = (B \coprod A, \sqsubseteq \dot{+} \leq)$

$\leq \dot{+} \sqsubseteq = \leq \coprod \sqsubseteq \coprod \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$, iar
$\sqsubseteq \dot{+} \leq = \sqsubseteq \coprod \leq \coprod \{(\beta, \alpha) \mid \beta \in B, \alpha \in A\}$.

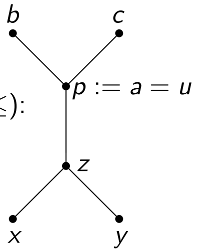
După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru $(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$ și $(B \coprod A, \sqsubseteq \dot{+} \leq)$, suma directă de poseturi nu este comutativă, întrucât aceste două poseturi nu sunt izomorfe.

Suma ordinală de poseturi

Se poate efectua suma ordinală numai între un poset cu maxim și unul cu minim, așadar putem efectua suma ordinală a lui $(B, \sqsubseteq)$ cu $(A, \leq)$, **nu și invers**.

Diagrama Hasse a sumei ordinale $(B \oplus A, \sqsubseteq \oplus \leq) := (B, \sqsubseteq) \oplus (A, \leq)$, se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$, se identifică maximul lui $(B, \sqsubseteq)$ cu minimul lui $(A, \leq)$, astfel obținându–se un punct comun p, și cele două diagrame Hasse se unesc în acest punct comun, astfel că: $B \oplus A = ((B \coprod A) \setminus \{a, u\}) \coprod \{p\} = (B \setminus \{u\}) \coprod (A \setminus \{a\}) \coprod \{p\}$, iar $\sqsubseteq \oplus \leq = (\sqsubseteq \setminus \{(\beta, u) \mid \beta \in B\}) \coprod (\leq \setminus \{(a, \alpha) \mid \alpha \in A\}) \coprod \{(\beta, p), (p, \alpha), (\beta, \alpha) \mid \beta \in B, \alpha \in A\}$:

$(B \oplus A, \sqsubseteq \oplus \leq) = (B, \sqsubseteq) \oplus (A, \leq)$:

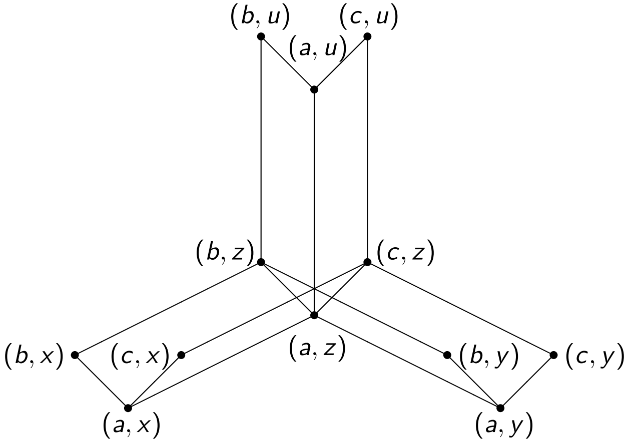


După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru suma directă și suma ordinală a acestor poseturi, prima dintre ele are o muchie în plus față de cea de–a doua. Suma ordinală se poate obține din suma directă prin identificarea lui $B \oplus A$ cu mulțimea factor a lui $B \amalg A$ prin relația de echivalență corespunzătoare partiției $\{\{a, u\}\} \cup \{\{\alpha\} \mid \alpha \in (B \coprod A) \setminus \{a, u\}\}$: p se identifică cu $\{a, u\}$, iar fiecare $\alpha \in (B \coprod A) \setminus \{a, u\}$ se identifică cu $\{\alpha\}$.

Diagrama Hasse a produsului direct $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ se obține astfel:

- se desenează $|B|$ (adică 4, aici) copii ale diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ și se așează pe pozițiile în care apar nodurile în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$;
- se etichetează fiecare nod din fiecare copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ cu perechea formată din:
  - eticheta lui din diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$
    și
  - eticheta nodului din diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ căruia îi corespunde respectiva copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$;
- se adaugă muchiile care unesc fiecare nod etichetat cu (α, β), cu $\alpha \in A$ și $\beta \in B$, cu fiecare nod etichetat cu (α, γ), cu $\gamma \in B$ și β și γ unite prin muchie în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$:

Produsul direct de poseturi



$$(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq) \cong (B \times A, \sqsubseteq \times \leq) = (B, \sqsubseteq) \times (A, \leq)$$

Se observă că produsul direct de poseturi este comutativ, adică poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq) \times (A, \leq) = (B \times A, \sqsubseteq \times \leq)$ sunt izomorfe, $\varphi : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$, $\varphi(a, b) = (b, a)$, fiind un izomorfism de poseturi între ele.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația sumă directă de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **sumă directă a unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin următoarea **definiție recursivă**: suma directă a familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \dot{+} (A_2, \leq_2) \dot{+} \ldots \dot{+} (A_n, \leq_n)$ sau $\dot{+}_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n, \leq_1 \dot{+} \leq_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \leq_n)$ sau $(\coprod_{i=1}^{n} A_i, \dot{+}_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul definit, recursiv, astfel:

$$\dot{+}_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\dot{+}_{i=1}^{n-1}(A_i, \leq_i)) \dot{+} (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

La fel pentru suma ordinală a familiei de poseturi $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, pentru cazul în care $(A_1, \leq_1)$ are maxim $(A_n, \leq_n)$ are minim, iar $(A_2, \leq_2), \ldots, (A_{n-1}, \leq_{n-1})$ sunt poseturi mărginite.

Se pot face generalizări și la cazuri infinite.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația produs direct de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **produs direct al unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin **definiția recursivă**: produsul direct al familiei $(A_i, \leq_i)_{i\in\overline{1,n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2) \times \ldots \times (A_n, \leq_n)$ sau $\prod_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \leq_1 \times \leq_2 \times \ldots \times \leq_n)$ sau $(\prod_{i=1}^{n} A_i, \prod_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul definit, recursiv, astfel:

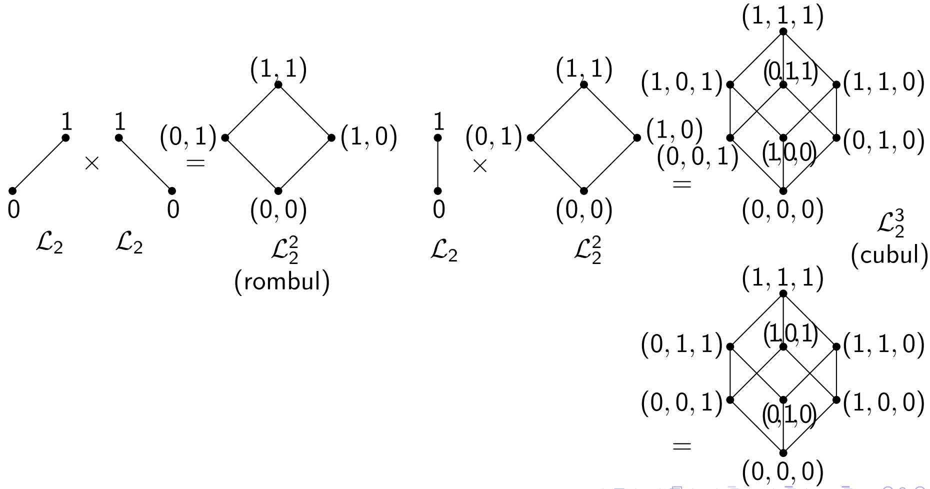
$$\prod_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\prod_{i=1}^{n-1}(A_i, \leq_i)) \times (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Notație

Cu notațiile din remarca anterioară, dacă $(A_1, \leq_1) = (A_2, \leq_2) = \ldots = (A_n, \leq_n) = (A, \leq)$, atunci produsul direct $(\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}, \underbrace{\leq \times \leq \times \ldots \times \leq}_{n \text{ de } \leq})$ se mai notează cu $(A^n, \leq)$.

Vom vedea că puterile lanțului cu două elemente sunt algebre Boole

Considerăm lanțul cu (exact) două elemente: $\mathcal{L}_2 = (\{0,1\}, \leq)$, cu $0 < 1$.



Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i \in I} \leq_i$ este următoarea relație binară pe produsul direct de mulțimi $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\}$: pentru orice $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } (\forall\, i \in I)\,(f(i) \leq_i g(i))$$

După cum știm din rezultatul privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare, relația $\leq$ definită mai sus este o **relație de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

Notație

Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine $(A^I, \leq)$ (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \to A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă și succesiunea asociate ordinii produs

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ și, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq_i$, iar cu $\prec_i$ relația de succesiune asociată lui $\leq_i$, și cu $<$ notăm relația de ordine strictă asociată ordinii produs $\leq$, iar cu $\prec$ notăm relația de succesiune asociată lui $\leq$, atunci:

- $<= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I}$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists\, k \in I)\,[a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)]\}$.

Într–adevăr, să considerăm $a = (a_i)_{i \in I} \in A$ și $b = (b_i)_{i \in I} \in A$.
Dacă $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)$, atunci $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $a < b$.
Dacă $a < b$, atunci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \leq = \prod_{i \in I} \leq_i$ și $(a_i)_{i \in I} \neq (b_i)_{i \in I}$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$, ceea ce este echivalent cu $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \leq b_k$ și $a_k \neq b_k)$, adică $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)$.
Așadar are loc egalitatea între $<$ și mulțimea de mai sus.

Relația de succesiune asociată ordinii produs

Remarcă (continuare)

Să presupunem că există un $k \in I$ astfel încât $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$. Atunci $a_k <_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i \leq_i b_i)$, deci $a < b$, conform expresiei lui $<$ de mai sus. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, astfel încât $a \leq x \leq b$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$. Atunci $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i \leq_i x_i \leq_i b_i = a_i \leq a_i)$ și $a_k \leq_k x_k \leq_k b_k$, prin urmare $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = x_i = b_i)$, conform tranzitivității și antisimetriei lui $\leq_i$ pentru fiecare $i \in I \setminus \{k\}$, și $a_k = x_k$ sau $x_k = b_k$, întrucât $a_k \prec_k b_k$. Așadar $(\forall\, i \in I)\,(a_i = x_i)$ sau $(\forall\, i \in I)\,(x_i = b_i)$, adică $a = x$ sau $x = b$. Prin urmare, $a \prec b$.

Acum să presupunem că $a \prec b$. Atunci $a < b$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$. Presupunem prin absurd că există $j, k \in I$ astfel încât $j \neq k$, $a_j \neq b_j$ și $a_k \neq b_k$. Atunci $a_j <_j b_j$ și $a_k <_k b_k$. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$ cu $x_k = b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(x_i = a_i)$. Atunci $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare există un unic $k \in I$ astfel încât $a_k \neq b_k$, deci $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$ și, intrucât $a_k \leq_k b_k$ și $a_k \neq b_k$, are loc $a_k <_k b_k$. Presupunem prin absurd că $a_k \not\prec_k b_k$. Atunci există un $u \in A_k$ astfel încât $a_k <_k u <_k b_k$. Atunci, considerând $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, cu $x_k = u$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(x_i = a_i)$, rezultă $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare, $a_k \prec_k b_k$. Deci $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$.

Așadar are loc și a doua egalitate de mai sus.

Remarcă (dualul unui produs direct de poseturi)

Cu notațiile din remarca anterioară: $\geq = \leq^{-1} = (\prod_{i\in I} \leq_i)^{-1} = \prod_{i\in I} \leq_i^{-1} = \prod_{i\in I} \geq_i$, așadar dualul produsului este produsul dualelor: $(A, \geq) = \prod_{i\in I}(A_i, \geq_i)$.

Remarcă (cazul particular al produsului a două poseturi)

Din remarcile anterioare deducem că, dacă $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ sunt poseturi, iar $\leq = \leq_A \times \leq_B$, astfel că $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) = (A \times B, \leq)$, atunci, cu notațiile uzuale, la care atașăm indici pentru poseturile $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$:

- $\geq = \geq_A \times \geq_B$;
- $< = \{((a, b), (a', b')) \mid a, a' \in A, b, b' \in B, (a = a' \text{ și } b <_B b') \text{ sau } (a <_A a' \text{ și } b = b')\} = \{((a, b), (a, b')) \mid a \in A, b, b' \in B, b <_B b'\} \cup \{((a, b), (a', b)) \mid a, a' \in A, b \in B, a <_A a'\}$;
- $\prec = \{((a, b), (a', b')) \mid a, a' \in A, b, b' \in B, (a = a' \text{ și } b \prec_B b') \text{ sau } (a \prec_A a' \text{ și } b = b')\} = \{((a, b), (a, b')) \mid a \in A, b, b' \in B, b \prec_B b'\} \cup \{((a, b), (a', b)) \mid a, a' \in A, b \in B, a \prec_A a'\}$. A se observa, din această expresie a lui $\prec$ pentru posetul produs, corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr–o diagramă Hasse.

Produsul direct al familiei vide

Remarcă

Produsul direct al familiei vide de mulțimi este **un singleton**, adică o mulțime cu un singur element.
Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*, *)\}$.
La fel stau lucrurile pentru produsul direct al unei familii vide de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos această generalizare).
Într–adevăr, să înlocuim mulțimea de indici I cu $\emptyset$ în definiția anterioară.
Reuniunea familiei vide de mulțimi este $\emptyset$, așadar mulțimea
$\prod\limits_{i \in \emptyset} A_i = \{f \mid f : \emptyset \to \emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$ (unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$; a se vedea definiția unei funcții).
Așadar, pentru orice mulțime A, $A^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.
Este admisă și notația A^0 în loc de $A^{\emptyset}$.
Aceste notații pot fi extinse la produsul direct al familiei vide de poseturi sau de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos).

Funcții izotone

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcție.
f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.
f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.
Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observație

Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarcă

Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ și posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Funcții izotone

Remarcă

Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă. Într adevăr, dacă $(P, \leq)$, $(Q, \sqsubseteq)$ și $(R, \trianglelefteq)$ sunt poseturi, iar $f : P \to Q$ și $g : Q \to R$ sunt funcții izotone, atunci, pentru orice $x, y \in P$: dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \sqsubseteq f(y)$, prin urmare $g(f(x)) \trianglelefteq g(f(y))$, adică $(g \circ f)(x) \trianglelefteq (g \circ f)(y)$, i. e. $g \circ f$ este izotonă.

Exercițiu (temă)

Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.
I. e., dacă:

- $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt două poseturi,
- $<:=\leq \setminus \Delta_A$ și $\sqsubset:=\sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinile stricte asociate lui $\leq$ și, respectiv, $\sqsubseteq$,
- iar $f : A \to B$ este o funcție izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

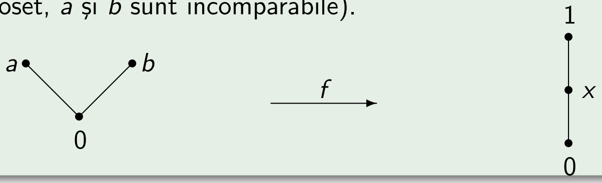
Funcții izotone

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin $f(0) = 0$, $f(a) = x$ și $f(b) = 1$, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei, care are valorile: $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = a$ și $f^{-1}(1) = b$, nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \not\leq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Funcții izotone

Remarcă

Fie $(L, \leq)$ un lanț (adică o mulțime total ordonată, adică o mulțime liniar ordonată). Atunci, pentru orice $a, b \in L$, $a \nleq b$ implică $b < a$, unde $<:=\leq \setminus \Delta_L$ este ordinea strictă asociată lui $\leq$. Într–adevăr, pentru orice $a, b \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț implică $a \leq b$ sau $b \leq a$, așadar, dacă $a \nleq b$, atunci $b \leq a$ și $a \neq b$, prin urmare $b < a$.
Temă: folosind antisimetria relației $\leq$, demonstrați că implicația reciprocă: $b < a$ implică $a \nleq b$, are loc în orice poset, indiferent dacă este lanț sau nu.

