

Poseturi și morfisme de poseturi

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Claudia MUREŞAN

cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București, Facultatea de Matematică și Informatică

Semestrul I, 2023-2024

Să vedem de ce putem aplica **principiul dualității pentru poseturi** și pentru proprietăți în care intervin morfisme de poseturi, ca în exercițiul următor.

Observație: Fie $A = (A, \leq)$ și $B = (B, \leq)$ poseturi, $L = (\sqcup, \vee, \wedge, \Rightarrow)$ și $M = (M, \sqcup, \sqcap, \sqsupseteq)$. Iatăci, dacă $N = (N, \vee, \wedge, \leq, \geq)$ și $P = (P, \sqcup, \sqcap, \sqsupseteq, \sqsubset)$ sunt morfisme. Fie $f: A \rightarrow B$, $g: L \rightarrow M$ și $h: N \rightarrow P$.

Atunci au loc echivalențele:

• f este morfism de poseturi între A și $B \Leftrightarrow f$ este morfism de poseturi între dualile (A, \geq) și (B, \leq) ale lui A și, respectiv, B ;

prin urmare, dacă f este bijectivă, atunci aceeași echivalență este valabilă pentru inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ a lui f , ceea ce îndată și.

• f este izomorfism de poseturi între A și $B \Leftrightarrow f$ este izomorfism de poseturi între dualile (A, \geq) și (B, \leq) ale lui A și, respectiv, B ;

• g este morfism de idiale între L și $M \Leftrightarrow g$ este morfism de idiale între dualile $(\sqcup, \wedge, \vee, \Rightarrow)$ și $(\sqcap, \sqcup, \sqcap, \sqsupseteq)$ ale

lui L și respectiv M ,
 prin urmare, aceeași echivalență este
 loc și pentru izomorfisme de
 lățăci, adică izomorfisme de
 lățăci coincid cu morfismele
 bijective de lățăci.
 ● h este morfism de lățăci
 înghesuite între \mathcal{C} și $\mathcal{P} \Leftrightarrow h$
 este morfism de lățăci înghesuite
 între dualele $(N \cong V \cong Z, 0) \cong$
 $(P \cong U \cong T, 1)$ ale lui \mathcal{C} și
 respectiv \mathcal{P} ;
 prin urmare, aceeași echivalență este
 subiectată și de izomorfisme
 de lățăci înghesuite, adică
 acestea coincid cu morfismele
 bijective de lățăci înghesuite.

Vom vedea că aceeași
 echivalență este valabilă și pentru
 algebre Boole și morfisme de
 algebre Boole.

Toate echivalențele de mai sus
 rezultă direct din definitiile
 acestor tipuri de morfisme.
 Aceste echivalențe ne permit
 să, în exercițiile următoare, să
 aplicăm Principiul dualityi pentru

pozituri, respectiv pozituri morfuite,
 sau proprietăți cu care se pot
 morfui sau izomorfii de
 pozituri, pentru că echivalențele
 de mai sus crează și, în
 dualul unei enunțuri, în care
 apare un morfism sau izomorfism
 f de pozituri, f rămâne
 ne schimbat. În aceeași mod
 pot fi elicitate Principiul
dualității pentru lățile, respectiv
lățile morfuite, precum și
Principiul dualității pentru algebre
Boole, pe care îl vom vedea
 în următoarele cursuri.

Exerc.: să se arate că orice
 funcție booleană pozitivă minimală
 și maximală este triviale. Mai
 precis, să se demonstreze că:
 dacă (A, \leq) și (B, \leq) sunt
 pozituri, iar $f: A \rightarrow B$ este

o. funcție închisă (i.e. un morfism de poseturi) (dacă există poseturi) și $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$, astfel încât există în posetul (A, \leq) min(X) și max(X). Dacă există în posetul (B, \leq) , min($f(X)$) = $f(\min(X))$ și max($f(Y)$) = $f(\max(Y))$.

REZOLVARE:

$$\min(X) \in X \Rightarrow \begin{cases} X \neq \emptyset \quad (\forall x \in X) \\ A \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow f(\min(X)) \in f(X) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(X) \neq \emptyset \quad (\Rightarrow B \neq \emptyset)$ fapt care rezulta și din $A \neq \emptyset$ și faptul că există $f: A \rightarrow B$.

(Axiomele clasicii ne permit, cunoscând ele, să alegem un element (arbitraru) din $f(X)$.)

$$\exists b \in f(X) \Leftrightarrow (\exists a \in X)(b = f(a)),$$

$$a \in X \Rightarrow \min(X) \leq a \quad (\text{închis}) \Rightarrow f(\min(X)) \subseteq f(a)$$

$$\Rightarrow f(\min(X)) \subseteq b.$$

b este un element obținut din $f(X)$

$\Rightarrow f(\min(X))$ este un minorant
pentru $f(X)$,
dar $f(\min(X)) \in f(X)$.

$\Rightarrow f(\min(X)) = \min(f(X))$.
Prin dualitate $\Rightarrow f(\max(X)) =$
 $= \max(f(X))$.

De multe ori, ca în redactarea următoare pentru rezolvarea aceluiasi exercițiu ca mai sus, vom folosi definiția imaginii unei mulțimi printr-o funcție fără a o scrie explicit:

Exercițiu: Dem. că orice fct. iesătoare
poate avea minimele și maximele celeste.
(completă cu REZOLVARE).

Fie $(A \subseteq) \ni (B \subseteq)$ dovezi
pentru, $f: A \rightarrow B \Rightarrow f$ fct. iesătoare,
 $\exists X \subseteq A \ni Y \subseteq A$ a.c. \exists an
 $(A \subseteq) \min(X) \ni \max(Y) \Rightarrow$
 $\Rightarrow X \neq \emptyset \ni Y \neq \emptyset \Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow$
 $\Rightarrow B \neq \emptyset$, pt. că $\exists f$ fct. de la A la B .

$\min(X) \in X \Rightarrow f(\min(X)) \in f(X)$,
 $\forall x \in X (f(\min(X)) \leq f(x))$ (fct. iesătoare)
 $\Leftrightarrow \forall x (f(\min(X)) \leq f(x))$ deci $f(\min(X))$
este minorant pt. $\{f(x) | x \in X\} = f(X)$

$\Rightarrow \exists$ an $(B \subseteq) \min(f(X)) = f(\min(X))$, pt.
că este un minorant care să spartă
mulțimea pe care să minoreze
cădăr minimul acelei mulțimi.

$\max(Y) \in Y \Rightarrow f(\max(Y)) \in f(Y)$.
 $(\forall x \in Y)(x \leq \max(Y))$ (restă)
 $(\forall x \in Y)(f(x) \leq f(\max(Y))) \Rightarrow f(\max(Y)) \text{ este}$
 majorant pt. $\{f(x) \mid x \in Y\} = f(Y)$

$\Rightarrow \exists$ un $(\exists \leq) \max(f(Y)) = f(\max(Y))$, pt. că un.

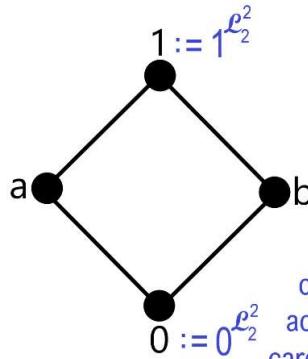
majorant este operare multime pe care
 și majorant este chiar maximal

este multime, sau: prin dualitate, din
 existență pt. minime \Rightarrow există o altă pt. maxime.

Observatie: $(\subseteq) \rightarrow$ poset; $L \neq \emptyset$,
 $a, b \in L$. Atunci:
(1) da (\subseteq) e lant, stric.
 $b < a \Rightarrow a \neq b$, și $a \leq b \Rightarrow b \neq a$, (cănd)
 $b < a \Leftrightarrow a \neq b$ (cănd $a \leq b \Leftrightarrow b \neq a$).
dem.
(2). Pp. $b < a \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq a \\ b \neq a \end{cases}$
 $\begin{cases} b \leq a \\ b \neq a \end{cases} \Rightarrow b = a$
 Pp. obs $a \leq b$.
 $\Rightarrow a = b \vee a \neq b$. $\Rightarrow a \neq b$.
 $\Rightarrow a = b$ (cănd $a \neq b$).
(2) Pp. $\neg (\subseteq) \Rightarrow$ lant.
" \Rightarrow ": Pp. $a \neq b$.
 $\neg (\subseteq) \Rightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases}$
 $a \neq b \Rightarrow a \neq b$.
 $\Rightarrow a \leq b \wedge b \leq a$.

