Operaţii cu Numere Cardinale

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

Semestrul II, 2024-2025

Exerc.: Definițiile sumei, respectiv produsului, respectiv puterii de cardinale sunt următoarele: $\forall$ mulțimile A, B,

$$\begin{cases} |A| + |B| := |A \amalg B|, \\ |A| \cdot |B| := |A \times B|, \\ |B|^{|A|} := |B^A|, \end{cases}$$

unde $B^A := \{f \mid f : A \to B\}$.

Să se demonstreze că aceste definiții sunt independente de reprezentanți.

REZOLVARE:

Fie A, B, A', B' mulțimi a.î. $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $A \cong A'$ și $B \cong B'$, $\rightarrow$ sunt în bijecție.

Avem de demonstrat că:

$$|A \amalg B| = |A' \amalg B'|, \quad |A\times B| = |A'\times B'|,$$
$$|B^A| = |B'^{A'}|,$$ i.e., că:

$$A \amalg B \simeq A' \amalg B', \quad A\times B \simeq A'\times B' \text{ și } B^A \simeq B'^{A'}.$$

Să considerăm două bijecții:

$$A \xrightarrow[\simeq]{\varphi} A' \text{ și } B \xrightarrow[\simeq]{\psi} B'.$$

Folosim următoarea reprezentare a sumei directe:

$$\begin{cases} A \amalg B = (A\times\{1\}) \cup (B\times\{2\}) = \\ = \{(a,1) \mid a\in A\} \cup \{(b,2) \mid b\in B\}, \\ A' \amalg B' = (A'\times\{1\}) \cup (B'\times\{2\}) = \\ = \{(a',1) \mid a'\in A'\} \cup \{(b',2) \mid b'\in B\}. \end{cases}$$

Definim funcția:

$$\begin{cases} A \amalg B \xrightarrow{f} A' \amalg B', \\ (\forall a\in A)(f(a,1) := (\varphi(a),1)) \\ (\forall b\in B)(f(b,2) := (\psi(b),2)) \end{cases}$$

$f \to$ bijecție #.

$(\forall a' \in A)\big(f(\varphi^{-1}(a'), 1) =$

$= (\varphi(\varphi^{-1}(a')), 1) = (a', 1)\big).$

$(\forall b' \in B)\big(f(\psi^{-1}(b'), 2) =$

$= (\psi(\psi^{-1}(b')), 2) = (b', 2)\big).$

$\Rightarrow f$ e surjectivă. $(*)$.

Fie $(x, i), (y, j) \in A \amalg B$

a.î. $f(x, i) = f(y, j)$.

$$f(x,i) = \begin{cases} (\varphi(x), 1), & \text{dc. } i = 1, \\ (\psi(x), 2), & \text{dc. } i = 2, \end{cases}$$

$$f(y,j) = \begin{cases} (\varphi(y), 1), & \text{dc. } j = 1, \\ (\psi(y), 2), & \text{dc. } j = 2. \end{cases}$$

$\Rightarrow i = j$.

Dacă $i = j = 1$, at. $\Rightarrow x, y \in A$

$(\varphi(x), 1) = f(x, i) = f(y, j) = (\varphi(y), 1) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \overset{\varphi \text{ inj.}}{\Longleftrightarrow} x = y.$

Dacă $i = j = 2$, at. $\Rightarrow x, y \in B$

$(\psi(x), 2) = f(x, i) = f(y, j) = (\psi(y), 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi(x) = \psi(y) \Rightarrow x = y$, pt. că ψ – injectivă.

$\Rightarrow (x, i) = (y, j) \Rightarrow f$ e injectivă. $(*)$

$(*), (**) \Rightarrow f$ e bijectivă. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \amalg B \simeq A' \amalg B'$.

Fie $g: A \times B \to A' \times B'$, $(\forall a \in A)$ $(\forall b \in B)$ $\left(g(a, b) := (\varphi(a), \psi(b))\right)$.

$(\forall (a', b') \in A' \times B')$

$\left(g(\varphi^{-1}(a'), \psi^{-1}(b')) = \right.$

$= (\varphi(\varphi^{-1}(a')), \psi(\psi^{-1}(b'))) =$

$= (a', b')) \Rightarrow g$ e surjectivă. $(**)$

Fie $(a, b), (x, y) \in A \times B$, a.î. $g(a, b) = g(x, y) \Leftrightarrow (\varphi(a), \psi(b)) =$

$= (\varphi(x), \psi(y)) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(a) = \varphi(x) \xRightarrow{\varphi\text{ inj}} a = x \\ \psi(b) = \psi(y) \xRightarrow{\psi\text{ inj}} b = y \end{cases}$

$\Rightarrow (a, b) = (x, y) \Rightarrow g$ e injectivă. $(***)$

$(**), (***) \Rightarrow g$ e bijectivă. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \times B \simeq A' \times B'$.

$$A' \xrightarrow{\varphi^{-1}} A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\psi} B'$$

$$\overset{h(p)}{\curvearrowright}$$

$$A \xrightarrow{\varphi} A' \xrightarrow{p'} B' \xrightarrow{\psi^{-1}} B$$

$$k(p') = h^{-1}(p')$$

Definim funcția $h : B^A \to B'^{A'}$, $(\forall p \in B^A)(h(p) := \psi \circ p \circ \varphi^{-1})$,

precum și funcția $k : B'^{A'} \to B^A$, $(\forall p' \in B'^{A'})(k(p') := \psi^{-1} \circ p' \circ \varphi)$.

h și k sunt inverse una alteia, căci

$$(\forall p \in B^A)(k(h(p)) = \psi^{-1} \circ \psi \circ p \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = p),$$

$$(\forall p' \in B'^{A'})(h(k(p')) = \psi \circ \psi^{-1} \circ p' \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p'),$$

$\Rightarrow k = h^{-1}$. $\Rightarrow h$ e inversabilă, deci

bijectivă. $\Rightarrow B^A \simeq B'^{A'}$.