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \to M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.
Indicație: aplicați metoda reducerii la absurd, remarca anterioară și injectivitatea funcției din enunț.

Funcții izotone

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \to M$ o funcție surjectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci $(M, \sqsubseteq)$ este lanț.

Exercițiu (Teorema Knaster–Tarski (temă))

Fie $(L, \leq)$ un poset, iar $f : L \to L$ o funcție izotonă.

Dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

1. $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui* f) și $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;
2. dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Și **dual:** dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

1. $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui* f) și $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;
2. dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set") o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulțime A și o **relație de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relație binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.
Relația de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este
$< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.
Relația de succesiune asociată ordinii $\leq$ este
$\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\,(x < a < y)\}$.
Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Mnemonic despre poseturi

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, avem:

- $\geq$ este o relație de ordine pe A
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relația de succesiune asociată lui $\geq$

- La fel ca în cazul oricărui tip de structură algebrică, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că A este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport* a posetului $(A, \leq)$.

Operatori și sisteme de închidere

Pe tot parcursul acestei secțiuni a cursului, $(A, \leq)$ va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.
Următoarea definiție o generalizează pe cea din cursul anterior în care posetul de referință era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulțime arbitrară.
Toate demonstrațiile rezultatelor din această secțiune sunt analoge celor din cazul particular al posetului $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ incluse în cursul anterior. Transpunerea lor la cazul general de aici este un bun **exercițiu (temă)** pentru fiecare student.

Definiție

- Se numește *sistem de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o submulțime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulțime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în $(A, \leq)$ $\inf(S) \in M$.
- Se numește *operator de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o funcție $C : A \to A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietățile:
    1. $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
    2. $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
    3. dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Operatori și sisteme de închidere

Remarcă

Orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ conține $\inf(\emptyset) = \max(A)$, așadar orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ este nevid.

Exemplu

- id_A este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- Funcția constantă $C : A \to A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- A este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\emptyset$ nu este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziție

Dacă M este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, atunci, pentru orice $x \in A$, există în $(A, \leq)$ $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.
Iar, dacă definim $C_M : A \to A$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.

Demonstrație: temă facultativă.

Propoziție

Fie $C : A \to A$ *un operator de închidere pe* $(A, \leq)$. *Atunci imaginea lui* C *este un sistem de închidere pe* $(A, \leq)$, *având ca elemente exact punctele fixe ale lui* C: $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. *Vom nota cu* $M_C = C(A)$.

Demonstrație: temă facultativă.

Propoziție

Aplicațiile din cele două propoziții precedente sunt inverse una alteia, adică:

1. *pentru orice operator de închidere* $C : A \to A$ *pe* $(A, \leq)$, $C_{M_C} = C$;
2. *pentru orice sistem de închidere* M *pe* $(A, \leq)$, $M_{C_M} = M$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe $(A, \leq)$ *și mulțimea sistemelor de închidere pe* $(A, \leq)$ *sunt în bijecție.*

Demonstrație: temă facultativă.

Mulțimi parțial ordonate: poseturi

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set") o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulțime A și o **relație de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relație binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.
Relația de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este
$< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.
Relația de succesiune asociată ordinii $\leq$ este
$\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\,(x < a < y)\}$.

Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Remarcă (Cu notațiile din definiția anterioară, avem:)

- $\geq$ este o relație de ordine pe A; $(A, \geq)$ se numește *posetul dual posetului* $(A, \leq)$
- clar: $(A, \leq)$ este lanț ddacă $(A, \geq)$ este lanț
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relația de succesiune asociată lui $\geq$

- Să ne amintim că muchiile dintr–o diagramă Hasse reprezintă perechile din relația de succesiune, $\prec$, asociată ordinii posetului reprezentat prin acea diagramă.
- La fel ca în cazul oricărui tip de structură algebrică, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că A este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport* a posetului $(A, \leq)$.

Remarcă

Fie $(A, \leq)$ un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \not\leq b$;
- dacă $(A, \leq)$ este lanț, atunci: $b < a$ ddacă $a \not\leq b$.

Poseturi mărginite; funcții izotone

Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit* sau *poset cu* 0 *și* 1, iar minimul și maximul unui poset mărginit se notează adesea cu 0, respectiv 1.

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcție.
f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.
f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.
Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observație

Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarcă

Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ și posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Funcții izotone; izomorfisme de poseturi

Remarcă

- Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă.
- Orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare (dar nu și infimumurile și supremumurile, nici măcar pe ale mulțimilor finite, nici măcar dacă este bijectivă).
- Orice funcție izotonă duce lanțuri în lanțuri.
- Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

- **Intuitiv:** două poseturi finite sunt izomorfe ddacă au aceeași diagramă Hasse.

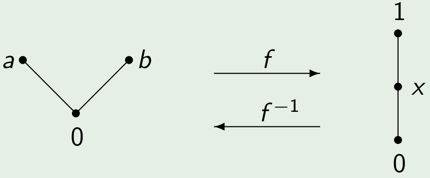
Remarcă

Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare.

Morfisme bijective versus izomorfisme de poseturi

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin următorul tabel, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \nleq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



u	0	a	b
$f(u)$	0	x	1

u	0	x	1
$f^{-1}(u)$	0	a	b

Demonstrația următoarei remarci (a se vedea seminarul) arată că aceasta e unica situație în care inversa unei funcții izotone bijective f între două poseturi $(P, \leq)$ și $(Q, \sqsubseteq)$ nu este izotonă: există $a, b \in P$, incomparabile, cu $f(a), f(b)$ comparabile.

Remarcă

Fie $f : L \to M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Latici

- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

  laticile Ore și **laticile Dedekind**,

  și apoi vom demonstra că orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore.
- Așadar, vom arăta că, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

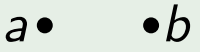
Latice Ore

Definiție

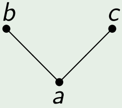
O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Exemplu (poseturi care nu sunt latici Ore)

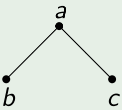
Mulțimile indicate sub aceste diagrame nu au minoranți/majoranți, așadar nu au infimum/supremum.



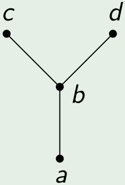
$\nexists \inf\{a, b\}$
$\nexists \sup\{a, b\}$



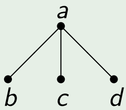
$\nexists \sup\{b, c\}$



$\nexists \inf\{b, c\}$



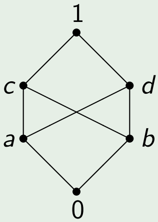
$\nexists \sup\{c, d\}$



$\nexists \inf\{b, c\}$
$\nexists \inf\{b, d\}$
$\nexists \inf\{c, d\}$

Poset finit și mărginit care nu este latice Ore

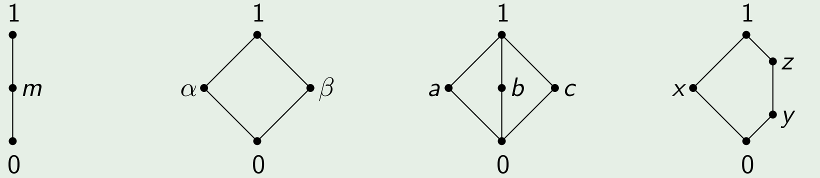
Exemplu



În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c \leq 1$, $d \leq 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 \leq a$, $0 \leq b$ și a și b sunt incomparabile).
Așadar, acest poset nu este o latice Ore, cu toate că este mărginit, așa cum vom vedea că sunt toate laticile finite.

Exemplu

Următoarele poseturi sunt latici Ore, după cum se poate verifica direct:



$\mathcal{L}_3$ *rombul* *diamantul* *pentagonul*

Primul dintre aceste poseturi este lanțul cu 3 elemente. Și denumirile celorlalte trei poseturi se datorează formelor diagramelor lor Hasse.

