Logică Matematică şi Computaţională – Subiecte de Examen

Claudia MUREŞAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

februarie–septembrie 2023

1 Regulile de desfăşurare a examenului

Timp de lucru: 3 ore (15 minute pentru citirea subiectelor şi câte 55 de minute pentru rezolvarea fiecărui exerciţiu).

Materiale permise: orice material tipărit sau scris de mână.

Este interzisă folosirea dispozitivelor electronice.

Este interzisă părăsirea sălii de examen timp de o oră şi jumătate din momentul primirii subiectelor.

Punctaj (maxim **11,5 puncte**; nota: $\min\{10, \text{punctaj}\}$; observaţi că **nota 10** poate fi obţinută, în cazul unui punctaj maxim pentru temele colective, cu două *cerinţe reduse* de programare în Prolog, pentru **jumătate de punctaj**, dacă rezolvările sunt aproape perfecte):

- **1 punct** din oficiu;
- **3 puncte** pentru temele colective;
- fiecare dintre cele două cerinţe *numerotate* ale fiecărui exerciţiu: **1,25 puncte**.

Pentru cerinţele de programare în Prolog se poate folosi orice predicat predefinit, precum şi orice predicat scris la laborator sau într–o temă colectivă, utilizând directiva pentru includerea bazelor de cunoştinţe $labNrlmcVer.pl$ şi *temeleNr.pl* în cea curentă, cu condiţia respectării **denumirilor predicatelor** din fişierele .pl de la laborator şi din enunţurile temelor colective. Toate celelalte predicate auxiliare necesare pentru a defini predicatele cerute trebuie scrise pe lucrarea de examen.

2 Exam rules

Time for completing the exam paper: 3 hours (15 minutes for reading the subjects and 55 minutes for solving each exercise).

Allowed materials: any printed or handwritten material.

Using electronic devices is strictly forbidden.

Leaving the exam hall within an hour and a half from the moment of receiving the subjects list is strictly forbidden.

Score (maximum **11.5 points**; grade: $\min\{10, \text{score}\}$; notice that the maximum grade 10 can be obtained with two *reduced* Prolog programming *requirements*, for **half of the score**, provided the highest score for the collective assignments has been obtained and the solutions on the exam paper are nearly perfect):

- **1 point** ex officio;
- **3 point** for the collective assignments;
- each of the two *numbered* requirements of each exercise: **1.25 points**.

For the Prolog programming requirements, any predefined predicate, as well as any predicate written in any lab lesson or collective assignment can be used, using the directive for including the knowledge bases $labNrlmcVer.pl$ and *temeleNr.pl* into the current one, provided the **names of the auxiliary predicates** are written exactly as in the .pl files from the lab classes and the enunciations of the colective assignments. All the other auxiliary predicates necessary for defining the required predicates must be written in the exam paper.

3 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1. Să se determine toate funcţiile strict crescătoare $f : \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_2^3$ de la lanţul cu exact 4 elemente la cub şi să se arate că toate aceste funcţii sunt morfisme de latici mărginite:

① matematic;

② prin predicate în Prolog (**indicaţie:** cu primul predicat veţi colecta funcţiile strict crescătoare $f : \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_2^3$; pentru al doilea predicat cerut, aveţi de demonstrat că fiecare element al listei de funcţii returnate de primul predicat este morfism de latici mărginite):

- un predicat unar $fctL4laL2xL2xL2(-ListaFctStrCresc)$, care determină în argumentul său $ListaFctStrCresc$ lista funcţiilor strict crescătoare de la $\mathcal{L}_4$ la $\mathcal{L}_2^3$;
- un predicat zeroar $toatemorflatmarg$ care întoarce $true$ ddacă toate funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL4laL2xL2xL2$ sunt morfisme de latici mărginite de la $\mathcal{L}_4$ la $\mathcal{L}_2^3$.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL4laL2xL2xL2$ să fie utilizabile pentru oricare două poseturi finite, iar $fctL4laL2xL2xL2$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lanţul cu 4 elemente şi cub.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $toatemorflatmarg$ să fie utilizabile pentru oricare două latici finite şi orice listă de funcţii între aceste două latici finite, iar $toatemorflatmarg$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{L}_2^3$ şi lista de funcţii returnată de predicatul $fctL4laL2xL2xL2$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctL4laL2xL2xL2$ definit ca mai sus.

Exerciţiul 2. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \varphi \in E$, astfel încât:

$$\varphi = (\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg \beta).$$

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- daca $\alpha, \beta \in V$, atunci enunţul φ e satisfiabil;
- dacă $\vdash \varphi$, atunci mulţimea $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă:

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- $propr1$, care întoarce $true$ ddacă, în cazul în care $\alpha, \beta \in V$, rezultă că enunţul φ e satisfiabil, efectuând o demonstraţie semantică pentru faptul că există o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \varphi$ în ipoteza că $\alpha, \beta \in V$;
- $propr2$, care întoarce $true$ ddacă mulţimea $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă atunci când φ e teoremă formală, efectuând o demonstraţie semantică pentru faptul că, dacă $\vdash \varphi$, atunci nu există nicio interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \{\alpha, \beta\}$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare $propr1$ şi $propr2$, la alegere.