MATERIAL FACULTATIV: calcul de cardinale

<u>Prop.</u> (<u>Principiul Includerii și al Excluderii</u>): $n \in \mathbb{N}^*$;

$M_1, \ldots, M_n \rightarrow$ mulțimi finite.

Atunci:

(a)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap \ldots \cap M_n| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}|;$$

(b) $$\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| -$$

$$- \sum_{1\le i<j\le n} |M_i \cup M_j| +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup \ldots \cup M_n| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} (-1)^{k-1} \cdot$$

$$\cdot \left|M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots \cup M_{i_k}\right|.$$

<u>Dem.:</u> (b) se dem. analog cu (a), dar interschimbând $\cup$ și $\cap$ în dem. lui (a).

Vom dem. (a) prin două (trei) metode.

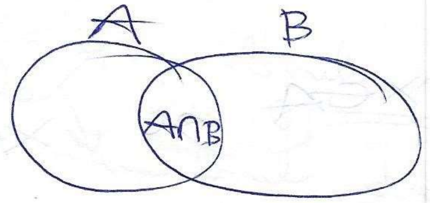
(a) $\rightarrow$ METODA I:

Folosim faptul că, $\forall$ mulțimile

finite A și B, are loc egalitatea:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$ care se poate dem. în mai multe moduri:

- intuitiv:



- (DIAGRAME VENN-EULER) folosind diagrame de mai sus pentru a observa faptul că:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) =$$
$$= (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

reuniuni disjuncte, după cum se poate observa prin analiza elementelor celor 3 termeni și fiecărei reuniuni.

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\subset A}| + |B \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\subset B}| + |A \cap B|$$
$$= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| =$$

$= |A| + |B| - |A \cap B|.$

- folosind faptul că fiecare elem. $x (\in A \cup B)$ se află în exact una dintre următoarele 4 (mai precis 3 dacă $x \in A \cup B$) situații:

(1) $x \in A$ și $x \in B$, caz în care x contribuie, în egalitatea pe care o demonstrăm, la

membrul stâng cu 1;

membrul drept cu $1+1-1=1$;

(2) $x \in A$ și $x \notin B$, caz în care x contribuie la

membrul stâng cu 1;

membrul drept cu $1+0-0=1$;

(3) $x \notin A$ și $x \in B$, caz în care

x contribuie la → membrul stâng cu 1; → membrul drept cu $0+1-0=1$;

(4) $x \notin A$ și $x \notin B$, caz în care x contribuie la → membrul stâng cu 0; → membrul drept cu $0+0-0=0$;

$\Rightarrow$ Egalitatea $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ este valabilă.

- folosind funcții caracteristice (a se vedea un LMC(C) și un LMC(S) următor): fie, de exemplu, $T := A \cup B$ și $(\forall X \subseteq T)$ ($\chi_X :=$ fct. caracteristică a lui X raportat la T), atunci: $(\forall X \subseteq T)$ $\left(|X| = \sum_{\alpha \in T} \chi_X(\alpha)\right)$, iar $\chi_{A \cup B} =$

$= \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$, adică,

$(\forall x \in T)(\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x))$, prin urmare,

$$|A\cup B| = \sum_{x\in T} \chi_{A\cup B}(x) =$$

$$= \sum_{x\in T} (\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)) =$$

$$= \sum_{x\in T} \chi_A(x) + \sum_{x\in T} \chi_B(x) -$$

$$- \left(\sum_{x\in T} \chi_{A\cap B}(x)\right) = |A| + |B| - |A\cap B|.$$

Să începem demonstrația propriu-zisă a Principiului Includerii și al Excluderii, prima metodă.

Procedăm prin inducție după $n\in\mathbb{N}^*$.

$\underline{n=1}$: $|M_1| = |M_1|$, $\rightarrow$ adevărat.

$\underline{n-1 \rightarrow n \geq 2}$: Pp. că $n\geq 2$

şi identitatea este valabilă pt. $n-1$ mulţimi.

Aici vom folosi egalitatea $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$, stabilită mai sus.

$$|M_1\cup \ldots \cup M_n| =$$

$$= \left|(M_1\cup \ldots \cup M_{n-1})\cup M_n\right| =$$

$$= |M_1\cup \ldots \cup M_{n-1}| + |M_n| -$$

$$- \left|(M_1\cup \ldots \cup M_{n-1})\cap M_n\right| \underset{(\text{distrib.})}{=}$$

$$= |M_1\cup \ldots \cup M_{n-1}| + |M_n| -$$

$$- \left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i\cap M_n)\right| \underset{(\text{ipoteza de inducţie})}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1}(-1)^{k-1}\cdot\left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}\right| +$$

$$+ |M_n| + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1}(-1)^{k}\cdot$$

$$\cdot\left|\bigcap_{j=1}^{k}(M_{i_j}\cap M_n)\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n-1} (-1)^{k-1} \cdot \left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}\right|$$

$$+ |M_n| + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n-1} (-1)^{k} \cdot \left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j} \cap M_n\right| =$$

$$(-1)^{k} = (-1)^{k+1-1}$$

partea din suma totală cu indici $\le n-1$

partea din suma totală în care apare și indicele n

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} (-1)^{k-1} \cdot \left|\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}\right|.$$