Remarcă

Orice lanț este latice Ore, pentru că, dacă $(L, \leq)$ este un lanț nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ și $\max\{x, y\}$, așadar există în $(L, \leq)$ $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Latice Dedekind

Definiție

O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulțime, iar $\vee$ și $\wedge$ sunt două operații binare pe L (adică $\vee : L^2 \to L$ și $\wedge : L^2 \to L$; aceste operații binare sunt notate infixat și numite, respectiv, *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*, sau *join* și *meet*, care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Exemplu

Pentru orice mulțime T, se verifică ușor că $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este o latice Dedekind, folosind proprietățile din calculul cu mulțimi demonstrate la primele seminarii.

Lemă (amintită din cele de mai sus)

Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $x \leq y$
2. *există în L* $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în L* $\sup\{x, y\} = y$

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $x \wedge y = x$
2. $x \vee y = y$

Demonstrație: Fie $x, y \in L$.
$(1) \Rightarrow (2)$: În următorul șir de egalități, mai întâi scriem x în concordanță cu ipoteza (1), apoi aplicăm comutativitatea lui $\vee$ și cea a lui $\wedge$, și, în final, absorbția: $x \wedge y = x$ implică $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (y \wedge x) = y$.
$(2) \Rightarrow (1)$: Urmărim pașii demonstrației implicației anterioare, sărind peste aplicarea comutativității, pentru că aici nu este necesară: $x \vee y = y$ implică $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Teoremă

Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

1. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \leq)$ *o latice Ore. Definim* $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$*, unde* $\vee$ *și* $\wedge$ *sunt operații binare pe mulțimea* L*, definite prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \vee y := \sup\{x, y\}$ *și* $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ *în laticea Ore* $\mathcal{L}$*. Atunci* $\Phi(\mathcal{L})$ *este o latice Dedekind.*
2. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ *o latice Dedekind. Definim* $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$*, unde* $\leq$ *este o relație binară pe mulțimea* L*, definită prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \leq y$ *ddacă* $x \vee y = y$ *(ceea ce este echivalent cu* $x \wedge y = x$*, după cum ne asigură o lemă de mai sus). Atunci* $\Psi(\mathcal{L})$ *este o latice Ore, în care, pentru orice* $x, y \in L$*,* $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *și* $\sup\{x, y\} = x \vee y$*.*
3. *Aplicațiile* Φ *și* Ψ *sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore* $\mathcal{L}$*,* $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*, și, pentru orice latice Dedekind* $\mathcal{L}$*,* $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*.*

Echivalența celor două definiții ale laticii

Demonstrație: **(1)** Ca în enunț, să considerăm o latice Ore $\mathcal{L} := (L, \leq)$, și să definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde $\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare pe mulțimea L, definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore $\mathcal{L}$. Trebuie să demonstrăm că $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.
A se observa că identitățile stabilite mai jos sunt valabile în orice poset în care există infimumurile și supremumurile care apar în aceste identități.
Este evident, din definiția maximului și a minimului și din reflexivitatea unei relații de ordine, că orice submulțime a lui L cu un singur element are maxim și minim, ambele egale cu unicul său element. Așadar, pentru orice $x \in L$,
$x \vee x = \sup\{x, x\} = \sup\{x\} = \max\{x\} = x$ și
$x \wedge x = \inf\{x, x\} = \inf\{x\} = \min\{x\} = x$, ceea ce înseamnă că operațiile $\vee$ și $\wedge$ sunt idempotente.
Pentru orice $x, y \in L$, avem egalitatea de mulțimi $\{x, y\} = \{y, x\}$, prin urmare $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$, deci $\vee$ și $\wedge$ sunt comutative.
Fie $x, y, z \in L$. Vom demonstra că există în L $\sup\{x, y, z\}$ și $\sup\{x, y, z\} = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ (știm că în L există supremumurile mulțimilor de 1 sau 2 elemente, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ există în L).
Să notăm $t := \sup\{y, z\}$ și $u := \sup\{x, t\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Egalitatea $t = \sup\{y, z\}$ și definiția supremumului arată că $y \leq t$ și $z \leq t$.
Similar, faptul că $u = \sup\{x, t\}$ implică $t \leq u$.
$y \leq t$ și $t \leq u$, deci $y \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$. Analog, $z \leq t$ și $t \leq u$ implică $z \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$.
$u = \sup\{x, t\}$, prin urmare $x \leq u$.
Deci $x \leq u$, $y \leq u$, $z \leq u$, așadar u este un majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$. Deci mulțimea $\{x, y, z\}$ are cel puțin un majorant. Vom demonstra că u este cel mai mic majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, adică este supremumul acestei mulțimi.
Fie $s \in L$ un majorant arbitrar (dar fixat) al mulțimii $\{x, y, z\}$.
Întrucât s este majorant pentru $\{x, y, z\}$, avem $y \leq s$ și $z \leq s$, de unde, ținând seama de faptul că $t = \sup\{y, z\}$, obținem $t \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Dar faptul că s este majorant pentru $\{x, y, z\}$ implică și $x \leq s$.
Deci $x \leq s$, $t \leq s$ și $u = \sup\{x, t\}$, de unde obținem $u \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Am arătat că $u \leq s$ pentru orice majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, ceea ce înseamnă că $\sup\{x, y, z\}$ există în L și $\sup\{x, y, z\} = u = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$.
Dar această egalitate ne dă și
$\sup\{x, y, z\} = \sup\{z, x, y\} = \sup\{z, \sup\{x, y\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{x, y, z\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, așadar $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.
(A se observa că, la fel ca mai sus, se poate demonstra, "din aproape în aproape" sau prin inducție matematică, faptul că în L există supremumul oricărei mulțimi finite nevide, și, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $x_1, \ldots, x_n \in L$,
$\sup\{x_1, \ldots, x_n\} = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ \sup\{\sup\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\}, & n > 1. \end{cases}$)
Principiul dualității pentru poseturi și identitatea
$\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$ arată că avem și
$\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$, adică $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
Am demonstrat că $\vee$ și $\wedge$ sunt asociative.
Pentru a demonstra absorbția, să considerăm $x, y \in L$. Avem de arătat că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$. Să notăm așadar $s := \sup\{x, y\}$ și $i := \inf\{x, s\}$.
$s = \sup\{x, y\}$, deci $x \leq s$, prin urmare $i = \inf\{x, s\} = \min\{x, s\} = x$, conform unei proprietăți a poseturilor demonstrate mai sus.
Deci $i = x$, ceea ce înseamnă că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$, adică $x \wedge (x \vee y) = x$.
Faptul că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$ și **Principiul dualității pentru poseturi** arată că avem și $\sup\{x, \inf\{x, y\}\} = x$, adică $x \vee (x \wedge y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\vee$ și $\wedge$ satisfac și absorbția, ceea ce încheie demonstrația punctului (1): $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.
(2) Ca în enunț, să considerăm o latice Dedekind $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ și să definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde $\leq$ este o relație binară pe mulțimea L, definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ (ddacă $x \wedge y = x$, conform unei leme de mai sus). Trebuie să demonstrăm că $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
Din idempotența lui $\vee$, avem că, pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$, deci $x \leq x$, adică $\leq$ este reflexivă.
Fie $x, y, z \in L$ astfel încât $x \leq y$ și $y \leq z$, i. e. $x \vee y = y$ și $y \vee z = z$, prin urmare, folosind aceste două egalități și asociativitatea lui $\vee$, obținem: $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, deci $x \vee z = z$, ceea ce înseamnă că $x \leq z$. Așadar $\leq$ este tranzitivă.
Acum fie $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$ și $y \leq x$, adică $x \vee y = y$ și $y \vee x = x$. Dar $x \vee y = y \vee x$ din comutativitatea lui $\vee$, deci $x = y$. Așadar $\leq$ este antisimetrică.
Am demonstrat că $\leq$ este o relație de ordine.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Fie $x, y \in L$, arbitrare, fixate. Trebuie să demonstrăm că există în $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ infimumul și supremumul mulțimii $\{x, y\}$ și că acestea sunt egale cu $x \wedge y$ și respectiv $x \vee y$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\vee$, avem că $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, deci $x \leq x \vee y$. Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\vee$, obținem $y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y$, deci $y \leq x \vee y$.
Fie $l \in L$, a. î. $x \leq l$ și $y \leq l$, adică $x \vee l = l$ și $y \vee l = l$. Atunci, conform asociativității lui $\vee$, $(x \vee y) \vee l = x \vee (y \vee l) = x \vee l = l$, deci $x \vee y \leq l$.
Caracterizarea supremumului ne dă acum: $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, obținem: $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq x$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, avem: $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge (y \wedge y) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq y$.
Fie $l \in L$, a. î. $l \leq x$ și $l \leq y$, adică $l \wedge y = l$ și $l \wedge y = l$. Atunci, conform asociativității lui $\wedge$, $l \wedge (x \wedge y) = (l \wedge x) \wedge y = l \wedge y = l$, așadar $l \leq x \wedge y$.
Caracterizarea infimumului ne dă acum: $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, ceea ce încheie demonstrația punctului (2): $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore.

