# Logică Matematică şi Computaţională
# TEMELE COLECTIVE **1–3**

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2023–2024, Semestrul I

Toate temele colective se adresează AMBELOR SERII.
Rezolvarea fiecărei teme colective trebuie trimisă *într–un singur exemplar* de *fiecare grupă a seriei IF* și *fiecare grupă a seriei ID* ca răspuns la aceste assignments MS Teams.

# Temă colectivă (de programare în Prolog, din LABORATORUL III)

După modelul predicatelor similare din fișierul .PL pentru al treilea laborator, scrieți predicate în Prolog pentru a demonstra (semantic, i.e. prin tabele de adevăr) că, pentru orice mulțimi $A$, $B$, $C$, $D$, $T$ astfel încât $T \supseteq A$ și $T \supseteq B$, au loc următoarele proprietăți, unde am notat cu $\overline{M} := T \setminus M$ pentru orice $M \in \mathcal{P}(T)$:

- $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \subsetneq B$ sau $A = B)$
- $(A \subseteq B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C)$ și $(A \subsetneq B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C \subseteq B \cup C$, $A \cap C \subseteq B \cap C$ și $A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $(A \subseteq B$ și $C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C \subseteq B \cup D,\ A \cap C \subseteq B \cap D$ și $A \setminus D \subseteq B \setminus C)$
- $(A \subseteq B \text{ și } A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ și $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \setminus A = B$
- **a doua lege a lui De Morgan:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $(A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A})$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup B = T \Leftrightarrow A \supseteq \overline{B} \Leftrightarrow B \supseteq \overline{A}$

- $(A \cup B = T$ și $A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow A = \overline{B} \Leftrightarrow B = \overline{A}$

Proprietățile cu complementare față de $T$ să fie demonstrate semantic în câte două moduri:

1. considerând un element arbitrar $x$ și apartenența sa la mulțimile $A$, $B$, $T$ (ca proprietăți cu valori booleene arbitrare);
2. considerând un element arbitrar $x \in T$ și apartenența sa la mulțimile $A$, $B$ (i.e. cu proprietatea $x \in T$ presupusă adevărată și numai proprietățile $x \in A$, $x \in B$ ca având valori booleene arbitrare).

## Temă colectivă (de efectuat matematic, din CURSURILE I–III)

Din faptul că $\emptyset$ este mulțimea fără elemente să se deducă faptul că, pentru orice mulțime $A$, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$. De asemenea, să se demonstreze că produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta), și păstrează incluziunea, iar produsul cartezian cu mulțimi nevide păstrează și incluziunea strictă, adică, pentru orice mulțimi $A$, $B$ și $C$, au loc:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
4. $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$
5. $B \subseteq C \Rightarrow [A \times B \subseteq A \times C$ și $B \times A \subseteq C \times A]$
6. dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subseteq C \Leftrightarrow A \times B \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subseteq C \times A$
7. dacă $A \neq \emptyset$, atunci: $B \subsetneq C \Leftrightarrow A \times B \subsetneq A \times C \Leftrightarrow B \times A \subsetneq C \times A$

**Indicație:** Se folosesc, în mod direct, definițiile acestor operații cu mulțimi. La 1 se folosește și **distributivitatea conjuncției față de disjuncție**, iar 4 poate fi demonstrată prin calcul direct, pe baza lui 1 și 3. La 3 se pot folosi 6 și o caracterizare a incluziunii stricte din primul seminar.

## Temă colectivă (de efectuat matematic, din CURSURILE I–III)

Demonstrați că operațiile cu numere cardinale și relațiile între numere cardinale sunt **bine definite**, i.e. **nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalență**, adică: pentru orice mulțimi $A$, $A'$, $B$ și $B'$ astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$
- $|A| \leq |B|$ ddacă $|A'| \leq |B'|$
- $|A| < |B|$ ddacă $|A'| < |B'|$

**Indicație:** Dacă $\varphi : A \to A'$ și $\psi : B \to B'$ sunt bijecții, atunci funcțiile $f : A \coprod B \to A' \coprod B'$, $g : A \times B \to A' \times B'$ și $h : B^A \to (B')^{(A')}$, definite prin: pentru orice $a \in A$, orice $b \in B$ și orice $p : A \to B$, $f(a, 1) := (\varphi(a), 1)$, $f(b, 2) := (\psi(b), 2)$, $g(a, b) := (\varphi(a), \psi(b))$ și $h(p) := \psi \circ p \circ \varphi^{-1}$, sunt, de asemenea, bijecții (vedeți și SEMINARUL I, PARTEA A DOUA); în plus, o funcție $\iota : A \to B$ este injecție, respectiv bijecție ddacă funcția $\gamma := \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1} : A' \to B'$, care satisface $\iota = \psi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi$, este injecție, respectiv bijecție.
Am folosit **licența de scriere (convenția)** ca în scrierea funcțiilor aplicate unor perechi de elemente să eliminăm o pereche de paranteze: de exemplu, scriem $g(a, b)$ în loc de $g((a, b))$.