Exerciţiul 3. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2; 0)$, simbolul de operaţie unară f, simbolul de relaţie binară R şi simbolul de constantă k, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| = 4$ şi o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, k^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \to A$, $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ şi $k^{\mathcal{A}} \in A$ definite astfel:

- $f^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ este relaţia funcţională totală a cărei închidere reflexivă coincide cu închiderea reflexivă a relaţiei de succesiune a mulţimii total ordonate $(A, \leq)$ având $\min(A, \leq) = a$, $\max(A, \leq) = d$ şi $b < c$ (unde $<$ este relaţia de ordine strictă asociată relaţiei de ordine $\leq$);

- $R^{\mathcal{A}}$ este relaţia de ordine strictă a posetului $(A, \sqsubseteq)$ izomorf cu rombul $\mathcal{L}_2^2$ având $\min(A, \sqsubseteq) = a$ şi $\max(A, \sqsubseteq) = d$;
- $k^{\mathcal{A}} \in \{b, c, d\}$ şi are proprietatea că există $p \in A$ astfel încât $(k^{\mathcal{A}}, p) \in f^{\mathcal{A}} \cap R^{\mathcal{A}}$.

Considerăm două variabile distincte $x, y \in Var$ şi enunţul:

$$\varepsilon = \forall\, x\, \forall\, y\, [(f(x){=}k \wedge f(k){=}y \wedge R(k, y)) \rightarrow R(x, y)].$$

Să se determine funcţia $f^{\mathcal{A}}$, relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ şi constanta $k^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

- un predicat unar $detf(-Fctf)$, care întoarce în argumentul său $Fctf$ funcţia de la A la A care, ca relaţie binară pe A, are aceeaşi închidere reflexivă ca şi relaţia de succesiune asociată ordinii totale $\leq$ pe A cu proprietăţile: $\min(A, \leq) = a$, $\max(A, \leq) = d$ şi $b < c$;
- un predicat unar $detR(-RelR)$, care întoarce în argumentul său $RelR$ relaţia de ordine strictă asociată ordinii $\sqsubseteq$ pe A cu proprietăţile: $(A, \sqsubseteq) \cong \mathcal{L}_2^2$, $\min(A, \sqsubseteq) = a$ şi $\max(A, \sqsubseteq) = d$;
- un predicat unar $detk(-Ctk)$, care întoarce în argumentul său Ctk elementul lui $A \setminus \{a\}$ cu proprietatea că relaţia binară $RelR$ returnată de predicatul $detR$ conţine perechea formată din elementul Ctk şi imaginea lui Ctk prin funcţia $Fctf$ returnată de predicatul $detf$;
- un predicat zeroar $verifAsatepsilon$, care întoarce $true$ dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ şi $false$ dacă $\mathcal{A} \nvDash \varepsilon$, efectuând o demonstraţie semantică, prin testarea perechilor de valori din mulţimea A pentru variabilele x, y într–o interpretare arbitrară (**indicaţie:** atenţie la reprezentarea unei funcţii ca relaţie binară (funcţională totală), deci ca listă de perechi, care poate fi furnizată unui predicat unar într–o singură clauză, versus reprezentarea ei prin atâtea clauze pentru un predicat binar câte elemente are domeniul acelei funcţii; a doua reprezentare e suficientă pentru cerinţa redusă de mai jos, dar predicatele pentru generare şi colectare de funcţii scrise la laborator folosesc prima dintre aceste reprezentări).

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar $verifAsatepsilon$, introducând direct operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$, relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ şi constanta $k^{\mathcal{A}}$ în baza de cunoştinţe.

Pentru **punctajul complet**, predicatele auxiliare pentru predicatele $detf$ şi $detR$ să fie utilizabile pentru orice poset finit în locul lui $(A, \leq)$, respectiv $(A, \sqsubseteq)$, cele pentru predicatul $detk$ să fie utilizabile pentru orice mulţme finită în locul lui A, orice element al acelei mulţimi (în locul lui $a \in A$) care va fi scos din A pentru a obţine mulţimea (în locul lui $\{b, c, d\}$) în care va fi căutat elementul Ctk, orice funcţie de la A la A şi orice relaţie binară pe A, iar $detf$, $detR$ şi $detk$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru poseturile de mai sus, respectiv pentru mulţimea A, elementul $a \in A$, funcţia returnată de predicatul $detf$ şi relaţia binară returnată de predicatul $detR$.

4 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 4. Să se determine toate morfismele de latici mărginite $f : \mathcal{L}_2^3 \rightarrow \mathcal{L}_3$ de la cub la lanţul cu exact 3 şi să se arate că niciuna dintre aceste funcţii nu este surjectivă:

① matematic;

② prin predicate în Prolog (**indicaţie:** cu primul predicat veţi colecta morfismele de latici mărginite $f : \mathcal{L}_2^3 \rightarrow \mathcal{L}_3$; pentru al doilea predicat cerut, aveţi de demonstrat că fiecare element al listei de funcţii returnate de primul predicat este nesurjectiv):

- un predicat unar $fctL2xL2xL2laL3(-ListaMorfLatMarg)$, care determină în argumentul său $ListaMorfLatMarg$ lista morfismelor de latici mărginite de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_3$;
- un predicat zeroar $niciunasurj$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ nu este surjectivă.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ să fie utilizabile pentru oricare două latici finite, iar $fctL2xL2xL2laL3$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru cub şi lanţul cu 3 elemente.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $niciunasurj$ să fie utilizabile pentru orice listă de funcţii cu acelaşi codomeniu, iar $niciunasurj$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lista de funcţii returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctL2xL2xL2laL3$ definit ca mai sus.