Echivalența celor două definiții ale laticii

(3) Fie $\mathcal{L} = (L, \leq)$ o latice Ore. Atunci $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind, unde, pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ în $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Fie $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = (L, \sqsubseteq)$. Atunci $(L, \sqsubseteq)$ este o latice Ore, cu $\sqsubseteq$ definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\sup\{x, y\} = y \in \{x, y\}$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\max\{x, y\} = \sup\{x, y\} = y$ (a se vedea o proprietate de mai sus) ddacă $x \leq y$. Așadar $\sqsubseteq = \leq$, deci $(L, \sqsubseteq) = (L, \leq)$, adică $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Acum fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, unde relația de ordine $\leq$ este definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$, sau, echivalent, $x \leq y$ ddacă $x \wedge y = x$, iar supremumurile și infimumurile sunt date de: pentru orice $x, y \in L$, $\sup\{x, y\} = x \vee y$ și $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.
Atunci $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = (L, \sqcup, \sqcap)$ este o latice Dedekind, cu $\sqcup$ și $\sqcap$ definite după cum urmează, în funcție de supremumurile și infimumurile din laticea Ore $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqcup y = \sup\{x, y\} = x \vee y$ și $x \sqcap y = \inf\{x, y\} = x \wedge y$, deci $\sqcup = \vee$ și $\sqcap = \wedge$, așadar $(L, \sqcup, \sqcap) = (L, \vee, \wedge)$, ceea ce înseamnă că $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Demonstrația teoremei este încheiată.

Notații alternative pentru latici

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.
- Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notațiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ și $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parțială $\leq$, operațiile ei binare $\vee$ și $\wedge$, sau toate acestea.

Exemple de latici

Exemplu

Cu ultima dintre notațiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\emptyset, (\emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$, pentru că $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ este unica relație binară pe $\emptyset$, iar unica operație binară pe $\emptyset$, adică funcție definită pe $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ cu valori în $\emptyset$, este $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, și toate aceste componente satisfac, în mod trivial, condițiile din definiția unei latici;
- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T;
- $(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$;
- $(D_n, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, și D_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n;
- orice lanț $(L, \max, \min, \leq)$, de exemplu: $\mathcal{L}_n = (L_n, \max, \min, \leq)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$.

Latici

- Proprietatea următoare generalizează compunerea incluziunilor nestricte și de același sens de mulțimi cu $\cup$, precum și cu $\cap$, membru cu membru.

Propoziție (două inegalități nestricte și de același sens într–o latice se pot compune cu $\vee$, precum și cu $\wedge$, membru cu membru; altfel spus, relația de ordine într–o latice este compatibilă cu $\vee$ și cu $\wedge$)

Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$, dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.

Demonstrație: $x \leq a$ înseamnă că $x \wedge a = x$ și $x \vee a = a$.
$y \leq b$ înseamnă că $y \wedge b = y$ și $y \vee b = b$.
Atunci $(x \wedge y) \wedge (a \wedge b) = x \wedge y \wedge a \wedge b = x \wedge a \wedge y \wedge b = (x \wedge a) \wedge (y \wedge b) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq a \wedge b$.
Și $(x \vee y) \vee (a \vee b) = x \vee y \vee a \vee b = x \vee a \vee y \vee b = (x \vee a) \vee (y \vee b) = a \vee b$, deci $x \vee y \leq a \vee b$.
Am folosit comutativitatea și asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$. (Asociativitatea acestor operații ne–a permis scrierile fără paranteze de mai sus.)

Principiul dualității pentru latici

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: $\vee$ și $\wedge$, $\leq$ și $\geq$, respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.

Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că $(L, \wedge, \vee, \geq)$ este, de asemenea, o latice, iar această latice se numește *duala* laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Este evident că duala dualei unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară* $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *rămâne valabil dacă în el interschimbăm* $\vee$ *cu* $\wedge$ *și* $\leq$ *cu* $\geq$.

Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.

De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, “prin dualitate“.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție (amintită de mai sus)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcție.
f se numește *morfism de poseturi* (sau *funcție izotonă*, sau *funcție crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \to M$ o funcție.
f se numește *morfism de latici* ddacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

1. $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
   și
2. $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici.

Remarcă

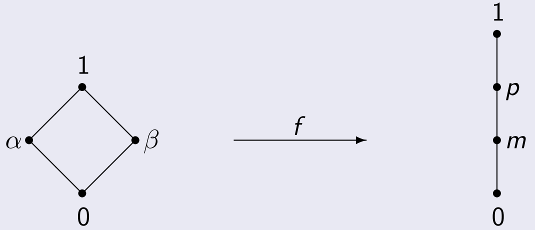
Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici. Într–adevăr, dacă $(L, \vee, \wedge)$, $(M, \sqcup, \sqcap)$ și $(N, \curlyvee, \curlywedge)$ sunt latici, iar $f : L \to M$ și $g : M \to N$ sunt morfisme de latici, atunci $g \circ f : L \to N$ satisface următoarele egalități, pentru orice $a, b \in L$:

$$(g \circ f)(a \vee b) = g(f(a \vee b)) = g(f(a) \sqcup f(b)) = g(f(a)) \curlyvee g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlyvee (g \circ f)(b) \qquad \text{și}$$

$$(g \circ f)(a \wedge b) = g(f(a \wedge b)) = g(f(a) \sqcap f(b)) = g(f(a)) \curlywedge g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlywedge (g \circ f)(b).$$

Remarcă

Orice morfism de latici este funcție izotonă, dar nu și reciproc.
Într–adevăr, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ sunt două latici și $f : L \to M$ este un morfism de latici, atunci, pentru orice $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $x \vee y = y$, avem: $f(x) \sqcup f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, așadar $f(x) \sqsubseteq f(y)$.
În ce privește implicația reciprocă, să considerăm următorul contraexemplu, în care f este funcție izotonă, dar nu este morfism de latici, pentru că $f(\alpha \vee \beta) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p = f(\alpha) \vee f(\beta)$:



rombul: $(R, \vee, \wedge)$ $\mathcal{L}_4 = (L_4, \vee, \wedge)$

x	0	α	β	1
$f(x)$	0	m	p	1

Exercițiu (util pentru alte exerciții)

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ latici, iar $f : L \to M$ o funcție.
Să se demonstreze că o f e morfism de latici ddacă f e izotonă și păstrează infimumurile și supremumurile perechilor de elemente incomparabile din L, i.e. ddacă, pentru orice $x, y \in L$:

- dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \sqsubseteq f(y)$;
- dacă $x \| y$, atunci $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$ și $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Rezolvare: Un corolar al unei leme anterioare aplicat unei latici în locul unui poset arbitrar arată că o pereche de elemente ale unei latici este formată din elemente comparabile ddacă infimumul perechii este chiar minimul ei ddacă supremumul perechii este chiar maximul ei, rezultat imediat și din faptul că o pereche de elemente ale unui poset este formată din elemente comparabile ddacă are minim ddacă are maxim, iar o submulțime a unui poset are minim ddacă are infimum și infimumul său îi aparține (întrucât minimul este cel mai mare minorant, iar un minorant, în particular infimumul, care aparține mulțimii este minimul mulțimii), respectiv are maxim ddacă are supremum și își conține supremumul.

Să demonstrăm echivalența din enunț prin dublă implicație.

