Breviar pentru Secţiunea despre Mulţimi, Funcţii, Relaţii a Cursului de Logică Matematică şi Computaţională

PARTEA TEORETICĂ, FĂRĂ INTRODUCEREA ÎN PROGRAMAREA ÎN PROLOG

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

∼ ANUL I DE STUDIU AL CICLULUI DE LICENŢĂ, SEMESTRUL I ∼

A se vedea precizările despre **examen** şi **temele obligatorii** de la sfârşitul primului set de cursuri. **Temele** menţionate mai jos sunt **facultative**.

Prescurtări uzuale:

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă şi numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ş. a. m. d.** = şi aşa mai departe
- “:=“: abreviere pentru: $\overset{\text{definiţie}}{=}$, $\overset{\text{notaţie}}{=}$
- —//— : notaţie pentru: ”să se demonstreze că”

1 Teoria mulţimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiţie din **teoria naivă a mulţimilor**: o *mulţime* este o colecţie de obiecte **bine determinate** şi **distincte**, numite *elementele mulţimii*.
- **distincte**: o mulţime nu conţine un acelaşi obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulţime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulţime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în primul set de cursuri Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că **nu există mulţimea tuturor mulţimilor**.

Totalitatea mulţimilor nu formează o mulţime, ci o **clasă**.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulţimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noţiunea de *clasă*, decât că este “ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulţime“. Se consideră că orice mulţime este o clasă, dar nu şi invers. Clasele care nu sunt mulţimi se numesc *clase proprii.*

Semnul (simbolul) de apartenenţă **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparţine unui alt obiect.

Aşadar **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O **axiomă** nu se demonstrează, ci pur şi simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmaţii.
- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: “limbajul natural“, “vorbirea curentă (obişnuită)“, “exprimarea în cuvinte“, “fără simboluri matematice“

2 Echivalenţe logice între diferite tipuri de enunţuri

Lucrăm numai cu enunţuri care sunt **fie false, fie adevărate**.

Conectorii logici: folosiţi pentru a lega enunţuri, formând astfel *enunţuri compuse:*

- *disjuncţia:* sau
- *conjuncţia:* şi
- *negaţia:* non
- *implicaţia:* $\Rightarrow$
- *echivalenţa:* $\Leftrightarrow$

Pentru orice enunţuri (propoziţii, afirmaţii, proprietăţi) p, q şi r, au loc echivalenţele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ şi } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ sau } q) \text{ şi } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ şi } (q \text{ sau } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ şi } q) \text{ sau } (p \text{ şi } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ şi } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ şi } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecinţă imediată a principiului reducerii la absurd şi a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ şi } (q \Rightarrow p)]$)
- implicaţia $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* $\forall$
- *cuantificatorul existenţial:* $\exists$

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- $\text{non } [(\forall\, x)\, (p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\, (\text{non } p(x))$
- $\text{non } [(\exists\, x)\, (p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\, (\text{non } p(x))$; abrevierea uzuală pentru enunţul $\text{non } [(\exists\, x)\, (p(x))]$ este: $(\nexists\, x)\, (p(x))$

Amintesc abrevierea uzuală pentru enunţul: $\text{non } [(\exists\, x)\, (p(x))]$: $(\nexists\, x)\, (p(x))$.

Notaţia 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists\,!$ semnifică “există un unic“, “există şi este unic“.

Observaţia 2.2. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notaţie prescurtată pentru enunţuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x, atunci scrierea $(\exists\,!\, x)\, (p(x))$ este o abreviere pentru enunţul scris, desfăşurat, astfel:

$$(\exists\, x)\, (p(x)) \text{ şi } (\forall\, y)\, (\forall\, z)\, [(p(y) \text{ şi } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y şi z sunt variabile.

Cuantificatori aplicaţi fixând un domeniu al valorilor:

Fie M o mulţime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M. Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall\, x \in M)\, (p(x)) \;\stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow}\; (\forall\, x)\, (x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists\, x \in M)\, (p(x)) \;\stackrel{\text{not.}}{\Leftrightarrow}\; (\exists\, x)\, (x \in M \text{ şi } p(x))$

Toate proprietăţile logice pentru enunţuri cuantificate din acest set de cursuri se scriu la fel şi sunt valabile şi pentru cuantificatori urmaţi de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de acelaşi fel comută, cei diferiţi nu:

Fie x şi y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x şi y. Atunci:

- $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y)\,(\exists\, x)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x, valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunţul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A şi B sunt mulţimi, avem:

- $(\forall\, x \in A)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y \in B)\,(\exists\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall\, x)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ etc..

Cuantificatori, disjuncţii şi conjuncţii logice:

Să observăm şi următoarele proprietăţi logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ şi $q(x)$ sunt enunţuri referitoare la x, atunci:

- $(\forall\, x)\,(p(x)$ şi $q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(p(x))$ şi $(\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x)$ sau $q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(p(x))$ sau $(\exists\, x)\,(q(x))$
- $(\forall\, x)\,(p(x)$ sau $q(x)) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall\, x)\,(p(x))$ sau $(\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x)$ şi $q(x)) \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; (\exists\, x)\,(p(x))$ şi $(\exists\, x)\,(q(x))$

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunţ care nu depinde de variabila cuantificată:

Dacă, în enunţurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunţ q care nu depinde de x, atunci:

$$(\forall\, x)\, q \;\Leftrightarrow\; q \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\, q,$$

aşadar, în acest caz, din proprietăţile anterioare obţinem:

- $(\forall\, x)\,(p(x)$ şi $q) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(p(x))$ şi q
- $(\exists\, x)\,(p(x)$ sau $q) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(p(x))$ sau q
- $(\forall\, x)\,(p(x)$ sau $q) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall\, x)\,(p(x))$ sau q
- $(\exists\, x)\,(p(x)$ şi $q) \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; (\exists\, x)\,(p(x))$ şi q

Acum fie p, q şi r enunţuri. Atunci, din proprietăţile: $[p$ sau $(q$ şi $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p$ sau $q)$ şi $(p$ sau $r)]$, $[p$ şi $(q$ sau $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p$ şi $q)$ sau $(p$ şi $r)]$, non $(p$ sau $q) \;\Leftrightarrow\; [($non $p)$ şi $($non $q)]$, non $(p$ şi $q) \;\Leftrightarrow\; [($non $p)$ sau $($non $q)]$ şi $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [($non $p)$ sau $q]$, se pot deduce următoarele proprietăţi:

- $[p \Rightarrow (q$ şi $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q)$ şi $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ şi $r)] \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q)$ sau $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ sau $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q)$ sau $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ sau $r)] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q)$ şi $(p \Rightarrow r)]$
- $[(q$ sau $r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p)$ şi $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ sau $r) \Rightarrow p] \;\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p)$ sau $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ şi $r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p)$ sau $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ şi $r) \Rightarrow p] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p)$ şi $(r \Rightarrow p)]$

3 Operaţii cu mulţimi şi relaţii între mulţimi

Notaţia 3.1. • Păstrăm notaţia consacrată $\in$ pentru **simbolul de apartenenţă**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulţime, clasă).

- Păstrăm notaţia clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulţimi (fie prin enumerare, fie printr–o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulţimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notaţia 3.2. Păstrăm notaţiile cunoscute $\cup$, $\cap$, $\setminus$ şi Δ pentru **reuniunea**, **intersecţia**, **diferenţa** şi, respectiv, **diferenţa simetrică** între mulţimi.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B, se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- $A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$;
- $A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$;
- $A \,\Delta\, B \stackrel{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

A se revedea proprietăţile operaţiilor cu mulţimi demonstrate la seminar, precum şi cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!

Vom face mereu apel şi la cunoştinţe din gimnaziu şi liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunţându–le.

Notaţia 3.3. Păstrăm notaţiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ şi $\supsetneq$ pentru **incluziunile** şi **incluziunile stricte** dintre mulţimi **în fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte şi cu $\subset$ şi respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă şi nu poate avea loc egalitatea de mulţimi nu ne foloseşte în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\, [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiţie, două mulţimi sunt egale ddacă au aceleaşi elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\, [x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B \text{ şi } A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Notaţia 3.4. Vom nota cu $\emptyset$ **mulţimea vidă**, adică mulţimea fără elemente, i.e. unica (conform definiţiei egalităţii de mulţimi) mulţime care satisface: $(\nexists\, x)\, (x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall\, x)\, (x \notin \emptyset)$.

Definiţia 3.5. Dacă A şi B sunt mulţimi, atunci A se numeşte:

- *submulţime a lui* B (sau *parte a lui* B) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulţime proprie* (sau *strictă*) *a lui* B ddacă $A \subsetneq B$.

Notaţia 3.6. Pentru orice mulţime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulţimea părţilor lui** T, i. e. **mulţimea submulţimilor lui** T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunţuri p şi q, enunţul (p xor q) este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunţurile p şi q este adevărat, adică exact atunci când [(p e adevărat şi q e fals) sau (q e adevărat şi p e fals)]. Formal:

- (p xor q) $\Leftrightarrow$ [(p şi non q) sau (q şi non p)]

Remarca 3.7. Definiţia diferenţei simetrice arată că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

A se vedea, în primul set de cursuri, proprietăţile logice (cu enunţuri) în care se transcriu următoarele proprietăţi pentru calculul cu mulţimi.

