SEMINAR DIN LOGICA PROPOZIȚIONALĂ CLASICĂ: DEMONSTRAȚII ALGEBRICE ȘI SEMANTICE, ECHIVALENȚA SEMANTICĂ, TEHNICA REZOLUȚIEI

Mnemonicul I: Dacă B este o algebră Boole, iar $a, b \in B$, atunci:

(I.1) $a \to b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$;

(I.2) $a \leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow a = b$.

Mnemonicul II: $V \overset{not.}{=}$ mulțimea variabilelor propoziționale, iar $E \overset{not.}{=}$ mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic;

$\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, \leq, 0, 1) \to$ algebra Boole standard;

$\forall h : V \to L_2$ (interpretare), $\tilde{h} \overset{not.}{=}$ unica prelungire a lui h la E compatibilă cu conectorii logici;

(TD) $(\forall \Sigma \subseteq E)(\forall \varphi, \psi \in E)$
$(\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi)$,

(II.1) $(\forall \varphi \in E)(\vdash \varphi \overset{(lema)}{\Leftrightarrow} \tilde{\varphi} = 1)$,

unde $\widehat{\varphi} = \varphi/_{\sim} = \{\psi \in E \mid \varphi \sim \psi\} =$
= clasa de echivalență a lui φ în algebra Lindenbaum – Tarski a logicii propoziționale clasice, $E/_{\sim}$;

(II.2) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem:

$$\varphi \sim \psi \overset{(\text{def. lui } \sim)}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \overset{(TC)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \models \varphi \leftrightarrow \psi \overset{(\text{def})}{\Longleftrightarrow} (\forall h : V \to L_2)$$

$$(\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall h : V \to L_2)$$

$$(\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1) \overset{(I.2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\forall h : V \to L_2)(\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$$

(i.e. φ și ψ au aceeași valoare de adevăr în orice interpretare).

<u>Exerc.:</u> Să se dem., algebric, că, pt. orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, are loc:

$$\{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\} \vdash \neg\psi.$$

REZOLVARE:

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$. Sunt valabile echivalențele:

$$\{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\} \vdash \neg\psi \overset{(TD)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \neg\chi \to \neg\psi \overset{(TD)}{\Longleftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow \{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\neg\chi \to \neg\psi) \Leftrightarrow$

$\overset{(T.4)}{\Leftrightarrow} \vdash [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\varphi \to (\neg\chi \to \neg\psi)]$.

Not. $\gamma = [\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [\varphi \to (\neg\chi \to \neg\psi)]$

$\in E$. Avem: $\vdash \gamma \overset{(II.2)}{\Leftrightarrow} \hat{\gamma} = 1$ în $E/\sim$.

Not.: $x = \hat{\varphi}$, $y = \hat{\psi}$, $z = \hat{\chi} \in E/\sim$.

$\hat{\gamma} = [\hat{\varphi} \to (\hat{\psi} \to \hat{\chi})] \to [\hat{\varphi} \to (\overline{\hat{\chi}} \to$

$\to \overline{\hat{\psi}})] = [x \to (y \to z)] \to [x \to$

$\to (\overline{z} \to \overline{y})] = [x \to (\overline{y} \vee z)] \to$

$\to [x \to (\overline{\overline{z}} \vee \overline{y})] = [x \to (\overline{y} \vee z)] \to$

$\to [x \to (\overline{y} \vee z)] \overset{(I.1)}{=\!=} 1$. (Q.E.D.)

<u>Exerc.:</u> Să se dem., algebric și semantic, că, pt. orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

(a) $\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$;

(b) $\varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$;

(c) $\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \sim \varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi) \sim \varphi$;

(d) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$;

(e) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$;

(f) REZ.: $\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$; $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Not. $x = \hat{\varphi}$, $y = \hat{\psi}$, $z = \hat{\chi} \in E/\sim$.

Fie $h: V \to L_2$, arbitrară. $(*)$

(a) Algebric:

Not. $\alpha = (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi) \in E$.

$\tilde{\alpha} = (x \to y) \leftrightarrow (\bar{x} \vee y) =$

$= (\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (\bar{x} \vee y) \overset{(I.2)}{=\!=} 1. \overset{(II.1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \vdash \alpha \overset{(II.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$.