"$\Longrightarrow$": Dacă f e morfism de latici, atunci f e izotonă conform remarcii anterioare și păstrează infimumurile și supremumurile tuturor perechilor de elemente din L, în particular pe ale perechilor formate din elemente incomparabile din L.

"$\Longleftarrow$": Dacă f e izotonă și păstrează infimumurile și supremumurile perechilor de elemente incomparabile din L, atunci, pentru orice $x, y \in L$:

- dacă x și y sunt comparabile, adică $x \leq y$ sau $y \leq x$, astfel că $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$ în laticea L, atunci, cum f e izotonă, așadar păstrează minimele și maximele oricăror submulțimi ale lui L cu minim, respectiv maxim, rezultă că în laticea M există $\min\{f(x), f(y)\} = f(\min\{x, y\})$ și există $\max\{f(x), f(y)\} = f(\max\{x, y\})$, prin urmare $f(x) \sqcap f(y) = \inf\{f(x), f(y)\} = \min\{f(x), f(y)\} = f(\min\{x, y\}) = f(\inf\{x, y\}) = f(x \wedge y)$ și $f(x) \sqcup f(y) = \sup\{f(x), f(y)\} = \max\{f(x), f(y)\} = f(\max\{x, y\}) = f(x \vee y)$;

• dacă $x||y$, atunci $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$ și $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$ conform ipotezei acestei implicații.

Așadar, pentru orice $x, y \in L$, au loc $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$ și $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$, adică f este morfism de latici de la L la M.

Definiție

Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcție inversabilă și a cărei inversă este tot un morfism de latici. Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice și ea însăși (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiție

Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*.
În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici este un izomorfism de latici ddacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Demonstrație: Implicația directă este imediată, pentru că, așa cum sugerează enunțul, orice izomorfism de latici este simultan un morfism de latici și o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \to M$ un morfism bijectiv de latici. Să demonstrăm că, în aceste ipoteze, rezultă că f este un izomorfism de latici.
f este, așadar, o funcție bijectivă, deci inversabilă. Fie $f^{-1} : M \to L$ inversa funcției f.
Fie $a, b \in M$. f este bijectivă, deci surjectivă, deci există $x, y \in L$ a. î. $f(x) = a$ și $f(y) = b$. Aplicând f^{-1} în ambii membri ai fiecăreia dintre aceste două egalități, obținem: $f^{-1}(a) = f^{-1}(f(x)) = x$ și $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(y)) = y$.
Rezultă că
$f^{-1}(a \sqcup b) = f^{-1}(f(x) \sqcup f(y)) = f^{-1}(f(x \vee y)) = x \vee y = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$. Prin dualitate, rezultă că avem și: $f^{-1}(a \sqcap b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$. Așadar f^{-1} este morfism de latici, prin urmare f este un morfism de latici inversabil cu inversa morfism de latici, i. e. f este un izomorfism de latici.

Definiție (amintită de mai sus)

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este morfism de poseturi inversabil, i. e. morfism de poseturi bijectiv, cu inversa tot morfism de poseturi, i. e. funcție izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Propoziție

O funcție între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).

Demonstrație: Implicația directă rezultă din definiția unui izomorfism de latici și faptul că orice morfism de latici este funcție izotonă.
Reciproca rezultă din remarca de mai sus conform căreia un izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare. Să arătăm acest fapt pentru cazul particular al infimumurilor și supremumurilor mulțimilor de două elemente, demonstrând astfel reciproca:
Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ două latici și $f : L \to M$ un izomorfism de ordine între poseturile $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$, adică f este o funcție izotonă bijectivă, iar inversa ei, $f^{-1} : M \to L$, este, de asemenea, izotonă.
Fie $a, b \in L$, arbitrare, fixate. Demonstrăm că $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
$a \vee b = \sup\{a, b\}$, iar $a \leq \sup\{a, b\}$ și $b \leq \sup\{a, b\}$.
Așadar, $a \leq a \vee b$ și $b \leq a \vee b$, iar f este izotonă, prin urmare $f(a) \sqsubseteq f(a \vee b)$ și $f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$, deci $f(a \vee b)$ este un majorant al submulțimii $\{f(a), f(b)\}$ a lui $(M, \sqsubseteq)$, prin urmare $\sup\{f(a), f(b)\} \sqsubseteq f(a \vee b)$, conform definiției supremumului.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Dar $f(a) \sqcup f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, deci $f(a) \sqcup f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$.
Să notăm cu $u := f(a) \sqcup f(b) \in M$, pentru comoditatea scrierii în cele ce urmează.
Cu această notație, ultima relație de mai sus devine: $u \sqsubseteq f(a \vee b)$.
Au loc: $f(a) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$ și
$f(b) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$, deci $f(a) \sqsubseteq u$ și $f(b) \sqsubseteq u$.
Ipoteza că f^{-1} este izotonă și ultimele două relații de mai sus implică
$a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(u)$ și $b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(u)$, deci $f^{-1}(u)$ este majorant pentru submulțimea $\{a, b\}$ a lui $(L, \leq)$.
Acum aplicăm din nou definiția supremumului, și obținem:
$a \vee b = \sup\{a, b\} \leq f^{-1}(u)$.
Prin urmare, întrucât f este izotonă, avem: $f(a \vee b) \sqsubseteq f(f^{-1}(u)) = u$.
În relația $f(a \vee b) \sqsubseteq u$, pe care tocmai am demonstrat–o, înlocuim
$u = f(a) \sqcup f(b)$ conform notației de mai sus, și obținem $f(a \vee b) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b)$.
Așadar, $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
Prin dualitate, rezultă că și $f(a \wedge b) = f(a) \sqcap f(b)$.
Ultimele două egalități arată că f este un morfism de latici.
Dar, prin ipoteză, f este o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Deci f este un morfism bijectiv de latici, așadar, conform propoziției anterioare, rezultă că f este un izomorfism de latici.

Am văzut mai sus că o latice este, prin definiție, simultan un poset și o algebră cu două operații binare

Într–o latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$, avem:

- o mulțime L,
- o relație de ordine (parțială) $\leq$ pe L,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe L, notate infixat,

iar aceste componente ale structurii algebrice de latice au proprietățile:

- oricare ar fi $x, y \in L$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(L, \leq)$;
- $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in L$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
- $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;

și sunt legate între ele prin relațiile: pentru orice $x, y \in L$:

- $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Latici mărginite

Definiție

Un poset mărginit care este latice se numește *latice mărginită*.
Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.
Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.
O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.
O latice mărginită se mai numește *latice cu* 0 *și* 1 sau *latice cu prim și ultim element*.

Definiție

Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numește *laticea mărginită trivială*.
Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latice mărginită netrivială*.

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ două latici mărginite și $f : L \to M$ o funcție. f se numește *morfism de latici mărginite* ddacă este morfism de latici și $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$.

Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.

Într–adevăr, să considerăm trei latici mărginite, $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ și $(N, \curlyvee, \curlywedge, \triangle, \bigtriangledown)$ și două morfisme de latici mărginite $f : L \to M$ și $g : M \to N$.

Atunci f și g sunt morfisme de latici, deci $g \circ f$ este un morfism de latici, conform unui rezultat de mai sus. În plus:

- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(\perp) = \triangle$ și
- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(\top) = \bigtriangledown$,

așadar $g \circ f : L \to N$ este un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcție inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.
Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latice mărginită și ea însăși (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiție

Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite ddacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Demonstrație: Implicația directă este trivială.

Dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ sunt latici mărginite și $f : L \to M$ este un morfism bijectiv de latici mărginite, atunci:

- f este un morfism bijectiv de latici, prin urmare, conform unui rezultat de mai sus, inversa $f^{-1} : M \to L$ a lui f este un morfism de latici;
- în plus, conform definiției unui morfism de latici mărginite, $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$, deci $f^{-1}(\perp) = f^{-1}(f(0)) = 0$ și $f^{-1}(\top) = f^{-1}(f(1)) = 1$, așadar f^{-1} este un morfism de latici mărginite.

Așadar, f este un morfism de latici mărginite inversabil cu inversa morfism de latici mărginite, i. e. f este un izomorfism de latici mărginite.

