Proprietăţi ale Operaţiilor şi Relaţiilor între Mulţimi

Seminar de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

2023–2024, Semestrul I

Amintesc că are sens să scriem:

- ”fie x”, cu semnificaţia: ”fie x element arbitrar” sau ”fie x din universul discuţiei”;
- $\forall\, x$, cu semnificaţia: ”pentru orice element x (de oriunde)” sau ”pentru orice element x din universul discuţiei”;
- $\exists\, x$, cu semnificaţia: ”există un element x” sau ”există un element x în universul discuţiei”,

unde ”universul discuţiei” este colecţia tuturor obiectelor cu care lucrăm în cadrul unei probleme, colecţie despre care nu specificăm dacă este o mulţime, o clasă sau de altă natură.

Amintesc că simbolul —//— semnifică: *să se demonstreze afirmaţia precedentă* sau *să se demonstreze afirmaţia de mai sus.*

Amintesc abrevierile: ”ddacă”, semnificând *dacă şi numai dacă*, şi ”i.e.”, de la *id est*, semnificând *adică*.

A se vedea, în CURSUL I, definiţiile operaţiilor $\cup, \cap, \setminus, \Delta$, ale relaţiilor $\subseteq, \subsetneq, \supseteq, \supsetneq$, definiţia mulţimii vide, $\emptyset$, şi a mulţimii $\mathcal{P}(M)$ a submulţimilor unei mulţimi M.

În rezolvarea următorului exerciţiu, a se urmări corespondenţa dintre următoarele proprietăţi ale operaţiilor şi relaţiilor între mulţimi şi proprietăţi ale conectorilor logici între enunţuri, corespondenţă indicată în CURSUL I în dreptul fiecăreia dintre proprietăţile de demonstrat în acest exerciţiu.

Exerciţiul 1. *Fie A, B, C, D mulţimi. Să demonstrăm următoarele:*

- **egalitatea de mulţimi este echivalentă cu dubla incluziune:** $A = B$ *ddacă* $[A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq A]$—//—

Prin definiţie, două mulţimi coincid ddacă au aceleaşi elemente, i.e.:

$$\begin{array}{c} A = B \text{ ddacă } (\forall\, x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ \text{ddacă } (\forall\, x)\,[(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ şi } (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ \text{ddacă } [(\forall\, x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ şi } (\forall\, x)\,(x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ \text{ddacă } [A \subseteq B \text{ şi } B \subseteq A]. \end{array}$$

Fie x, arbitrar, fixat, pentru următoarele proprietăţi de demonstrat.

Pentru a demonstra o egalitate de mulţimi, putem demonstra dubla incluziune sau putem arăta, în mod direct, că x este element al membrului stâng al egalităţii ddacă x este element al membrului drept.

- **idempotenţa reuniunii şi a intersecţiei:** $A \cup A = A$ *şi* $A \cap A = A$—//—

$x \in A \cup A$ ddacă $[x \in A$ sau $x \in A]$ ddacă $x \in A$. Aşadar $A \cup A = A$.
$x \in A \cap A$ ddacă $[x \in A$ şi $x \in A]$ ddacă $x \in A$. Aşadar $A \cap A = A$.
Diferenţa şi diferenţa simetrică nu sunt idempotente. În schimb, avem:

- $A \setminus A = \emptyset$ *şi* $A \Delta A = \emptyset$—//—

$x \in A \setminus A$ ddacă $[x \in A$ şi $x \notin A]$ ddacă $x \in \emptyset$, pentru că: enunţul $[x \in A$ şi $x \notin A]$, altfel scris $[x \in A$ şi non$(x \in A)]$, este fals, la fel ca enunţul $x \in \emptyset$. Aşadar $A \setminus A = \emptyset$.

Prin urmare avem şi: $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ conform idempotenţei reuniunii.

- **comutativitatea reuniunii, a intersecţiei şi a diferenţei simetrice:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *şi* $A \Delta B = B \Delta A$—//—

$x \in A \cup B$ ddacă $[x \in A$ sau $x \in B]$ ddacă $[x \in B$ sau $x \in A]$ ddacă $x \in B \cup A$. Aşadar $A \cup B = B \cup A$.
Prin urmare avem şi: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$.
$x \in A \cap B$ ddacă $[x \in A$ şi $x \in B]$ ddacă $[x \in B$ şi $x \in A]$ ddacă $x \in B \cap A$. Aşadar $A \cap B = B \cap A$.

- **asociativitatea reuniunii, a intersecţiei şi a diferenţei simetrice:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *şi* $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$—//—

$x \in A \cup (B \cup C)$ ddacă $[x \in A$ sau $(x \in B$ sau $x \in C)]$ ddacă $[x \in A$ sau $x \in B$ sau $x \in C]$ ddacă $[(x \in A$ sau $x \in B)$ sau $x \in C)]$ ddacă $x \in (A \cup B) \cup C$. Aşadar $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

$x \in A \cap (B \cap C)$ ddacă $[x \in A$ şi $(x \in B$ şi $x \in C)]$ ddacă $[x \in A$ şi $x \in B$ şi $x \in C]$ ddacă $[(x \in A$ şi $x \in B)$ şi $x \in C)]$ ddacă $x \in (A \cap B) \cap C$. Aşadar $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Asociativitatea diferenţei simetrice se poate demonstra folosind funcţii caracteristice sau ca în Remarca 2 de mai jos, demonstrând asociativitatea conectorului logic xor (sau exclusiv).