Exerciţiul 5. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \varphi \in E$, astfel încât $\varphi = [(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$.

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- dacă $\alpha, \beta \in V$, atunci enunţul φ e satisfiabil;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă, atunci enunţul φ e nesatisfiabil.

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- $propr1$, care întoarce $true$ ddacă, atunci când $\alpha, \beta \in V$, există o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ care satisface enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie;
- $propr2$, care întoarce $true$ ddacă, atunci când nicio interpretare nu satisface mulţimea $\{\alpha, \beta\}$, nu există interpretări care să satisfacă enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare $propr1$ şi $propr2$, la alegere.

Exerciţiul 6. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2; 0)$, simbolul de operaţie unară f, simbolul de relaţie binară R şi simbolul de constantă k, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| = 4$ şi o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, k^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$, $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ şi $k^{\mathcal{A}} \in A$ definite astfel:

- $f^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ este închiderea simetrică a relaţiei de succesiune a posetului $(A, \leq)$ având elementele minimale a şi b, elementele maximale c şi d, a incomparabil cu d, iar b incomparabil cu c;
- $R^{\mathcal{A}}$ este relaţia de echivalenţă pe A generată de relaţia binară $f^{\mathcal{A}}$;
- $k^{\mathcal{A}} \in \{b, c, d\} \cap a/R^{\mathcal{A}}$.

Considerăm două variabile distincte $x, y \in Var$ şi enunţul:

$$\varepsilon = \forall\, x \,\forall\, y\, [(f(x){=}k \wedge R(k, y)) \rightarrow R(x, y)].$$

Să se determine funcţia $f^{\mathcal{A}}$, relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ şi constanta $k^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

- un predicat unar $detf(-Fctf)$, care întoarce în argumentul său $Fctf$ funcţia de la A la A care, ca relaţie binară pe A, este egală cu închiderea simetrică a relaţiei de succesiune a posetului $(A, \leq)$ având $\mathrm{Min}(A, \leq) = \{a, b\}$, $\mathrm{Max}(A, \leq) = \{c, d\}$, $a||d$ şi $b||c$;
- un predicat unar $detR(-RelR)$, care întoarce în argumentul său $RelR$ cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include relaţia funcţională totală $Fctf$ returnată de predicatul $detf$;
- un predicat unar $detk(-Ctk)$, care întoarce în argumentul său Ctk elementul diferit de a din clasa de echivalenţă a lui a în relaţia de echivalenţă $RelR$ returnată de predicatul $detR$;
- un predicat zeroar $verifAsatepsilon$, care întoarce $true$ dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ şi $false$ dacă $\mathcal{A} \nvDash \varepsilon$, efectuând o demonstraţie semantică, prin testarea perechilor de valori din mulţimea A pentru variabilele x, y într–o interpretare arbitrară (**indicaţie:** atenţie la reprezentarea unei funcţii ca relaţie binară (funcţională totală), deci ca listă de perechi, care poate fi furnizată unui predicat unar într–o singură clauză, versus reprezentarea ei prin atâtea clauze pentru un predicat binar câte elemente are domeniul acelei funcţii; a doua reprezentare e suficientă pentru cerinţa redusă de mai jos, dar predicatele pentru generare şi colectare de funcţii scrise la laborator folosesc prima dintre aceste reprezentări).

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar $verifAsatepsilon$, introducând direct operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$, relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ şi constanta $k^{\mathcal{A}}$ în baza de cunoştinţe.

Pentru **punctajul complet**, predicatele auxiliare pentru predicatele $detf$, respectiv $detR$, respectiv $detk$ să fie utilizabile pentru orice poset finit, respectiv orice relaţie binară pe o mulţime finită, respectiv orice relaţie de echivalenţă pe o mulţime finită şi orice element al acelei mulţimi finite, iar $detf$, $detR$, $detk$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru posetul $(A, \leq)$ de mai sus, respectiv relaţia binară funcţională totală pe mulţimea A returnată de predicatul $detf$, respectiv relaţia de echivalenţă pe mulţimea A returnată de predicatul $detR$ şi elementul $a \in A$.

5 Lista 3 de subiecte

Exerciţiul 7. Să se determine toate funcţiile strict descrescătoare $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_3$ de la romb la lanţul cu 3 elemente şi să se arate că toate aceste funcţii sunt surjective:

① matematic;

② prin predicate în Prolog (**indicaţie:** cu primul predicat veţi colecta funcţiile strict descrescătoare $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_3$; pentru al doilea predicat cerut, aveţi de demonstrat că fiecare element al listei de funcţii returnate de primul predicat satisface proprietatea de surjectivitate):

- un predicat unar $fctL2xL2laL3(-ListaFctStrDescresc)$, care determină în argumentul său $ListaFctStrDescresc$ lista funcţiilor strict descrescătoare de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_3$;
- un predicat zeroar $toatesurj$ care întoarce $true$ ddacă toate funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL2laL3$ sunt surjective.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL2xL2laL3$ să fie utilizabile pentru oricare două poseturi finite, iar $fctL2xL2laL3$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru romb şi lanţul cu 3 elemente.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $toatesurj$ să fie utilizabile pentru orice listă de funcţii având acelaşi codomeniu finit, iar $toatesurj$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lista de funcţii returnată de predicatul $fctL2xL2laL3$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctL2xL2laL3$ definit ca mai sus.