Semantic:

$\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi) =$

$= \overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\neg\varphi \vee \psi). \overset{(II.2)}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}}$

$\Rightarrow \varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$.

faptul că interpretare h e arbitrară

(b) Algebric:

Not. $\beta = (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow [(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)] \in$
$\in E$. $\beta = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow [(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)]$

$= (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow [(x \to y) \wedge (y \to x)] =$

$= (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (x \leftrightarrow y) \overset{(I.2)}{=\!=} 1. \overset{(II.1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \vdash \beta \overset{(II.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$.

Semantic:

$\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) =$

$= (\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi)) =$

$= (\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \tilde{h}(\psi)) \wedge (\overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \tilde{h}(\varphi)) =$

$= \tilde{h}((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)) \Longrightarrow$

$$\xrightarrow[(*)]{(II.2)} \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

(c) Algebra:

Nota $\gamma = [\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)] \leftrightarrow \varphi \in E$

si $\delta = [\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)] \leftrightarrow \varphi \in E$.

$$\hat{\gamma} = \underbrace{[x \vee \underbrace{(y \wedge \overline{y})}_{=0}]}_{=x} \leftrightarrow x = x \leftrightarrow x \overset{(I.2)}{=} 1$$

$$\xrightarrow{(II.1)} \vdash \gamma \overset{(II.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \sim \varphi.$$

$$\hat{\delta} = \underbrace{[x \wedge \underbrace{(y \vee \overline{y})}_{=1}]}_{=x} \leftrightarrow x = x \leftrightarrow x \overset{(I.2)}{=} 1.$$

$$\xrightarrow{(II.2)} \vdash \delta \overset{(II.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi) \sim \varphi.$$

Semantica:

$$\tilde{h}(\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) = \tilde{h}(\varphi) \vee \overbrace{(\tilde{h}(\psi) \wedge \overline{\tilde{h}(\psi)})}^{=0} =$$

$$= \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \underbrace{(\tilde{h}(\psi) \vee \overline{\tilde{h}(\psi)})}_{=1} =$$

$$= \tilde{h}(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)). \xrightarrow[(*)]{(II.2)} \varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \sim$$

$$\sim \varphi \sim \varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi).$$

(d) Algebra:

Nota $\varepsilon = [\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)] \leftrightarrow \varphi \in E$ si

$\xi = [\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)] \leftrightarrow \varphi \in E.$

$\widehat{\varepsilon} = [x \vee (x \wedge y)] \leftrightarrow x = x \leftrightarrow x =$

$\overset{(I.2)}{=\!=} 1. \overset{(VI.1)}{\Longrightarrow} \vdash \varepsilon \overset{(VI.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi.$

$\widehat{\xi} = [x \wedge (x \vee y)] \leftrightarrow x = x \leftrightarrow x =$

$\overset{(I.2)}{=\!=} 1 \overset{(VI.1)}{\Longrightarrow} \vdash \xi \overset{(VI.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi.$

Semantic:

$\tilde{h}(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = \tilde{h}(\varphi) \vee (\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)) =$

$= \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge (\tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)) =$

$= \tilde{h}(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)). \overset{(VI.2)}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi \sim$

$\sim \varphi \wedge (\varphi \vee \psi).$

(e) Algebraic:

Note, $\mu = [\varphi \vee (\psi \wedge \chi)] \leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \wedge$

$\wedge (\varphi \vee \chi)] \in E.$

$\widehat{\mu} = [x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow [(x \vee y) \wedge$

$\wedge (x \vee z)] = [x \vee (y \wedge z)] \leftrightarrow$

$\leftrightarrow [x \vee (y \wedge z)] \overset{(I.2)}{=\!=} 1. \overset{(VI.1)}{\Longrightarrow} \vdash \mu \Leftrightarrow$

$\overset{(VI.2)}{\Longleftrightarrow} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi).$

Semantic:

$\tilde{h}(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) = \tilde{h}(\varphi) \vee (\tilde{h}(\psi) \wedge \tilde{h}(\chi)) =$

$$= (\tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\chi)) =$$

$$= \tilde{h}((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)). \xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)}$$

$$\Rightarrow \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi).$$

(f) Algebra:

Not. $\nu = \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \in E$

si $\rho = \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) \in E$.