Remarcă

De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarcă

Am văzut că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare. Prin urmare, orice funcție izotonă surjectivă între două poseturi mărginite

Morfisme de latici mărginite

Remarcă (continuare)

păstrează minimul și maximul, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de–al doilea poset, și duce maximul primului poset în maximul celui de–al doilea poset.

Remarcă

Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulțime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulțimii (desigur, și există o astfel de ordine totală).

Semnificația acestei afirmații este că oricare două lanțuri finite cu aceeași mulțime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru, pentru că știm că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulțime finită A, dacă $\leq$ și $\sqsubseteq$ sunt ordini totale pe A, atunci poseturile (laticile) $(A, \leq)$ și $(A, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe.

Ca o consecință imediată, oricare două lanțuri finite de același cardinal (i. e. cu același număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanțul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanțuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru; deci și ca latici mărginite, conform remarcii anterioare).

Sublatici și sublatici mărginite

Definiție

Dată o latice $(L, \vee, \wedge)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice mărginită a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice mărginită ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operațiile *induse* pe M de operațiile lui L, adică restricțiile operațiilor lui L la M:

- restricția lui $\vee$ la M este operația binară $\sqcup$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricția lui $\wedge$ la M este operația binară $\sqcap$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite:
  - restricția lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente);
  - restricția lui 0 la M la M este 0 (și aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente).

Operațiile induse se notează, de obicei, la fel ca operațiile laticii L:

- operația $\sqcup$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\vee$;
- operația $\sqcap$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\wedge$;
- în cazul laticilor mărginite, primul și ultimul element al sublaticii mărginite M, ca prim și, respectiv, ultim element al laticii mărginite M, se notează, de obicei tot cu 0 și 1, respectiv.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Cu notațiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parțială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operațiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parțială a lui L restricționată la M, care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parțială a lui L:

- notând cu $\sqsubseteq$ ordinea laticii M, pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea $\sqsubseteq$ a laticii M este, într–adevăr, restricția lui $\leq$ la M, și $\sqsubseteq$ se notează, de obicei, tot cu $\leq$.

Remarcă

Orice submulțime a unei latici $\mathcal{L}$ este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat și sublatice, pentru că poate să nu conțină infimumurile și supremumurile din $\mathcal{L}$ ale perechilor de elemente ale sale.

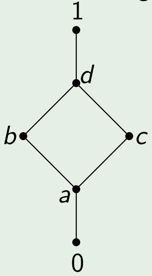
Exercițiu (temă)

Orice submulțime total ordonată a unei latici $\mathcal{L}$ este sublatice a lui $\mathcal{L}$.

Sublatici și sublatici mărginite

Exemplu

Fie L laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:



Se observă, direct din această diagramă Hasse, că submulțimea $M := \{a, b, c, d\}$ este o **sublatice** a lui L, pentru că este închisă la infimumurile și supremumurile perechilor de elemente ale ei.

Evident, M este o **latice mărginită**, cu primul element a și ultimul element d.

Dar $0, 1 \notin M$ (primul și ultimul element din L nu aparțin lui M), așadar M **nu** este o **sublatice mărginită** a lui L.

Exemple de submulțimi ale lui L care **nu sunt sublatici** ale lui L: $\{b, c\}$, $\{0, a, b, c\}$, $\{0, b, c, 1\}$, $\{0, a, b, c, 1\}$ etc..

Sublatici și sublatici mărginite

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că:

1. imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
2. mai general: imaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a domeniului său este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
3. preimaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a codomeniului său este o sublatice (mărginită) a domeniului acelui morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcție), deci acest caz particular la punctul (3) este trivial.)

Latici distributive

Propoziție

În orice latice $(L, \vee, \wedge)$*, următoarele două afirmații, numite* legile de distributivitate*, sunt echivalente:*
(d_1) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$*;*
(d_2) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*.*

Demonstrație: $(d_1) \Rightarrow (d_2)$: Din (d_1), comutativitatea lui $\wedge$ aplicată de două ori, absorbția, din nou (d_1), asociativitatea lui $\vee$, din nou comutativitatea lui $\wedge$, apoi absorbția, și, în final, încă o dată comutativitatea lui $\wedge$, avem: pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \wedge (x \vee y)) \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) = (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) = (x \vee (x \wedge z)) \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge y) = x \vee (y \wedge z)$, deci $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$.
$(d_2) \Rightarrow (d_1)$: Prin dualitate, din implicația precedentă.

Definiție

O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Latici distributive

Remarcă

A se observa că egalitățile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalități să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că și cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

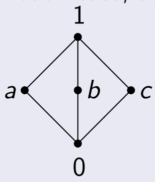
Remarcă

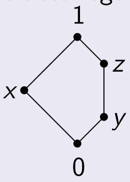
Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă. Acest fapt este cunoscut de la seminar: $\cup$ și $\cap$ sunt distributive una față de cealaltă.

Remarcă (temă)

Diamantul și pentagonul nu sunt latici distributive. Acest fapt se poate verifica prin considerarea, în fiecare dintre aceste latici, a celor trei elemente diferite de maximul și minimul laticii respective ca poset, și așezarea lor într–o anumită ordine într–o lege de distributivitate, astfel încât acea lege să nu fie satisfăcută.

(diamantul)





(pentagonul)

Latici distributive

Remarcă

Orice lanț este o latice distributivă.
Într–adevăr, dacă $(L, \leq)$ este un lanț (i. e. o mulțime total ordonată), atunci știm că $(L, \leq)$ este o latice în care, pentru orice $x, y \in L$,
$x \wedge y = \inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $x \vee y = \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.
Atunci, considerând trei elemente arbitrare $x, y, z \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț ne asigură de existența unei ordonări între aceste elemente, de exemplu $x \leq y \leq z$; în acest caz, din definițiile lui $\vee$ and $\wedge$ de mai sus ($\vee = \max$ și $\wedge = \min$), obținem: $x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x = x \vee x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Celelalte cazuri, privind alte ordonări posibile între x, y and z, se tratează similar, și, din analiza tuturor acestor cazuri, rezultă că laticea $(L, \leq)$ este distributivă.

Remarcă

Remarca anterioară arată că, de exemplu, $\mathcal{L}_n$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat), $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sunt latici distributive.

Am dat mai sus un exemplu de latice distributivă care nu este lanț: după cum știm, $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$ nu este lanț dacă mulțimea T are cardinalul mai mare sau egal cu 2.

Rezultatul următor pune în evidență un alt exemplu de latice distributivă care nu este lanț.

Corolar

$(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$ *este o latice distributivă.*

Demonstrație: Acest fapt rezultă din distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \leq)$.
Într–adevăr, dacă notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea numerelor prime naturale, observăm că fiecare număr natural nenul n se scrie sub forma: $n = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{e_p(n)}$, unde $e_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k | n\} \in \mathbb{N}$ pentru fiecare $p \in \mathcal{P}$, iar produsul anterior este finit, i. e. familia $(e_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ este *de suport finit*, adică doar un număr finit de elemente din această familie sunt nenule.
Se mai observă că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$,
$\mathrm{cmmmc}\{m, n\} = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{e_p(m), e_p(n)\}}$ și
$\mathrm{cmmdc}\{m, n\} = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(m), e_p(n)\}}$.

Distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$ ne asigură de faptul că, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și orice $p \in \mathcal{P}$, $\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\} = \max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}$, de unde rezultă că: $\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\}} =$
$\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}}$, adică:
$\mathrm{cmmdc}\{x, \mathrm{cmmmc}\{y, z\}\} = \mathrm{cmmmc}\{\mathrm{cmmdc}\{x, y\}, \mathrm{cmmdc}\{x, z\}\}$, iar această egalitate este exact prima lege de distributivitate aplicată numerelor naturale nenule x, y, z.
(Dacă nu sunteți obișnuiți cu acest gen de scriere, puteți efectua produsele de mai sus numai după numerele naturale prime p care divid măcar unul dintre numerele naturale nenule x, y, z.)
A rămas de demonstrat faptul că, atunci când numărul 0 apare în prima lege de distributivitate, egalitatea obținută este satisfăcută, fapt ce poate fi arătat foarte ușor, ținând seama de identitățile: $\mathrm{cmmmc}\{0, n\} = 0$ și $\mathrm{cmmdc}\{0, n\} = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ (inclusiv pentru $n = 0$).