$\Rightarrow$ Identitatea este valabilă pt. orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $\longrightarrow$ METODA A II-A:

Fie $x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, arbitrar, fixat, (se adună/consideră/contabilizează elementele lui $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ la cardinalele din cei doi membri ai egalității, pe rând)

Presupunem că x aparține dintre cele n mulțimi la k cu $k \in \overline{1,n}$, $M_1, \dots, M_n$, de exemplu x aparține numai mulțimilor $M_{i_1}, \dots, M_{i_k}$ cu $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.

Pentru fiecare $s \in \overline{1,k}$, dintre intersecțiile a s mulțimi distincte dintre $M_1, \dots, M_n$, x se află în acelea în care toate mulțimile care se intersectează se află printre mulțimile $M_{i_1}, \dots, M_{i_k}$, adică în exact C_k^s dintre aceste intersecții.

Pentru fiecare $s \in \overline{k+1,n}$, x nu se află în niciuna dintre intersecțiile a s mulțimi distincte dintre $M_1, \dots, M_n$.

se adună contribuțiile fiecărui $x \in M_1 \cup \dots \cup M_n$ și se obț. membrul dr.

$\Rightarrow$ x contribuie la cardinalul reuniunii din membrul stâng al identității cu 1; suma din membrul drept al identității cu $\sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} \cdot C_k^s = 1 - (1-1)^k = 1 - 0 = 1$.

$1 = (-1)^0 \cdot C_k^0$

⇒ Identitatea este satisfăcută.

(a) ⟶ METODA A III-A:

Not. $T := M_1 \cup \dots \cup M_n$ şi $(\forall X \subseteq T)(\chi_X :=$ fct. caract. a lui X rap. la T).

Folosind identitatea $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$ $(\forall A, B \in \mathcal{P}(T))$, printr-un raţionament prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$ similar cu acela de la METODA I, se dem. că

$$\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} M_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} (-1)^{k-1} \cdot \chi_{\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j}}$$

apoi se foloseşte faptul că $(\forall X \subseteq T)\left(|X| = \sum_{x \in T} \chi_X(x)\right)$.

Pt. fct. caracteristice, v. LMC(C+S) următoare!

Numerele naturale, întregi, rationale, reale etc. şi operaţiile cu acestea pot fi definite pornind de la numerele cardinale şi operaţiile cu acestea: de exemplu, puterile naturale ale numerelor naturale pot fi definite ca numere cardinale ale unor mulţimi de funcţii, ca în curs.

În următorul exerciţiu, adoptăm punctul de vedere naiv şi, pe baza operaţiilor cu numere naturale cunoscute din învăţământul preuniversitar, calculăm numărul funcţiilor care se pot defini între două mulţimi finite, apoi pe cel al funcţiilor bijective, injective, surjective între aceleaşi mulţimi.

În următorul exercițiu vom calcula numărul de funcții, precum și numărul de funcții $\to$ bijective, injective, surjective între două mulțimi finite și nevide.

Pentru orice mulțime M, vom nota cu $|M| :=$ cardinalul lui M.

<u>Exerc.:</u> $A, B \to$ mulțimi, $|A| = a \in \mathbb{N}^*$, $|B| = b \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că:

(i) $\left|\{f \mid f : A \to B\}\right| = b^a$, $\left(= |B|^{|A|}\right)$.

(deci $|B^A| = |B|^{|A|}$.) B^A (not. uzuală)

(ii) $\left|\{f \mid f: A \to B,\ f \to \text{bijectivă}\}\right| = \begin{cases} a!, & \text{dacă } a = b; \\ 0, & \text{altfel;} \end{cases}$

(iii) $\left|\{f \mid f: A \to B,\ f \to \text{injectivă}\}\right| = \begin{cases} \underbrace{A_b^a}_{\text{aranjamente de } b \text{ luate câte } a} = \dfrac{b!}{(b-a)!}, & \text{dacă } a \le b; \\ 0, & \text{altfel;} \end{cases}$

(iv) $\left|\{f \mid f: A \to B,\ f \to \text{surjectivă}\}\right| =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{dacă } a < b; \\ b^a - C_b^1 (b-1)^a + C_b^2 (b-2)^a - \dots + (-1)^{b-1} \cdot C_b^{b-1} = \\ = \sum_{i=0}^{b} (-1)^i \cdot \underbrace{C_b^i}_{\text{combinări de } b \text{ luate câte } i} \cdot (b-i)^a, & \text{dacă } a \ge b, \end{cases}$$

$$C_b^i = \frac{b!}{(b-i)! \cdot i!} \overset{\text{notație}}{\underset{\text{alternativă}}{=}} \binom{b}{i}.$$

REZOLVARE:

Pentru orice mulțimi finite și

nevide X și Y, cu $|X| = x \in \mathbb{N}^*$ și $|Y| = y \in \mathbb{N}^*$, notăm cu:

$$\begin{cases} N(x, y) := \left|\{f \mid f : X \to Y\}\right|; \\ NBIJ(x, y) := \left|\{f \mid f : X \to Y,\ f \to \text{bijectivă}\}\right|; \\ NINJ(x, y) := \left|\{f \mid f : X \to Y,\ f \to \text{injectivă}\}\right|; \\ NSURJ(x, y) := \left|\{f \mid f : X \to Y,\ f \to \text{surjectivă}\}\right|. \end{cases}$$

Notațiile sunt corecte, în sensul că nu depind de reprezentanții claselor de mulțimi de cardinal x respectiv y, adică nu depind de alegerea mulțimilor X, Y, cu $|X| = x$ și $|Y| = y$.