Exerciţiul 8. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi \in E$, astfel încât:

$$\varphi = (\alpha \to \beta) \leftrightarrow \gamma \quad \text{şi} \quad \psi = \gamma \to (\alpha \wedge \neg \beta).$$

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- nicio interpretare care satisface mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ nu satisface enunţul γ;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ e satisfiabilă, atunci enunţul γ nu e teoremă formală.

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

  - *propr*1, care întoarce *true* ddacă orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface implicaţia $h \vDash \{\varphi, \psi\} \Rightarrow h \nvDash \gamma$, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie pentru orice interpretare h, mai precis pentru fiecare triplet de valori de adevăr pentru enunţurile α, β, γ într–o interpretare h;
  - *propr*2, care întoarce *true* ddacă satisfiabilitatea mulţimii de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ implică $\nvdash \gamma$, folosind predicate auxiliare care testează satisfiabiliatea mulţimii de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ şi dacă enunţul γ e teoremă formală, prin testarea tuturor tripletelor de valori de adevăr pentru enunţurile α, β, γ într–o interpretare.

  Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare *propr*1 şi *propr*2, la alegere.

Exerciţiul 9. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2, 2; \emptyset)$, simbolul de operaţie unară f şi simbolurile de relaţii binare Q, R, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| = 4$ şi o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \to A$, $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ şi $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ definite astfel:

- $Q^{\mathcal{A}}$ este relaţia de succesiune a lanţului $(A, \leq)$ având $\min(A, \leq) = a$, $\max(A, \leq) = d$ şi $b < c$;
- $R^{\mathcal{A}} = (Q^{\mathcal{A}})^{-1}$;
- ca relaţie binară pe A, $f^{\mathcal{A}} \supseteq Q^{\mathcal{A}}$ şi $f^{\mathcal{A}} \cap R^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$.

Considerăm două variabile distincte $x, y \in Var$ şi enunţul:

$$\varepsilon = \exists\, x\, \exists\, y\, [(f(x){=}f(y)) \to (Q(x, y) \vee R(x, y))].$$

Să se determine funcţia $f^{\mathcal{A}}$ şi relaţiile binare $Q^{\mathcal{A}}$ şi $R^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

  - un predicat unar *detQ*(−*RelQ*), care întoarce în argumentul său *RelQ* relaţia de succesiune asociată ordinii totale $\leq$ pe A cu proprietăţile: $\min(A, \leq) = a$, $\max(A, \leq) = d$ şi $b < c$;
  - un predicat unar *detR*(−*RelR*), care întoarce în argumentul său *RelR* inversa relaţiei binare returnate de predicatul unar *detQ*;
  - un predicat unar *detf*(−*Fctf*), care întoarce în argumentul său *Fctf* relaţia binară funcţională totală pe A care include relaţia binară returnată de predicatul unar *detQ* şi nu este disjunctă de relaţia binară returnată de predicatul unar *detR*;
  - un predicat zeroar *verifAsatepsilon*, care întoarce *true* ddacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ printr–o demonstraţie semantică, testând perechile de valori din A pentru variabilele x, y într–o interpretare arbitrară (**indicaţie:** atenţie la reprezentarea unei funcţii ca relaţie binară (funcţională totală), deci ca listă de perechi, care poate fi furnizată unui predicat unar într–o singură clauză, versus reprezentarea ei prin atâtea clauze pentru un predicat binar câte elemente are domeniul acelei funcţii; a doua reprezentare e suficientă pentru cerinţa redusă de mai jos, dar predicatele pentru generare şi colectare de funcţii scrise la laborator folosesc prima dintre aceste reprezentări).

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar $verifAsatepsilon$, introducând direct operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$ şi relaţiile binare $Q^{\mathcal{A}}$ şi $R^{\mathcal{A}}$ în baza de cunoştinţe.

Pentru **punctajul complet**, predicatele auxiliare pentru predicatele $detQ$, $detR$ şi $detf$ să fie utilizabile pentru orice mulţime finită în locul lui A şi orice relaţie de ordine totală pe acea mulţime finită, iar $detQ$, $detR$ şi $detf$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru mulţimea A şi ordinea totală $\leq$ de mai sus.

6 Lista 4 de subiecte

Exerciţiul 10. Să se determine toate morfismele injective de poseturi $f : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{N}_5$ de la diamant la pentagon şi să se arate că:

- niciuna dintre aceste funcţii nu este morfism de latici de la $\mathcal{M}_3$ la $\mathcal{N}_5$,
- pentru fiecare dintre aceste funcţii $f : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{N}_5$ şi fiecare sublatice mărginită proprie (i.e. strict inclusă în $\mathcal{M}_3$) S a lui $\mathcal{M}_3$ a cărei imagine prin f nu este lanţ (ca subposet al lui $\mathcal{N}_5$), restricţia $f\,|_S \colon S \to \mathcal{N}_5$ a lui f la S este morfism de latici mărginite,

① matematic;

② prin predicate în Prolog (**indicaţie:** cu primul predicat veţi colecta funcţiile crescătoare injective $f : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{N}_5$; pentru celelalte predicate, aveţi de demonstrat că fiecare element al listei de funcţii returnate de primul predicat satisface fiecare dintre criteriile corespunzătoare acelor proprietăţi; pentru al treilea predicat aveţi de determinat şi submulţimile S ale diamantului închise la operaţiile de latice mărginită care conţin măcar două elemente $x, y \in S$ cu $f(x)$ şi $f(y)$ incomparabile în pentagon, şi de verificat faptul că f păstrează operaţiile de latice mărginită pe S):