Latici distributive

Remarcă

Este evident că orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarcă (temă)

Imaginea oricărei latici distributive printr–un morfism de latici este o latice distributivă.

Propoziție (caracterizare a laticilor distributive)

O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.

Notă

Demonstrația propoziției anterioare se găsește în *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*, de Sergiu Rudeanu, precum și în cele două cărți de D. Bușneag și D. Piciu din bibliografia din primul curs.
Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

1. Relații de ordine
2. Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
3. Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
4. Funcții izotone
5. Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare
6. Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
7. Latici
8. Funcții izotone versus morfisme de latici
9. Mnemonic despre latici
10. Latici mărginite
11. Morfisme de latici mărginite
12. Sublatici și sublatici mărginite
13. Latici distributive
14. **Elemente complementate în latici mărginite**
15. Laticí complete
16. Algebre produs direct
17. Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Complementul unui element într–o latice mărginită

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.
Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.
Un astfel de element y se numește *complement al lui* x.
O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarcă

În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x, atunci x este un complement al lui y, după cum arată comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$.

Remarcă

Este imediat faptul că, în orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente, pentru că, dacă $a \in L$ este un complement al lui 0, atunci $a = a \vee 0 = 1$, iar, dacă $b \in L$ este un complement al lui 1, atunci $b = b \wedge 1 = 0$.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Remarcă

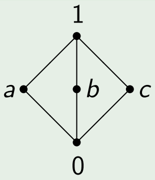
În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.
Într–adevăr, fie $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice distributivă mărginită și $x, a, b \in L$ a. î. a și b sunt complemente ale lui x, adică:

$$\begin{cases} x \vee a = 1 \\ x \wedge a = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x \vee b = 1 \\ x \wedge b = 0 \end{cases}$$

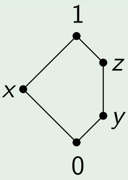
Atunci, conform relațiilor de mai sus (care dau definiția unui complement), distributivității lui L și commutativității lui $\wedge$,
$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee b) = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = (x \wedge a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$, deci $a = a \wedge b$, ceea ce înseamnă că $a \leq b$ (a se vedea teorema privind echivalența celor două definiții ale noțiunii de latice).
Interschimbând a și b în șirul de egalități de mai sus, obținem $b = b \wedge a$, deci $b \leq a$.
Prin urmare $a = b$, conform antisimetriei relației de ordine $\leq$.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Exemplu



diamantul



pentagonul

Aceste două latici mărginite nu sunt distributive, iar acest fapt poate fi demonstrat și prin intermediul remarcii anterioare.
Într–adevăr, în diamant, fiecare două dintre elementele a, b, c sunt complemente ale celui de–al treilea.
Iar, în pentagon, y și z sunt complemente ale lui x.
Deci aceste două latici mărginite nu satisfac proprietatea de unicitate a complementului, așadar nu sunt distributive, conform remarcii de mai sus.

Latici complete

Definiție

O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ și $\sup(A)$ în posetul $(L, \leq)$.

Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplu

- Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă și completă.
- Considerând $0, 1 \in \mathbb{R}$ și ordinea naturală $\leq$ pe $\mathbb{R}$ (desigur, restricționată la mulțimea suport a fiecăreia dintre cele două latici de mai jos), avem:
  1. laticea $([0, 1] \cap \mathbb{Q}, \max, \min, \leq, 0, 1)$ este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ $\inf\{x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}/2\}$);
  2. laticea $((0, 1), \max, \min, \leq)$ nu este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $(0, 1)$ $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, sau $\inf((0, 1))$, sau $\sup((0, 1))$).

Latici complete

Remarcă

- Orice latice completă $(L, \leq)$ este nevidă și mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ și $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ și $\max(L) = 1$, cu notația clasică pentru primul și ultimul element al unei latici.
- Orice latice finită și nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat mai sus, orice latice nevidă conține infimumurile și supremumurile tuturor submulțimilor sale finite și nevide și, în plus, orice latice finită și nevidă are prim și ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul și infimumul mulțimii vide.
- O latice $(L, \leq)$ este completă ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$, ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$. Aceste echivalențe rezultă din faptul că, în orice poset $(L, \leq)$, următoarele afirmații sunt echivalente:
  1. pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$;
  2. pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$.

Algebre produs direct

A se revedea, din cursul anterior, definiția **produsului direct al unei familii de poseturi**.

În această definiție se pot înlocui poseturile cu mulțimi înzestrate cu **relații binare** arbitrare, și se obține produsul direct al respectivelor mulțimi înzestrat cu relația produs direct al respectivelor relații binare.

Această construcție poate fi generalizată la mulțimi înzestrate cu **relații** ***n*****–are**.

Dar **produsul direct** se poate defini și pentru structuri algebrice de același tip înzestrate cu anumite **operații**, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.

Produsul direct al unor latici este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) și **o algebră produs direct cu două operații binare** (latice Dedekind).

Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații**.

Algebre produs direct

Exercițiu (temă)

Pe baza celor de mai jos, să se scrie produsul de algebre și pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operație** p**–ară (de aritate** p**, cu** p **argumente)** și o **relație** k**–ară**, unde $p, k \in \mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}^*$).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr–o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă: vom vedea).
Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.
Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} A_i$,

  cu *operațiile produs direct*:

- $\odot \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \odot_i \overset{\text{notație}}{=} (\odot_1, \ldots, \odot_n)$,
- $f \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_i \overset{\text{notație}}{=} (f_1, \ldots, f_n)$,
- $c \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} c_i \overset{\text{notație}}{=} (c_1, \ldots, c_n)$

  și *relația binară produs direct*:

- $\rho \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \rho_i = \rho_1 \times \ldots \times \rho_n$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$:

Algebre produs direct

- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, $x \odot y \stackrel{\text{definiție}}{=} (x_1 \odot_1 y_1, \ldots, x_n \odot_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $f(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \stackrel{\text{definiție}}{=} (c_1, \ldots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, prin definiție, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \ldots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \odot_1, f_1, c_1, \rho_1) = \ldots = (A_n, \odot_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_1, \ldots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(h(i) \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \odot h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \odot h)(i) = g(i) \odot_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, $g \rho h$ ddacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \to B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Scriere alternativă pentru *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, $(a_i)_{i \in I} \odot (b_i)_{i \in I} := (a_i \odot_i b_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I} \in A$, $f((a_i)_{i \in I}) := (f_i(a_i))_{i \in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, prin definiție, $(a_i)_{i \in I} \rho (b_i)_{i \in I}$ ddacă $a_i \rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in B)\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume $(A, \odot, f, c, \rho)$, unde:

- A este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element: $A = \{a\}$;
- operațiile $\odot$, f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume: $a \odot a := a$, $f(a) := a$ și $c := a$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(a, a)\}$, deci ρ nu poate fi decât $\emptyset$ sau $\{(a, a)\}$; dar ρ este produsul familiei vide de relații binare, care este tot un produs direct al familiei vide de mulțimi, deci este tot un singleton, așadar $\rho = \{(a, a)\}$.

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Exercițiu (temă)

Pentru un număr natural nenul arbitrar n, să se descompună laticea mărginită $(D_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |, 1, n)$ în produs direct de lanțuri.

Operații zeroare $\equiv$ constante

Definiție

Dacă $\mathcal{A}$ este o structură algebrică, având mulțimea suport A, iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operație n–ară* (*operație de aritate n*, *operație cu n argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcție $f : A^n \to A$.

- Pentru orice mulțime A, $A^0 = A^\emptyset = \prod_{i \in \emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide de mulțimi: un singleton).
- Așadar, cu notațiile din definiția de mai sus: o *operație* 0*–ară* (*operație de aritate* 0, *operație fără argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcție $f : A^0 \to A$, deci o funcție $f : \{a\} \to A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: **o constantă din** A.
- Constantele 0 și 1 dintr–o latice mărginită sunt operații zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 și 1 dintr–un inel unitar etc..