Şi a se observa faptul că, pentru operaţii comutative, precum reuniunea şi intersecţia de mulţimi, distributivitatea la stânga faţă de alte operaţii este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Pentru orice mulţimi A, B, C, D, au loc:

- $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \subseteq A]$
- **idempotenţa reuniunii:** $A \cup A = A$
- **idempotenţa intersecţiei:** $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \Delta A = \emptyset$
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecţiei:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenţei simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **asociativitatea intersecţiei:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **asociativitatea diferenţei simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- **distributivitatea la stânga a reuniunii faţă de intersecţie:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii faţă de intersecţie:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecţiei faţă de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecţiei faţă de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ şi $(\exists x)\,(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \nsubseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B$ sau $A = B)$
- $A \subseteq A$
- non$(A \subsetneq A)$
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: $(A \subseteq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $(A \subsetneq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $(A \subseteq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: $(A \subsetneq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$

- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$
- $(A \subseteq C$ şi $B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$
- $(A \subseteq B$ şi $A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D)\Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$
- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulţime T, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X faţă de T*). Au loc:

- $\overline{A} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{A} \subseteq T$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- **operaţia de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui De Morgan:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (uşor de demonstrat folosind proprietăţile de mai sus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$

- A **şi** B **sunt părţi complementare ale lui** T **ddacă fiecare este complementara celeilalte faţă de** T**:** $\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice mulţimi $A_1, \ldots, A_n$, $A_1 \Delta \ldots \Delta A_n = \{x \mid |\{i \in \overline{1,n} \mid x \in A_i\}| \in 2\mathbb{N}+1\}$ = mulţimea elementelor x care aparţin unui număr impar dintre mulţimile $A_1, \ldots, A_n$ (a se vedea Notaţia 6.21).

4 Alte operaţii cu mulţimi

Produsul direct a două mulţimi:

Notaţia 4.1 (a se vedea definiţia axiomatică a unei perechi ordonate în primul set de cursuri)**.** Pentru orice elemente a şi b, notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a şi b.

Definiţia 4.2 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente)**.** Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2:

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{şi} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiţia 4.3. Pentru orice mulţimi A şi B, se defineşte *produsul cartezian* dintre A şi B (numit şi *produsul direct* dintre A şi B) ca fiind mulţimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

Remarca 4.4 (produsul cartezian cu $\emptyset$ este $\emptyset$; produsul cartezian este distributiv faţă de reuniunea, intersecţia, diferenţa şi diferenţa simetrică între mulţimi (şi la stânga, şi la dreapta))**.** Pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc egalităţile:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ şi $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ şi $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ şi $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)$ şi $(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulţimi:

Definiţia 4.5. Fie A şi B două mulţimi. Se defineşte *reuniunea disjunctă* a mulţimilor A şi B ca fiind mulţimea notată $A \coprod B$ şi definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observaţia 4.6. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulţimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a unui indice corespunzător mulţimii respective (un element diferit de cel ataşat elementelor celeilalte mulţimi) (vom vorbi despre **indici** într–o discuţie despre **familii arbitrare de mulţimi**).

5 Mulţimi şi funcţii

Definiţia 5.1. Fie A şi B mulţimi oarecare. Se numeşte *funcţie* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall\, a \in A)\, (\exists!\, b \in B)\, ((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcţie de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulţimea A se numeşte *domeniul* funcţiei f, B se numeşte *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numeşte *graficul* lui f.

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ şi se numeşte *valoarea funcţiei f în punctul a*.

Remarca 5.2 $((a, b) \in G \;\Leftrightarrow\; f(a) = b)$**.** Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcţie ($f : A \to B$), atunci graficul G al lui f este mulţimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiţia 5.3. Fie $f = (A, F, B)$ şi $g = (C, G, D)$ două funcţii ($f : A \to B$, iar $g : C \to D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

$$\begin{array}{ll} A = C & \text{(are loc egalitatea domeniilor),} \\ B = D & \text{(are loc egalitatea codomeniilor) şi} \\ F = G & \text{(are loc egalitatea graficelor celor două funcţii,} \\ & \text{ceea ce, conform scrierii acestor grafice} \\ & \text{din remarca anterioară, se transcrie în egalitate} \\ & \text{punctuală, adică egalitate în fiecare punct:} \\ & \text{pentru orice } a \in A = C,\ f(a) = g(a)). \end{array}$$

- Dacă X este o mulţime a. î. $X \subseteq A$ şi $X \subseteq C$, atunci spunem că *f şi g coincid pe X* ddacă f şi g au aceleaşi valori în elementele lui X, adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notaţia 5.4 (putere de mulţimi)**.** Pentru orice mulţimi A şi B, se notează cu B^A mulţimea funcţiilor de la A la B:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Remarca 5.5 (există o unică funcţie de la $\emptyset$ la o mulţime arbitrară)**.** Fie B o mulţime oarecare (**poate fi vidă şi poate fi nevidă**). Atunci $B^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

Remarca 5.6 (nu există nicio funcţie de la o mulţime nevidă la $\emptyset$)**.** Fie A o mulţime a. î. $A \neq \emptyset$). Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

Definiţia 5.7. Pentru orice mulţimi A şi B, orice funcţie $f : A \to B$ şi orice submulţimi $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f*, notată $f(X)$, este submulţimea lui B:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ şi se numeşte *imaginea lui f*:

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f*, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărţi, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulţimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcţie), este submulţimea lui A:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiţia 5.8. Fie A şi B mulţimi şi $f : A \to B$ o funcţie. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există (cel puţin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\, a \in A)\,(f(a) = b)$)

– $f(A) = B$

- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  – f este simultan injectivă şi surjectivă
  – pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\,!\, a \in A)\,(f(a) = b)$)

Funcţiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecţii*, *surjecţii*, respectiv *bijecţii.*

Când notăm $f : A \to B$, subînţelegem că A şi B sunt mulţimi.

Remarca 5.9. Pentru orice funcţie $f : A \to B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ şi $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiţia 5.10 (funcţia identitate a unei mulţimi)**.** Pentru orice mulţime A, notăm cu id_A *funcţia identică a lui* A (numită şi *funcţia identitate a lui* A sau *identitatea lui* A): $id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiţia 5.11 (compunerea de funcţii)**.** Dacă A, B, C sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt funcţii, atunci *compunerea funcţiei* g *cu funcţia* f este funcţia notată cu $g \circ f$ şi definită astfel: $g \circ f : A \to C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiţia 5.12 (inversa unei funcţii)**.** Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Remarca 5.13 (dacă există, inversa unei funcţii este unică)**.** Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci există o unică funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Definiţia 5.14. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci unica funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \to A$) şi se numeşte *inversa lui* f.

Remarca 5.15. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Exerciţiul 5.16 (caracterizarea surjectivităţii prin existenţa unei inverse la dreapta, şi a injectivităţii prin existenţa unei inverse la stânga – temă)**.** Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Atunci:

(i) f este surjectivă ddacă $(\exists\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;

(ii) f este bijectivă ddacă $(\exists\,!\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta şi inversă la stânga pentru f;

(iii) f este injectivă ddacă $(\exists\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;

(iv) f este bijectivă ddacă $(\exists\,!\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga şi inversă la dreapta pentru f;

(v) după cum ştim, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists\, j : B \to A)\,(f \circ j = id_B$ şi $j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} şi se numeşte *inversa lui* f; dar, conform (i) şi (iii), avem şi următoarea caracterizare a bijectivităţii: f este bijectivă ddacă $(\exists\, g, h : B \to A)\,(f \circ g = id_B$ şi $h \circ f = id_A)$; în plus, conform (ii) şi (iv), în caz afirmativ, g şi h sunt unice şi $g = h = f^{-1}$.

Exerciţiul 5.17 (funcţiile imagine directă şi imagine inversă – temă)**.** Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Considerăm funcţiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), & (\forall M \subseteq A)\,(f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), & (\forall N \subseteq B)\,(f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalenţe:

(i) f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall M \subseteq A)\,(f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;

(ii) f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall N \subseteq B)\,(f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;

(iii) din (i) şi (ii), obţinem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* şi f_* sunt inverse una alteia ddacă $(\forall M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiţia 6.1. Două mulţimi A şi B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* ddacă există o funcţie bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiţia 6.2. Pentru orice mulţime A, se numeşte *cardinalul lui* A sau *numărul cardinal al lui* A clasa tuturor mulţimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulţime A, $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \to A$ este o bijecţie), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ şi $|A| = |B|$, i. e. orice mulţime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; aşadar avem chiar echivalenţele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$
- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulţime C cu proprietăţile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) şi $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); aşadar avem chiar echivalenţele: $A \ncong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiţia 6.3 (suma, produsul şi puterea de numere cardinale)**.** Pentru orice mulţimi A şi B, avem, prin definiţie:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziţia 6.4 (independenţa de reprezentanţi a operaţiilor cu numere cardinale)**.** *Operaţiile cu numere cardinale, definite ca mai sus,* **nu depind de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă***, adică: pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Definiţia 6.5 (inegalităţi între numere cardinale)**.** Pentru orice mulţimi A şi B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecţie $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ şi $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecţie $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecţie $f : A \to B$

Remarca 6.6. Definiţia anterioară este **independentă de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă**, i. e., pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$):

- există o injecţie de la A la B ddacă există o injecţie de la A' la B';
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, aşadar: $A \ncong B$ ddacă $A' \ncong B'$.

Remarca 6.7. Dacă A şi B sunt mulţimi şi $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcţia incluziune:** $i : A \to B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarca 6.8 (definiţii echivalente pentru inegalităţi între numere cardinale)**.** Pentru orice mulţimi A şi B:

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecţie $t : B \to A$ ddacă [există o mulţime C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecţie $t : B \to A$, dar nu există nicio bijecţie $g : B \to A$] ddacă [există o mulţime nevidă C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.9. Inegalitatea $\leq$ este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulţimi A şi B, $|A| = |B|$ ddacă [$|A| \leq |B|$ şi $|B| \leq |A|$].