$$\hat{\nu} = \overline{(x \vee y)} \leftrightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y}) =$$

$$= (\bar{x} \wedge \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y}) \xRightarrow{(\mathrm{I}.2)} 1 \xRightarrow{(\mathrm{II}.2)}$$

$$\Rightarrow \vdash \nu \xRightarrow{(\mathrm{II}.2)} \neg(\varphi \vee \psi) \sim (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

$$\hat{\rho} = \overline{(x \wedge y)} \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y}) =$$

$$= (\bar{x} \vee \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y}) \xRightarrow{(\mathrm{I}.2)} 1 \xRightarrow{(\mathrm{II}.2)}$$

$$\Rightarrow \vdash \rho \xRightarrow{(\mathrm{II}.2)} \neg(\varphi \wedge \psi) \sim (\neg\varphi \vee \neg\psi).$$

Semantic:

$$\tilde{h}(\neg(\varphi \vee \psi)) = \overline{\tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)} =$$

$$= \overline{\tilde{h}(\varphi)} \wedge \overline{\tilde{h}(\psi)} = \tilde{h}(\neg\varphi \wedge \neg\psi). \xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)}$$

$$\Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi.$$

$$\tilde{h}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = \overline{\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)} =$$

$$= \overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = \tilde{h}(\neg\varphi \vee \neg\psi). \xRightarrow[(*)]{(\mathrm{II}.2)}$$

$\Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$.

<u>Obs.:</u> Folosind proprietăți de tipul celor din exercițiul anterior, se poate lucra cu conectori logici la fel ca în calculul booleean, dar, <u>atenție:</u> a nu se pune <u>egalitate</u> între enunțuri în astfel de calcule! De <u>exemplu:</u> pt. orice $\varphi \in E$, avem: $\varphi \sim \neg\neg\varphi$, dar

$$\varphi \neq \neg\neg\varphi!$$

<u>Intuitiv</u>, de <u>exemplu:</u> frazele „Învăț pentru examen." și „Nu e adevărat că nu învăț pentru examen." sunt echivalente logic (adică au aceleași înțeles, spun același lucru), dar nu coincid (i.e. nu sunt aceeași frază).

Vom folosi, în cele ce urmează, exercițiul anterior, precum și alte proprietăți de tipul celor din exercițiul anterior, demonstrabile, foarte simplu, prin calcul booleean:

în algebra Boole $E/\sim$, dacă li se dau demonstrații algebrice,

sau

în algebra Boole $\mathcal{L}^2$, dacă li se dau demonstrații semantice.

2 câte 2 distincte

Exerc.: Fie $p, q, r, s \in V$, iar $\Sigma = \{p \vee q, q \to \neg r, r \leftrightarrow s, s \to p, p \to (q \to s)\} \subset E$ și $\Delta = \Sigma \cup \{\neg p \wedge r\} \subset E$. Dem. că mulțimea Σ e consistentă, iar mulțimea Δ e inconsistentă.

REZOLVARE:

Pentru orice $\Gamma \subseteq E$, are loc: Γ e consistentă $\Leftrightarrow$ Γ e satisfiabilă, i.e. admite un model, i.e. există $h: V \to L_2$ cu $h \models \Gamma$.

Pentru a dem. că Δ e nesatisfiabilă, punem pe Δ într-o formă clauzală, căreia îi determinăm o derivare prin rezoluție în care apare $\square$ (clauza vidă). O formă clauzală pt. Δ este o mulțime de clauze care este satisfiabilă dacă și numai dacă Δ este satisfiabilă. Fă ne amintim că orice clauză se identifică cu disjuncția între literalii care o compun, și orice mulțime de clauze se

identifică, în conjuncția altor clauzele care o compun, deci în o FNC.

Enunț σ	formă clauzală pt. σ, sau o mulțime de clauze
$p \vee q$	$\{\{p, q\}\}$
$q \to \neg r$ $(\sim \neg q \vee \neg r)$	$\{\{\neg q, \neg r\}\}$
$r \leftrightarrow s$ $(\sim(\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee r))$	$\{\{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}\}$
$s \to p$ $(\sim \neg s \vee p)$	$\{\{\neg s, p\}\}$
$p \to (q \to s)$ $(\sim \sim \neg p \vee \neg q \vee s)$	$\{\{\neg p, \neg q, s\}\}$
$\neg p \wedge r$	$\{\{\neg p\}, \{r\}\}$

Așadar, o formă clauzală pt. Δ este $\{\{p, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, p\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p\}, \{r\}\}$. Și așadar, pentru această mulțime de clauze, o derivare prin rezoluție care ne permite să concludem că această mulțime de clauze e nesatisfiabilă, prin urmare Δ e nesatisfiabilă.