Într-adevăr, pentru orice mulțimi X', Y', cu $|X'| = x$ și $|Y'| = y$, avem:

$$\begin{cases} |X| = |X'| \Leftrightarrow \exists \text{ o bijecție } \varphi : X' \to X; \\ |Y| = |Y'| \Leftrightarrow \exists \text{ o bijecție } \psi : Y \to Y'. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrr, bend left, "g"] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\psi"] & Y' \end{tikzcd}$$

dacă notăm cu:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(X,Y) := \{f \mid f : X \to Y\}, \\ \mathcal{B}(X,Y) := \{f \mid f : X \to Y,\ f \to \text{bijectivă}\}, \\ \mathcal{I}(X,Y) := \{f \mid f : X \to Y,\ f \to \text{injectivă}\}, \\ \mathcal{S}(X,Y) := \{f \mid f : X \to Y,\ f \to \text{surjectivă}\} \end{cases}$$

și la fel pentru X' și Y', atunci este evident și ușor de demonstrat că:

- funcția $h_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X,Y) \to \mathcal{F}(X',Y')$, definită prin: $(\forall f \in \mathcal{F}(X,Y))\ h_{\mathcal{F}}(f) := \psi \circ f \circ \varphi\ (\in \mathcal{F}(X',Y'))$ este corect definită și bijectivă cu inversa $h_{\mathcal{F}}^{-1} : \mathcal{F}(X',Y') \to \mathcal{F}(X,Y)$, $\big(\forall\, g \in \mathcal{F}(X',Y')\big)\big(h_{\mathcal{F}}^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1}\big)$, unde φ^{-1} și ψ^{-1} sunt inversele bijecțiilor φ și respectiv ψ; (pt. că $h_{\mathcal{F}}^{-1} \circ h_{\mathcal{F}} = id_{\mathcal{F}(X,Y)}$, $h_{\mathcal{F}} \circ h_{\mathcal{F}}^{-1} = id_{\mathcal{F}(X',Y')}$ ∧ def. ce mai sus)

- funcția $h_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathcal{B}(X',Y')$ definită prin: $\big(\forall\, f \in \mathcal{B}(X,Y)\big)\big(h_{\mathcal{B}}(f) := \psi \circ f \circ \varphi \in \mathcal{B}(X',Y')\big)$, este corect definită și bijectivă cu inversa $h_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathcal{B}(X',Y') \to \mathcal{B}(X,Y)$ $\big(\forall\, g \in \mathcal{B}(X',Y')\big)\big(h_{\mathcal{B}}^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1}\big)$

- funcția $h_{\urcorner} : \urcorner(X,Y) \to \urcorner(X',Y')$ definită prin: $\big(\forall\, f \in \urcorner(X,Y)\big)\big(h_{\urcorner}(f) := \psi \circ f \circ \varphi \in \urcorner(X',Y')\big)$, este corect definită și bijectivă cu inversa $h_{\urcorner}^{-1} : \urcorner(X',Y') \to \urcorner(X,Y)$

$(\forall g \in \mathcal{I}(X',Y'))(h_{\mathcal{I}}^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1})$;

- funcția $h_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}(X,Y) \to \mathcal{S}(X',Y')$, definită prin: $(\forall f \in \mathcal{S}(X,Y))(h_{\mathcal{S}}(f) := \psi \circ f \circ \varphi \in \mathcal{S}(X',Y'))$, este corect definită și bijectivă, cu inversa $h_{\mathcal{S}}^{-1} : \mathcal{S}(X',Y') \to \mathcal{S}(X,Y)$, $(\forall g \in \mathcal{S}(X',Y'))(h_{\mathcal{S}}^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1})$.

Așadar, au loc:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{h_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}(X',Y') \Rightarrow \\ \Rightarrow N(x,y) = |\mathcal{F}(X,Y)| = |\mathcal{F}(X',Y')|; \\ \mathcal{B}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{h_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}(X',Y') \Rightarrow \\ \Rightarrow NBIJ(x,y) = |\mathcal{B}(X,Y)| = |\mathcal{B}(X',Y')|; \\ \mathcal{I}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{h_{\mathcal{I}}} \mathcal{I}(X',Y') \Rightarrow \\ \Rightarrow NINJ(x,y) = |\mathcal{I}(X,Y)| = |\mathcal{I}(X',Y')|; \\ \mathcal{S}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{h_{\mathcal{S}}} \mathcal{S}(X',Y') \Rightarrow \\ \Rightarrow NSURJ(x,y) = |\mathcal{S}(X,Y)| = |\mathcal{S}(X',Y')|. \end{cases}$$

Prin definiție, avem:

$$\begin{cases} |A| = |B| \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \text{ o bijecție } f: A \to B; \\ \text{(fapt pe care l-am folosit și mai sus.)} \\ |A| \leq |B| \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \text{ o injecție } f: A \to B; \\ |A| \geq |B| \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \text{ o surjecție } f: A \to B. \end{cases}$$

În acest caz finit și nevid, în care cardinalul = nr. de elemente (intuitiv), sunt clare, în această interpretare intuitivă, echivalențele de mai sus, din chiar definițiile funcțiilor "bij", "inj", "surj".