Exercițiu: Să se determine toate funcțiile izotone de la romb la lanțul cu exact 2 elemente (vedeți mai jos diagramele Hasse ale acestor poseturi, care sunt chiar algebrelor Boole; vom vedea că rombul este pătratul lanțului cu 2 elemente).

Rezolvare:



L_2^2 (rombul)

$0^L_2 = 0^L_2$ sau $1^L_2 = 1^L_2$.

0 și 1 sunt notațiile uzuale pentru minimul, respectiv maximul unui poset mărginit (adică poset cu minim și maxim), numite și *primul element*, respectiv *ultimul element* al posetului; chiar dacă nu le atașăm acești indici superiori care indică posetul din L_2 (lanțul cu 2 elemente)

care fac parte, nu înseamnă că aceste elemente ar fi comune rombului și lanțului cu 2 elemente, adică nu înseamnă că avem

Vom folosi și în continuare aceste notații: 0 pentru minimul oricărui poset care are minim și 1 pentru maximul oricărui poset care are maxim.

$1 := 1^L_2$

$0 := 0^L_2$

(lanțul cu 2 elemente)

)

Pentru că aceasta e notația ușuală pentru relația de ordine a unei algebrelor Boole, vom nota cu \leq relația de ordine a fiecărui dintre aceste poseturi.

Fie $f: L_2 \rightarrow L_2$. Conform definiției unei funcții izotone,

$f: L_2 \rightarrow L_2$ e ~~obișnuită~~ dacă $(\forall x, y \in L_2)$

$$(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$$

$\exists L_2 \text{ s.t. } 0 \leq a \leq 1$. Mai mult, relația de succesiune a posetului finit L_2 conține doar perechile $(0, a), (0, b), (a, 1), (b, 1)$.

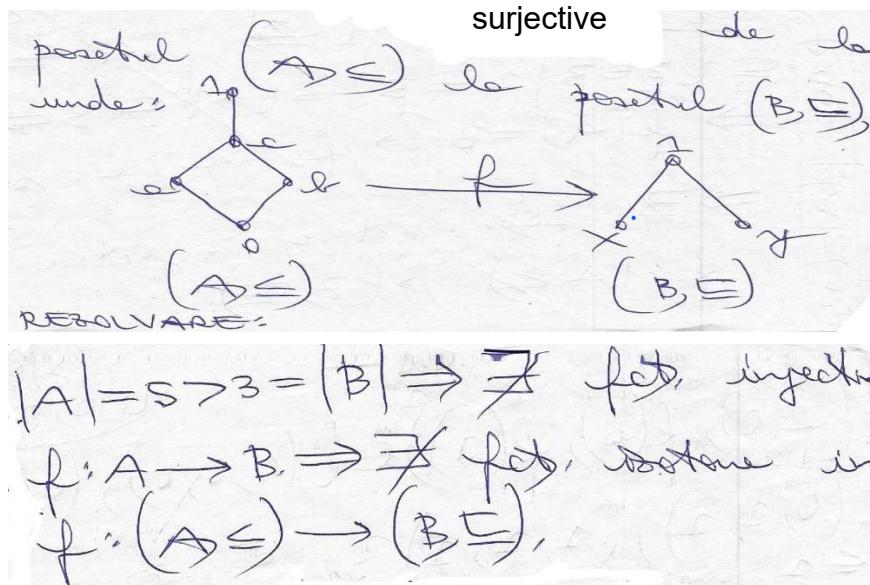
Așadar: $\Rightarrow [f: L_2 \rightarrow L_2 \text{ e } \Rightarrow]$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(a) \leq f(b) \leq f(1).$$

Iar valorile acestei funcții aparțin lanțului cu 2 elemente, adică $f(0), f(a), f(b), f(1) \in \{0, 1\}$. Așadar avem următoarele valori posibile pentru aceste triplete: $(f(0), f(a), f(1))$, $(f(0), f(b), f(1)) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$. Prin urmare, funcțiile izotone de la romb la lanțul cu 2 elemente sunt:

x	0	a	b	1
$f(x)$	0	0	0	0
	0	0	0	1
	0	0	1	1
	0	1	0	1
	0	1	1	1
	1	1	1	1

Exercițiu: Să se determine toate funcțiile izotone injective și toate funcțiile izotone surjective de la A la B.



Pentru cealaltă cerință a exercițiului, putem observa faptul că posetul A are minimul 0, care, conform unui exercițiu de mai sus, va fi dus de orice funcție izotonă f de la A la B în $\min(f(A))$. Dacă această funcție este și surjectivă, atunci $f(A)=B$. Dar posetul B nu are minim.

$$\begin{aligned}
 &\text{Fie } f: (A, \leq) \rightarrow (B, \leq), f \text{ surjectivă.} \\
 &(\forall \alpha \in A)(\alpha \leq \alpha) \Rightarrow (\forall \alpha \in A)(f(\alpha) \leq \\
 &\leq f(\alpha)) \Rightarrow \text{Im}(f) = f(A) \subseteq \\
 &\subseteq \{ \beta \in B \mid f(\alpha) \leq \beta \}. \quad (*) \\
 &\text{Cas 1: } f(0) = x, \quad (***) \\
 &\subseteq \{ \beta \in B \mid x \leq \beta \} = \{ x, z, y \} \subseteq B \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f(A) \neq B \Leftrightarrow f \text{ nu e surj..} \\
 &\text{Cas 2: } f(0) = y, \quad (****) \\
 &\subseteq \{ \beta \in B \mid y \leq \beta \} = \{ y, z, x \} \subseteq B \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f(A) \neq B \Leftrightarrow f \text{ nu e surj..} \\
 &\text{Cas 3: } f(0) = z, \quad (*****) \\
 &\subseteq \{ \beta \in B \mid z \leq \beta \} = \{ z, x, y \} \subseteq B \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f(A) \neq B \Leftrightarrow f \text{ nu e surj..} \\
 &\Rightarrow \nexists \text{ fct. surjectivă} \\
 &f: (A, \leq) \rightarrow (B, \leq).
 \end{aligned}$$

Observație: Orice funcție injectivă izotonă păstrează ordinea strictă.

Demonstrație: Fie (A, \leq) și (B, \leq) două poseturi (folosim notația uzuală \leq pentru relația de ordine a fiecărui poset, ceea ce sigur că nu înseamnă că poseturile coincid), iar $f : A \rightarrow B$ o funcție izotonă (*subînțeles*: între aceste poseturi, adică raportat la aceste relații de ordine de pe A , respectiv B).

Dacă $a, u \in A$ sunt astfel încât $a < u$, adică $a \leq u$ și $a \neq u$, atunci:

cum f e izotonă, din faptul că $a \leq u$ rezultă că $f(a) \leq f(u)$;

cum f e injectivă, din faptul că $a \neq u$ rezultă că $f(a) \neq f(u)$;

ășadar $f(a) < f(u)$.

Exercițiu:

Fie (L, \leq) un lant și $\varnothing (M, \leq)$ un poset, cu $L \neq \varnothing$ și $M \neq \varnothing$, iar $f : L \rightarrow M$ o funcție izotonă sau subînțeles (adică $(L, \leq) \not\propto (M, \leq)$), i.e. raportat la $\leq \not\propto \leq$. Suntem $\varnothing (f(L), \leq)$ este lant (ca subposet al lui (M, \leq)), i.e. $f(L)$ aranjat în relație de ordine $\leq_{f(L)}$ $= \{(\varnothing x, \varnothing y) \mid \varnothing x \leq f(L) \wedge \varnothing y \leq f(L)\}$ unde \leq e relație de ordine de pe M , cu notăție ușoară, $\leq_{f(L)} = \varnothing (\varnothing x \leq \varnothing y)$.

REZOLVARE:

$$\begin{aligned} &\text{Fie } \varnothing x \leq \varnothing y \in f(L) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in L)(f(a) = \varnothing x \wedge \varnothing y = f(b)) \\ &= \varnothing x \end{aligned}$$

(\Leftarrow) este lanț, $\Rightarrow a \leq b$ sau
 $a \leq b$, $b \leq a$. (*)

Caz 1: dacă f este izotonă, \Rightarrow

$\Rightarrow f(a) = f(b)$ sau $f(b) = f(c)$
 $\Leftrightarrow a \leq b$ sau $b \leq c$.