Notaţia 6.10. Desigur, folosim şi notaţiile $\geq$ şi $>$, cu semnificaţia: $|B| \geq |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulţimi A şi B.

Teorema 6.11 (Cantor)**.** *Pentru orice mulţime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

O construcţie pentru mulţimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr–o construcţie echivalentă cu cea menţionată în primul set de cursuri:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulţimea având drept elemente toate mulţimile de la paşii anteriori: succesorul unui n este $n + 1 := |\{0, 1, 2, \ldots, n\}|$. Iar mulţimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu $\mathbb{N}$.

În **definiţiile** de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într–un fel sau altul, problema următoare: cu definiţia de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparţine unei mulţimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanţii lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...

Definiţia de mai sus pentru **mulţimea** $\mathbb{N}$ **a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducţiei matematice**: dacă o submulţime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n + 1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, se construiesc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi se definesc operaţiile şi relaţiile de ordine pe aceste mulţimi în modul cunoscut din liceu.

Mulţimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulţime infinită, mai precis o mulţime numărabilă.

Notaţia 6.12 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$)**.** Cardinalul mulţimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunţat "alef 0".

Definiţia 6.13. O mulţime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.14. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiţia 6.15. O mulţime X se zice *infinită*:

(i) *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$

(ii) *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă

(iii) *în sens obişnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \ncong \{1, 2, \ldots, n\}$

Teorema 6.16. *Cele trei definiţii de mai sus ale mulţimilor infinite sunt echivalente.*

Desigur, o *mulţime finită* este, prin definiţie, o mulţime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiţia de mai sus a mulţimilor infinite *în sens obişnuit*:

Definiţia 6.17. O *mulţime finită* este o mulţime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.18. Conform definiţiei anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulţimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.19. Definiţia mulţimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulţimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulţimi infinite.

Definiţia 6.20. O *mulţime cel mult numărabilă* este o mulţime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

Notaţia 6.21. Amintim următoarele notaţii consacrate pentru un segment al mulţimii $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \dots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$

Să reţinem şi notaţia: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$ şi orice $M \subseteq \mathbb{Z}$, $aM + b := \{ax + b \mid x \in M\}$.

Remarca 6.22. Mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă.
Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este numărabilă.

Definiţia 6.23. O *mulţime nenumărabilă* este, prin definiţie, o mulţime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulţime având cardinalul strict mai mare decât $\aleph_0$.

Remarca 6.24. Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă.

Definiţia 6.25 ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$)**.** Cardinalul lui $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{C}$ şi se numeşte *puterea continuumului.*

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulţime M.

Remarca 6.26 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$)**.** $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.27. Oricare ar fi mulţimile A şi B:

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită şi $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiţia lui Cantor a mulţimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ şi A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ şi B este finită, atunci A este finită.

Observaţia 6.28. Conform celor de mai sus, faptul că o mulţime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi şi notaţia $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulţime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulţimi

Definiţia 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I: $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$)**.** Fie I şi A mulţimi arbitrare.
O *familie de elemente ale lui A indexată de I* este o funcţie $f : I \to A$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in A$, astfel că familia f se mai notează sub forma $(x_i)_{i \in I} \subseteq A$.
Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i \in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulţimi arbitrare A, pentru că există o singură funcţie de la $\emptyset$ la A (a se vedea şi mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăşi.

Fie I şi A două mulţimi nevide, iar $(a_i)_{i \in I}$ şi $(b_i)_{i \in I}$ două familii de elemente din A indexate de I:

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i\in I} = (b_i)_{i\in I} \quad \text{ddacă}, \quad \text{pentru orice } i \in I,\ a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.2. Fie T şi I două mulţimi arbitrare. Se numeşte *familie de submulţimi ale lui T indexată de I* o funcţie $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulţimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i\in I}$. Scriem $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificaţia că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Pentru a generaliza definiţia anterioară la familii de mulţimi oarecare avem nevoie de acea definiţie mai cuprinzătoare a noţiunii de funcţie (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulţimilor din primul set de cursuri), care permite unei funcţii f definite pe I să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulţime), anume clasa tuturor mulţimilor în acest caz.

Operaţii cu familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.3. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.

Se definesc următoarele operaţii:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists\, i)\,(i \in I \text{ şi } x \in A_i)\}$$

- *intersecţia familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i\in I}$ (numit şi *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i\in I}$) este mulţimea notată $\prod\limits_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} =$$
$$= \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\},$$

sau, altfel scris (cu definiţia unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\} =$$
$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}.$$

Notaţia 7.4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod\limits_{i\in\overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i\in\overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $\prod\limits_{i\in\overline{1,n}} A \overset{\text{notaţie}}{=} \prod\limits_{i=1}^{n} A \overset{\text{notaţie}}{=} A^n$.

Remarca 7.5 (puterile unei mulţimi: caz particular al produsului direct)**.** În definiţia anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ şi, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$, aşadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f : I \to A, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \to A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} = A^{\overline{1,n}} = A^I$.

Remarca 7.6 (putem generaliza notaţia $A^n := A^{\overline{1,n}} = A^I$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice mulţime I cu $|I| = n$)**.** Pentru orice mulţimi A, I şi J, dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independenţa de reprezentanţi a operaţiei de exponenţiere asupra numerelor cardinale.

Dar, mai precis, dacă $\varphi : I \to J$ este o bijecţie, atunci $\psi : A^I \to A^J$, definită prin: $\psi(f) = f \circ \varphi^{-1}$ pentru orice $i \in I$ este o **bijecţie care poate fi identificată cu egalitatea** (i.e. **cu funcţia identitate** a lui A^I), întrucât duce familiile de elemente din A^I în ele însele, doar cu mulţimea de indici schimbată din I în J.

Aşadar putem considera $A^I = A^J$ şi, generalizând cazul finit de mai sus, putem face următoarea notaţie.

Notaţia 7.7. Pentru orice mulţimi A şi I, vom nota: $A^{|I|} := A^I$.

Exerciţiul 7.8 (temă – distributivitatea produsului cartezian faţă de reuniuni şi intersecţii arbitrare)**.** Fie A o mulţime, I o mulţime nevidă (de fapt poate fi şi vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$ şi $(\bigcup_{i \in I} B_i) \times A = \bigcup_{i \in I} (B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i)$ şi $(\bigcap_{i \in I} B_i) \times A = \bigcap_{i \in I} (B_i \times A)$

Exerciţiul 7.9 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian faţă de intersecţie)**.** Fie I şi J o mulţimi nevide (de fapt pot fi şi vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ o familie de mulţimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă şi sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$)**.** Să se demonstreze că:

$$\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$$

Amintesc că asociativitatea unei operaţii binare, cum sunt reuniunea şi intersecţia a două mulţimi, permite scrierea unui şir de astfel de operaţii fără paranteze: pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3:

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziţia 7.10 (asociativitatea produsului direct ca operaţie binară)**.** *Fie A_1, A_2, A_3 mulţimi arbitrare. Atunci: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$, întrucât următoarele funcţii sunt bijecţii: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ şi $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.*

În plus, fiecare dintre bijecţiile φ şi ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenţie egalităţile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Ca şi la funcţii aplicate unor perechi de elemente, folosim **licenţa de scriere (convenţia):** pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, orice funcţie $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B$ şi orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenţie**, şi va fi clar la elementele căror mulţimi ne vom referi, prin notaţii de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,

- $(a_i)_{i\in I} \in A^I$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \dots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$,
- $(a_1, a_2, \dots a_n) \in A^n$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînţelege: $a \in A$ şi $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînţelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt mulţimi, I este o mulţime nevidă, iar $(A_i)_{i\in I}$ este o familie (nevidă) de mulţimi.

Definiţia 7.11. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.

Se defineşte *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ ca fiind mulţimea notată $\coprod_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} (A_i \times \{i\})$$

Observaţia 7.12. Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune“ în care mulţimile care se reunesc sunt “făcute disjuncte“, prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a indicelui mulţimii respective.

Notaţia 7.13. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii ataşati, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înţelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Notaţia 7.14. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită şi nevidă de mulţimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notaţiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notaţie}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notaţie}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \dots \coprod A_n$$

Remarca 7.15. Ultima dintre notaţiile de mai sus este permisă datorită **asociativităţii reuniunii disjuncte** ca operaţie binară (adică aplicată unei familii formate din două mulţimi): pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3, se arată imediat (folosind definiţia reuniunii disjuncte şi câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecţie între mulţimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod_{i=1}^{3} A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecţii cu identitatea, putem scrie: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^{3} A_i$.

Aritatea unei operaţii a unei structuri algebrice (cu o singură *mulţime suport*, o singură mulţime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operaţii**. Dacă structura algebrică are mulţimea suport A, iar f este o operaţie n–ară pe A, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ de } A} \to A$ (f este o funcţie cu n argumente din A, cu valori tot în A).

Remarca 7.16 (reuniunea familiei vide este vidă)**.** Dacă recitim definiţia reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulţimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiţie care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este $\emptyset$.

Remarca 7.17 (produsul direct al familiei vide este un singleton)**.** Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulţimea cu unicul element dat de unica funcţie de la $\emptyset$ la $\emptyset$, anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operaţiile zeroare sunt constantele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcţie φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G: $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \to G$, iar o funcţie definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G: $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, şi identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.18 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă)**.** Definiţia reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulţimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulţimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulţimi, care este $\emptyset$.