$\{\cancel{p}, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, p\}, \{\cancel{p}, \neg q, s\}, \{\neg p\}, \{r\}$

$\{\cancel{q, \neg q, s}\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, \cancel{p}\}, \{\cancel{p}\}, \{r\}$

↳ clauza trivială, eliminată contra pe q și pe $\neg q$

↳ nu numai că e satisfiabilă dar e satisfăcută de orice $h: V \to L_2$;

$\{\neg q, \cancel{\neg r}\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, \cancel{r}\}, \{\neg s\}, \{r\}$

$\{\neg q, \neg s\}, \{\cancel{\neg r}, s\}, \{\neg s\}, \{\cancel{r}\}$

$\{\neg q, \neg s\}, \{\cancel{s}\}, \{\neg s\}$

$\{\neg q, \neg s\}, \square$

↳ clauza vidă,

↳ nesatisfiabilă. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta$ e nesatisfiabilă. $\Leftrightarrow \Delta$ e inconsistentă.

Ca o paranteză, este o derivare prin rezoluție a acestei forme clauzale e lui Δ ar care nu apare $\square$; desigur, această derivare nu arată că Δ ar fi satisfiabilă!

8

$\{\cancel{p}, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, r\}, \{\neg s, p\}, \{\cancel{p}, \neg q, s\}, \{\neg p\}, \{r\}$

$\{\cancel{q}, \neg q, s\}, \{\neg q, \cancel{r}\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s, \cancel{r}\}, \{\neg s, p\}, \{\neg p\}, \{r\}$

↳ clauze triviale

$\{\neg q, \cancel{\neg s}\}, \{\neg r, \cancel{s}\}, \{\neg s, p\}, \{\neg p\}, \{r\}$

$\{\neg q, \neg r\}, \{\neg s, \cancel{p}\}, \{\cancel{\neg p}\}, \{r\}$

$\{\neg s\}, \{\neg q, \cancel{\neg r}\}, \{\cancel{r}\}$

$\{\neg q\}, \{\neg s\}$ → (variabile propoziționale diferite)

↳ satisfiabilă, satisfăcută de orice $h: V \to L_2$ cu $h(q) = h(s) = 0$; $\not\Rightarrow$

$\not\Rightarrow \Delta$ ar fi satisfiabilă.

Cum demonstrăm că Σ e satisfiabilă, deci consistentă? Am putea considera o formă clauzală pentru Σ, și

→ să dem, că nu există o derivare prin rezoluție și ecuația în care să apară $\square$;

sau

→ să-i aplicăm algoritmul Davis-

— Putnam, care păstrează satisfiabilitatea, fau am putea să determinăm un model pentru Σ, i.e. o interpretare h a $h \models \Sigma$. Aplicăm această din urmă metodă și, pentru a observa mai ușor am trebuie să avem o interpretare care satisface pe Σ, să privim această formă clauzală a lui Σ: $\{p, q\}$, $\{\neg q, \neg r\}$, $\{\neg r, s\}$, $\{\neg s, r\}$, $\{\neg s, p\}$, $\{\neg p, \neg q, s\}$.

Fie $h: V \to L_2$, a.î. $h \models \Sigma$.

Atunci:

$$\begin{cases} h(p) = 1 \text{ sau } h(q) = 1, & (I) \\ \text{și } h(q) = 0 \text{ sau } h(r) = 0, & (II) \\ \text{și } h(r) = 0 \text{ sau } h(s) = 1, & (III) \\ \text{și } h(s) = 0 \text{ sau } h(r) = 1, & (IV) \\ \text{și } h(s) = 0 \text{ sau } h(p) = 1, & (V) \\ \text{și } h(p) = 0 \text{ sau } h(q) = 0 \text{ sau } h(s) = 1. & (VI) \end{cases}$$

Pp. că $h(p) = 0. \xRightarrow{(I)} h(q) = 1; \xRightarrow{(II)} h(r) = 0.$
$\xRightarrow{(V)} h(s) = 0.$