Conform comutativităţii reuniunii şi a intersecţiei, următoarele legi de distributivitate, scrise ca distributivităţi la stânga, sunt echivalente cu distributivităţile la dreapta: $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$, respectiv $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.

- **distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

În proprietăţile scrise ca mai jos, pe mai multe rânduri, conectorii logici dintre rânduri se aplică ultimii, adică, pentru a transcrie o astfel de proprietate pe un singur rând, se încadrează între paranteze enunţurile de pe fiecare rând.

$x \in A \cup (B \cap C)$ ddacă $\begin{cases} x \in A \\ \text{sau} \\ x \in B \text{ şi } x \in C. \end{cases}$ $\quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ddacă $\begin{cases} x \in A \text{ sau } x \in B \\ \text{şi} \\ x \in A \text{ sau } x \in C. \end{cases}$

Să procedăm prin dublă incluziune, folosind caracterizările de mai sus.

$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dacă $x \in A \cup (B \cap C)$, atunci avem două cazuri:
cazul 1: $x \in A$, prin urmare $[x \in A$ sau $x \in B]$, precum şi $[x \in A$ sau $x \in C]$, aşadar $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
cazul 2: $x \in B$ şi $x \in C$; în acest caz, avem $x \in B$, prin urmare $[x \in A$ sau $x \in B]$, precum şi $x \in C$, prin urmare $[x \in A$ sau $x \in C]$, aşadar $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Dacă $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, atunci putem analiza două cazuri (complementare, date de o proprietate şi negaţia aceleiaşi proprietăţi), dintre care elementul arbitrar (fixat) x satisface unul şi numai unul:
cazul 1: $x \in A$, ceea ce implică $[x \in A$ sau $[x \in B$ şi $x \in C]]$, adică $x \in A \cup (B \cap C)$;
cazul 2: $x \notin A$; în acest caz aplicăm ipoteza că $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$; aşadar $[x \in A$ sau $x \in B]$ şi $x \notin A$, deci $x \in B$; simultan, $[x \in A$ sau $x \in C]$ şi $x \notin A$, deci $x \in C$; aşadar $x \in B$ şi $x \in C$, prin urmare $[x \in A$ sau $[x \in B$ şi $x \in C]]$, adică $x \in A \cup (B \cap C)$.

- **distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$ ddacă $\begin{cases} x \in A \\ \text{şi} \\ x \in B \text{ sau } x \in C. \end{cases}$ $\quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ddacă $\begin{cases} x \in A \text{ şi } x \in B \\ \text{sau} \\ x \in A \text{ şi } x \in C. \end{cases}$

Procedăm tot prin dublă incluziune, folosind caracterizările anterioare.

$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dacă $x \in A \cap (B \cup C)$, atunci $x \in A$ şi:
fie $x \in B$, aşadar $x \in A$ şi $x \in B$, prin urmare $[x \in A$ şi $x \in B]$ sau $[x \in A$ şi $x \in C]$, adică $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
fie $x \in C$, aşadar $x \in A$ şi $x \in C$, prin urmare $[x \in A$ şi $x \in B]$ sau $[x \in A$ şi $x \in C]$, adică $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Dacă $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, atunci:
fie $x \in A$ şi $x \in B$, aşadar, cum $x \in B$ implică $[x \in B$ sau $x \in C]$, rezultă că $x \in A$ şi $[x \in B$ sau $x \in C]$, adică $x \in A \cap (B \cup C)$;
fie $x \in A$ şi $x \in C$, aşadar, cum $x \in C$ implică $[x \in B$ sau $x \in C]$, rezultă că $x \in A$ şi $[x \in B$ sau $x \in C]$, adică $x \in A \cap (B \cup C)$.

- $A \subseteq A \cup B$ *şi* $A \cap B \subseteq A$

Dacă $x \in A$, atunci $[x \in A$ sau $x \in B]$, adică $x \in A \cup B$. Aşadar $A \subseteq A \cup B$.
Dacă $x \in A \cap B$, adică $[x \in A$ şi $x \in B]$, atunci $x \in A$. Aşadar $A \cap B \subseteq A$.
Cum reuniunea şi intersecţia sunt comutative, din aceste incluziuni rezultă şi $B \subseteq A \cup B$ şi $A \cap B \subseteq B$.