Exemplul 7.19. Dacă A şi B sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$, iar pe mulţimea B avem, de exemplu, o operaţie binară $+$ şi o **relaţie binară** (vom vedea) $\leq$, atunci putem defini, **punctual**, operaţia $+$, respectiv relaţia $\leq$, între funcţiile f şi g, astfel:

- $f + g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, $(f + g)(x) \stackrel{\text{definiţie}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiţie, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiţia 7.20 (familii de funcţii între două mulţimi fixate A şi B)**.** Fie I, A şi B mulţimi arbitrare. O *familie de funcţii de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulţimii B^A indexată de I, i. e. o funcţie $h : I \to B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notaţie}}{=} h(i) : A \to B$).

Se pot defini şi operaţii cu familii arbitrare de funcţii, tot **punctual**:

Exemplul 7.21. Dacă I, A şi B sunt mulţimi nevide, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \to B$), B este o **mulţime ordonată** (vom vedea) şi, pentru orice $x \in A$, submulţimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcţia:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \to B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiţie}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiţia 7.22 (familii de funcţii – cazul general – material facultativ)**.** Fie I o mulţime arbitrară, iar $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ familii de mulţimi indexate de I.

O *familie de funcţii $(f_i)_{i\in I}$ indexată de I* cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulţimii $\bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparţinând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcţie $h : I \to \bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiţia 7.23 (operaţiile cu familii arbitrare de funcţii generalizează compunerea de funcţii – material facultativ)**.** Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, C este o mulţime, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii şi g este o funcţie a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \to B_i$, iar $g : \prod\limits_{i\in I} B_i \to C$, atunci putem defini funcţia $g((f_i)_{i\in I}) : \prod_{i\in I} A_i \to C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $g((f_i)_{i\in I})((x_i)_{i\in I}) := g((f_i(x_i))_{i\in I})$: *operaţia g* (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) *aplicată familiei de funcţii $(f_i)_{i\in I}$, definită* **punctual**.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1, \ldots, f_n) : A_1 \times \ldots \times A_n \to C$, pentru orice $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$, $g(f_1, \ldots, f_n)(x_1, \ldots, x_n) := g(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relaţiile binare între funcţii la relaţii de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i\in I}$ de mai sus, submulţimi ale lui $\prod\limits_{i\in I} B_i$: relaţii de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în al doilea set de cursuri definiţia unei relaţii n–are:

Definiţia 7.24 (material facultativ)**.** Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod\limits_{i\in I} B_i$, atunci: *familia $(f_i)_{i\in I}$ de funcţii se află în relaţia R*, notat $(f_i)_{i\in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i\in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \ldots \times B_n$ este o relaţie n–ară: $(f_1, \ldots, f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in R$.

Exerciţiul 7.25 (imagini şi preimagini de reuniuni şi intersecţii arbitrare de mulţimi printr–o funcţie)**.** Fie A, B, I şi J mulţimi nevide (de fapt, pot fi şi vide – vom vedea), $f : A \to B$, iar $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ şi $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

(i) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(ii) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;

(iii) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(iv) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

(v) f este injectivă ddacă, pentru orice mulţime nevidă K şi orice $(M_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap_{k\in K} M_k) = \bigcap_{k\in K} f(M_k)$.

(vi) Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcţii caracteristice

Definiţia 8.1. Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcţia caracteristică a lui A (raportat la T)*: $\chi_A : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulţimea totală T este finită şi nevidă: $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcţia caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \ldots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulţimea $\{0,1\}$ se numeşte *vectorul caracteristic al lui A*. A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A: $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \ldots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Propoziţia 8.2 (principiul includerii şi al excluderii)**.** *Pentru orice n natural nenul şi orice mulţimi finite $M_1, M_2, \ldots, M_n$, are loc egalitatea:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \ldots M_n| =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots M_{i_s}|.$$

Şi dual: $|\bigcap_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots +$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \ldots M_n| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots M_{i_s}|.$$

Propoziţia 8.3 (proprietăţile funcţiilor caracteristice)**.** *Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcţia caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcţiile constante: $\mathbf{0} : T \to \{0,1\}$ şi $\mathbf{1} : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ şi $\mathbf{1}(x) = 1$.*

Atunci au loc proprietăţile:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ *şi* $\chi_T = \mathbf{1}$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalenţa:* $A \subseteq B$ *ddacă* $\chi_A \leq \chi_B$ *(punctual, i. e.: pentru orice* $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$*)*
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalenţa:* $A = B$ *ddacă* $\chi_A = \chi_B$

- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T\setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
- $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.4. Fie T şi I două mulţimi nevide şi $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părţi ale lui T indexată de I. Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.5 (legile de distributivitate generalizată pentru $\cup$ şi $\cap$)**.** Pentru orice mulţime nevidă I, orice mulţime A şi orice familie de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$, au loc egalităţile:

- **distributivitatea generalizată a $\cup$ faţă de $\cap$:** $A \cup (\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(A \cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a $\cap$ faţă de $\cup$:** $A \cap (\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(A \cap A_i)$

Propoziţia 8.6. *Pentru orice mulţime nevidă T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.*

Corolarul 8.7. *Pentru orice mulţime T, $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.*

9 Relaţii binare

Relaţii n–are, relaţii binare:

Definiţia 9.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulţimi. Se numeşte *relaţie n–ară* între mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o submulţime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Observaţia 9.2. Pentru $n = 1$ în definiţia anterioară se obţine noţiunea de *relaţie unară* pe o mulţime: prin definiţie, o *relaţie unară* pe o mulţime A este o submulţime a lui A.

Pentru $n = 2$ în definiţia anterioară se obţine noţiunea de *relaţie binară*.

Definiţia 9.3. Fie A şi B două mulţimi. Se numeşte *relaţie binară* între A şi B o submulţime R a produsului direct $A \times B$.

Pentru fiecare $a \in A$ şi fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu $a\,R\,b$ şi se citeşte: *a este în relaţia R cu b.*

Exemplul 9.4. Pentru orice mulţimi A şi B, produsul direct $A \times B$ este o relaţie binară între A şi B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relaţiile binare între A şi B).

Tipuri de relaţii binare:

Definiţia 9.5 (tipuri de relaţii binare)**.** Fie A şi B mulţimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relaţie binară între A şi B). R se zice:

- *funcţională* ddacă: pentru orice $a \in A$ şi orice $b_1, b_2 \in B$, dacă $a\,R\,b_1$ şi $a\,R\,b_2$, atunci $b_1 = b_2$; o relaţie funcţională între A şi B se mai numeşte *funcţie parţială* de la A la B;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$; o relaţie funcţională totală între A şi B se mai numeşte *funcţie* de la A la B;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ şi orice $b \in B$, dacă $a_1\,R\,b$ şi $a_2\,R\,b$, atunci $a_1 = a_2$;

- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $a\,R\,b$.

Remarca 9.6. Definiţia de mai sus a unei funcţii este exact definiţia din primul set de cursuri, în care identificăm o funcţie cu graficul ei: o funcţie $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noţiunea de funcţie injectivă, respectiv surjectivă, respectiv bijectivă, coincide cu aceea de relaţie funcţională totală injectivă, respectiv surjectivă, respectiv injectivă şi surjectivă.

Într–adevăr:

Remarca 9.7. Pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$:

- R este o **relaţie funcţională (funcţie parţială)** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel mult un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie totală** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel puţin un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- aşadar, R este o **funcţie** ddacă este o **relaţie funcţională totală**, i. e.: pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie injectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel puţin un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie injectivă şi surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există un unic $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie funcţională totală injectivă/surjectivă/injectivă şi surjectivă** ddacă este o **funcţie injectivă/surjectivă/bijectivă**, respectiv.

Definiţia 9.8. Pentru orice mulţime A,

$$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$$

este o relaţie binară între A şi A, numită *diagonala lui A*.

Remarca 9.9 (Δ_A = egalitatea pe A)**.** Pentru orice mulţime A, Δ_A este chiar **relaţia de egalitate pe** A, adică, pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$a\,\Delta_A\,b \text{ ddacă } a = b.$$

Remarca 9.10 ($\Delta_A = id_A$)**.** Pentru orice mulţime A, Δ_A este o funcţie, chiar o funcţie bijectivă, anume **funcţia identică a lui A (identitatea lui A)**:

$$\Delta_A = id_A : A \to A, \text{ pentru orice } a \in A,\ id_A(a) = a.$$

Operaţii cu relaţii binare:

- Relaţiile sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile obişnuite cu mulţimi: reuniunea, intersecţia, diferenţa etc..
- Astfel, pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţii binare R şi S între A şi B: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $\overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara* lui R) sunt tot relaţii binare între A şi B.

Definiţia 9.11. Pentru orice mulţimi A, B, A', B' şi orice relaţii binare $R \subseteq A \times B$ şi $R' \subseteq A' \times B'$, se defineşte *produsul direct* al relaţiilor R şi R', notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relaţie binară între $A \times A'$ şi $B \times B'$: $R \times R' := \{((a, a'), (b, b')) \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Generalizare: pentru orice mulţime I, orice familii de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ şi orice familie de relaţii binare $(R_i)_{i \in I}$, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, se defineşte *produsul direct* al familiei $(R_i)_{i \in I}$, notat $\prod\limits_{i \in I} R_i$, ca fiind următoarea relaţie binară între $\prod\limits_{i \in I} A_i$ şi $\prod\limits_{i \in I} B_i$: $\prod\limits_{i \in I} R_i := \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i, b_i \in B_i \text{ şi } a_i\,R_i\,b_i)\} \subseteq \prod\limits_{i \in I} A_i \times \prod\limits_{i \in I} B_i$.