Am obținut:

v	p	q	r	s
$h(v)$	0	1	0	0

Să calculăm pe $\tilde{h}$ în FNC corespunzătoare formei clauzale a lui Σ ($\exists$ o infinitate de interpretări p, q, r, s; fiecare dintre ele satisface egalitatea:)

$$h((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge$$
$$\wedge (\neg s \vee r) \wedge (\neg s \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s)) =$$
$$= [h(p) \vee h(q)] \wedge [\overline{h(q)} \vee \overline{h(r)}] \wedge$$
$$\wedge [\overline{h(r)} \vee h(s)] \wedge [\overline{h(s)} \vee h(r)]$$
$$\wedge [\overline{h(s)} \vee h(p)] \wedge [\overline{h(p)} \vee \overline{h(q)} \vee$$
$$\vee h(s)] = (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) \wedge$$
$$\wedge (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0 \vee 0) = 1. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h \models \Sigma \Rightarrow \Sigma \text{ e satisfiabilă.} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Sigma \text{ este consistentă.}$$

<u>Exerc.:</u> Fie $p, q, r \in V$, (2 sate 2 distincte), și $\varphi = [\neg p \vee (q \wedge \neg r)] \to (p \wedge r) \in E$. Să se det. dacă φ e satisfiabilă.

REZOLVARE:

Punem pe φ sub o formă clauzală, i.e. determinăm o FNC echivalentă logic cu φ.

Vom obține chiar o FNC care nu se poate deriva prin rezoluție dacă direct (fără derivări prin rezoluție sau alte raționamente) prin simpla satisfiabilitate lui φ.

Determinarea unei FNC echivalente logic cu φ o vom face prin două metode:

- folosind echivalențe logice de tipul celor din exercițiul de la pagina 13.2;
- cu ajutorul unui tabel semantic pentru φ.

Metoda I:

$$\varphi \sim \neg[\neg p \vee (q \wedge r)] \vee [(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)] \sim$$

$$\sim [\neg\neg p \wedge \neg(q \wedge r)] \vee [(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)] \sim$$

$$\sim [p \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee [(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)] \sim$$

$$\sim [p \wedge (\neg q \vee \neg r)] \vee [(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)] \sim$$

$$\sim \underbrace{[p \vee (p \wedge r)]}_{\sim p} \wedge [\neg q \vee \neg r \vee (p \wedge r)] \sim$$

$$\sim \underbrace{p \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)}_{\sim p} \wedge \underbrace{(\neg q \vee \neg r \vee \neg r)}_{\neg q \vee \neg r} \sim$$

$\sim p \wedge (\neg q \vee r)$.

Metoda a II-a:

Fie $h: V \to L_2$ arbitrară. Notăm $\psi = \neg p \vee (q \wedge \neg r) \in E$.

φ_1	0 0 0 0 1 1 1 0 1
φ_2	1 1 1 1 1 0 0 1 0
φ_3	0 0 0 0 0 1 0 1
φ_4	0 0 1 0 0 0 1 0
φ_5	1 0 1 0 1 0 1 0
φ_6	1 1 1 1 0 0 0 0
φ_7	0 1 0 1 0 1 0 1
φ_8	0 0 1 1 0 0 1 1
φ_9	0 0 0 0 1 1 1 1

Pt. determinarea unei FNC echivalente logic cu φ, ne interesează liniile din acest tabel semantic în care $\tilde{h}(\varphi) = 0$. Vom proceda, în maniera din metoda I, FNC obținută din acest tabel semantic, pentru a obține o FNC mai simplă. Din tabelul dobândit, rezultă că:

$$\varphi \sim (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \sim$$

$$\sim [p \vee q \vee (r \wedge \neg r)] \wedge [p \vee \neg q \vee (r \wedge \neg r)] \wedge (\neg p \vee q \vee r) \sim$$

$$\sim (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \sim$$

$\sim[p \vee (q \wedge \neg q)] \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim$
$\sim p \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim (p \wedge \neg p) \vee$
$\vee [p \wedge (\neg q \vee r)] \sim p \wedge (\neg q \vee r)$.

Prin fiecare dintre cele două metode, am obținut că $\varphi \sim$ $\sim p \wedge (\neg q \vee r)$, enunț în FNC (echivalent cu mulțimea de clauze $\{\{p\}, \{\neg q, r\}\}$) satisfiabil, întrucât variabilele propoziționale care apar în el sunt două câte două distincte; enunțul câte două satisfăcut de orice $h: V \to L_2$ cu $\begin{cases} h(p)=1 \\ \text{și} \\ h(q)=0 \end{cases}$ sau $h(r)=1$. $\Rightarrow$ Enunțul φ e satisfiabil; φ e satisfăcut de orice interpretare ca mai sus.