- un predicat unar $fctM3laN5(-ListaFctCrescInj)$, care determină în argumentul său $ListaFctCrescInj$ lista funcţiilor crescătoare injective de la $\mathcal{M}_3$ la $\mathcal{N}_5$;
- un predicat zeroar $niciunamorflat$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcţiile din lista returnată de predicatul $fctM3laN5$ nu e morfism de latici de la $\mathcal{M}_3$ la $\mathcal{N}_5$;
- un predicat zeroar $restrmorflat$ care întoarce $true$ ddacă fiecare funcţie din lista returnată de predicatul $fctM3laN5$ păstrează operaţiile de latice mărginită pe fiecare sublatice mărginită proprie a diamantului a cărei imagine prin acea funcţie nu e total ordonată ca subposet al pentagonului.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctM3laN5$ definit ca mai sus.

Exerciţiul 11. Fie E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$ şi $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$. Să se demonstreze că au loc următoarele reguli de deducţie în logica propoziţională clasică:

- $\dfrac{\Sigma \cap \Delta \vdash \alpha \to (\beta \wedge \gamma),\ \Sigma \vdash (\beta \vee \delta) \to (\alpha \wedge \gamma),\ \Delta \vdash (\alpha \vee \delta) \leftrightarrow (\beta \vee \gamma)}{\Sigma \cup \Delta \vdash (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \vee (\neg\,\alpha \wedge \neg\,\beta \wedge \neg\,\gamma)}$,
- $\dfrac{\{\alpha, \beta\} \vdash \gamma \leftrightarrow \delta,\ \{\gamma, \delta\} \vdash \alpha \to \neg\,\beta}{\{\alpha, \beta\} \vdash \neg\,\gamma \wedge \neg\,\delta}$,

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- $regula1$, care întoarce $true$ ddacă are loc prima dintre cele două reguli de deducţie de mai sus;
- $regula2$, care întoarce $true$ ddacă are loc a doua dintre cele două reguli de deducţie de mai sus.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar $regula1$.

Exerciţiul 12. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2; \emptyset)$, simbolul de operaţie unară f şi simbolul de relaţie binară R, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| = 4$, relaţia binară $Q = \{(a, b), (c, d)\}$ pe A şi o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ şi $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ având proprietăţile:

- relaţia binară funcţională totală $f^{\mathcal{A}}$ de la A la A coincide cu închiderea simetrică a lui Q;
- $R^{\mathcal{A}}$ este relaţia de ordine pe A având pe Q drept relaţie de succesiune asociată.

Considerăm două variabile distincte $x, y \in Var$ şi enunţul:

$$\varepsilon = \exists\, x\, \forall\, y\, [R(f(x), f(y)) \to (R(y, x) \vee \neg\, R(x, y))].$$

Să se determine funcţia $f^{\mathcal{A}}$ şi relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

- un predicat unar $detopunara(-Fct)$, care întoarce în argumentul său Fct relaţia binară funcţională totală pe A egală cu închiderea simetrică a lui Q;
- un predicat unar $detrelbin(-Rel)$, care întoarce în argumentul său Rel relaţia de ordine pe A asociată relaţiei de succesiune Q;
- un predicat zeroar $verifAsatepsilon$, care întoarce $true$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ (**indicaţie:** atenţie la reprezentarea unei funcţii ca relaţie binară (funcţională totală), deci ca listă de perechi, care poate fi furnizată unui predicat unar într–o singură clauză, versus reprezentarea ei prin atâtea clauze pentru un predicat binar câte elemente are domeniul acelei funcţii; a doua reprezentare e suficientă pentru cerinţa redusă de mai jos, dar predicatele pentru generare şi colectare de funcţii scrise la laborator folosesc prima dintre aceste reprezentări).

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar $verifAsatepsilon$, introducând direct operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$ şi relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ în baza de cunoştinţe.

7 Lista 5 de subiecte

Exerciţiul 13. Să se determine toate funcţiile strict crescătoare $f : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{L}_2^2$ de la diamant la romb şi să se arate că:

- toate aceste funcţii sunt surjective,
- toate aceste funcţii $f : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{L}_2^2$ păstrează relaţia de succesiune, i.e. satisfac proprietatea: $(\forall\, x, y \in \mathcal{M}_3)\ (x \prec y \implies f(x) \prec f(y))$,
- niciuna dintre aceste funcţii nu este morfism de latici de la $\mathcal{M}_3$ la $\mathcal{L}_2^2$,

① matematic;

② prin predicate în Prolog (**indicaţie:** cu primul predicat colectaţi funcţiile strict crescătoare de la diamant la romb; pentru celelalte predicate, aveţi de demonstrat că fiecare element al listei de funcţii returnate de primul predicat satisface fiecare dintre criteriile corespunzătoare acelor proprietăţi):

- un predicat unar $fctM3laL2xL2(-ListaFctStrictCresc)$, care determină în argumentul său $ListaFctStrictCresc$ lista funcţiilor strict crescătoare de la $\mathcal{M}_3$ la $\mathcal{L}_2^2$;