Observaţia 9.12. Definiţia produsului direct de relaţii binare este diferită de definiţia produsului direct de mulţimi al aceloraşi relaţii binare, adică de produsul lor direct ca mulţimi. Mulţimile obţinute prin cele două tipuri de produs direct sunt în bijecţie, dar nu sunt egale, dacă nu considerăm produsul direct de mulţimi ca fiind comutativ, prin asimilarea bijecţiei în cauză cu identitatea.

Remarca 9.13 (facultativă)**.** Cu notaţiile din definiţia anterioară, dacă avem încă o pereche de relaţii binare $S \subseteq A \times B$ şi $S' \subseteq A' \times B'$, atunci, în cazul în care R, R', S şi S' sunt nevide:

$$R \times R' = S \times S' \text{ ddacă } [R = S \text{ şi } R' = S']$$

În general, dacă avem încă o familie de relaţii binare $(S_i)_{i \in I}$, cu $S_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, atunci, în cazul în care $I \neq \emptyset$ şi, pentru fiecare $i \in I$, $R_i \neq \emptyset$ şi $S_i \neq \emptyset$:

$$\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i \;\Leftrightarrow\; (\forall\, i \in I)\,(R_i = S_i)$$

Într–adevăr, dacă ne referim la cazul general, echivalenţa de mai sus rezultă, prin dublă implicaţie, din faptul că:

- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} R_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in S_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $\prod\limits_{i \in I} R_i = \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă are loc echivalenţa: $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} R_i \Leftrightarrow ((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$;
- pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$ ddacă are loc echivalenţa: $(a_i, b_i) \in R_i \Leftrightarrow (a_i, b_i) \in S_i$.

Remarca 9.14 (facultativă)**.** Desigur, şi pentru două familii de mulţimi nevide $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ indexate de aceeaşi mulţime nevidă I, avem:

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} B_i \;\Leftrightarrow\; (\forall\, i \in I)\,(A_i = B_i),$$

pentru că, având o familie de elemente arbitrare $(x_i)_{i \in I}$, avem: $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \;\Leftrightarrow\; (\forall\, i \in I)\,(x_i \in A_i)$, şi la fel pentru $(B_i)_{i \in I}$, de unde rezultă că: $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ au aceleaşi elemente ddacă, pentru fiecare $i \in I$, A_i şi B_i au aceleaşi elemente.

Definiţia 9.15. Pentru orice mulţimi A, B, C şi orice relaţii binare $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$, se defineşte *compunerea lui S cu R* ca fiind relaţia binară între A şi C notată $S \circ R$ şi definită prin: $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists\, b \in B)\,[(a, b) \in R \text{ şi } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarca 9.16 (temă)**.** Diagonala unei mulţimi este element neutru la compunere şi la dreapta, şi la stânga, i. e., pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$, $R \circ \Delta_A = R$ şi $\Delta_B \circ R = R$.

Remarca 9.17. Compunerea ca relaţii binare a două funcţii coincide cu compunerea lor ca funcţii. În particular, rezultatul ei este tot o funcţie.

Definiţia 9.18. Pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$, se defineşte *inversa lui R*, notată R^{-1}, ca fiind următoarea relaţie binară între B şi A:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

Altfel scris: prin definiţie, $R^{-1} \subseteq B \times A$, a. î., pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$:

$$b\, R^{-1}\, a \Leftrightarrow a\, R\, b$$

Remarca 9.19. A se observa faptul că, pentru orice relaţie binară R, se defineşte inversa ei R^{-1}, spre deosebire de cazul inverselor de funcţii, care se definesc numai pentru funcţiile bijective, această restricţie provenind atât din constrângerea ca relaţia binară să fie funcţie, cât si din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcţie (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiţia funcţiei este exact definiţia bijectivităţii (i. e. a injectivităţii şi surjectivităţii) în oglindă).

Remarca 9.20. Este imediat faptul că inversa ca relaţie a unei funcţii bijective este inversa ei ca funcţie (a se vedea şi remarca următoare).

Remarca 9.21 (temă)**.** Fie A, B mulţimi şi $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcţională;

- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă şi surjectivă ddacă R^{-1} este funcţie.

Remarca 9.22. A se observa că o relaţie binară injectivă şi surjectivă nu este neapărat o funcţie (bijectivă), pentru că nu i se impune condiţia de a fi funcţională, şi nici cea de a fi totală.

Exerciţiul 9.23 (temă)**.** Fie A, B mulţimi şi $R \subseteq A \times B$. Dacă R este injectivă, atunci:

- $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ ddacă R este totală.

Remarca 9.24 (asociativitatea compunerii de relaţii binare)**.** Fie A, B, C, D mulţimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ şi $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Remarca 9.25. Fie A, B, C mulţimi, $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Exerciţiul 9.26 (temă)**.** Fie A, B, C şi I mulţimi nevide (de fapt, pot fi şi vide – vom vedea), $P \subseteq C \times A$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$ şi $T \subseteq B \times C$ relaţii binare, iar $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relaţii binare de la A la B, i. e., pentru orice $i \in I$, $R_i \subseteq A \times B$.

Să se demonstreze că:

- $R \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ R$
- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $R = S$ ddacă $R^{-1} = S^{-1}$
- **inversa comută cu reuniunea şi cu intersecţia:**
  (i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
  (ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

  Generalizare:
  (i) $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$
  (ii) $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$
- **compunerea este distributivă faţă de reuniune, la stânga şi la dreapta:**
  (i) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$
  (ii) $(R \cup S) \circ P = (R \circ P) \cup (S \circ P)$

  Generalizare:
  (i) $T \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (T \circ R_i)$
  (ii) $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ P)$
- **compunerea nu este distributivă faţă de intersecţie (contraexemplu pentru această distributivitate:** dacă $x \in A$, $y, z \in B$ cu $y \neq z$ şi $t \in C$, iar $R := \{(x, y)\}$, $S := \{(x, z)\}$ şi $T := \{(y, t), (z, t)\}$, atunci: $T \circ (R \cap S) = T \circ \emptyset = \emptyset \neq \{(x, t)\} = T \circ R = T \circ S = (T \circ R) \cap (T \circ S)$)

- **compunerea (la stânga şi la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:**

  (i) $R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $T \circ R \subsetneq T \circ S$)

  (ii) $R \subseteq S$ implică $R \circ P \subseteq S \circ P$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $R \circ P \subsetneq S \circ P$)

  prin urmare:

  (i) $T \circ (\bigcap\limits_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I}(T \circ R_i)$

  (ii) $(\bigcap\limits_{i \in I} R_i) \circ P \subseteq \bigcap\limits_{i \in I}(R_i \circ P)$

Să ne amintim definiţia puterilor unei mulţimi:
Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi.
Amintesc definiţia **produsului cartezian al familiei** $(A_i)_{i \in I}$ (numit şi **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i \in I}$):

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\}.$$

Fie A o mulţime arbitrară.
Amintesc că **puterile unei mulţimi** sunt un caz particular al produsului direct, anume cazul $A_i = A$, pentru orice $i \in I$:

$$A^I = \{f \mid f : I \to A\} = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A)\} = \prod_{i \in I} A.$$

Notaţia următoare, a *puterii a n–a a unei mulţimi* A, A^n, pentru un număr natural nenul n, corespunde cazului particular $I = \overline{1,n}$ şi $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$.

Notaţia 9.27. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice mulţime A, se notează:

$$A^n := A^{\overline{1,n}} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} =$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \prod_{i=1}^{n} A = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}.$$

Caz particular: pentru $n = 2$: $A^2 = A \times A$.

10 Relaţii binare pe o mulţime

În cele ce urmează, când nu se va menţiona altfel, A va fi o mulţime arbitrară.

Definiţia 10.1. Se numeşte *relaţie binară pe A* o relaţie binară între A şi A, i. e. o submulţime a produsului direct $A^2 = A \times A$.

Exemplul 10.2. A^2 şi Δ_A sunt relaţii binare pe A.

Remarca 10.3. Dacă A este finită şi nevidă, iar R este o relaţie binară pe A, atunci perechea (A, R) este un graf orientat (cu mulţimea vârfurilor A şi mulţimea arcelor R), aşadar relaţia binară R poate fi reprezentată grafic chiar prin acest graf orientat.

Operaţii cu relaţii binare pe o mulţime:

Definiţia 10.4 (puterile naturale ale unei relaţii binare pe o mulţime)**.** Pentru orice relaţie binară $R \subseteq A \times A$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, se defineşte *puterea a n–a a lui R*, notată $R^n \subseteq A \times A$, recursiv, astfel:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarca 10.5. Asociativitatea compunerii de relaţii binare permite următoarea scriere fără paranteze pentru orice relaţie binară R pe A şi orice număr natural nenul n:

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R}.$$

Nota 10.6. Pentru o relaţie binară R şi un $n \in \mathbb{N}$, se va deduce din context dacă notaţia R^n semnifică: $\underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R}$ (operaţie care poate fi definită numai dacă R este o relaţie binară pe o mulţime, nu între două mulţimi diferite) sau produsul direct de relaţii binare $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ de } R}$ sau produsul direct de mulţimi $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ de } R}$.

Remarca 10.7. $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.

Remarca 10.8. Pentru orice relaţie binară $R \subseteq A \times A$ şi orice $n \in \mathbb{Z}$:

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n.$$

Remarca 10.9 (comutarea şi adunarea exponenţilor întregi de acelaşi semn la compunerea puterilor unei relaţii binare pe o mulţime – facultativă)**.** Fie $R \subseteq A^2$ şi n, k două numere întregi de acelaşi semn, adică $n, k \geq 0$ sau $n, k \leq 0$. Atunci:

$$R^n \circ R^k = R^k \circ R^n = R^{n+k}.$$

Tipuri de relaţii binare pe o mulţime:

Definiţia 10.10 (tipuri de relaţii binare pe o mulţime)**.** Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relaţie binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$, i. e. nu există $a \in A$ cu aRa;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb şi bRa, atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb şi bRc, atunci aRc;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, au loc aRb sau bRa;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, au loc aRb sau bRa.