Caz 2: dacă f este antizotonă

$\Rightarrow f(b) = f(c)$ sau $f(c) = f(d)$
 $\Leftrightarrow b \leq c$ sau $c \leq d$.

Așadar în ambele cazuri \Rightarrow

$\Rightarrow a \leq b$ sau $b \leq c$
 $\Rightarrow c \in f(U)$, căci trase

$\Rightarrow (f(U), \leq)$ este lanț.

Desigur, avem, mai general:

Observație: Imaginea unui lanț printr-o funcție izotonă sau antitonă al cărei domeniu include acel lanț este un lanț.

Demonstrație: Fie (A, \leq) și (B, \leq) două poseturi, $f : A \rightarrow B$ o funcție izotonă, iar $g : A \rightarrow B$ o funcție antitonă.

Fie $L \subseteq A$. În modul ușual, restricția $\leq \cap L^2$ la L a relației de ordine \leq de pe A o notez tot cu \leq . Presupunem că (L, \leq) este lanț, adică oricare două elemente ale lui L sunt comparabile în posetul (L, \leq) : pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Desigur, posetul vid: $(\emptyset, \leq = \emptyset)$ este, în mod trivial, un lanț: cum enunțul $x, y \in \emptyset$ este fals pentru orice pereche de elemente x, y , rezultă că implicația $x, y \in \emptyset \Rightarrow (x \leq y \text{ sau } y \leq x)$ este adevărată pentru orice pereche de elemente x, y , așadar enunțul următor este adevărat: $(\forall x)(\forall y)[x, y \in \emptyset \Rightarrow (x \leq y \text{ sau } y \leq x)]$, scris prescurtat: $(\forall x, y)[x, y \in \emptyset \Rightarrow (x \leq y \text{ sau } y \leq x)]$, scris echivalent: $(\forall x, y \in \emptyset)(x \leq y \text{ sau } y \leq x)$.

Dacă $L = \emptyset$, atunci $f(L) = f(\emptyset) = \emptyset$ și $g(L) = g(\emptyset) = \emptyset$, care, conform paragrafului anterior, este un lanț (aici, submulțime total ordonată a mulțimii ordonate (B, \leq)).

Acum să presupunem că $L \neq \emptyset$. Atunci $f(L) \neq \emptyset$ și $g(L) \neq \emptyset$, aşadar axioma alegerii ne permite să considerăm elemente din aceste imagini ale lanțului L : fie $u, v \in f(L)$ și $w, z \in g(L)$. Conform definiției imaginii (directe) printr-o funcție, rezultă că există $a, b, c, d \in L$ astfel încât $u = f(a)$, $v = f(b)$, $w = g(c)$ și $z = g(d)$.

Întrucât (L, \leq) este lanț, avem:

$a \leq b$ sau $b \leq a$; cum f e izotonă, rezultă că $f(a) \leq f(b)$ sau $f(b) \leq f(a)$, adică $u \leq v$ sau $v \leq u$;
 $c \leq d$ sau $d \leq c$; cum g e antitonă, rezultă că $g(d) \leq g(c)$ sau $g(c) \leq g(d)$, adică $z \leq w$ sau $w \leq z$.

Așadar oricare două elemente ale lui $f(L)$ sunt comparabile în (B, \leq) , și oricare două elemente ale lui $g(L)$ sunt comparabile în (B, \leq) , adică subpozeturile (i.e. submulțimile ordonate) $(f(L), \leq)$ și $(g(L), \leq)$ ale lui (B, \leq) sunt lanțuri, unde, ca mai sus, am notat: $(f(L), \leq) = (f(L), \leq \cap f(L)^2)$ și $(g(L), \leq) = (g(L), \leq \cap g(L)^2)$.

Observație: Dacă inversa unei funcții bijective izotone nu este izotonă, atunci această inversă duce o pereche de elemente comparabile în elemente incomparabile.

Demonstrație: Fie (A, \leq) și (B, \leq) două poseturi, $f : A \rightarrow B$ o funcție bijectivă izotonă între aceste poseturi astfel încât inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ a lui f nu e izotonă, adică există $x, y \in B$ astfel încât $x \leq y$ în (B, \leq) , dar $f^{-1}(x) \not\leq f^{-1}(y)$ în (A, \leq) , adică $f^{-1}(x) \not\leq f^{-1}(y)$ și $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ (ceea ce se obține prin negarea disjuncției $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ sau $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, echivalentă cu $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$).

Dacă am avea $f^{-1}(y) < f^{-1}(x)$, atunci, cum f e izotonă și injectivă, conform unei observații de mai sus ar rezulta că $y = f(f^{-1}(y)) < f(f^{-1}(x)) = x$; dar, conform unei alte observații de mai sus, $y < x$ implică $x \not\leq y$, contrazicând alegerea lui x și y .

Așadar $f^{-1}(y) \not\leq f^{-1}(x)$. Deci avem $f^{-1}(x) \not\leq f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y) \not\leq f^{-1}(x)$ și $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$, prin urmare, transcriind ca mai sus: $f^{-1}(x) \not\leq f^{-1}(y)$ și $f^{-1}(y) \not\leq f^{-1}(x)$, adică $f^{-1}(x) \parallel f^{-1}(y)$: $f^{-1}(x)$ și $f^{-1}(y)$ sunt incomparabile în posetul (A, \leq) .

Demonstrația de mai sus arată că acesta e singurul caz în care un morfism bijectiv de poseturi nu e izomorfism de poseturi: inversa unei funcții izotone bijective niciodată nu inversează ordinea, ci poate doar să ducă perechi de elemente comparabile în elemente incomparabile, ca în exemplul din curs al funcției izotone bijective de la romb la lanțul cu 4 elemente. Prin urmare, dacă domeniul unei funcții izotone bijective este lanț, adică nu conține perechi de elemente incomparabile, atunci acea funcție are și inversa izotonă, deci este izomorfism de poseturi – a se vedea următorul exercițiu, precum și observația care îl succede, care se aplică și observației anterioare.

Exercițiu: $(L, \leq) \rightarrow$ lant; $L \neq \emptyset$;
 $(M, \sqsubseteq) \rightarrow$ poset; $M \neq \emptyset$;
 $f: (L, \leq) \rightarrow (M, \sqsubseteq)$, $f \rightarrow$ restanță;
 $f \rightarrow$ injectivă.

Așunci: f^{-1} este restanță
 (către) rezultă \leq și \sqsubseteq (de la f) (lant) și unei obs. de mai sus;

(decă f este \rightarrow isomorfism de ordine,
 (isomorfism de poseturi).

REZOLVARE:

Fie $x, y \in M$, cu $x \sqsubseteq y$.

Presupunem prin absurd $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$. Cum $(L, \leq) \rightarrow$ lant,

$f^{-1}(x)$ și $f^{-1}(y)$ sunt comparabile, iar, conform presupunerii anterioare, nu pot fi egale, decă:

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) \leq f^{-1}(x) \\ f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y) \end{cases} \quad (\star)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(f^{-1}(y)) \leq f(f^{-1}(x)) \\ f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y) \end{cases} \quad (\star\star)$$

$$(\star) \xrightarrow{f \rightarrow \text{restanță}} f(f^{-1}(y)) =$$

$$= f(f^{-1}(x)). \Leftrightarrow y \sqsubseteq x. \quad \xrightarrow{\text{antiduh.}}$$

$$x \sqsubseteq y.$$

$$\Rightarrow x = y. \quad (z)$$

$$(\star\star) \xrightarrow{f \rightarrow \text{injectivă}} f(f^{-1}(x)) \neq$$

$$\neq f(f^{-1}(y)). \Leftrightarrow x \neq y. \quad (z).$$

$$(z), (z) \Rightarrow x. \Rightarrow f^{-1}(x) \leq$$

$$\leq f^{-1}(y) \xrightarrow{\substack{x \text{ și } y \text{ sunt } \\ \text{comparabile}}} f^{-1}(y) \xrightarrow{\substack{\text{către} \\ \text{restanță}}} f \rightarrow \text{restanță,}$$

cu același proprietăți.

Observație: În exercițiul anterior, sujectivitatea lui f nu intervine explicit, decă este necesar f să fie injectivă pt. ca f^{-1} să existe.

Poseturi și Latici

Exercițiu: $(A, \leq) \rightarrow$ poset, $A \neq \emptyset$;
 $X \subseteq Y \subseteq A$ c.d. $\exists \inf(X)$,
 $\inf(X), \sup(X) \in \sup(Y)$ cu
 (A, \leq) , să se demonstreze că:
 $\inf(X) \leq \inf(Y)$ și $\sup(X) \geq \sup(Y)$.