- $A \cup B = B$ *ddacă* $A \subseteq B$ *ddacă* $A \cap B = A$

Avem $A \subseteq A \cup B$, prin urmare, dacă $A \cup B = B$, atunci $A \subseteq B$.
Similar, $A \cap B \subseteq B$, prin urmare, dacă $A \cap B = A$, atunci $A \subseteq B$.
Acum să presupunem că $A \subseteq B$, adică $x \in A$ implică $x \in B$. Atunci: $x \in A \cup B$ ddacă $[x \in A$ sau $x \in B]$ ddacă $x \in B$, după cum se observă imediat prin dublă implicaţie, aşadar $A \cup B = B$. Analog: $x \in A \cap B$ ddacă $[x \in A$ şi $x \in B]$ ddacă $x \in A$, aşadar $A \cap B = A$.

- $\emptyset \subseteq A$

Enunţul $x \in \emptyset$ este fals, aşadar $[x \in \emptyset \Rightarrow x \in A]$ este adevărat, deci $\emptyset \subseteq A$.

- $A \subseteq A$ *şi* non$(A \subsetneq A)$

$A = A$, aşadar $A \subseteq A$, precum şi non$(A \neq A)$, prin urmare [non$(A \subseteq A)$ sau non$(A \neq A)$], i.e. non$(A \subseteq A$ şi $A \neq A)$, adică non$(A \subsetneq A)$.

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, *i.e.:* $A \subseteq \emptyset$ *ddacă* $A = \emptyset$

Procedăm prin dublă implicaţie.
$\emptyset \subseteq \emptyset$, aşadar: $A = \emptyset$ implică $A \subseteq \emptyset$.
Acum presupunem că $A \subseteq \emptyset$ şi presupunem prin absurd că $A \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că există un element $a \in A$; dar atunci rezultă $a \in \emptyset$, ceea ce contrazice definiţia lui $\emptyset$. Prin urmare, $A \subseteq \emptyset$ implică $A = \emptyset$.

- $A \cup \emptyset = A$ *şi* $A \cap \emptyset = \emptyset$

$\emptyset \subseteq A$, prin urmare $A \cup \emptyset = A$ şi $A \cap \emptyset = \emptyset$.

- $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$ *şi* $A \Delta \emptyset = A$

Enunţul $x \in \emptyset$ este fals, aşadar $x \notin \emptyset$ este adevărat, prin urmare: $x \in A \setminus \emptyset$ ddacă [$x \in A$ şi $x \notin \emptyset$] ddacă $x \in A$, în timp ce: $x \in \emptyset \setminus A$ ddacă [$x \in \emptyset$ şi $x \notin A$] ddacă $x \in \emptyset$, pentru că enunţul $x \in \emptyset$, aşadar şi conjuncţia [$x \in \emptyset$ şi $x \notin A$] sunt false. Aşadar $A \setminus \emptyset = A$ şi $\emptyset \setminus A = \emptyset$, prin urmare $A \Delta \emptyset = A \cup \emptyset = A$.

- $A \cup B = \emptyset$ *ddacă* $A = B = \emptyset$

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, aşadar $A = B = \emptyset$ implică $A \cup B = \emptyset$.
Cum $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$, $A \cup B = \emptyset$ implică $A \subseteq \emptyset$ şi $B \subseteq \emptyset$, aşadar $A = B = \emptyset$.

- $A \setminus B = \emptyset$ *ddacă* $A \subseteq B$
- $A \Delta B = \emptyset$ *ddacă* $A = B$

$A \setminus B = \emptyset$ ddacă $(\nexists\, y)\, (y \in A \setminus B)$ ddacă $(\forall\, y)\, (y \notin A \setminus B)$ ddacă $(\forall\, y)\,($non$(y \in A$ şi $y \notin B))$ ddacă $(\forall\, y)\, (y \notin A$ sau $y \in B))$ ddacă $(\forall\, y)\, (y \in A \Rightarrow y \in B)$ ddacă $A \subseteq B$. Am folosit faptul că, pentru orice enunţuri p, q, [$p \Rightarrow q$] este echivalent cu [(non p) sau q].
În consecinţă: $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$ ddacă [$A \setminus B = \emptyset$ şi $B \setminus A = \emptyset$] ddacă [$A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$] ddacă $A = B$.

- $A \subsetneq B$ *ddacă* [$A \subseteq B$ *şi* $B \nsubseteq A$] *ddacă* [$A \subseteq B$ *şi* $B \setminus A \neq \emptyset$]
- $A \subseteq B$ *ddacă* [$A \subsetneq B$ *sau* $A = B$]