Observaţia 10.11. Acest **al doilea sens** pentru denumirea de **relaţie binară totală** este specific **relaţiilor binare pe o mulţime**. **Primul sens** a fost întâlnit la **relaţii binare în general (relaţii binare între două mulţimi)**, şi **nu coincide cu sensul de aici** pe acest caz particular al relaţiilor binare pe o mulţime.

Remarca 10.12 (caracterizarea acestor tipuri de relaţii binare prin operaţii cu mulţimi)**.** Fie R o relaţie binară pe A. Atunci au loc:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$;
- în cazul în care $A \neq \emptyset$: dacă R este ireflexivă, atunci R nu este reflexivă, dar nu şi reciproc;
- R este simetrică ddacă $R \subseteq R^{-1}$ ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- R este simetrică şi antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- singura relaţie binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică şi antisimetrică este Δ_A;

- R este asimetrică ddacă $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este antisimetrică, dar nu şi reciproc;
- singura relaţie binară pe A care este simultan simetrică şi asimetrică este $\emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este ireflexivă, dar nu şi reciproc;
- R este asimetrică şi tranzitivă ddacă R este ireflexivă şi tranzitivă;
- R este tranzitivă ddacă $R^2 \subseteq R$;
- dacă R este reflexivă, atunci $R \subseteq R^2$;
- R este totală ddacă $\Delta_A \cup R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă $R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă R este reflexivă şi totală.

Definiţia 10.13 (tipuri de relaţii binare pe o mulţime)**.** Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relaţie binară pe A). R se numeşte:

- *(relaţie de) preordine* ddacă e reflexivă şi tranzitivă;
- *(relaţie de) echivalenţă* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă;
- *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relaţie reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică;
- *(relaţie de) ordine totală* ddacă e simultan o relaţie de ordine şi o relaţie totală (în acest al doilea sens de mai sus);
- *(relaţie de) ordine strictă* ddacă e asimetrică şi tranzitivă.

Remarca 10.14 (consecinţă a remarcii anterioare)**.**

- Întrucât orice relaţie de ordine este reflexivă, rezultă că o relaţie de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.
- Întrucât Δ_A este tranzitivă, rezultă că Δ_A este unica relaţie binară pe A care este simultan relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine.
- Dacă R este o preordine, atunci $R = R^2$.

Remarca 10.15. Orice relaţie de ordine este reflexivă, şi orice relaţie de ordine strictă este ireflexivă.

Nu există relaţii binare pe o mulţime nevidă care să fie simultan reflexive şi ireflexive. Prin urmare, nu există relaţii binare pe o mulţime nevidă care să fie simultan relaţii de ordine şi relaţii de ordine strictă.

A se vedea, în al doilea set de cursuri, secţiunea facultativă despre matrici caracteristice.

Despre produsul direct de relaţii binare pe o mulţime:

Lema 10.16. *Fie I o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ şi $(C_i)_{i\in I}$ familii de mulţimi, iar $(Q_i)_{i\in I}$, $(R_i)_{i\in I}$ şi $(S_i)_{i\in I}$ familii de relaţii binare, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, $S_i \subseteq A_i \times B_i$ şi $Q_i \subseteq B_i \times C_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:*

- $\prod\limits_{i\in I} R_i \subseteq \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i \subseteq S_i)$*;*
- $\prod\limits_{i\in I} R_i = \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0, i_1 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset, S_{i_1} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i = S_i)$*;*
- $(\prod\limits_{i\in I} R_i) \cap (\prod\limits_{i\in I} S_i) = \prod\limits_{i\in I}(R_i \cap S_i)$ *(şi la fel pentru $\cup$, $\setminus$, Δ în loc de $\cap$);*
- $(\prod\limits_{i\in I} Q_i) \circ (\prod\limits_{i\in I} R_i) = \prod\limits_{i\in I}(Q_i \circ R_i)$*;*
- $(\prod\limits_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod\limits_{i\in I} R_i^{-1}$*.*

Propoziţia 10.17. *Fie I o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi şi $(R_i)_{i\in I}$ o familie de relaţii binare, cu $\emptyset \neq R_i \subseteq A_i^2 = A_i \times A_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:*

(i) $\prod_{i\in I} R_i$ *este reflexivă ddacă R_i este reflexivă, pentru fiecare $i \in I$*

(ii) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} ireflexivă, atunci $\prod_{i\in I} R_i$ *este ireflexivă*

(iii) $\prod_{i\in I} R_i$ *este simetrică ddacă R_i este simetrică, pentru fiecare $i \in I$*

(iv) $\prod_{i\in I} R_i$ *este antisimetrică ddacă R_i este antisimetrică, pentru fiecare $i \in I$*

(v) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică, atunci $\prod_{i\in I} R_i$ *este asimetrică*

(vi) $\prod_{i\in I} R_i$ *este tranzitivă ddacă R_i este tranzitivă, pentru fiecare $i \in I$*

Prin urmare:

- $\prod_{i\in I} R_i$ *este o preordine, respectiv echivalenţă, respectiv ordine, ddacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este o preordine, respectiv echivalenţă, respectiv ordine;*
- $\prod_{i\in I} R_i$ *este o ordine strictă ddacă există $i_0 \in I$ a.î. R_{i_0} este o ordine strictă şi, pentru fiecare $i \in I \setminus \{i_0\}$, R_i este o ordine,*

pentru că: dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este antisimetrică, atunci: $\prod_{i\in I} R_i$ *este asimetrică ddacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică.*

11 Relaţii de echivalenţă şi partiţii ale unei mulţimi

Exemplul 11.1. Δ_A şi A^2 sunt relaţii de echivalenţă pe A, anume cea mai mică şi, respectiv, cea mai mare relaţie de echivalenţă pe A, în sensul incluziunii, adică raportat la relaţia de incluziune între mulţimi.

Definiţia 11.2. Fie A nevidă şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de submulţimi ale lui A. Familia $(A_i)_{i\in I}$ se numeşte *partiţie* a lui A ddacă satisface următoarele condiţii:

(i) pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$

(ii) pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulţimile din familia $(A_i)_{i\in I}$ sunt două câte două disjuncte)

(iii) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$

Propoziţia 11.3. *Fie A nevidă şi $(A_i)_{i\in I}$ o partiţie a lui A. Atunci, pentru orice $x \in A$, există un unic $i_0 \in I$, a. î. $x \in A_{i_0}$.*

Observaţia 11.4. În cele ce urmează vom defini **clasele unei relaţii de echivalenţă**. Aici vom folosi cuvântul **clasă** cu un alt sens decât acela din primul set de cursuri, unde am vorbit despre teoria axiomatică a mulţimilor. Aici, toate clasele de echivalenţă sunt mulţimi, în această accepţiune a relaţiilor binare ca fiind definite între mulţimi. Dacă adoptăm definiţia relaţiilor binare din sistemul axiomatic prezentat în primul set de cursuri, care permitea unei relaţii binare să fie definită între două clase, atunci putem spune că relaţia de **cardinal echivalenţă**, studiată în primul set de cursuri, este o relaţie de echivalenţă pe **clasa mulţimilor**, iar clasele ei de echivalenţă sunt **clase proprii, cu excepţia clasei lui** $\emptyset$ (de data aceasta, **clase** în sensul din primul set de cursuri).

Pentru cele ce urmează, vom considera mulţimea A nevidă, şi o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe A, i. e.:

- $\sim$ este o relaţie binară pe A: $\sim \subseteq A^2$
- $\sim$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- $\sim$ este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- $\sim$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ şi $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiţia simetriei, putem interschimba x şi y şi continua seria de implicaţii, obţinând implicaţie dublă, adică: $\sim$ este **simetrică** ddacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalenţa: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$.

Definiţia 11.5. Pentru fiecare $x \in A$, definim *clasa de echivalenţă a lui x raportat la* $\sim$ ca fiind următoarea submulţime a lui A, notată cu $\widehat{x}$ sau cu $x/\!\sim$: $\widehat{x} := x/\!\sim\ := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarca 11.6. Observăm că simetria lui $\sim$ ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$, $\widehat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Propoziţia 11.7 (proprietăţile claselor de echivalenţă)**.** *(i) Pentru orice $x \in A$, $x \in \widehat{x}$, şi, aşadar, $\widehat{x} \neq \emptyset$.*

(ii) Pentru orice $x, y \in A$, avem:

- *dacă $x \sim y$, atunci $\widehat{x} = \widehat{y}$;*
- *dacă $(x, y) \notin \sim$, atunci $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.*

Propoziţia 11.8 (proprietăţile claselor de echivalenţă)**.** *Pentru orice $x, y \in A$:*

- *$x \sim y$ ddacă $y \sim x$ ddacă $x \in \widehat{y}$ ddacă $y \in \widehat{x}$ ddacă $\widehat{x} = \widehat{y}$;*
- *$(x, y) \notin \sim$ ddacă $(y, x) \notin \sim$ ddacă $x \notin \widehat{y}$ ddacă $y \notin \widehat{x}$ ddacă $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.*

Definiţia 11.9. Fiecare $x \in A$ se numeşte *reprezentant al clasei $\widehat{x}$.*

Remarca 11.10 (proprietăţile claselor de echivalenţă)**.** Pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei $\widehat{x}$ ddacă $y \in \widehat{x}$.