Răspuns:

Caz 1: $X = \emptyset \Rightarrow \exists \inf(\emptyset), \sup(\emptyset)$ cu
 $(A, \leq) \Rightarrow \begin{cases} \exists \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X) \\ \exists \min(A) = \sup(\emptyset) = \sup(X). \end{cases}$
 $\inf(Y), \sup(Y) \in A$,

$\Rightarrow \begin{cases} \inf(Y) \leq \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X) \\ \sup(Y) \geq \min(A) = \sup(\emptyset) = \sup(X). \end{cases}$

Caz 2: $X \neq \emptyset$.
Fie $a \in X$, $\xrightarrow{(x \in X)} a \in Y \Rightarrow a \geq \inf(Y)$ și $a \leq \sup(Y)$
 $\Rightarrow \begin{cases} \inf(Y) \text{ e minorant pt. } \inf(Y) \leq \inf(X) \\ \sup(Y) \text{ e majorant pt. } \sup(Y) \geq \sup(X). \end{cases}$

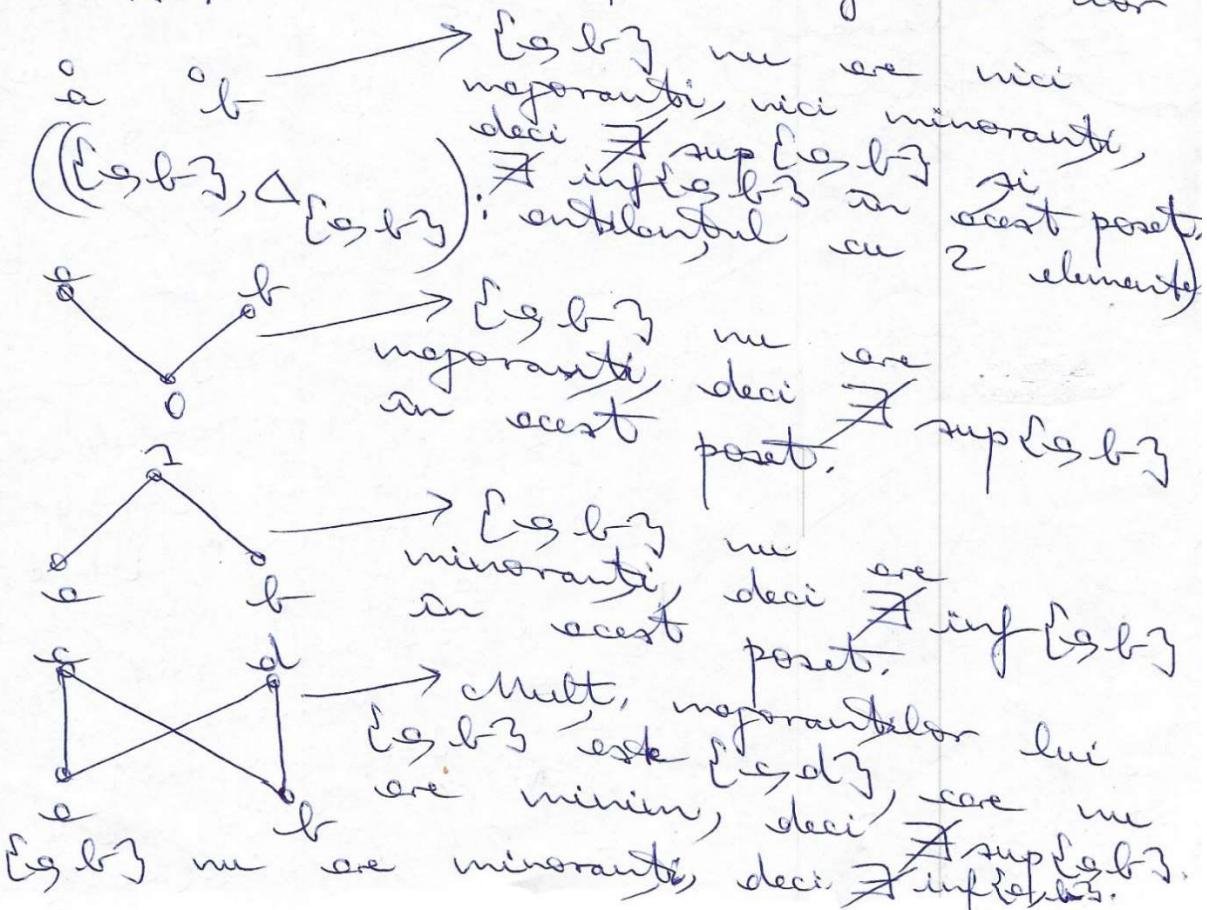
Observație: Proprietatea pentru infimumuri din exercițiul anterior este independentă de cea pentru supremumuri, adică are loc: pentru orice poset nevid (A, \leq) și orice $X \subseteq Y \subseteq A$:

- dacă există în (A, \leq) $\inf(X)$ și $\inf(Y)$, atunci $\inf(X) \geq \inf(Y)$;
- dacă există în (A, \leq) $\sup(X)$ și $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$.

Obs.: $\exists \min(S)$ și $\exists \max(S)$ an
niciun poset nu are cel mai mult, M,
 $\min(M) \in M$ și $\max(M) \in M$, deci, \exists .

Consecință: Dc. o submultime a unei
posete nu are majoranți, d.c. nu are
supremum, pt. că \exists minimal multime
majoranțelor lui, sau, deci nu are
minoranți, deci nu are infimum, pt.
 \exists maximul multime minoranțelor săi.

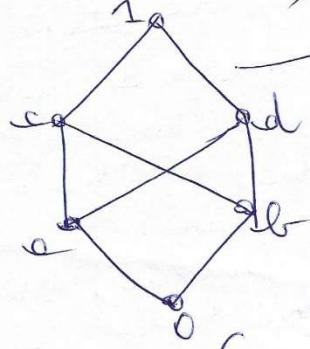
Ex. să poseturi finite care nu
sunt totali, date prin diagramele lor
Hasse:



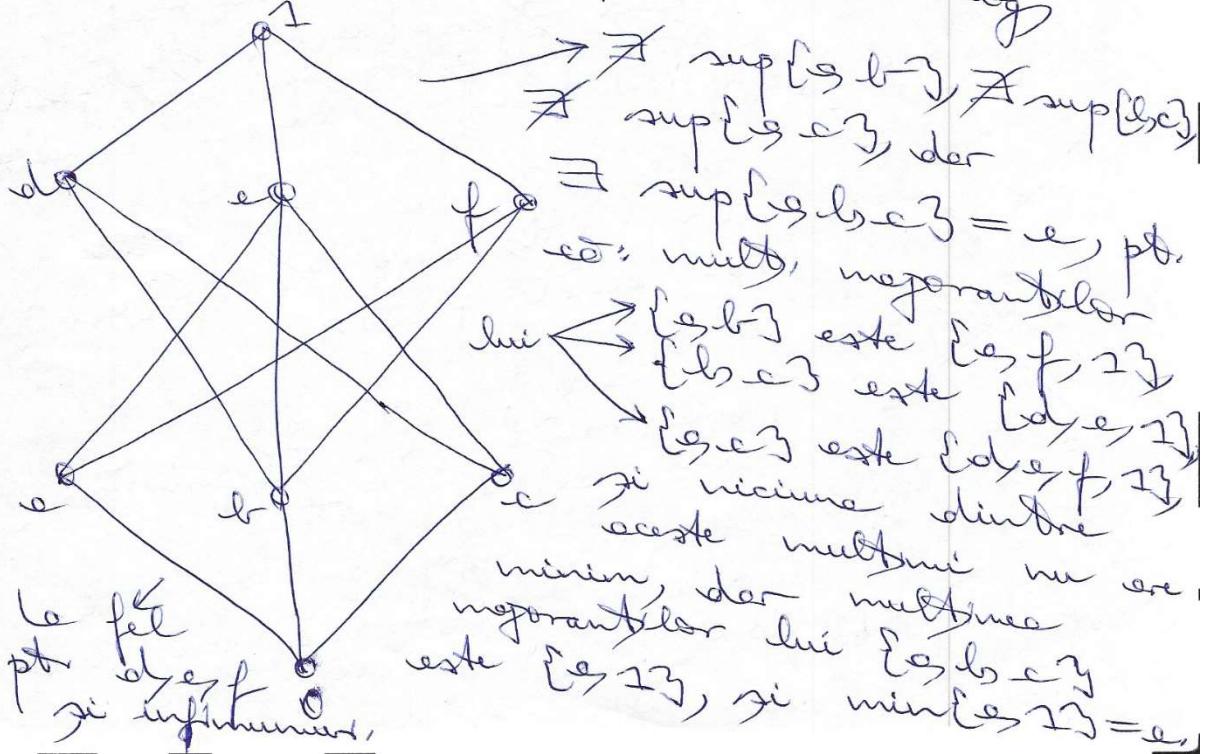
Analog $\exists \inf\{a, b\}$ și $\exists \sup\{a, b\}$.

