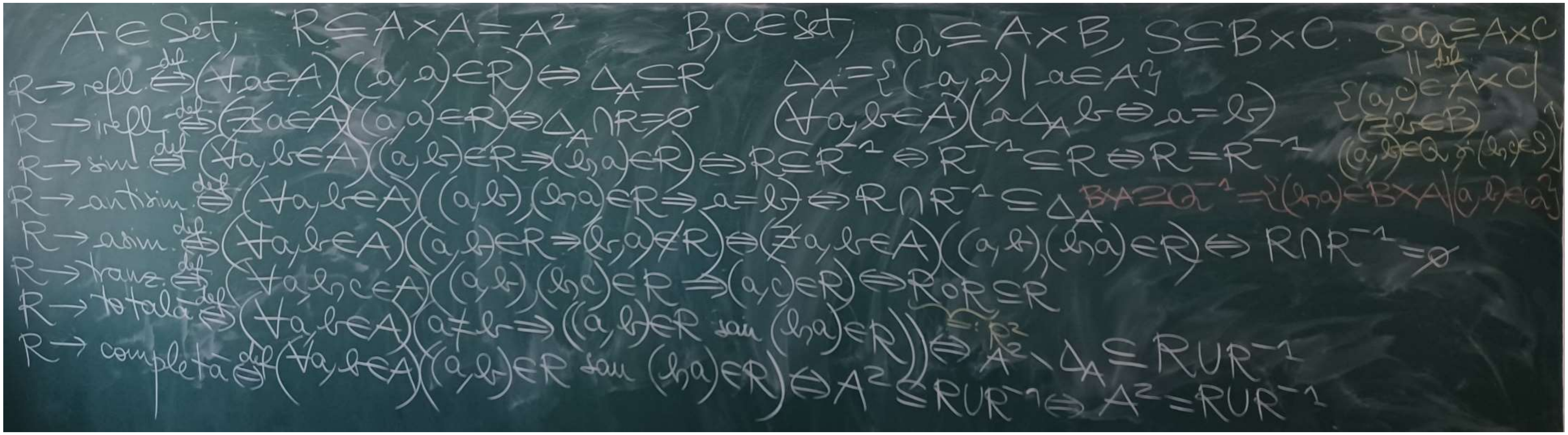
Operaţii cu relaţii binare (între două mulţimi nu neapărat egale) şi tipuri de relaţii binare pe o mulţime



În plus: R e completă ⇔ R e reflexivă şi totală.

R este (relaţie de) preordine $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ R e reflexivă şi tranzitivă

R este (relaţie de) echivalenţă $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ R e preordine simetrică

R este (relaţie de) ordine $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ R e preordine antisimetrică