- un predicat zeroar $toatesurj$ care întoarce $true$ ddacă toate funcţiile din lista returnată de predicatul $fctM3laL2xL2$ sunt surjective;
- un predicat zeroar $toateprezsucc$ care întoarce $true$ ddacă toate funcţiile din lista returnată de predicatul $fctM3laL2xL2$ păstrează relaţia de succesiune;
- un predicat zeroar $niciunamorflat$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcţiile din lista returnată de predicatul $fctM3laL2xL2$ nu este morfism de latici de la $\mathcal{M}_3$ la $\mathcal{L}_2^2$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar un predicat unar $morfM3laL2xL2(-ListaMorfPoseturi)$, care determină în argumentul său $ListaMorfPoseturi$ lista morfismelor de poseturi, i.e. a funcţiilor crescătoare, de la $\mathcal{M}_3$ la $\mathcal{L}_2^2$.

Exerciţiul 14. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, $\alpha, \beta, \gamma \in E$, iar $\Sigma = \{\neg\,\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma), \alpha \leftrightarrow (\beta \vee \gamma)\}$. Să se demonstreze că:

- $\Sigma \vdash \alpha$,
- dacă $\alpha, \beta, \gamma \in V$, atunci mulţimea de enunţuri Σ e satisfiabilă,
- dacă $\vdash \neg\,\alpha$, atunci Σ e nesatisfiabilă:

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- $alfadinSigma$, care întoarce $true$ ddacă are loc deducţia sintactică $\Sigma \vdash \alpha$;
- $satisfSigma$, care întoarce $true$ ddacă Σ e satisfiabilă;
- $caznesatSigma$, care întoarce $true$ ddacă, atunci când $\vdash \neg\,\alpha$, mulţimea Σ e nesatisfiabilă.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar $alfadinSigma$.

Exerciţiul 15. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2; 0)$, simbolul de operaţie unară f, simbolul de relaţie binară R şi simbolul de constantă k, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| = 4$, relaţia binară $Q = \{(a, b), (b, c)\}$ pe A şi o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, k^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$, $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ şi $k^{\mathcal{A}} \in A$ având proprietăţile:

- funcţia $f^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ este surjectivă, iar, ca relaţie binară funcţională totală de la A la A, $f^{\mathcal{A}}$ include relaţia de succesiune a lanţului $(A, \leq)$ având $\min(A, \leq) = a$, $\max(A, \leq) = d$ şi $b < c$, unde $<$ este ordinea strictă asociată ordinii totale $\leq$;
- $R^{\mathcal{A}}$ este relaţia de ordine pe A a cărei relaţie de succesiune asociată este Q;
- $k^{\mathcal{A}} \in A$ nu este nici element minimal, nici element maximal în posetul $(A, R^{\mathcal{A}})$.

Considerăm două variabile distincte $x, y \in Var$ şi enunţul $\varepsilon = \forall\, x\, \forall\, y\ [(f(x){=}y \wedge f(y){=}k) \rightarrow R(x, y)]$.
Să se determine funcţia $f^{\mathcal{A}}$, relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ şi constanta $k^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

- un predicat unar $detopunara(-Fct)$, care întoarce în argumentul său Fct operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$ pe A cu proprietăţile de mai sus (**indicaţie:** aveţi de determinat o funcţie surjectivă de la A la A care include relaţia de succesiune a acelui lanţ cu 4 elemente; soluţia, deci valoarea variabilei Fct care satisface acest predicat, este unică);

- un predicat unar $detrelbin(-Rel)$, care întoarce în argumentul său Rel relaţia de ordine pe A având pe Q drept relaţie de succesiune asociată;
- un predicat unar $detct(-Ct)$, care întoarce în argumentul său Ct elementul lui A care nu este nici minimal, nici maximal în posetul $(A, R^{\mathcal{A}})$, unde $R^{\mathcal{A}}$ este relaţia binară returnată de predicatul unar $detrelbin$;
- un predicat zeroar $verifAsatepsilon$, care întoarce $true$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ (**indicaţie:** atenţie la reprezentarea unei funcţii ca relaţie binară (funcţională totală), deci ca listă de perechi, care poate fi furnizată unui predicat unar într–o singură clauză, versus reprezentarea ei prin atâtea clauze pentru un predicat binar câte elemente are domeniul acelei funcţii; a doua reprezentare e suficientă pentru cerinţa redusă de mai jos, dar predicatele pentru generare şi colectare de funcţii scrise la laborator folosesc prima dintre aceste reprezentări).

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar $verifAsatepsilon$, introducând direct operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$, relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ şi constanta $k^{\mathcal{A}}$ în baza de cunoştinţe.