Aceea folosește faptul că minimul unei multimi ordonate este multime,
(la fel și maximul.)

$c \neq d$, deci $c \neq \min\{a, b\} \Rightarrow \exists$
 $d \neq c$, deci $d \neq \min\{a, b\} \Rightarrow \min\{a, b\}$

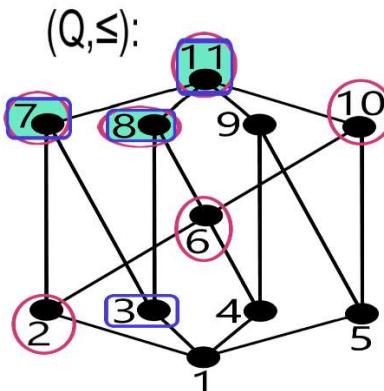
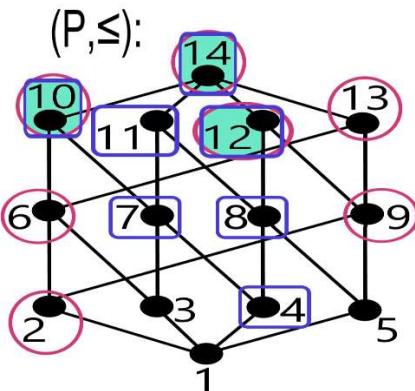


$\rightarrow 0$ este unicul minorant al lui $\{a, b\}$, iar $\max\{a, b\} = a$, deci $\inf\{a, b\} = 0$. Analog $\sup\{a, b\} = a$. Multimea majoranțelor lui $\{a, b\}$ este $\{c, d\}$, care nu are minim (pt. că $c < a$, deci $a \neq c$, cf. antisimetria lui \leq , iar $c \neq d$, $d \neq a$) $\Rightarrow \exists \inf\{a, b\}$. Analog $\exists \sup\{a, b\}$. Analog



$\rightarrow \exists \sup\{a, b\} \Rightarrow \exists \sup\{b, c\}$, deci
 $\exists \sup\{a, b, c\} = e$, pt.
că mult. majoranțelor
lui $\{a, b\}$ este $\{e, f\}$ și $\{b, c\}$ este $\{e, f\}$
 $\rightarrow \{e, f\}$ este $\{a, b, c\}$
și niciun alt alt
este multime nu are
minim, deci multimea
majoranțelor lui $\{a, b, c\}$
este $\{e, f\}$, și $\min\{e, f\} = e$,

Exercițiu: Să se demonstreze că următoarele poseturi nu sunt latici:



Am reprezentat, pe aceste diagrame Hasse, și majoranții perechilor de elemente considerate în rezolvarea de mai jos: prin ovale roz pentru un membru al fiecărei perechi și prin chenare indigo pentru celălalt, astfel că majoranții comuni pentru membrii fiecărei perechi sunt și încercuiți în roz, și încadrati în chenar indigo, apoi marcați prin culoare de fundal.

Nu toate intersecțiile de muchii din aceste diagrame Hasse sunt noduri, ci doar cele marcate prin cerculete negre.

Cu privire la numerotarea nodurilor din aceste diagrame: putem privi elementele acestor poseturi ca fiind indexate de aceste numere naturale: $P = \{x_i \mid i \in \overline{1,14}\}$ și $Q = \{y_i \mid i \in \overline{1,11}\}$ sau ca fiind chiar aceste numere naturale: $P = \overline{1,14}$ și $Q = \overline{1,11}$, dar astfel încât relațiile de ordine pe aceste mulțimi nu sunt date de relația de ordine naturală pe mulțimea numerelor naturale (care este o ordine totală și chiar o ordine bună) restricționată la mulțimile $\overline{1,14}$, respectiv $\overline{1,11}$, întrucât aceste poseturi nu sunt lanțuri.

Rezolvare: Considerăm $P = \overline{1,14}$ și $Q = \overline{1,11}$.

În posetul (P, \leq) :

majoranții lui 2 sunt: 2, 6, 9, 10, 12, 13, 14;

majoranții lui 4 sunt: 4, 7, 8, 10, 11, 12, 14;

- așadar majoranții perechii {2,4} sunt: 10, 12, 14;

$10 \parallel 12$, adică $10 \not\leq 12$ și $12 \not\leq 10$;

$14 > 10$, prin urmare $14 \not\leq 10$;

$14 > 12$, prin urmare $14 \not\leq 12$;

- deci nici 10, nici 12, nici 14 nu este minimul mulțimii {10, 12, 14}, așadar această mulțime a majoranților perechii {2,4} nu are minim, deci perechea {2,4} nu are supremum în posetul (P, \leq) .

În posetul (Q, \leq) :

majoranții lui 2 sunt: 2, 6, 7, 8, 10, 11;

majoranții lui 3 sunt: 3, 7, 8, 11;

- așadar majoranții perechii {2,3} sunt: 7, 8, 11;

$7 \parallel 8$, adică $7 \not\leq 8$ și $8 \not\leq 7$;

$11 > 7$, prin urmare $11 \not\leq 7$;

$11 > 8$, prin urmare $11 \not\leq 8$;

- deci nici 7, nici 8, nici 11 nu este minimul mulțimii {7, 8, 11}, așadar această mulțime a majoranților perechii {2,3} nu are minim, deci perechea {2,3} nu are supremum în posetul (Q, \leq) .

Putem observa că poseturile (P, \leq) și (Q, \leq) sunt autoduale, adică izomorfe cu dualele lor, și, luând imaginile perechilor de mai sus prin izomorfismele între aceste poseturi și dualele lor, obținem că perechea {11,13} nu are infimum în posetul (P, \leq) , iar perechea {9,10} nu are infimum în posetul (Q, \leq) .

Exerc.: să se demonstreze că
 în posetul partilor unei multimi
 infimurile și supremurile
 arbitrare coincid cu intersecțile
 și, respectiv, reuniunile. Mai precis,
 pentru orice multime T și
 orice $X \subseteq \mathcal{P}(T)$, în posetul
 $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ au loc: $\inf(X) = \bigcap_{A \in X} A$
 $\sup(X) = \bigcup_{A \in X} A$.

REZONARE:

Fie T o multime și $X \subseteq \mathcal{P}(T)$. În posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$:

există $\min(\mathcal{P}(T)) = \emptyset$ (r. causal) și
 există $\max(\mathcal{P}(T)) = T$, posetul

$(\mathcal{P}(T), \subseteq)$: există $\sup(\emptyset) = \emptyset$ și
 există $\inf(\emptyset) = T$.

Caz 1: $X = \emptyset$. Atunci în loc:
 $\bigcup_{A \in X} A = \bigcup_{A \in \emptyset} A \xrightarrow{\text{(r. causal)}} \emptyset = \sup(\emptyset) = \sup(X)$

$\bigcap_{A \in X} A = \bigcap_{A \in \emptyset} A \xrightarrow{\text{(r. causal)}} T = \inf(\emptyset) = \inf(X)$

Caz 2: $X \neq \emptyset$, $\xrightarrow{\text{(r. causal)}}$ pt. orice
 $m \in X$, în loc inclusiv:

$$M \subseteq \bigcup_{A \in X} A \quad \text{si} \quad M \supseteq \bigcap_{A \in X} A, \Rightarrow \bigcup_{A \in X} A = \bigcap_{A \in X} A$$

este majorant pt. $\bigcup_{A \in X} A$ dar $\bigcap_{A \in X} A$

este minorant pt. $\bigcap_{A \in X} A$. (*)

Fie $N, Q \in \mathcal{P}(T)$, astfel

caut N este majorant pt. $\bigcup_{A \in X} A$, dar Q este minorant pt. $\bigcap_{A \in X} A$

$$(\mathcal{P}(T), \subseteq) \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall A \in X)(A \subseteq N) \\ (\forall A \in X)(A \supseteq Q) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{A \in X} A \subseteq N \quad \text{si} \quad N \supseteq Q. \quad (**).$$

$$(**), (***) \xrightarrow[\text{def. inf.}]{\text{si } \sup} \bigcup_{A \in X} A = \sup(X) \quad \text{si} \quad \bigcap_{A \in X} A = \inf(X) \quad \text{in}$$

posibil $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$.