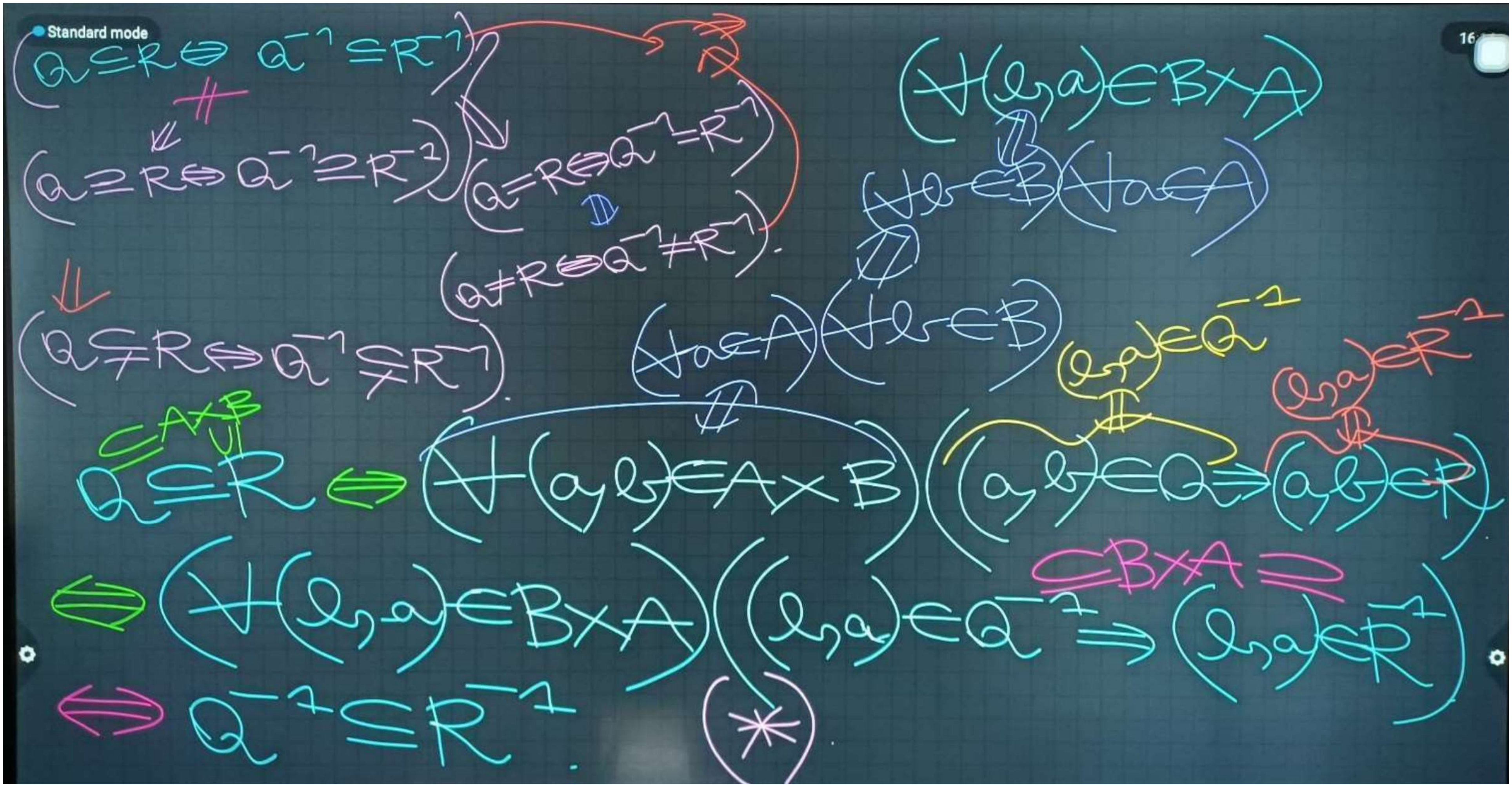
R este (relaţie de) ordine totală $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ R e relaţie de ordine şi relaţie totală (totală în acest sens specific cazului relaţiilor pe o mulţime) $\overset{\text{ordinile sunt reflexive}}{\Leftrightarrow}$ R e relaţie de ordine şi relaţie completă

R este (relaţie de) ordine strictă ⇔ R e asimetrică şi tranzitivă ⇔ R e ireflexivă şi tranzitivă

Dacă $A\neq\Phi$, atunci $\Delta_A\neq\Phi$, aşadar nu există relaţii binare simultan reflexive şi ireflexive pe A (dacă R ar fi reflexivă şi ireflexivă, atunci $\Delta_A\subseteq R$, prin urmare $\Phi\neq\Delta_A=\Delta_A\cap R=\Phi$; contradicţie), aşadar nu există relaţii de ordine care să fie şi relaţii de ordine strictă pe A. (Noţiunile de ordine şi ordine strictă generalizează relaţiile ≤, respectiv < de pe mulţimile ℕ, ℤ, ℚ, ℝ; de aici provin aceste denumiri.)

Detalieri pentru o parte dintre caracterizările acestor tipuri de relaţii binare pe o mulţime

Amintesc că, dacă A şi B sunt mulţimi, atunci prin (a,b)ϵAxB subînţeleg aϵA şi bϵB, când este clar la ce mulţimi mă refer (nu intră altele în discuţie), deci nu sunt în cazuri precum: (a,b)ϵℕxℤxℚ.



Fie $A \in Set$ și $R \subseteq A \times A = A^2$.

$\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A^2$

R – $\underline{\text{refl}} \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall a \in A)((a,a) \in R) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\forall a,b \in A)}_{(\forall a \in A)(\forall b \in A)}(\overset{\Leftrightarrow (a,b) \in \Delta_A}{a = b} \Rightarrow (a,b) \in R)$

$\Leftrightarrow (\forall (a,b) \in A^2)((a,b) \in \Delta_A \Rightarrow (a,b) \in R)$ $\quad \subseteq A^2 \supseteq$

$\Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$.