Conform definiţiei incluziunii stricte, $A \subsetneq B$ ddacă [$A \subseteq B$ şi $A \neq B$] ddacă [$A \subseteq B$ şi non$(A = B)$] ddacă [$A \subseteq B$ şi non$(A \subseteq B$ şi $B \subseteq A)$] ddacă [$A \subseteq B$ şi $(A \nsubseteq B$ sau $B \nsubseteq A)$] ddacă [$A \subseteq B$ şi $B \nsubseteq A$] ddacă [$A \subseteq B$ şi $B \setminus A \neq \emptyset$]. Am aplicat faptul că: $B \subseteq A$ ddacă $B \setminus A = \emptyset$, prin urmare: $B \nsubseteq A$ ddacă $B \setminus A \neq \emptyset$.
Conform definiţiei incluziunii stricte, distributivităţii disjuncţiei faţă de conjuncţie, faptului că proprietatea $A = B$ este adevărată sau falsă, aşadar [non$(A = B)$ sau $A = B$], adică $(A \neq B$ sau $A = B)$, este adevărată, şi faptului că $A = B$ implică $A \subseteq B$, aşadar $(A \subseteq B$ sau $A = B)$ este echivalentă cu $A \subseteq B$, după cum se poate observa prin dublă implicaţie, au loc echivalenţele: [$A \subsetneq B$ sau $A = B$] ddacă [$(A \subseteq B$ şi $A \neq B)$ sau $A = B$] ddacă [$(A \subseteq B$ sau $A = B)$ şi $(A \neq B$ sau $A = B)$] ddacă $(A \subseteq B$ sau $A = B)$ ddacă $A \subseteq B$.

- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: $(A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $(A \subsetneq B$ *şi* $B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $(A \subseteq B$ *şi* $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: $(A \subsetneq B$ *şi* $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$

Dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$, atunci $x \in A$ implică $x \in B$, ceea ce implică $x \in C$, prin urmare $A \subseteq C$. Aşadar incluziunea nestrictă este tranzitivă.
Dacă $A \subsetneq B$ şi $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$, prin urmare $A \subseteq C$, dar şi $B \setminus A \neq \emptyset$, adică există un element $a \in B \setminus A$, aşadar $a \in B$ şi $a \notin A$, ceea ce, întrucât $B \subseteq C$, implică $a \in C$ şi $a \notin A$, adică $a \in C \setminus A$, deci $C \setminus A \neq \emptyset$. Prin urmare $A \subseteq C$ şi $C \setminus A \neq \emptyset$, adică $A \subsetneq C$.
Dacă $A \subseteq B$ şi $B \subsetneq C$, atunci $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$, prin urmare $A \subseteq C$, dar şi $C \setminus B \neq \emptyset$, adică există un element $b \in C \setminus B$, aşadar $b \in C$ şi $b \notin B$, ceea ce, întrucât $A \subseteq B$ (adică $x \in A$ implică $x \in B$, aşadar $x \notin B$ implică $x \notin A$), implică $b \in C$ şi $b \notin A$, adică $b \in C \setminus A$, deci $C \setminus A \neq \emptyset$. Prin urmare $A \subseteq C$ şi $C \setminus A \neq \emptyset$, adică $A \subsetneq C$.
Dacă $A \subsetneq B$ şi $B \subsetneq C$, atunci $A \subseteq B$ şi $B \subsetneq C$, prin urmare $A \subsetneq C$.

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ —//—
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$ —//—
- $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$ —//—
- $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$ —//—

Presupunem că $A \subseteq B$, aşadar $x \in A$ implică $x \in B$, prin urmare $x \notin B$ implică $x \notin A$.
Dacă $x \in A \cup C$, adică $x \in A$ sau $x \in C$, atunci $x \in B$ sau $x \in C$, adică $x \in B \cup C$. Aşadar $A \cup C \subseteq B \cup C$.
Dacă $x \in A \cap C$, adică $x \in A$ şi $x \in C$, atunci $x \in B$ şi $x \in C$, adică $x \in B \cap C$. Aşadar $A \cap C \subseteq B \cap C$.
Dacă $x \in A \setminus C$, adică $x \in A$ şi $x \notin C$, atunci $x \in B$ şi $x \notin C$, adică $x \in B \setminus C$. Aşadar $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
Dacă $x \in C \setminus B$, adică $x \in C$ şi $x \notin B$, atunci $x \in C$ şi $x \notin A$, adică $x \in C \setminus A$. Aşadar $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

- *dacă* $\begin{cases} A \subseteq B \\ \text{şi} \\ C \subseteq D \end{cases}$, *atunci:* $\begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \cap D \\ A \setminus D \subseteq B \setminus C \end{cases}$ —//—

Presupunem că $A \subseteq B$ şi $C \subseteq D$.
Cum $A \subseteq B$, rezultă că $A \cup C \subseteq B \cup C$. Cum $C \subseteq D$, rezultă că $B \cup C \subseteq B \cup D$. Conform tranzitivităţii incluziunii nestricte, rezultă $A \cup C \subseteq B \cup D$.
Analog, rezultă $A \cap C \subseteq B \cap C \subseteq B \cap D$, prin urmare $A \cap C \subseteq B \cap D$.
Cum $A \subseteq B$, rezultă că $A \setminus D \subseteq B \setminus D$. Cum $C \subseteq D$, rezultă că $B \setminus D \subseteq B \setminus C$. Prin urmare $A \setminus D \subseteq B \setminus C$.