Așadar:

$$\begin{cases} NBIJ(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a = b; \\ NINJ(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a \leq b; \\ NSURJ(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a \geq b. \end{cases}$$

În cele ce urmează, păstrăm

notațiile $\mathcal{F}(X,Y)$, $\mathcal{B}(X,Y)$, $\mathcal{I}(X,Y)$, $\mathcal{S}(X,Y)$ pentru mulțimile funcțiilor, respectiv funcțiilor bijective, injective, surjective între două mulțimi arbitrare X și Y.

Trecem la rezolvarea propriu-zisă a exercițiului.

(i) $N(a,b) = |\mathcal{F}(A,B)| = ?$

Procedăm prin inducție matematică după $a \in \mathbb{N}^*$

<u>$a = 1$:</u> $N(1,b) = b$ b^1 pt. că avem câte o funcție pentru fiecare valoare posibilă a unei funcții din $\mathcal{F}(A,B)$ în unicul element al lui A, anume cardinalul lui B.

Mai precis, suntem în cazul: $A = \{\alpha\}$, ergo: $N(1,b) =$
$= |\mathcal{F}(\{\alpha\}, B)| = |\{f \mid f : \{\alpha\} \to B\}| =$

$= \left| \{ f(\alpha) \mid f : \{\alpha\} \to B \} \right| = |B| = b =$

$= b^{1} = b^{a}$. Varianta: $B \simeq \mathcal{F}(\{\alpha\}, B)$, $\beta \in B \to f \in \mathcal{F}(\{\alpha\}, B)$, $f(\alpha) = \beta$

$a-1 \to a \geq 2$: Pp. $|A| = a \geq 2$ și egalitatea valabilă pt. $a-1$.

Fie $\alpha \in A$, arbitrar, fixat, și

$$A' := A \setminus \{\alpha\} \Rightarrow \begin{cases} A = A' \cup \{\alpha\}, \\ \alpha \notin A', \\ |A'| = a - 1 \geq 1. \end{cases}$$

Stabilim bijecția:

$$\begin{cases} B \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\{\alpha\}, B), \\ \beta \longmapsto f, \ f(\alpha) := \beta. \end{cases}$$

Conform ipotezei de inducție

$$|\mathcal{F}(A', B)| = N(a-1, b) = b^{a-1}.$$

$$N(a,b) = |\mathcal{F}(A, B)| = \left| \{ f \mid f : A \to B \} \right| =$$

$$= \left| \{ f|_{A'} \mid f : A \to B \} \right| \cdot \left| \{ f(\alpha) \mid f : A \to B \} \right| = $$

$$\left| \{ f \mid f : A' \to B \} \right|$$

$$= |\mathcal{F}(A', B)| \cdot |B| = N(a-1, b) \cdot b =$$

$= b^{a-1} \cdot b = b^{a}$. În concluzie:

$|\mathcal{F}(A,B)| = |\mathcal{F}(A',B)| \cdot$ nr. de val. posibile pt. $f(\alpha)$, $\forall f\in\mathcal{F}(A,B)$, $=$
$= |\mathcal{F}(A',B)|\cdot|B|$.

Variantă de rezolvare: stabilim bijecția:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}(A,B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(A',B)\times B, \\ f \longmapsto (f|_{A'}, f(\alpha)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathcal{F}(A,B)| = |\mathcal{F}(A',B)\times B| =$$
$$= |\mathcal{F}(A',B)|\cdot|B|.$$

$$\boxed{\text{Clar: nr. de perechi} \in X\times Y = \sum_{j\in Y} |\{(i,j) \mid i\in X\}| = \sum_{j\in Y}|X| = |X|\cdot|Y|.}$$

Raționamentul prin inducție matematică este încheiat

$$(\forall a,b\in\mathbb{N}^*) \Rightarrow N(a,b) = |\underbrace{\mathcal{F}(A,B)}_{\overset{not.}{=}\, B^A}| = b^a = |B|^{|A|}.$$

(ii) Pp. că $a=b$.

$$NBIJ(a,b) = |\mathcal{B}(A,B)| = ?$$
$$\shortparallel$$
$$NBIJ(a,a)$$

Efectuăm inducție matematică după $a \in \mathbb{N}^*$.

$\underline{a=1}$: $NBIJ(1,1) = |B(\{\alpha\},\{\beta\})| =$

$|A|=|B|=1 \Rightarrow \begin{cases} A=\{\alpha\} \\ B=\{\beta\}, \text{ pt. 2 elem. } \alpha, \beta. \end{cases}$

$= |F(\{\alpha\},\{\beta\})| = N(1,1) = 1^1 = 1 =$
$= 1! = a!$

pt. că unica funcție între două singletonuri ($f:\{\alpha\} \to \{\beta\}$, $f(\alpha) := \beta$) este bijectivă.

$\underline{a-1 \longrightarrow a \geq 2}$: Pp. $a \geq 2$ și egalitatea $NBIJ(a-1, a-1) = (a-1)!$ valabilă.