$(p \Rightarrow q)$
$\Downarrow$
$(p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q))$

R – $\underline{\text{sim.}} \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall a,b \in A)((a,b) \in R \Rightarrow \underbrace{(b,a) \in R}_{(a,b) \in R^{-1}})$

$\Leftrightarrow (\forall (a,b) \in A^2)((a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}) \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow$

$(*)$ $\Leftrightarrow R^{-1} \subseteq \underbrace{(R^{-1})^{-1}}_{=R} \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R = R^{-1}$

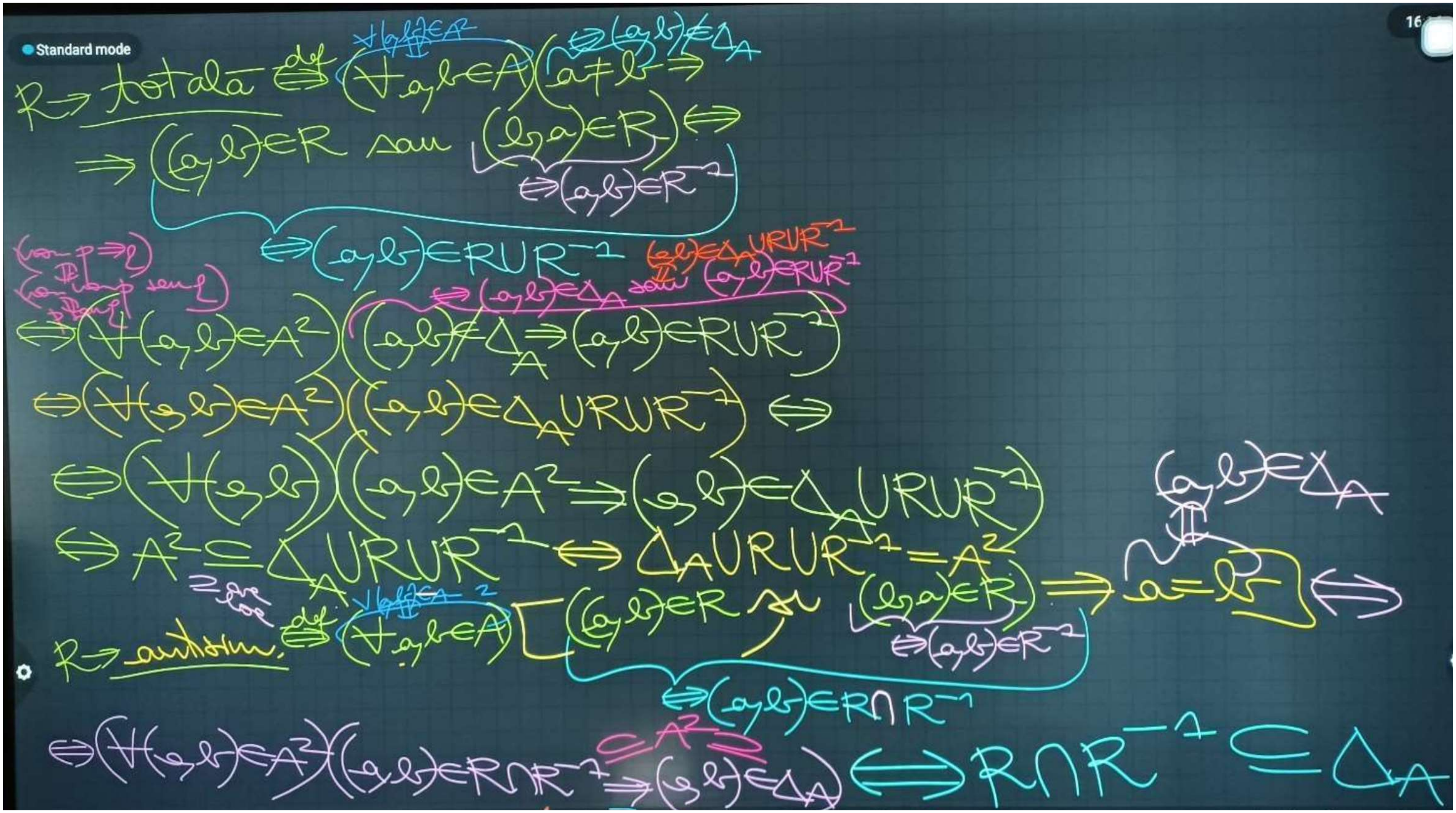
R – $\underline{\text{tranz.}} \overset{def}{\Leftrightarrow} \overset{\Leftrightarrow (\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall c \in A)}{(\forall a,b,c \in A)}((a,b),(b,c) \in R \Rightarrow$
$\Rightarrow (a,c) \in R) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