- $(A \subseteq C$ *şi* $B \subseteq C)$ *ddacă* $A \cup B \subseteq C$ —//—
- $(A \subseteq B$ *şi* $A \subseteq C)$ *ddacă* $A \subseteq B \cap C$ —//—

Cum $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$, conform tranzitivităţii incluziunii nestricte, $A \cup B \subseteq C$ implică $A \subseteq C$ şi $B \subseteq C$. Reciproc, $A \subseteq C$ şi $B \subseteq C$ implică $A \cup B \subseteq C \cup C = C$.
Cum $B \cap C \subseteq B$ şi $B \cap C \subseteq C$, conform tranzitivităţii incluziunii nestricte, $A \subseteq B \cap C$ implică $A \subseteq B$ şi $A \subseteq C$. Reciproc, $A \subseteq B$ şi $A \subseteq C$ implică $A = A \cap A \subseteq B \cap C$.

- $A \setminus B \subseteq A$ —//—
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$ *şi* $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ —//—

Dacă $x \in A \setminus B$, adică $x \in A$ şi $x \notin B$, atunci $x \in A$. Aşadar $A \setminus B \subseteq A$, prin urmare $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$.
$x \in A \cap (B \setminus A)$ ddacă $[x \in A$, $x \in B$ şi $x \notin A]$, ceea ce este echivalent cu $x \in \emptyset$, pentru că ambele enunţuri sunt false.

- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ —//—

$x \in A \setminus (A \cap B)$ ddacă $[x \in A$ şi non$(x \in A$ şi $x \in B)]$ ddacă $[x \in A$ şi $(x \notin A$ sau $x \notin B)]$ ddacă $[x \in A$ şi $x \notin B]$ ddacă $x \in A \setminus B$. Aşadar $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

- $A \cap B = \emptyset$ *ddacă* $A \setminus B = A$ *ddacă* $B \setminus A = B$ —//—

Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \setminus \emptyset = A$.
Acum să presupunem că $A \setminus B = A$, aşadar $A \subseteq A \setminus B$, şi să presupunem prin absurd că $A \cap B \neq \emptyset$, adică există un element $a \in A \cap B$, adică $a \in A$ şi $a \in B$, prin urmare $a \in A$, aşadar $a \in A \setminus B$ întrucat $A \subseteq A \setminus B$, deci $a \in A$ şi $a \notin B$, aşadar $a \notin B$, ceea ce contrazice faptul că $a \in B$. Prin urmare $A \cap B = \emptyset$.
Aşadar: $A \setminus B = A$ ddacă $A \cap B = \emptyset$, ceea ce este echivalent cu $B \cap A = \emptyset$ datorită comutativităţii conjuncţiei, enunţ echivalent $B \setminus A = B$ conform echivalenţei anterioare.

Amintesc notaţiile:

- pentru orice mulţime finită M, $|M| =$ numărul elementelor lui M;
- $2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} =$ mulţimea numerelor naturale impare;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{1, n} = \{1, 2, \ldots, n\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$.

Să notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:
• pentru orice enunţuri $p_1, \ldots, p_n$, cu $\boxed{p_1 \text{ xor } p_2 \text{ xor} \ldots \text{xor } p_n := (\ldots((p_1 \text{ xor } p_2) \text{ xor } p_3)\text{xor} \ldots \text{xor } p_{n-1}) \text{ xor } p_n}$;
• pentru orice mulţimi $A_1, \ldots, A_n$, cu $\boxed{A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n := (\ldots((A_1 \Delta A_2)\Delta A_3)\Delta \ldots \Delta A_{n-1})\Delta A_n}$.

Remarca 2. ① Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice enunţuri $p_1, \ldots, p_n$, enunţul $q_n := p_1 \text{ xor } p_2 \text{ xor} \ldots \text{xor } p_n$ este adevărat ddacă $|\{i \in \overline{1,n} \mid p_i \text{ este adevărat}\}| \in 2\mathbb{N}+1$;

② Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice mulţimi $A_1, \ldots, A_n$, $B_n := A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n = \{x \mid |\{i \in \overline{1,n} \mid x \in A_i\}| \in 2\mathbb{N}+1\}$.

① Demonstrăm această proprietate prin inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}^*$. Conform notaţiei fără paranteze de mai sus:

- $q_1 = p_1$ şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = q_n \text{ xor } p_{n+1}$.