Fie $\alpha \in A$ arbitrar, fixat și

$A' := A \setminus \{\alpha\} \Rightarrow \begin{cases} A = A' \cup \{\alpha\}, \\ \alpha \notin A'; \\ |A'| = a-1 \geq 1 \end{cases}$

Stabilim bijecția:

$$\begin{cases} \mathcal{B}(A, B) \xrightarrow{\sim} \bigcup_{\beta \in B} \mathcal{B}(\underset{A \setminus \{\alpha\}}{\underset{\shortparallel}{A'}}, B \setminus \{\beta\}) \\ \quad \Downarrow \\ f \longrightarrow g: A' = A \setminus \{\alpha\} \to B \setminus \{f(\alpha)\} \\ \qquad \underset{\mathcal{B}(\underset{A \setminus \{\alpha\}}{\underset{\shortparallel}{A'}}, B \setminus \{f(\alpha)\})}{\overset{\shortparallel}{\ }} \quad (\forall x \in A')\ g(x) := f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow NBIJ(a, a) = |\mathcal{B}(A, B)| =$$

$$= \Big| \underbrace{\bigcup_{\beta \in B}}_{\text{reuniune disjunctă}} \mathcal{B}(A', B \setminus \{\beta\}) \Big| =$$

$$= \sum_{\beta \in B} |\mathcal{B}(A', B \setminus \{\beta\})| =$$

$$= \sum_{\beta \in B} NBIJ(a-1, a-1) =$$

$$= |B| \cdot NBIJ(a-1, a-1) =$$

$$= a \cdot NBIJ(a-1, a-1) =$$

$$= a \cdot (a-1)! = a!$$

$$\Rightarrow (\forall a \in \mathbb{N}^*)\ NBIJ(a, a) = |\mathcal{B}(A, B)| = a!.$$

(iii) Pp. că $a \leq b$.

$$\mathrm{NINJ}(a,b) = |\mathcal{I}(A,B)| = ?$$

$\forall f \in \mathcal{I}(A,B)$, $\Rightarrow$ $g : A \to f(A)$

$(\forall x \in A)(g(x) := f(x))$ satisface

$g \in \mathcal{B}(A, f(A))$.

Stabilim bijecția:

$$\begin{cases} \mathcal{I}(A,B) \xrightarrow{\sim} \bigcup\limits_{\substack{B' \subseteq B,\\ |B'| = a}} \mathcal{B}(A, B') \\ \quad \Psi \\ f \longrightarrow g \in \mathcal{B}(A, f(A)), \\ \qquad (\forall x \in A)(g(x) := f(x)). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{NINJ}(a,b) = |\mathcal{I}(A,B)| =$$

$$= \Big| \bigcup_{\substack{B' \subseteq B,\\ |B'| = a}} \mathcal{B}(A,B') \Big| = \sum_{\substack{B' \subseteq B,\\ |B'| = a}} |\mathcal{B}(A,B')| =$$

reuniune disjunctă

$$= \sum_{\substack{B' \subseteq B,\\ |B'| = a}} \mathrm{NBIJ}(a,a) = |\{B' \mid B' \subseteq B, |B'| = a\}|.$$

$\cdot NBIJ(a,a) = C_b^a \cdot NBIJ(a,a) =$

$= C_b^a \cdot a! = A_b^a = \dfrac{b!}{(b-a)!}$.

(iv) Pp. că $a \geq b$.

Fie $\beta_1, \dots, \beta_b$ elementele lui B: $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b\}$.

Pentru fiecare $i \in \overline{1,b}$, notăm $M_i = \{f \mid f : A \to B, \ \beta_i \notin f(A)\} \cong \mathcal{F}(A, B \setminus \{\beta_i\})$. $\Rightarrow$

în bijecție, deci cardinal echivalente

duce f în corestricția sa la $B \setminus \{\beta_i\}$

$\Rightarrow |M_i| = |\mathcal{F}(A, B \setminus \{\beta_i\})| =$
$= |\mathcal{F}(A, \{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_b\})| =$
$= N(a, b-1) \overset{(i)}{=} (b-1)^a$.

$(\forall k \in \overline{1,b})(\forall\, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots$
$\dots < i_k \leq b)\left(\bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j} = \{f \mid f : A \to B,\right.$

$\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k} \notin f(A)\} \simeq \mathcal{F}(A, B \setminus \{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}\}) \Rightarrow$

$\boxed{\text{fiecare } f \to \text{corestricția lui } f \text{ la } B \setminus \{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}\}}$

$(\forall)\, k \in \overline{1, b}$

$$\Rightarrow \left| \bigcap_{j=1}^{k} M_{i_j} \right| = N(a, b-k) \overset{(i)}{=} (b-k)^a.$$

$$\mathcal{S}(A, B) = \mathcal{F}(A, B) \setminus (M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_b) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{și al Excluderii}]{\text{Principiul Includerii}} NSURJ(a, b) = |\mathcal{S}(A, B)| =$$

$$= \left| \mathcal{F}(A, B) \setminus \underbrace{(M_1 \cup \dots \cup M_b)}_{\subseteq \mathcal{F}(A, B)} \right| =$$

$$= |\mathcal{F}(A, B)| - |M_1 \cup \dots \cup M_b| =$$

$$= N(a, b) - \Big(\sum_{i=1}^{b} |M_i| - \sum_{1 \le i < j \le b} |M_i \cap M_j| +$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le b} |M_i\cap M_j\cap M_k| - \dots$$

$$\dots + (-1)^{b-1}\cdot |M_1\cap\dots\cap M_b|\Big) =$$

$$= b^a - \Big(\overset{b}{\overset{\parallel}{C_b^1}}\cdot(b-1)^a - C_b^2\cdot(b-2)^a +$$

$$+ C_b^3\cdot(b-3)^a - \dots + (-1)^{b-1}\cdot\underbrace{(b-b)^a}_{=0}\Big) =$$

$$= b^a - C_b^1\cdot(b-1)^a + C_b^2\cdot(b-2)^a -$$

$$- C_b^3\cdot(b-3)^a + \dots + (-1)^{b-1}\cdot C_b^{b-1} +$$

$$+ (-1)^b\cdot C_b^b\cdot 0 = \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\cdot C_b^i\cdot(b-i)^a.$$

Pentru următorul exerciţiu, a se vedea cursul privind relaţiile între mulţimi, secţiunea despre relaţii binare pe o mulţime, paragraful despre relaţii de echivalenţă şi partiţiile asociate acestora.