<u>Exerc.:</u> Fie $p, q \in V$, $p \neq q$, și $\varphi = (p \wedge q) \vee$ $\vee \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \in E$.

Dem. că $\vdash \varphi$.

REZOLVARE:

Au loc următoarele echivalențe:

$\vdash \varphi \overset{(TC)}{\Leftrightarrow} \models \varphi \Leftrightarrow \neg\varphi$ e nesatisfiabil.

Punem enunțul $\neg\varphi$ într-o formă clauzală, i.e. dată o FNC echivalentă logic cu φ:

$$\neg\varphi = \neg[(p\wedge q)\vee\neg(p\to q)\vee\neg(q\to p)\vee$$
$$\vee(\neg p\wedge\neg q)] \sim \neg(p\wedge q)\wedge\neg\neg(p\to q)\wedge$$
$$\wedge\neg\neg(q\to p)\wedge\neg(\neg p\wedge\neg q) \sim (\neg p\vee\neg q)\wedge$$
$$\wedge(p\to q)\wedge(q\to p)\wedge(\neg\neg p\vee\neg\neg q) \sim$$
$$\sim(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(p\vee q),$$

enunț în FNC echivalent în mulțimea de clauze: $\{\{\neg p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg q,p\},\{p,q\}\}$. Trebuie să găsim o derivare prin rezoluție a acestei mulțimi de clauze în care să apară $\square$ (clauza vidă).

$$\frac{\{\neg p,\neg q\},\{\neg p,q\},\{\neg q,p\},\{p,q\}}{\{\neg q\},\{\neg p,q\},\{p,q\}}$$

$$\frac{\{\neg q\},\{\neg p,q\},\{p,q\}}{\{\neg q\},\{q\}}$$

$$\frac{\{\neg q\},\{q\}}{\square}$$

$\square \to$ nesatisfiabilă. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \neg\varphi$ e nesatisfiabil. $\Leftrightarrow \models\varphi$. $\overset{(TC)}{\Leftrightarrow}$ $\overset{(TC)}{\Leftrightarrow} \vdash\varphi$.

O REZOLVARE SEMANTICĂ PENTRU EXERCIȚIUL ENUNȚAT PE VERSO-UL PAGINII 1 :

Fie $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$, a.î.

$h \models \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\}$. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{h}(\varphi) = 1 \\ 1 = \tilde{h}(\varphi \to (\psi \to \chi)) = \\ \quad = \tilde{h}(\varphi) \to (\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi)) = \\ \quad = \overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \tilde{h}(\chi) \\ 1 = \tilde{h}(\neg\chi) = \overline{\tilde{h}(\chi)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{h}(\chi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\chi)}} = \overline{1} = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1 = \overline{1} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee 0 = 0 \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} =$

$= \overline{\tilde{h}(\psi)} = \tilde{h}(\neg\psi)$. $\Rightarrow \tilde{h}(\neg\psi) = 1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\} \models \neg\psi \Leftrightarrow$

$\overset{(TCT)}{\Longleftrightarrow} \{\varphi, \varphi \to (\psi \to \chi), \neg\chi\} \vdash \neg\psi$.

O REZOLVARE PRIN TABEL SEMANTIC PENTRU EXERCIȚIUL ENUNȚAT LA PAGINA 9:

$p, q \in V$;

$\varphi = (p \wedge q) \vee \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \in E$,

$$\underline{\vdash \varphi.}$$

Fie $h: V \to L_2 = \{0, 1\}$, arbitrară.

$h(p)$	$h(q)$	$\tilde{h}(\varphi)$	$\tilde{h}(\neg\varphi)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

METODA I: Din cele de mai sus rezultă că $(\forall h: V \to L_2)$ $(h \models \varphi)$. $\overset{(def)}{\Longleftrightarrow} \models \varphi \overset{(TC)}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi$.

METODA II: Din cele de mai sus rezultă că $(\nexists h: V \to L_2)$ $(h \models \neg\varphi)$. $\overset{(def)}{\Longleftrightarrow} \neg\varphi$ e nesatisfiabil $\Leftrightarrow$ $\overset{(propr. din curs)}{\Longleftrightarrow} \models \varphi \overset{(TC)}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi$.