$\underline{n=1}$: $q_1 = p_1$, iar $\overline{1,1} = \{1\}$, aşadar q_1 este adevărat ddacă p_1 este adevărat ddacă $|\{i \in \{1\} \mid p_i \text{ este adevărat}\}| = 1$ ddacă $|\{i \in \overline{1,1} \mid p_i \text{ este adevărat}\}| \in 2\mathbb{N}+1$.
$\underline{n \mapsto n+1}$: Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, să notăm cu $M_n := \{i \in \overline{1,n} \mid p_i \text{ este adevărat}\}$. Observăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $M_{n+1} = \begin{cases} M_n, & \text{dacă } n+1 \notin M_{n+1}, \\ M_n \cup \{n+1\}, & \text{altfel.} \end{cases}$ aşadar $|M_{n+1}| = \begin{cases} |M_n|, & \text{dacă } n+1 \notin M_{n+1}, \\ |M_n|+1, & \text{altfel,} \end{cases}$ întrucât $n+1 \notin M_n$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât q_n este adevărat ddacă $|M_n| \in 2\mathbb{N}+1$. Conform definiţiei conectorului logic *sau exclusiv* şi celor de mai sus, $q_{n+1} = q_n \text{ xor } p_{n+1}$ este adevărat ddacă $\begin{cases} q_n \text{ e adevărat şi } p_{n+1} \text{ e fals} \\ \text{sau} \\ q_n \text{ e fals şi } p_{n+1} \text{ e adevărat} \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} |M_n| \in 2\mathbb{N}+1 \text{ şi } n+1 \notin M_{n+1} \\ \text{sau} \\ |M_n| \in 2\mathbb{N} \text{ şi } n+1 \in M_{n+1} \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} |M_n| \in 2\mathbb{N}+1 \text{ şi } |M_{n+1}| = |M_n| \\ \text{sau} \\ |M_n| \in 2\mathbb{N} \text{ şi } |M_{n+1}| = |M_n|+1 \end{cases}$ ddacă $|M_{n+1}| \in 2\mathbb{N}+1$, pentru că acestea sunt singurele cazuri posibile în care avem $|M_{n+1}| \in 2\mathbb{N}+1$, întrucât $|M_{n+1}| \in \{|M_n|, |M_n|+1\}$.

Conform **principiului inducţiei matematice**, rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, q_n este adevărat ddacă $|M_n| \in 2\mathbb{N}+1$.

② Conform notaţiilor fără paranteze de mai sus:

- $B_1 = A_1$ şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} = B_n \text{ xor } A_{n+1}$, aşadar, conform definiţiei diferenţei simetrice:
- pentru orice element x, dacă, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, p_n este proprietatea $x \in A_n$, atunci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in B_n$ ddacă x satisface proprietatea q_n.

Aşadar, conform ①, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in B_n$ ddacă $|\{i \in \overline{1,n} \mid x \in A_i\}| \in 2\mathbb{N}+1$.

Acum putem demonstra asociativitatea diferenţei simetrice: conform proprietăţii ② din remarca anterioară şi **comutativităţii diferenţei simetrice**, precum şi **asociativităţii** şi **comutativităţii intersecţiei**, pentru orice mulţimi A, B, C şi orice element x, avem: $x \in (A\Delta B)\Delta C$ ddacă $[x \in A \cap B \cap C$ sau $x \in A \setminus (B \cup C)$ sau $x \in B \setminus (A \cup C)$ sau $x \in C \setminus (A \cup B)]$ ddacă $[x \in B \cap C \cap A$ sau $x \in B \setminus (A \cup C)$ sau $x \in C \setminus (A \cup B)$ sau $x \in A \setminus (B \cup C)]$ ddacă $x \in (B\Delta C)\Delta A$ ddacă $x \in A\Delta(B\Delta C)$, prin urmare $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Desigur, putem demonstra, mai general, asociativitatea conectorului logic xor, ca mai jos, din care rezultă asociativitatea diferenţei simetrice aplicând această asociativitate a sau–lui exclusiv proprietăţilor $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ în locul enunţurilor p_1, p_2, p_3 de mai jos: conform proprietăţii ① din remarca anterioară şi comutativităţii conectorului logic **xor**, precum şi asociativităţii şi comutativităţii conjuncţiei, avem, pentru orice enunţuri p_1, p_2, p_3: $p_1 \text{ xor } p_2 \text{ xor } p_3 = (p_1 \text{ xor } p_2) \text{ xor } p_3$ e adevărat ddacă $[p_1$, p_2 şi p_3 sunt adevărate sau unul dintre ele e adevărat şi celelalte două sunt false$]$ ddacă [este adevărat unul dintre enunţurile p_1 şi p_2 şi p_3, p_1 şi non p_2 şi non $p_3]$, p_2 şi non p_1 şi non $p_3]$ şi p_3 şi non p_1 şi non $p_2]$ ddacă [este adevărat unul dintre enunţurile p_2 şi p_3 şi p_1, p_2 şi non p_3 şi non $p_1]$, p_3 şi non p_2 şi non $p_1]$ şi p_1 şi non p_2 şi non $p_3]$ ddacă este adevărat enunţul $(p_2 \text{ xor } p_3) \text{ xor } p_1$ ddacă este adevărat enunţul $p_1 \text{ xor } (p_2 \text{ xor } p_3)$, aşadar conectorul logic **xor** este **asociativ**.

Exerciţiul 3. *Fie T o mulţime, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$. Să demonstrăm următoarele:*

- $\overline{A} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{A} \subseteq T$

- $\overline{\emptyset} = T$ şi $\overline{T} = \emptyset$—//—

$\overline{A} = T \setminus A \subseteq T$, $\overline{\emptyset} = T \setminus \emptyset = T$ şi $\overline{T} = T \setminus T = \emptyset$. Am folosit proprietăţi din Exerciţiul 1; vom folosi şi în cele ce urmează proprietăţi demonstrate în acest exerciţiu de mai sus.