<u>Exerc.</u>: Să se determine numărul relaţiilor de echivalenţă ce se pot defini pe o mulţime cu n elemente, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

REZOLVARE:

Vom determina acest număr prin două metode: folosind → surjecţii; → partiţii.

Fie, așadar, $n \in \mathbb{N}^*$.

Desigur, faptul că nr. de relații de echivalență pe o mulțime A cu n elemente nu depinde de alegerea lui A este imediat: $\forall$ o mulțime B cu $|B| = n = |A|$, $\Rightarrow \exists$ o bijecție $\varphi : A \xrightarrow{\sim} B$, și, pornind de la φ, se construiește bijecția

$\phi : \text{Echiv}(A) \xrightarrow{\sim} \text{Echiv}(B) \xrightarrow[\text{din curs}]{\text{noua notație}} \text{Eq}(B)$

$(\forall \sim \in \text{Echiv}(A))(\phi(\sim) \in \text{Echiv}(B),$ definită prin: $(\forall x, y \in B)$
$x \, \phi(\sim) \, y \overset{def}{\Leftrightarrow} \varphi^{-1}(x) \sim \varphi^{-1}(y)))$

cu inversa $\phi^{-1} : \text{Echiv}(B) \to \text{Echiv}(A)$, $(\forall \rho \in \text{Echiv}(B))$
$(\phi^{-1}(\rho) \in \text{Echiv}(A)$, definită prin:
$(\forall a, b \in A)(a \, \phi^{-1}(\rho) \, b \overset{def}{\Leftrightarrow} \varphi(a) \rho \varphi(b)))$

Faptul că $|Echiv(A)|$ nu depinde de alegerea lui A ci numai de $|A|$ se observă și din calculul propriu-zis, care urmează, în cele 2 metode.

<u>METODA I</u> (folosind surjecții):

Fie A o mulțime cu $|A|=n$.

$(\forall \rho \in Echiv(A))$(lui ρ i se poate asocia surjecția canonică pe care o vom nota cu p_ρ: $p_\rho : A \to A/_\rho$, $(\forall x \in A)(p_\rho(x) := \hat{x} = \{y \in A \mid x \rho y\}$ = clasa lui x raportat la ρ))

$= |A|)(\forall$ o mulțime B cu $|B| \leq n =$ $(\forall$ o funcție surjectivă $f : A \to B)$,(lui f i se poate asocia următoarea relație binară pe A pe care o vom nota cu ρ_f: $\rho_f \subseteq A^2$, $(\forall x, y \in A)(x \rho_f y \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\overset{def.}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(y)))$, din faptul că relația de egalitate (pe B) este o echivalență (reflexivă, simetrică și tranzitivă), rezultă imediat că ρ_f este reflexivă, simetrică și tranzitivă, deci $\rho_f \in Echiv(A)$. Evident, mulțimea factor $A/\rho_f = \{f^{-1}(\{t\}) \mid t \in B\}$.

Prin asocierea $\rho \to p_\rho$ descrisă mai sus, unei relații de echivalență ρ pe A îi corespunde o unică funcție surjectivă: surjecția canonică $p_\rho : A \to A/\rho$. Ce relație de echivalență ρ_{p_ρ} îi corespunde lui p_ρ? Cf. def., $(\forall x, y \in A) (x \rho_{p_\rho} y \Leftrightarrow p_\rho(x) = p_\rho(y) \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \rho y)$. Așadar, $\rho_{p_\rho} = \rho$. $(*)$

Să observăm că, $\forall$ mulțimile B, C cu $|B| = |C| \in n = |A|$, dacă $\varphi : B \xrightarrow{\sim} C$ este o bijecție, iar $f : A \to B$ este o surjecție, atunci $\varphi \circ f : A \to C$ este tot o surjecție, iar $\rho_{\varphi \circ f} \in \mathrm{Echiv}(A)$ este definită prin: $(\forall x, y \in A)(x \rho_{\varphi \circ f} y \Leftrightarrow (\varphi \circ f)(x) = (\varphi \circ f)(y) \Leftrightarrow \varphi(f(x)) = \varphi(f(y)) \xLeftrightarrow{(\varphi \text{ inj})} f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \rho_f y)$, prin urmare: $\rho_{\varphi \circ f} = \rho_f$. $(**)$.

$(*), (**) \Rightarrow (\forall \rho \in \mathrm{Echiv}(A))(\rho = \rho_{p_\rho} = \rho_{\varphi \circ p_\rho}$, $\forall B$ cu $|B| = |A/\rho|$ și $\forall \varphi : A/\rho \xrightarrow{\sim} B$ (bijecție)).