8 Lista 6 de subiecte – ENGLEZĂ

Exercise 1. Determine all functions $f : \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3 \to \mathcal{N}_5$ from the direct product of the two–element chain with the three–element chain to the pentagon which preserve the cover relation, meaning that they satisfy the property:

$$(\forall\, x, y \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3)\ (x \prec y \implies f(x) \prec f(y)),$$

and prove that:

- all these functions preserve the minimum and the maximum for these bounded lattices, meaning they satisfy $f(0) = 0$ and $f(1) = 1$,
- none of these functions is surjective,
- none of these functions is a bounded lattice morphism from $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ to $\mathcal{N}_5$,

① mathematically (**hint:** as you may notice from the Hasse diagrams of these two lattices, these exists a unique function from $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ to $\mathcal{N}_5$ which preserves the cover relation $\prec$);

② with Prolog predicates (**hint:** for the first predicate, you may collect the functions with that property, in a similar manner to the predicate $colectfct$ from the laboratory lessons, using only the cover relations of the two posets; for the other predicates, you have to prove that each element of the functions list returned by the first predicate – which you don't apriori assume to be a singleton – satisfies each of the criteria corresponding to those properties):

- a unary predicate $fctL2xL3laN5(-ListaFctPrezSucc)$, which determines in its argument $ListaFctPrezSucc$ the list of the functions from $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ to $\mathcal{N}_5$ that preserve the cover relation;
- a nullary predicate $toateprez01$ which returns $true$ iff all functions from the list returned by the predicate $fctL2xL3laN5$ preserve the constants 0 and 1;
- a nullary predicate $niciunasurj$ which returns $true$ iff none of the functions from the list returned by the predicate $fctL2xL3laN5$ is surjective;
- a nullary predicate $niciunamorflat$ which returns $true$ iff none of the functions from the list returned by the predicate $fctL2xL3laN5$ is a lattice morphism from $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ to $\mathcal{N}_5$.

For **half of the score** for *this second requirement*, you may write solely a unary predicate $morflatL2xL3laN5(-ListaMorf)$, that determines in its argument $ListaMorf$ the list of the bounded lattice morphisms from $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ to $\mathcal{N}_5$.

Exercise 2. Let V be the set of the propositional variables and E the set of formulas of classical propositional logic, and $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi \in E$, such that:

$$\varphi = \alpha \leftrightarrow [(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\alpha \to \gamma)] \text{ and } \psi = (\beta \leftrightarrow \gamma) \to \alpha.$$

Prove that:

- $\{\varphi\} \vdash \psi$,
- if $\alpha, \beta, \gamma \in V$, pairwise distinct, then $\{\psi\} \nvdash \varphi$,
- if $\vdash \beta$ and $\vdash \gamma$, then $\{\psi\} \vdash \varphi$:

① mathematically;

② with the nullary Prolog predicates:

- *psidinfi*, which returns *true* iff the syntactic deduction $\{\varphi\} \vdash \psi$ holds;
- *finudinpsi*, which returns *true* iff the syntactic deduction $\{\psi\} \vdash \varphi$ does not hold;
- *fidinpsidcteor*, which returns *true* iff, when $\vdash \beta$ and $\vdash \gamma$, the syntactic deduction $\{\psi\} \vdash \varphi$ holds.

For **half of the score** for *this second requirement*, you may write solely the nullary predicate *psidinfi*.

Exercise 3. Let us consider the first order signature $\tau = (1; 2; \emptyset)$, the unary operation symbol f and the binary relation symbol R, a set $A = \{a, b, c, d\}$ having $|A| = 4$, the binary relation $Q = \{(a, b), (c, c)\}$ on A and a first order structure of signature τ $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$ with set reduct A, $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ and $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ with the properties:

- the reflexive closure of the functional total binary relation $f^{\mathcal{A}}$ from A to A coincides with the reflexive closure of Q (**hint:** there exists a unique functional total binary relation $f^{\mathcal{A}}$ from A to A with this property);
- $R^{\mathcal{A}}$ is the equivalence relation on A generated by Q (**hint:** it suffices to write the equivalence classes of $R^{\mathcal{A}}$, then draw its directed graph diagram, you don‘t have to apply the symmetric, reflexive and transitive closures to the binary relation Q one after the other).

Let us consider two distinct variables $x, y \in Var$ and the formula $\varepsilon = \forall\, x\, \exists\, y\, [R(x, f(y)) \to (f(f(x)){=}y)]$. Determine the function $f^{\mathcal{A}}$ and the binary relation $R^{\mathcal{A}}$, then determine whether $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① mathematically;

② with Prolog predicates:

- a unary predicate *detopunara*$(-Fct)$, which returns in its argument Fct the functional total binary relation on A whose reflexive closure coincides to that of Q (**hint:** you have to determine a function from A to A with this property; the solution, so the value of the variable Fct that satisfies this predicate, is unique);
- a unary predicate *detrelbin*$(-Rel)$, which returns in its argument *Rel* the equivalence relation on A generated by Q;
- a nullary predicate *verifAsatepsilon*, which returns *true* iff $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ (**hint:** pay attention to the representation of a function as a (functional total) binary relation, so as a list of pairs, which can be given to a unary predicate in a single clause, versus its representation by as many clauses for a binary predicate as there are elements in the domain of that function; the second representation is sufficient for the following reduced requirement, but the predicates for generation and collection of functions written at the laboratory classes use the first of these representations).

For **half of the score** for *this second requirement*, you may write solely the nullary predicate *verifAsatepsilon*, directly giving the unary operation $f^{\mathcal{A}}$ and the binary relation $R^{\mathcal{A}}$ in the knowledge base.