Obs: În exerc. anterior, ne putem da, de exemplu $\bigcap_{A \in X} A = \inf(X)$, și opoi să invocăm principiul dualității pt. a obține egalitatea $\bigcup_{A \in X} A = \sup(X)$, adică să demonstrează ambile egalități. Putem conchide că intersectile și reuniunile obținute sunt duse unele altora, fiind infimul și respectiv supremul în posibil $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, nu mai multe.

Obs.: Cum putem proceda
 pt. e deduce, pt. Orice
 $X \subseteq T$ este set) una altă
 este egalitate din cedetă.
 $\inf(X) = \cap A$ în posibil
 $(\bigcap_{A \in X} A)^{\text{not}}$ $(P(T), \supseteq)$,
 $\sup(X) = \cup A$ în posibil
 $(\bigcup_{A \in X} A)^{\text{not}}$ $(P(T), \subseteq)$?

Putem observa faptul
 că exist poset este
 AUTODUAL, adică izomorf
 cu dualul său: $(P(T), \supseteq)$, cu
 următorul izomorphism de
 poseturi:

$f: P(T) \rightarrow P(T)$, definită
 prin: $\forall A \in P(T) (f(A) = \overline{T \setminus A})$
 \overline{A}

Arădări în reședință pentru
 fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$, $\bar{A} := T \setminus A$,
 și sună definit $f: \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$
 prin: $(\forall A \in \mathcal{P}(T)) (f(A) := \bar{A})$.
 Să demonstrăm că f
 este izomorfism de poseturi
 de la $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la
 $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$: pentru orice
 $A, B \in \mathcal{P}(T)$, dacă $A \subseteq B \Rightarrow$
 $\Rightarrow T \setminus A \supseteq T \setminus B$ \Rightarrow f
 $\frac{A}{\bar{A}} \quad \frac{B}{\bar{B}}$ duce
 $f(A) \quad f(B)$ relație
 de
 ordine \supseteq e posetului $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$
 în relație de ordine \supseteq e
 posetului $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$, adică f
 e funcție izomorfă de la
 $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$, prin

Avem f oarecum funcție între
 și de la posibil $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$
 la posibil $(\mathcal{P}(T), \ni)$:
 interzicând A cu B
 în implicatia de mai sus,
 obținem: $A \ni B \Rightarrow f(A) = f(B)$.

Acum să demonstrăm
 că f este egală cu
 inversa ei.

$$(\mathcal{P}(T), \subseteq) \xrightleftharpoons[f^{-1} = f]{f} (\mathcal{P}(T), \ni).$$

pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$,

$$\begin{aligned} f(f(A)) &= \overline{\overline{A}} = A \\ &= (f \circ p)(A). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \circ f = \text{id}_{\mathcal{P}(T)} \Leftrightarrow f^{-1} = f.$$

Conform celor de mai
 sus:

- f este inversabilă, deci injectivă
- f este iotomorfism de la $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la $(\mathcal{P}(T), \ni)$
- $f^{-1} = f$ este iotomorfism de la $(\mathcal{P}(T), \ni)$ la $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$

ținând cont că f este iotomorfism
de poseturi de la posetul
 $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ la dualul său
 $(\mathcal{P}(T), \ni)$. \Rightarrow Cea deasupra
iota este iotomorfism de
poseturi, f prezintă infimumele
și supremurile
arbitrare, adică, pentru orice
 $X \subseteq P(T)$:

- $f(\inf(X, \subseteq)) = \inf(f(X), \ni)$

(conform proprietăților
dualului unei poseturi) $\sup(f(X), \subseteq)$,
care dă principiul de
dualitate pt. poseturi

$$\bullet f(\sup(X)) = \sup(f(X)) =$$

(ce mai sus)

$$\inf(f(X)). \quad (*)$$

Aceste sunt generalizările proprietăților: pentru orice A
 $B \in \mathcal{P}(I)$, $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \text{și} \\ \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{A \cup B} \end{cases}$

familii arbitrar de multimi:

fiind $I \in \text{set} \times (A_i \subseteq I)_{i \in I}$,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \overline{\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}} \quad \text{și}$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}. \quad \text{Aceste proprietăți}$$

sunt și generalizate la orice algebră Boole completă, scrise ce mai sus, sunt legile lui De Morgan generalizate

aplicate algebriei Boole complete

$(P(T), \cup, \subseteq, \bar{\cup}, \wedge, \bar{\wedge}, T)$.

Fie $a \in T$. Atunci:

$$\begin{aligned} a \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} &\Leftrightarrow a \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(a \in A_i) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in I)(a \notin A_i) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in I)(\overline{a \in A_i}) \Leftrightarrow \overline{a \in \bigcap_{i \in I} A_i} \end{aligned}$$

azadar $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$;

$$\begin{aligned} a \in \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} &\Leftrightarrow a \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{non}[(\forall i \in I)(a \in A_i)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(a \notin A_i) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(a \in \overline{A_i}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}; \text{ azadar } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

Deci, pentru orice

$$\begin{aligned} X \subseteq P(T); f(X) &= \overline{\bigcup X} = \bigcup_{A \in X} \overline{A} \\ &= \bigcap_{A \in X} \overline{A} = \bigcap_{A \in X} f(A) = \bigcap_{B \in f(X)} B = \bigcap_{B \in f(X)} f(B); \end{aligned}$$

$$\bullet f(\cap X) = \overline{\cap X} = \overline{\cap_{A \in X} A} = \cup_{A \in X} \overline{A} =$$

$$= \cup_{A \in X} f(A) = \cup_{B \in f(X)} B = \cup_{B \in f(X)} f(f(X)). \quad (\boxed{=} \quad \boxed{=})$$

desigur pentru orice

$$X \subseteq \mathcal{P}(T), \quad f(f(X)) = \cancel{(f = f^{-1})}$$

$$= f^{-1}(f(X)) = X; \quad \text{scris detaliat:}$$

$$f(f(X)) = f(\{B \mid B \in f(X)\}) =$$

$$= f(\{f(A) \mid A \in X\}) =$$

$$= \{f(f(A)) \mid A \in X\} \cancel{(f = f^{-1})}$$

$$= \{f(f^{-1}(A)) \mid A \in X\} =$$

$$= \{A \mid A \in X\} = X.$$

Se presupune că sun
demonstrat că, pentru orice

$$X \subseteq P(T), \inf(X, \leq) = nA = \bigcap_{A \in X} A = nX,$$

Fie $X \subseteq P(T)$, $\Rightarrow f(X) \subseteq$
 $\subseteq P(T)$, Aplicam egalitatea
anterioară pentru $f(X)$ în
locul lui X :

$$\begin{aligned}
 & \inf(f(x)) = \neg f(x). \\
 & f(\sup(x)) = \\
 & f(f(\sup(x))) = f(f(u_x)). \\
 & f^{-1}(f(\sup(x))) = f^{-1}(f(u_x)) \\
 & \sup(x) = u_x
 \end{aligned}$$

Așadar, pentru orice $X \subseteq f(A)$

$$\sup(X) \subseteq UX = \bigcup_{A \in X} A.$$

Analog face demonstrația
 $\Leftrightarrow (\forall X \subseteq P(T))(\sup(X) \sqsubseteq =$
 $= UX)$, unde folosind (\square)
 respectiv (\blacksquare) , în locul
 proprietăților $(*)$ respectiv $(**)$
 rezulta că $(\forall X \subseteq P(T))$
 $(\inf(X) \sqsubseteq = UX)$.

Obs.: Isomorfisme de
 poseturi pot fi și relații de
 succesiune.