În concluzie:

- (unei / oricărei) echivalenţe $\rho \in Echiv(A)$ îi corespunde o singură funcţie surjectivă: $p_\rho : A \to A/_\rho$;

- aceeaşi echivalenţă $\rho \in Echiv(A)$ corespunde la orice compunere $\varphi \circ p_\rho$, cu $\varphi : A/_\rho \xrightarrow{\sim} A/_\rho$ (bijecţie), (sau $B \in Part(A)$ cu $|B| = |A/_\rho|$)

$$A \xrightarrow{p_\rho} A/_\rho \xrightarrow{\varphi} A/_\rho \text{ (sau } B\text{)}$$

$\exists\ |A/_\rho|!$ factorial astfel de bijecţii, deci $\exists\ |A/_\rho|!$ astfel de compuneri;

- dată $\rho \in Echiv(A)$ oricărei surjecţii $f : A \to A/_\rho$ (sau $B \in Part(A)$, cu $|B| = |A/_\rho|$) îi corespunde echivalenţa

$\rho_f \in \mathrm{Echiv}(A)$, şi are loc $\rho = \rho_f$ ddacă $(\forall x, y \in A)[x \rho y \Leftrightarrow x \rho_f y]$ ddacă $(\forall x, y \in A)[\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)]$; alegând o astfel de surjecţie f ($f : A \to A/\rho$, f surjectivă, $\rho = \rho_f$), putem defini $\varphi : A/\rho \to A/\rho$, $(\forall x \in A)(\varphi(\hat{x}) = f(x))$; $(\forall x, y \in A)$ (avem: $\varphi(\hat{x}) = \varphi(\hat{y}) \overset{\text{def. } \varphi}{\Leftrightarrow} f(x) = f(y) \overset{\text{echiv. de mai sus}}{\Leftrightarrow} \hat{x} = \hat{y}$); în acest şir de echivalenţe, "$\Leftarrow$" arată buna definire a funcţiei φ, iar "$\Rightarrow$" arată injectivitatea lui φ; surjectivitatea lui f arată surjectivitatea lui φ; aşadar, φ este bijectivă; definiţia lui φ se poate rescrie astfel: $f = \varphi \circ p_\rho$;

am demonstrat că o $\boxed{f: A \to A/\rho \text{ surjecție}}$ corespunde echivalenței ρ ddacă $f = \varphi \circ p_\rho$, cu $\varphi : A/\rho \xrightarrow{\sim} A/\rho$..
(bijecție).

$(\forall \rho \in \mathrm{Echiv}(A)) \left(1 \le |A/\rho| \le |A| = n\right)$.

$(\forall k \in \overline{1,n})(\exists \rho \in \mathrm{Echiv}(A)$ cu $|A/\rho| = k)$ (de exemplu $\rho \in \mathrm{Echiv}(A)$, corespunzătoare partiției $\{\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}\}, \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}\} = A/\rho$, unde $\{x_1, \ldots, x_n\} = A$).

Conform celor de mai sus,

pentru orice $k \in \overline{1,n}$, nr. echivalențelor $\rho \in \mathrm{Echiv}(A)$ cu $|A/\rho| = k$ este egal cu $\frac{1}{k!}$ · (nr. de surjecții de la A la A/ρ) $= \frac{1}{k!}$ · (nr. de surjecții de la o mulțime cu n elemente la o mulțime cu k elemente) $\underline{\text{(cu calcul anterior)}}$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i \cdot (-1)^i \cdot (k-i)^n \right) \Rightarrow$$

$\binom{i}{k}$ notație alternativă

$$\Rightarrow |\mathrm{Echiv}(A)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i \cdot (-1)^i \cdot (k-i)^n \right).$$

METODA A II-A (folosind partiții):

Fie $A := \{1, 2, \dots, n\}$, (se poate lua și $A := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($|A| = n$)),

$$|Echiv(A)| = |Part(A)| = \sum_{k=1}^{n} S(n,k),$$ unde $S(n,k) :=$

$:=$ nr. de partiții ale unei mulțimi cu n elemente în k clase, ($\{S(n,k)\}_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ k\in\overline{1,n}}}$ sunt numerele lui Stirling de speța a II-a).

($\forall\, p \in Part(A)$ cu $|p| = k \in \overline{1,n}$) ($p$ - partiție cu k clase) (putem avea:

$\{n\} \in p$ ($p \ni n$ singur într-o clasă)

$\{n\} \notin p$ ($n \in$ unei clase din p în care se găsesc și alte elemente).

deducem că:

$$S(n,k) = \underbrace{S(n-1,k-1)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ dc. } k=1}} +$$

$$+ k \cdot \underbrace{S(n-1,k)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ dc. } n=k}}, \Rightarrow \text{ forma lui } S(n,k), \text{ sau:}$$

n poate să aparțină dintre cele k clase;

atunci

$(\forall k \in \overline{1,n})(\forall f: \overline{1,n} \to \overline{1,k}$, f → surjectivă$)$ (lui f îi asociem partiția lui $A = \overline{1,n}$:

$$\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(k)\}.$$

Ca la metoda I) se deduce că $S(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot$ (nr de surjecții de la $\overline{1,n}$ la $\overline{1,k}$) $=$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i \cdot (-1)^i \cdot (k-i)^n \right),$$

$$|Echiv(A)| = |Part(A)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B(n)$$ ($\{B(n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sunt nr. lui Bell),

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i \cdot (-1)^i \cdot (k-i)^n \right),$$