9 Lista 6 de subiecte – ROMÂNĂ

Exerciţiul 16. Să se determine toate funcţiile $f : \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3 \to \mathcal{N}_5$ de la produsul direct al lanţului cu două elemente cu lanţul cu trei elemente la pentagon care păstrează relaţia de succesiune, i.e. satisfac proprietatea:

$$(\forall\, x, y \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3)\ (x \prec y \implies f(x) \prec f(y)),$$

şi să se arate că:

- toate aceste funcţii păstrează minimul şi maximul pentru aceste latici mărginite, i.e. satisfac $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$,
- niciuna dintre aceste funcţii nu este surjectivă,
- niciuna dintre aceste funcţii nu este morfism de latici de la $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ la $\mathcal{N}_5$,

① matematic (**indicaţie:** după cum observaţi din diagramele Hasse ale acestor două latici, există o unică funcţie de la $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ la $\mathcal{N}_5$ care păstrează relaţia de succesiune $\prec$);

② prin predicate în Prolog (**indicaţie:** la primul predicat, puteţi colecta funcţiile cu acea proprietate, în maniera din predicatul *colectfct* de la laborator, folosind doar relaţiile de succesiune ale celor două poseturi; pentru celelalte predicate, aveţi de demonstrat că fiecare element al listei de funcţii returnate de primul predicat – despre care nu veţi presupune apriori că este un singleton – satisface fiecare dintre criteriile corespunzătoare acelor proprietăţi):

- un predicat unar $fctL2xL3laN5(-ListaFctPrezSucc)$, care determină în argumentul său $ListaFctPrezSucc$ lista funcţiilor de la $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ la $\mathcal{N}_5$ care păstrează relaţia de succesiune;
- un predicat zeroar $toateprez01$ care întoarce $true$ ddacă toate funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL3laN5$ păstrează constantele 0 şi 1;
- un predicat zeroar $niciunasurj$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL3laN5$ nu este surjectivă;
- un predicat zeroar $niciunamorflat$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL3laN5$ nu este morfism de latici de la $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ la $\mathcal{N}_5$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar un predicat unar $morflatL2xL3laN5(-ListaMorf)$, care determină în argumentul său $ListaMorf$ lista morfismelor de latici mărginite de la $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ la $\mathcal{N}_5$.

Exerciţiul 17. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi \in E$, astfel încât:

$$\varphi = \alpha \leftrightarrow [(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\alpha \to \gamma)] \ \text{ şi } \ \psi = (\beta \leftrightarrow \gamma) \to \alpha.$$

Să se demonstreze că:

- $\{\varphi\} \vdash \psi$,
- dacă $\alpha, \beta, \gamma \in V$, două câte două distincte, atunci $\{\psi\} \nvdash \varphi$,
- dacă $\vdash \beta$ şi $\vdash \gamma$, atunci $\{\psi\} \vdash \varphi$:

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- *psidinfi*, care întoarce *true* ddacă are loc deducţia sintactică $\{\varphi\} \vdash \psi$;
- *finudinpsi*, care întoarce *true* ddacă nu are loc deducţia sintactică $\{\psi\} \vdash \varphi$;
- *fidinpsidcteor*, care întoarce *true* ddacă, atunci când $\vdash \beta$ şi $\vdash \gamma$, are loc deducţia sintactică $\{\psi\} \vdash \varphi$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar *psidinfi*.

Exerciţiul 18. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2; \emptyset)$, simbolul de operaţie unară f şi simbolul de relaţie binară R, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| = 4$, relaţia binară $Q = \{(a, b), (c, c)\}$ pe A şi o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ şi $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ având proprietăţile:

- închiderea reflexivă a relaţiei binare funcţionale totale $f^{\mathcal{A}}$ de la A la A coincide cu închiderea reflexivă a lui Q (**indicaţie:** există o unică relaţie binară funcţională totală $f^{\mathcal{A}}$ de la A la A cu această proprietate);
- $R^{\mathcal{A}}$ este relaţia de echivalenţă pe A generată de Q (**indicaţie:** e suficient să scrieţi clasele de echivalenţă ale lui $R^{\mathcal{A}}$, apoi să–i desenaţi diagrama prin graf orientat, nu e nevoie să aplicaţi succesiv închiderile simetrică, reflexivă şi tranzitivă relaţiei binare Q).

Considerăm două variabile distincte $x, y \in Var$ şi enunţul $\varepsilon = \forall\, x\, \exists\, y\, [R(x, f(y)) \to (f(f(x)) = y)]$.
Să se determine funcţia $f^{\mathcal{A}}$ şi relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

- un predicat unar *detopunara*$(-Fct)$, care întoarce în argumentul său Fct relaţia binară funcţională totală pe A a cărei închidere reflexivă coincide cu cea a lui Q (**indicaţie:** aveţi de determinat o funcţie de la A la A cu această proprietate; soluţia, deci valoarea variabilei Fct care satisface acest predicat, este unică);
- un predicat unar *detrelbin*$(-Rel)$, care întoarce în argumentul său Rel relaţia de echivalenţă pe A generată de Q;
- un predicat zeroar *verifAsatepsilon*, care întoarce *true* ddacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ (**indicaţie:** atenţie la reprezentarea unei funcţii ca relaţie binară (funcţională totală), deci ca listă de perechi, care poate fi furnizată unui predicat unar într–o singură clauză, versus reprezentarea ei prin atâtea clauze pentru un predicat binar câte elemente are domeniul acelei funcţii; a doua reprezentare e suficientă pentru cerinţa redusă de mai jos, dar predicatele pentru generare şi colectare de funcţii scrise la laborator folosesc prima dintre aceste reprezentări).

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul zeroar *verifAsatepsilon*, introducând direct operaţia unară $f^{\mathcal{A}}$ şi relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ în baza de cunoştinţe.