Dem.: Fie $(A) \leq$ și
 $(B) \leq$ poseturi, iar
 $f: A \rightarrow B$ un izomorfism
 de poseturi de la $(A) \leq$
 la $(B) \leq$.
 Notăm cu \hookrightarrow respectiv
 \sqsubset relațiile de ordine stricte

Var α și β , respectiv γ
 relațile de succesiune ale
 posetelor (A, \leq) , respectiv (B, \sqsubseteq) .

$$\begin{aligned} \leq &= \{ \Delta_{\alpha} \mid \Delta_{\alpha} = \{ a \in A \mid a \leq b \} \\ \beta &= \{ (a, b) \in A^2 \mid a \leq b \} \\ \text{și } &(\forall x \in A)(a \leq x \leq b) \} \\ \gamma &= \{ (u, v) \in B^2 \mid u \sqsubseteq v \} \\ \text{și } &(\forall y \in B)(u \sqsubseteq y \sqsubseteq v) \}. \end{aligned}$$

Fie $(a, b) \in \beta$: $a \leq b$
 și $a \leq b \Rightarrow a \leq b$

$\Rightarrow f(a) \sqsubseteq f(b)$.

pp. prin absurd

că $f(a) \not\sqsubseteq f(b)$.

$\in B \quad (f(a) \sqsubseteq y \sqsubseteq f(b))$

$\Rightarrow f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(b))$

$\Rightarrow a \leq y \leq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq f(b)$.

$$\Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in \mathcal{H}.$$

Exerc. 1 Fie (A, \leq) și (B, \leq) poseturi, $f: A \rightarrow B$ o funcție între aceste poseturi. Dacă $X \subseteq A$, să se demonstreze că:

(1) dacă există $\inf(X)$ în (A, \leq) și există $\inf(f(X))$ în (B, \leq) ,
 atunci: $\begin{cases} (1.1) & f(\inf(X)) = \inf(f(X)), \\ (1.2) & \text{dacă } f \text{ este} \end{cases}$
 izomorfism de poseturi atunci $f(\inf(X)) = \inf(f(X));$

(2) dacă există $\sup(X)$ în (A, \leq) și există $\sup(f(X))$ în (B, \leq) ,
 atunci: $\begin{cases} (2.1) & f(\sup(X)) \geq \sup(f(X)), \\ (2.2) & \text{dacă } f \text{ este} \end{cases}$
 izomorfism de poseturi, atunci $f(\sup(X)) = \sup(f(X));$

(3) dati exemple pentru inegalități
 stricte la (1.2) și (2.2);

(4) dacă f este izomorfism de poseturi, atunci au loc echivalențele:

\Leftrightarrow (4.1) există $\inf(X)$ în (A, \leq)

\Leftrightarrow există $\inf(f(X))$ în (B, \leq)

\Leftrightarrow (4.2) există $\sup(X)$ în (A, \leq)

\Leftrightarrow există $\sup(f(X))$ în (B, \leq)

(5) dată exemplu de funcție izotonie care nu satisfac echivalențele (4.1) și (4.2).

REZOLVARE: (1) $\exists \inf(X) \in A \Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow$

(2.1) $\underbrace{\text{cas 1: } X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset}_{\exists \inf(f(X)) \text{ în } (B, \leq)}.$

$\Rightarrow \exists \inf(f(X)) = \inf(\emptyset) \text{ în } (B, \leq) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \max(B) \ni \inf(f(X)) = \inf(\emptyset) = \max(B),$

$\inf(X) \in A \Rightarrow f(\inf(X)) \in B,$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \max(B) = \inf(f(X)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \inf(f(X)).$

Cas 2: $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset.$

Fie $b \in f(X) \Leftrightarrow (\exists a \in X)(f(a) = b).$

$a \in X \Rightarrow \inf(X) \leq a$ (f e descend)
 $\Rightarrow f(\inf(X)) \leq f(a) = b$, $\Rightarrow f(\inf(X))$
 e menorant pt. $f(X)$. (def inf)
 $\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \inf(f(X)).$
 (2,2) f e isomorfism de poseturi
 $\begin{cases} \text{(def)} \\ f \text{ e descende} \end{cases} \xrightarrow{(1,1)} f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$
 f e bijection $\Rightarrow f^{-1}$ e isom.
Caz 2: $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset$,
 $\exists \inf(X)$ an $(A \leq)$,
 $\exists \inf(f(X))$ an $(B \leq)$.

$\Rightarrow \begin{cases} \exists \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X) \\ \exists \max(B) = \inf(\emptyset) = \inf(f(X)) \end{cases}$
 f e descende $\xrightarrow{\text{exce, inter}} f$ postdescende
 maximele arbitrar $\Rightarrow f(\max(A)) =$
 $= \max(f(A))$ (f e suf.) $\max(B)$,
 $\Rightarrow f(\inf(X)) = \inf(f(X)).$
Caz 2: $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset$.

Fie $a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X) \Rightarrow \inf(f(X)) \leq$
 $\leq f(a) \xrightarrow[f^{-1}]{\text{restare}} f^{-1}(\inf(f(X))) \leq$
 $\leq f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow f^{-1}(\inf(f(X)))$
 e minorant pt. $X \xrightarrow[\text{(sf. inf)}]{} f^{-1}(\inf(f(X)))$
 $\leq \inf(X) \xrightarrow[\text{restare}]{\text{restare}} \inf(f(X)) =$
 $= f(f^{-1}(\inf(f(X)))) \leq f(\inf(X)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \inf(f(X)) \leq f(\inf(X)). (*)$
 $(*) \quad (*) \Rightarrow f(\inf(X)) = \inf(f(X)).$

(2) Prin dualitate din (1),

(3) V. exemple de mai jos.

(4) f e homomorfism de poseturi $\xrightarrow{\text{sf}}$
 f e isomorf \Rightarrow injectivă dar
 f^{-1} e restare.

$\begin{array}{c} (4, 1) \xrightarrow{n \rightarrow n, \exists \inf(X)} \inf(X) \text{ cu } (A \leq), (**). \\ (\ast) \Rightarrow A \neq \emptyset \xrightarrow{\text{sf: } A \neq \emptyset} B \neq \emptyset. \\ \text{deoarece } X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset. \end{array}$

$\begin{array}{c} (\ast) \Rightarrow \exists \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X), (\ast) \\ f \text{ e restare} \xrightarrow{\text{exclu-}} f \text{ postrestare} \end{array}$

maximale este înțeles $\overrightarrow{\text{f}(A)}$

$$\Rightarrow \exists \max(f(A)) = f(\max(A)) \Rightarrow \\ = f(\inf(X)).$$

f este surjectivă. $\Leftrightarrow f(A) = B.$

$$\Rightarrow \exists \max(B) = f(\inf(X)). \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists m(B) \in B \quad \inf(\emptyset) = \max(B). \\ f(X) = \emptyset.$$

$$\Rightarrow \exists \inf(f(X)) = \max(B) = f(\inf(X)).$$

Caz 2: $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset.$

Fie $b \in f(X) \Leftrightarrow (\exists a \in X)(f(a) = b)$
 $a \in X \Leftrightarrow \inf(X) \leq a \xrightarrow{\text{definitie}} f(\inf(X)) \leq f(a).$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq b \Rightarrow f(\inf(X)) \text{ este}$
 minorant pt. $f(X)$

Fie $m \in B$, $(*)$ m este minorant
 pt. $f(X)$, $(**)$ $m \in f(X)$

Fie $a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X)$

$\Rightarrow m \leq f(a)$. $\xrightarrow[f^{-1} \text{ e bijection}]{}$ $f^{-1}(m) \leq$
 $\leq f^{-1}(f(a)) = a$. $\Rightarrow f^{-1}(m)$ este
 minorant pt. \times . $\xrightarrow[\text{bijection}]{}$ $f^{-1}(m) \leq$
 $\leq \inf(X)$. $\xrightarrow[f \text{ e bijection}]{}$ $m = f(f^{-1}(m)) \leq$
 $\leq f(\inf(X))$. $\Rightarrow m \leq f(\inf(X))$,
 $\xrightarrow[\text{bijection}]{}$ $\Rightarrow \inf(f(X)) = f(\inf(X))$.