$\underbrace{R \circ R} = \{(a,c) \in A^2 \mid (\exists b \in A)((a,b),(b,c) \in R)\}$

"$\Rightarrow$": Fie $(a,c) \in R \circ R \Leftrightarrow a,c \in A$ și
$(\exists b \in A)((a,b),(b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$
$\Rightarrow R \circ R \subseteq R$.

"$\Leftarrow$": Fie $a,b,c \in A$ a.î. $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow$
$\Rightarrow (a,c) \in R \circ R \subseteq R \Rightarrow (a,c) \in R$



Amintesc bijecţia dintre mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A şi mulţimea partiţiilor pe A:

$(a,b)\in \bigcup_{i\in I} A_i^2 \Leftrightarrow (\exists i\in I)((a,b)\in A_i^2) \Leftrightarrow (\exists i\in I)(a,b\in A_i)$

$$\sim\; = \{(a,b)\in A^2 \mid (\exists i\in I)(a,b\in A_i)\} = \bigcup_{i\in I} A_i^2$$

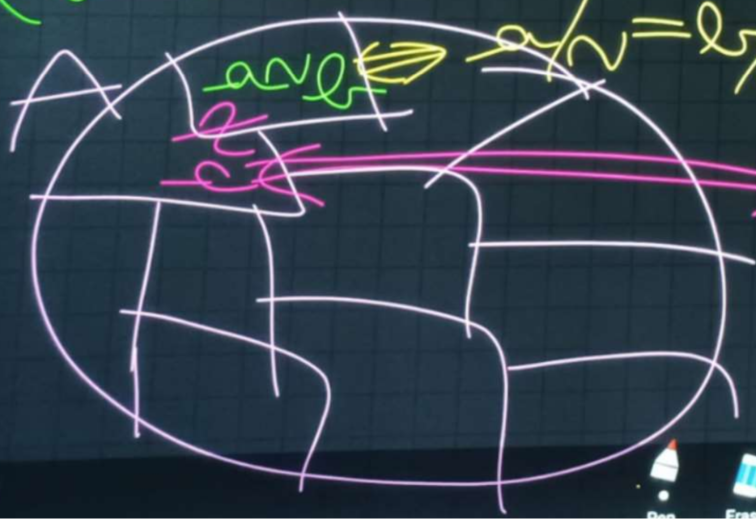
$$\mathrm{Eq}(A) \xrightarrow{\;\sim\;} \mathrm{Part}(A) = \{(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \mid (\forall i\in I)(A_i\neq\emptyset),\ (\forall i,j\in I)(i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset),\ \bigcup_{i\in I}A_i = A\}.$$

$$(A_i)_{i\in I} \longmapsto \sim$$

$$\mathrm{Eq}(A) = \{\sim\,\in\mathcal{P}(A^2) \mid \Delta_A\subseteq\,\sim,\ \sim\,=\,\sim^{-1},\ \sim\circ\sim\,\subseteq\,\sim\}$$

$$\sim\ \longmapsto A/\!\sim\ = \{a/\!\sim \mid a\in A\}$$

$$a/\!\sim\ = \{b\in A \mid a\sim b\}$$



$$a\sim b \Leftrightarrow a/\!\sim\ = b/\!\sim$$

$$a/\!\sim\ \neq c/\!\sim\ \Leftrightarrow a/\!\sim\ \cap\ c/\!\sim\ = \emptyset$$

Rectangular Snip

Pen Eraser Shape Bg Undo Redo Select Multi Clear Switch