Definiţia 11.11. Mulţimea claselor de echivalenţă ale lui $\sim$ se notează cu $A/\!\sim$ şi se numeşte *mulţimea factor a lui A prin* $\sim$ sau *mulţimea cât a lui A prin* $\sim$: $A/\!\sim\ = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$.

Observaţia 11.12. Denumirile de **mulţime factor** şi **mulţime cât** se datorează faptului că mulţimea $A/\!\sim$ din definiţia anterioară se obţine prin "împărţirea mulţimii A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$" (a se vedea următoarea propoziţie).

Propoziţia 11.13 (clasele de echivalenţă formează o partiţie)**.** *Mulţimea factor $A/\!\sim$ este o partiţie a lui A.*

Remarca 11.14. Funcţia $p : A \to A/\!\sim$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) := \widehat{x}$, este surjectivă (sigur că este corect definită, pentru că $\widehat{x}$ este unic determinat de x, oricare ar fi $x \in A$).

Definiţia 11.15. Cu notaţiile de mai sus, funcţia p se numeşte *surjecţia canonică de la A la $A/\!\sim$.*

Notaţia 11.16. Notăm cu:

- $\mathrm{Part}(A)$ mulţimea partiţiilor lui A;
- $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe mulţimea A.

Propoziţia 11.17. *Mulţimea partiţiilor unei mulţimi nevide este în bijecţie cu mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe acea mulţime.*

Într–adevăr, funcţiile:

$$\mathrm{Eq}(A) \underset{\varphi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Part}(A)$$

definite prin:

- pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, $\varphi(\sim) = A/\!\sim$,

- pentru orice $(A_i)_{i\in I} \in \text{Part}(A)$, $\psi((A_i)_{i\in I}) = \{(x,y) \mid x, y \in A, (\exists\, i \in I)\,(x, y \in A_i)\} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^2 \subseteq A^2$,

sunt inverse una alteia, aşadar sunt inversabile, deci bijective.

- În cazul **morfismelor** între structuri algebrice (de acelaşi tip) (i. e. funcţiile care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice), **nucleul** se defineşte în funcţie de un element distins din structura codomeniu, cum este elementul neutru la grupuri.
- În cazul **funcţiilor**, definite între două mulţimi pe care nu se dau structuri algebrice, pentru definirea unei noţiuni de **nucleu**, o funcţie nu poate fi raportată decât la ea însăşi, de unde şi denumirea din definiţia următoare.
- Pentru cele ce urmează, fie A şi B două mulţimi nevide arbitrare şi $f : A \to B$ o funcţie arbitrară.
- Următoarea diagramă (reprezentare grafică) este doar pentru intuiţie:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Definiţia 11.18 (nucleul de săgeată dublă)**.** Se numeşte *nucleul (de săgeată dublă al) lui* f următoarea relaţie binară pe A, notată $Ker(f)$:

$$Ker(f) := \{(x,y) \mid x, y \in A, f(x) = f(y)\} \subseteq A^2.$$

- În cazul morfismelor, au loc proprietăţi de forma: morfismul este injectiv ddacă nucleul său este trivial.
- Şi aici avem o proprietate de acest tip:

Remarca 11.19. (i) $Ker(f) \supseteq \Delta_A$;

(ii) $Ker(f) = \Delta_A$ ddacă f este injectivă.

Remarca 11.20. $Ker(f) = \{(x,y) \mid x, y \in A, (f(x), f(y)) \in \Delta_B\}$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

- Nucleele de săgeată dublă ale morfismelor între structuri algebrice de acelaşi tip sunt **congruenţe**, adică relaţii de echivalenţă care păstrează operaţiile structurilor algebrice respective. (Vom vorbi despre **congruenţe** pe algebre Boole în unele dintre cursurile următoare.) Am precizat: nucleele **de săgeată dublă** ale morfismelor, deci **nu** nucleele morfismelor în primul sens.
- Cu privire la proprietatea care urmează: intuitiv, o **diagramă** (cu mulţimi şi funcţii, ca aceea din propoziţia următoare, de exemplu) se zice *comutativă* ddacă, indiferent pe ce drum "urmărim săgeţile" şi compunem funcţiile, între oricare două mulţimi din diagramă se obţine aceeaşi funcţie, i. e. toate compunerile de funcţii între acele mulţimi sunt egale (mulţimile pot fi şi 4 sau mai multe, nu neapărat 3, ca în cazul diagramei următoare).

Pentru cele ce urmează, renunţăm la fixarea lui A, B şi f.

Propoziţia 11.21 (proprietatea de universalitate a mulţimii factor)**.** *Fie A o mulţime nevidă, $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A şi $p : A \to A/\!\sim$ surjecţia canonică: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \widehat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$.*

Atunci: pentru orice mulţime nevidă B şi orice funcţie $f : A \to B$ cu $\sim\subseteq Ker(f)$, există o unică funcţie $\tilde{f} : A/\!\sim \to B$ care face comutativă următoarea diagramă, i. e. cu proprietatea că:

$$\tilde{f} \circ p = f,$$

i. e., pentru orice $x \in A$:

$$\tilde{f}(\widehat{x}) = f(x).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & A/\!\sim \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

12 Operatori de închidere şi familii Moore

- Vom studia în cele ce urmează **operatorii de închidere** pe mulţimea părţilor unei mulţimi şi **familiile Moore (sistemele de închidere)** de părţi ale unei mulţimi.
- Aceste noţiuni pot fi definite şi studiate pe **mulţimi ordonate arbitrare** (vom vedea ce sunt acestea), adică, în consideraţiile de mai jos, se poate înlocui mulţimea părţilor unei mulţimi cu o mulţime arbitrară M, incluziunea de mulţimi cu o relaţie de ordine arbitrară $\leq$ pe M, iar intersecţia cu **infimumul** în **mulţimea ordonată** $(M, \leq)$ (în timp ce reuniunea va avea drept generalizare o noţiune numită **supremum**) (vom vedea ce sunt toate acestea).
- Vom vedea că, în mulţimi ordonate arbitrare:
  (i) supremumul familiei vide este minimul (cele două există simultan);
  (ii) infimumul familiei vide este maximul (cele două există simultan).
- Pentru familii de mulţimi:
  (i) am demonstrat că reuniunea familiei vide de mulţimi este $\emptyset$ (cea mai mică mulţime în sensul incluziunii, adică raportat la incluziunea de mulţimi: $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulţime A);
  (ii) nu există o cea mai mare mulţime (dintre toate mulţimile) în sensul incluziunii, pentru că, dacă ar exista, atunci aceasta ar include pe $\mathcal{P}(A)$, pentru orice mulţime A, deci ar conţine fiecare mulţime A, deci ar avea ca submulţime mulţimea tuturor mulţimilor, care nu există (a se revedea primul set de cursuri); dar există o cea mai mare mulţime dintre părţile unei anumite mulţimi. Deci ce mulţime va fi intersecţia familiei vide de mulţimi?

Remarca 12.1. Intersecţia familiei vide nu există decât raportat la o mulţime totală T: intersecţia familiei vide de părţi ale lui T (adică infimumul familiei vide în mulţimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ – vom vedea), se **defineşte** în următorul mod, şi este egală cu mulţimea totală T:

$$\bigcap_{i\in\emptyset} A_i := \{x \in T \mid (\forall\, i \in \emptyset)\,(x \in A_i)\} = \{x \in T \mid (\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\} = T,$$

întrucât proprietatea $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x.

Exerciţiul 12.2. Fie T o mulţime, iar $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (mulţimi de părţi ale lui T care satisfac această incluziune). Atunci au loc incluziunile:

(i) $\bigcup\limits_{A\in X} A \subseteq \bigcup\limits_{A\in Y} A$

(ii) $\bigcap\limits_{A\in X} A \supseteq \bigcap\limits_{A\in Y} A$

În particular, dacă $M \in Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (i. e. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ şi $M \in Y$, adică pentru $X = \{M\}$ mai sus (un *singleton*, i. e. o mulţime cu un singur element)), atunci:

(i) $M \subseteq \bigcup\limits_{A\in Y} A$

(ii) $M \supseteq \bigcap\limits_{A\in Y} A$

Definiţia 12.3. Fie T o mulţime arbitrară.

- Se numeşte *familie Moore de părţi ale lui T* (sau *sistem de închidere pe mulţimea părţilor lui T*) o familie de părţi ale lui T închisă la intersecţii arbitrare, i. e. o familie de mulţimi $\mathcal{M} = (M_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, cu I mulţime arbitrară, având proprietatea că, pentru orice $S \subseteq I$, $\bigcap\limits_{s\in S} M_s \in \mathcal{M}$ (i. e., pentru orice $S \subseteq I$, există $i_S \in I$, astfel încât $\bigcap\limits_{s\in S} M_s = M_{i_S}$). Familiile Moore se mai numesc *sisteme de închidere*.

- Se numeşte *operator de închidere pe* $\mathcal{P}(T)$ o funcţie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, astfel încât, pentru orice $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, au loc proprietăţile:

  (i) $C(C(X)) = C(X)$ (C este *idempotent*);

  (ii) $X \subseteq C(X)$ (C este *extensiv*);

  (iii) dacă $X \subseteq Y$, atunci $C(X) \subseteq C(Y)$ (C este *crescător*).

Peste tot în restul acestei secţiuni, T va fi o mulţime arbitrară.

Remarca 12.4. Orice familie Moore de părţi ale lui T conţine intersecţia familiei vide de părţi ale lui T, adică pe T.

Exemplul 12.5.