Amintesc că, pentru orice proprietate p asupra elementelor lui T, avem:

$$(\forall\, x \in T)\,(p(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(x \in T \Rightarrow p(x)).$$

Cum $A \subseteq T$ şi $B \subseteq T$, avem: $A = A \cap T$ şi $B = B \cap T$. Prin urmare:

$A = B$ ddacă $A \cap T = B \cap T$ ddacă $(\forall\, x)\,(x \in A \cap T \Leftrightarrow x \in B \cap T)$ ddacă $(\forall\, x)\,[x \in T \Rightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$;

$A \subseteq B$ ddacă $A \cap T \subseteq B \cap T$ ddacă $(\forall\, x)\,(x \in A \cap T \Rightarrow x \in B \cap T)$ ddacă $(\forall\, x)\,[x \in T \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)]$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Aşadar, pentru a demonstra următoarele proprietăţi, putem fixa un $x \in T$, arbitrar. Pentru un $x \in T$ avem: $x \in \overline{A} = T \setminus A$ ddacă $[x \in T$ şi $x \notin A]$ ddacă $x \notin A$.

Fie, aşadar, $x \in T$, arbitrar, fixat.

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$—//—

$x \in A \setminus B$ ddacă $[x \in A$ şi $x \notin B]$ ddacă $[x \in A$ şi $x \in \overline{B}]$ ddacă $x \in A \cap \overline{B}$. Aşadar $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

- $\overline{\overline{A}} = A$—//—

$x \in \overline{\overline{A}}$ ddacă $x \notin \overline{A}$ ddacă not$(x \in \overline{A})$ ddacă not$(x \notin A)$ ddacă $x \in A$. Prin urmare $\overline{\overline{A}} = A$.

- **legile lui De Morgan:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{—//—} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{—//—} \end{cases}$

$x \in \overline{A \cup B}$ ddacă $x \notin A \cup B$ ddacă not$(x \in A$ sau $x \in B)$ ddacă $[x \notin A$ şi $x \notin B]$ ddacă $[x \in \overline{A}$ şi $x \in \overline{B}]$ ddacă $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Aşadar $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$x \in \overline{A \cap B}$ ddacă $x \notin A \cap B$ ddacă not$(x \in A$ şi $x \in B)$ ddacă $[x \notin A$ sau $x \notin B]$ ddacă $[x \in \overline{A}$ sau $x \in \overline{B}]$ ddacă $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Aşadar $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$—//—
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$—//—
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$—//—

Dacă $A \subseteq B$, atunci: $x \in \overline{B}$, adică $x \notin B$, implică $x \notin A$, adică $x \in \overline{A}$. Aşadar $A \subseteq B$ implică $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, prin urmare $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ implică $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{\overline{B}}$, adică $A \subseteq B$. Aşadar: $A \subseteq B$ ddacă $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

În consecinţă: $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \subseteq A]$ ddacă $[\overline{B} \subseteq \overline{A}$ şi $\overline{A} \subseteq \overline{B}]$ ddacă $\overline{A} = \overline{B}$.

Prin urmare: $A \subsetneq B$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $A \neq B]$ ddacă $[\overline{B} \subseteq \overline{A}$ şi $\overline{B} \neq \overline{A}]$ ddacă $\overline{B} \subsetneq \overline{A}$.

- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ şi $A \cup \overline{A} = T$—//—

  mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$—//—
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$—//—
- $\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$—//—

$x \in A \cap \overline{A}$ ddacă $[x \in A$ şi $x \in \overline{A}]$ ddacă $[x \in A$ şi $x \notin A]$ ddacă $x \in \emptyset$, întrucât aceste două ultime afirmaţii sunt ambele false. Aşadar $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Prin urmare, conform celei de–a doua legi a lui De Morgan şi autodualităţii complementarei: $A \cup \overline{A} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{A} = \overline{\overline{A} \cap A} = \overline{\emptyset} = T$.

Cele două egalităţi precedente rezultă şi din următoarele echivalenţe.

$A\cap B=\emptyset$ ddacă $A\cap\overline{\overline{B}}=\emptyset$ ddacă $A\setminus\overline{B}=\emptyset$ ddacă $A\subseteq\overline{B}$, prin urmare: $A\cap B=\emptyset$ ddacă $B\cap A=\emptyset$ ddacă $B\subseteq\overline{A}$.

În consecinţă: $A\cup B=T$ ddacă $\overline{A\cup B}=\overline{T}$ ddacă $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset$ ddacă $\overline{A}\subseteq\overline{\overline{B}}$ ddacă $\overline{A}\subseteq B$, prin urmare: $A\cup B=T$ ddacă $B\cup A=T$ ddacă $\overline{B}\subseteq A$.

Aşadar: $\begin{cases} A\cup B=T \\ \text{şi} \\ A\cap B=\emptyset \end{cases}$ ddacă $[A\subseteq\overline{B}$ şi $\overline{B}\subseteq A]$ ddacă $A=\overline{B}$ ddacă $\overline{A}=\overline{\overline{B}}$ ddacă $B=\overline{A}$. Pentru ultima echivalenţă puteam folosi şi comutativitatea reuniunii şi a intersecţiei, ca mai sus.