- $id_{\mathcal{P}(T)}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- Funcţia constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- $\mathcal{P}(T)$ este o familie Moore de părţi ale lui T.
- $\{T\}$ este o familie Moore de părţi ale lui T.
- $\emptyset$ nu este o familie Moore de părţi ale lui T, pentru că nu îl conţine pe T.

Aşadar:

Remarca 12.6. Orice familie Moore este nevidă.

Propoziţia 12.7. *Dacă $\mathcal{M}$ este o familie Moore de părţi ale lui T, atunci, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, există o (unică) cea mai mică mulţime din $\mathcal{M}$ care include pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), şi aceasta este egală cu intersecţia mulţimilor din $\mathcal{M}$ care includ pe A.*

Propoziţia 12.8 ($\star$)**.** *Fie I o mulţime nevidă şi $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ o familie Moore de părţi ale lui T.*

Definim funcţia $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ astfel: pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X)$ este, prin definiţie, cea mai mică mulţime din $\mathcal{M}$ care include pe X, adică $C_{\mathcal{M}}(X) := \bigcap\limits_{\substack{M \in \mathcal{M},\\ X \subseteq M}} M.$

Atunci $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Definiţia 12.9 (mulţimi închise)**.** Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Elementele din imaginea lui C, $C(\mathcal{P}(T))$, adică mulţimile de forma $C(X)$, cu $X \in \mathcal{P}(T)$, se numesc *mulţimi închise* raportat la operatorul de închidere C.

Propoziţia 12.10 (caracterizare echivalentă pentru mulţimile închise)**.** *Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Atunci mulţimile închise raportat la operatorul de închidere C sunt exact acele mulţimi $X \in \mathcal{P}(T)$ care satisfac $X = C(X)$, i. e.: $\{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.*

Propoziţia 12.11 ($\star\star$)**.** *Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Definim $\mathcal{M}_C = C(\mathcal{P}(T)) = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\} \subseteq \mathcal{P}(T)$ (familia mulţimilor închise din $\mathcal{P}(T)$ raportat la operatorul de închidere C).*

Atunci $\mathcal{M}_C$ este o familie Moore de părţi ale lui T.

Propoziţia 12.12. *Aplicaţiile din cele Propoziţiile ($\star$) şi ($\star\star$) sunt inverse una alteia, adică:*

(i) pentru orice operator de închidere $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C} = C$;

(ii) pentru orice familie Moore $\mathcal{M}$ de părţi ale lui T, $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$.

Aşadar aceste aplicaţii sunt bijecţii, deci mulţimea operatorilor de închidere pe $\mathcal{P}(T)$ şi mulţimea familiilor Moore de părţi ale lui T sunt în bijecţie.

Exemplul 12.13.

- Familia Moore asociată operatorului de închidere $id_{\mathcal{P}(T)}$ pe $\mathcal{P}(T)$ este $id_{\mathcal{P}(T)}(\mathcal{P}(T)) = \mathcal{P}(T)$.
- Familia Moore asociată operatorului de închidere dat de funcţia constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este $C(\mathcal{P}(T)) = \{T\}$.

13 Închiderile relaţiilor binare pe o mulţime

- Peste tot în această secţiune, A va fi o mulţime arbitrară.
- $\mathcal{P}(A^2)$ este mulţimea submulţimilor lui $A^2 = A \times A$, adică mulţimea relaţiilor binare pe A.
- Amintesc că: $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\} = id_A$ =relaţia de egalitate pe A.

Propoziţia 13.1. *Fie $(R_i)_{i\in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de relaţii binare pe A. Atunci:*

(i) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e reflexivă

(ii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e simetrică

(iii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e tranzitivă

(iv) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e o preordine

(v) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relaţie de echivalenţă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e o relaţie de echivalenţă

Remarca 13.2. Propoziţia anterioară arată că familia relaţiilor binare reflexive/simetrice/ tranzitive/de preodine/de echivalenţă pe A este o familie Moore de părţi ale lui A^2.

Într–adevăr, A^2 satisface toate aceste proprietăţi, fiind relaţie de echivalenţă pe A.

Şi, de exemplu, pentru reflexivitate: familia relaţiilor reflexive pe A conţine pe A^2, care este intersecţia familiei vide din $\mathcal{P}(A^2)$, iar, conform propoziţiei anterioare, această familie este închisă la intersecţii nevide arbitrare. Aşadar, familia relaţiilor reflexive pe A este închisă la intersecţii arbitrare, i. e. este o familie Moore.

Remarca 13.3. Remarca anterioară şi o serie de propoziţii despre familii Moore şi operatori de închidere de mai sus arată că, pentru orice relaţie binară R pe A, există o cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R, anume intersecţia tuturor relaţiilor binare reflexive pe A care includ pe R, adică unica relaţie binară $\overline{R}$ pe A care satisface următoarele trei proprietăţi:

- $\overline{R}$ este reflexivă
- $R \subseteq \overline{R}$
- pentru orice relaţie reflexivă S pe A cu $R \subseteq S$, rezultă că $\overline{R} \subseteq S$

În plus, $\mathcal{R} : \mathcal{P}(A^2) \to \mathcal{P}(A^2)$, pentru orice $R \in \mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{R}(R) := \overline{R}$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(A^2)$.
Toate aceste consideraţii rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietăţile:

- simetrie – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{S}$
- tranzitivitate – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{T}$
- proprietatea de a fi preordine – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu Pre
- proprietatea de a fi relaţie de echivalenţă – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{E}$

Aceste notaţii **nu** sunt consacrate, ci sunt notaţii ad–hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează.

Definiţia 13.4. Fie R o relaţie binară pe A. Se numeşte:

- *închiderea reflexivă a lui* R cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{R}(R)$;
- *închiderea simetrică a lui* R cea mai mică relaţie binară simetrică pe A care include pe R, adică $\mathcal{S}(R)$;
- *închiderea tranzitivă a lui* R cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{T}(R)$;

- *preordinea generată de* R (sau *închiderea reflexiv–tranzitivă a lui* R) cea mai mică preordine pe A care include pe R, adică $Pre(R)$;
- *relaţia de echivalenţă generată de* R cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include pe R, adică $\mathcal{E}(R)$.

Remarca 13.5. Idempotenţa operatorilor de închidere arată că, pentru orice relaţie binară R pe A: $\mathcal{R}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(R)$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ şi $\mathcal{E}(\mathcal{E}(R)) = R$.

Remarca 13.6. Fie R o relaţie binară pe A. Conform descrierii mulţimilor închise din secţiunea despre operatori de închidere şi familii Moore, au loc:

- R este reflexivă ddacă $R = \mathcal{R}(R)$
- R este simetrică ddacă $R = \mathcal{S}(R)$
- R este tranzitivă ddacă $R = \mathcal{T}(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relaţie de echivalenţă ddacă $R = \mathcal{E}(R)$

Propoziţia 13.7. *Fie R o relaţie binară pe A. Atunci:*

(i) $\mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$

(ii) $\mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$

(iii) $\mathcal{T}(R) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

(iv) $Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$

(v) $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$

Remarca 13.8 (temă)**.** Dacă A este o mulţime finită şi nevidă având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

(i) şirul $R^0,\ R^1,\ R^2,\ \ldots, R^n,\ \ldots$ este periodic începând de la un anumit exponent;

(ii) $\mathcal{T}(R) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{k} R^n$;

(iii) $\mathcal{T}(R) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{m} R^n$, unde $m = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid \displaystyle\bigcup_{n=1}^{j} R^n$ e tranzitivă$\}$.

Propoziţia 13.9 (comutările închiderilor – temă, cu contraexemplu pentru comutarea de la ultimul punct – facultativă)**.** *Fie R o relaţie binară pe A. Atunci:*

(i) $\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$;

(ii) $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$;

(iii) $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ *şi* $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ *nu sunt neapărat egale.*

Adică: închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică şi tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică şi tranzitivă nu comută una cu cealaltă.

Corolarul 13.10 (temă – facultativă)**.**

- *$\mathcal{R}$ păstrează simetria şi tranzitivitatea, i. e.: dacă R este o relaţie binară simetrică (respectiv tranzitivă), atunci $\mathcal{R}(R)$ este simetrică (respectiv tranzitivă);*
- *$\mathcal{S}$ şi $\mathcal{T}$ păstrează reflexivitatea, i. e.: dacă R este o relaţie binară reflexivă, atunci $\mathcal{S}(R)$ şi $\mathcal{T}(R)$ sunt reflexive.*

Propoziţia 13.11 (temă – facultativă).

- *$\mathcal{T}$ păstrează simetria;*
- *$\mathcal{S}$ nu păstrează tranzitivitatea.*

Remarca 13.12 (nu există închiderea antisimetrică sau ordinea generată)**.** Fie R o relaţie binară pe A, arbitrară. De ce nu calculăm o închidere antisimetrică a lui R, sau o relaţie de ordine generată de R?

Două motive sunt următoarele fapte, fiecare uşor de verificat:

- dacă R nu este antisimetrică, atunci nicio relaţie binară S pe A cu $R \subseteq S$ nu este antisimetrică (direct din definiţia antisimetriei), şi deci nu este nici relaţie de ordine;
- dacă $|A| \geq 2$, atunci A^2 nu este antisimetrică (pentru că, atunci, A conţine cel puţin două elemente distincte a şi b, aşadar $(a, b), (b, a) \in A^2$, dar $a \neq b$), deci A^2 nu este o relaţie de ordine, prin urmare A^2 nu aparţine familiei relaţiilor antisimetrice pe A, deci nici familiei relaţiilor de ordine pe A, aşadar niciuna dintre aceste familii nu este o familie Moore de părţi ale lui A^2, pentru că niciuna dintre ele nu conţine intersecţia familiei vide de părţi ale lui A^2, anume pe A^2.