- $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$—//—

Cu scrierea de mai sus pentru diferenţă ca fiind intersecţia cu complementara, a doua lege a lui De Morgan, distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune şi din nou această scriere a diferenţei de mulţimi:

$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})=\emptyset\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup\emptyset=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B$.

Exerciţiul 4. *Fie a, b, c, d proprietăţi ale substanţelor (putem restrânge cadrul la substanţele din eprubetele dintr–un laborator, de exemplu), astfel încât:*

① *dacă o substanţă are proprietăţile a şi b, atunci acea substanţă are exact una dintre proprietăţile c şi d;*

② *dacă o substanţă are proprietăţile b şi c, atunci acea substanţă are:* $\begin{cases} \textit{fie ambele proprietăţi } a \textit{ şi } d, \\ \textit{fie niciuna dintre proprietăţile } a \textit{ şi } d; \end{cases}$

③ *dacă o substanţă nu are niciuna dintre proprietăţile a şi b, atunci acea substanţă nu are niciuna dintre proprietăţile c şi d.*

Să se demonstreze, prin calcul cu mulţimi, că:

(I) *dacă o substanţă nu are niciuna dintre proprietăţile a şi b, atunci acea substanţă nu are proprietatea c;*

(II) *nu există substanţă care să aibă proprietăţile a, b şi c.*

Rezolvare: Să notăm cu: $T:=$ mulţimea tuturor substanţelor;

$A:=$ mulţimea substanţelor care au proprietatea a;

$B:=$ mulţimea substanţelor care au proprietatea b;

$C:=$ mulţimea substanţelor care au proprietatea c;

$D:=$ mulţimea substanţelor care au proprietatea d.

De asemenea, pentru orice $X\subseteq T$, să notăm cu $\overline{X}:=T\setminus X$.

Atunci, de exemplu, mulţimea substanţelor care nu au proprietatea a este $\overline{A}$.

Să transcriem condiţiile ①, ② şi ③ în proprietăţi ale mulţimilor A, B, C, D:

Condiţia ① spune că (a şi b)⇒(c xor d), pentru că substanţele care au exact una dintre proprietăţile c şi d sunt cele care: $\begin{cases} \text{au proprietatea } c \text{ şi nu au proprietatea } d, \\ \text{sau} \\ \text{au proprietatea } d \text{ şi nu au proprietatea } c, \end{cases}$ adică substanţele cu proprietatea (c xor d). Aşadar:

① $\Longleftrightarrow A\cap B\subseteq(C\setminus D)\cup(D\setminus C)=C\Delta D$.

Condiţia ② spune că (b şi c)⇒[(a şi d) sau (non a şi non d)]. A se observa că proprietatea din dreapta acestei implicaţii este echivalentă cu non(a xor d); de asemenea, putem observa că această proprietate este echivalentă cu [(a şi d) xor (non a şi non d)], întrucât proprietăţile (a şi d) şi (non a şi non d) nu pot fi simultan adevărate. Aşadar:

② $\Longleftrightarrow B\cap C\subseteq(A\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{D})\quad(=\overline{A\Delta D})$.

Condiţia ③ spune că (non a şi non b)⇒(non c şi non d). Aşadar:

③ $\Longleftrightarrow \overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{C}\cap\overline{D}$.

Acum să transcriem ce avem de demonstrat în proprietăţi ale mulţimilor A, B, C, D:

(I) $\Longleftrightarrow \overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{C}$—//—

(II) $\Longleftrightarrow A\cap B\cap C=\emptyset$—//—

Să demonstrăm aceste proprietăţi.

(I) Conform lui ③, $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{C}\cap\overline{D}\subseteq\overline{C}$, aşadar $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{C}$.

(II) Intersectând cu C în ambii membri ai incluziunii corespunzătoare lui ①, obţinem:

$A\cap B\cap C\subseteq[(C\setminus D)\cup(D\setminus C)]\cap C=[(C\setminus D)\cap C]\cup[(D\setminus C)\cap C]=(C\setminus D)\cup\emptyset=C\setminus D$, întrucât $C\setminus D\subseteq C$.

Intersectând cu A în ambii membri ai incluziunii corespunzătoare lui lui ②, obţinem:

$A\cap B\cap C\subseteq A\cap[(A\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{D})]=(A\cap A\cap D)\cup(A\cap\overline{A}\cap\overline{D})=(A\cap D)\cup(\emptyset\cap\overline{D})=(A\cap D)\cup\emptyset=A\cap D$.

Aşadar: $A\cap B\cap C\subseteq C\setminus D$ şi $A\cap B\cap C\subseteq A\cap D$, prin urmare:

$A\cap B\cap C\subseteq(C\setminus D)\cap A\cap D=(C\setminus D)\cap D\cap A=\emptyset\cap A=\emptyset$, aşadar $A\cap B\cap C=\emptyset$.