$\frac{n \leftarrow n}{n} \exists \inf(f(x))$ an (B, \leq) ,
 f e ~~isomorfism~~ de poseturi, \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow f^{-1}$ e ~~isomorfism~~ de poseturi,
 $\frac{(n \Rightarrow n)}{\Rightarrow} \exists \inf(f^{-1}(f(x)))$ an (A, \leq) ,
 $= x$

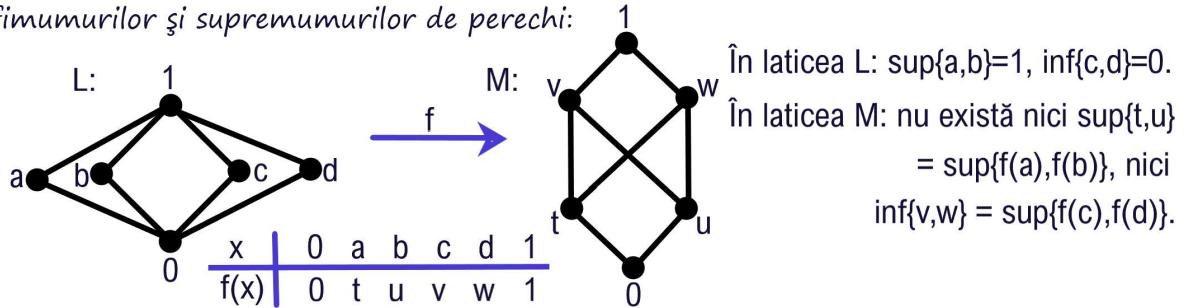
$\Rightarrow \exists \inf(X) \text{ on } (A, \leq)$

(4,2) Pohl dualistisch, ein (4,1).

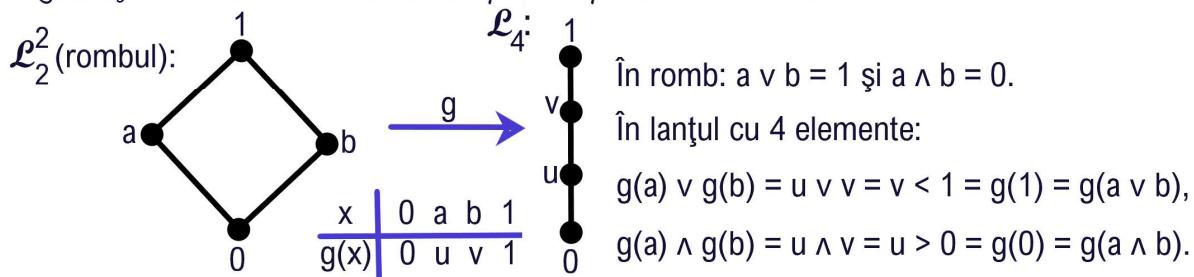
(5),(3) Să dăm un exemplu de morfism bijectiv între două poseturi finite, dintre care primul este lattice Ore, care nu satisfacă niciuna dintre echivalențele (4.1) și (4.2), apoi un exemplu de morfism bijectiv între poseturile subiacente a două

latici finite distributive care satisfac inegalități stricte la (1.1) și (2.1), apoi un exemplu de funcție izotonă între două lanțuri, implicit morfism de latici (a se vedea un seminar anterior) care nu satisfac echivalențele (4.1) și (4.2).

Exemplu de funcție bijectivă izotonă definită pe o latice care nu păstrează existența infimumurilor și supremumurilor de perechi:



Exemplu de funcție bijectivă izotonă definită între două latici care nu e morfism de latici, întrucât nu păstrează infimumurile și supremumurile de perechi, așadar inegalitățile de mai sus sunt stricte pentru perechile următoare:



Considerăm lantul (\mathbb{Q}_+, \leq) , unde \leq este ordinea naturală.
Fie $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ ($\forall x \in \mathbb{Q}_+$) ($f(x) = x^2$).
 f este iozotonă.
 (\mathbb{Q}_+, \leq) este lant, $\Rightarrow (\mathbb{Q}_+, \max, \min)$
 \leq este latice.

$$\xrightarrow{\quad} (\forall x, y \in \mathbb{Q}_+)(f(\max\{x, y\}) = \max\{f(x), f(y)\})$$

(deci proprietatea este imediată și)

$$= \max\{f(x), f(y)\}$$

$$\exists i \quad f(\min\{x, y\}) = \min\{f(x), f(y)\}.$$

$\Rightarrow f$ este morfism de lăție.

$$\begin{aligned} \text{Fie } X &= \mathbb{Q}_+ \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \\ &= \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3}), \Rightarrow f(X) = \\ &= \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}. \end{aligned}$$

$\nexists \inf(f(X))$ în (\mathbb{Q}_+, \leq) , dar \exists

$$\inf(f(X)) = 2 \text{ în } (\mathbb{Q}_+, \leq);$$

$\nexists \sup(f(X))$ în (\mathbb{Q}_+, \leq) , dar \exists

$$\sup(f(X)) = 3 \text{ în } (\mathbb{Q}_+, \leq).$$

Se retinut că f este faptul că în
acest exemplu, f este definită
într-un alt domeniu (este endomorfism
(de poseted), că f este de lăție) al
lățulei (\mathbb{Q}_+, \leq) .

Atenție: după materialul facultativ de mai jos urmează alt material de seminar obligatoriu (mai precis exercițiile din acesta parcurse la seminar sunt obligatorii, iar parcurgerea celorlalte ca studiu individual este optională).

ALTE EXEMPLE DE FUNCȚII
IZOTONE CARE NU PĂSTREAZĂ (TOATE)
INFIMUMURILE și SUPREMUMURILE

~ MATERIAL FACULTATIV ~

Definiții și denumiri echivalente:

- morfism de poseturi \Leftrightarrow funcție izotond \Leftrightarrow funcție crescătoare (def) \Leftrightarrow funcție (definită între două poseturi) care păstrează ordinea;

- funcție surjectivă \Leftrightarrow funcție descreșcătoare (def.) \Leftrightarrow funcție (definită între două poseturi) care inversează ordinea;

Obs.: Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) poseturi, iar $f: A \rightarrow B$. Atunci: f este funcție surjectivă între poseturile (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) $\Leftrightarrow f$ este funcție izotond între poseturile (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , \Leftrightarrow morfism de poseturi între (A, \geq) și (B, \sqsupseteq) , \Leftrightarrow funcție (dublu în) f^{-1} (dublu lui (B, \sqsubseteq)), între (A, \geq) și (B, \sqsubseteq) .

Tema: Având în vedere
 observație anterioară, gândită că
 ce proprietăți demonstrate pentru
 funcții isotope sunt valabile
 și pentru funcții ordine. De
 exemplu, unele proprietăți de
 existență din faptul
 că dualul unui lant este tot
 un lant (i.e., \leq este
 o relație de
 ordine totală)

chiar dacă
 și numai dacă
 evident
 $(\forall a \in (\leq^{-1})^{-1} \leq)$

atunci relația de ordine $\geq := \leq^{-1}$
 este, de asemenea, totală).

- isomorfism de poseturi \Leftrightarrow
 \Leftrightarrow isomorfism de ordine $\xrightarrow{\text{(def.)}}$ funcție
 (definită între două poseturi)
 isotonă și injectivă și cu inverse
 isotonă \Leftrightarrow morfism injectiv de
 poseturi cu inverse și morfism
 de poseturi;
- morfism de lănci $\xrightarrow{\text{(def.)}}$ funcție
 (definită între două lănci) care

pozitivă infinită și
supernumărătățile potențiale de elemente
(de acelor lății);

→ din aceasta definită,
rezultă, prin inducție după numărul
de elemente, că orice morfism
de lății pozitivă infinită în
și supernumărătățile multumilor finite
și veride de elemente (de
acelor lății);

• isomorfism de lății (def)

(def) morfism injectiv de lății, cu
inverse tot morfism de lății.

Tevr.: • orice morfism de
lății este funcție izotomă dar
nu și reciproc;

• nu orice morfism injectiv de
pozituri este isomorfism de
pozituri, i.e., nu orice funcție
izotomă injectivă nu și inversă
izotomă;

• orice morfism injectiv de
lății este inversă tot morfism
de lății, i.e., orice morfism

injectiv de între este
 izomorfism de între i.e.,
 izomorfismele de între conțin
 cu morfismele injective de între;
 ⑥ izomorfismele de între conțin
 cu izomorfismele de poseturi
 definite între două între i.e.,
 și funcție definită între două
 între este izomorfism de între
 dacă și numai dacă este
 izomorfism de poseturi (intre
 II
 (funcție între între
 (cu inverse între între))
 poseturile subiective cele între),.

Obs.: Am demonstrat la seminar
 că, dacă (A, \leq) și (B, \leq) sunt
 poseturi, $f: A \rightarrow B$ este și
 funcție între între (intre aceste
 poseturi), iar $X \subseteq A$ și $Y \subseteq A$
 c.d. există $\inf(X)$ și $\sup(Y)$
 în posetul (A, \leq) , și există
 $\inf(f(X))$ și $\sup(f(Y))$ în

poartă (B, \leq) , adică nu
există nesiguranță;

$$f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$$

și

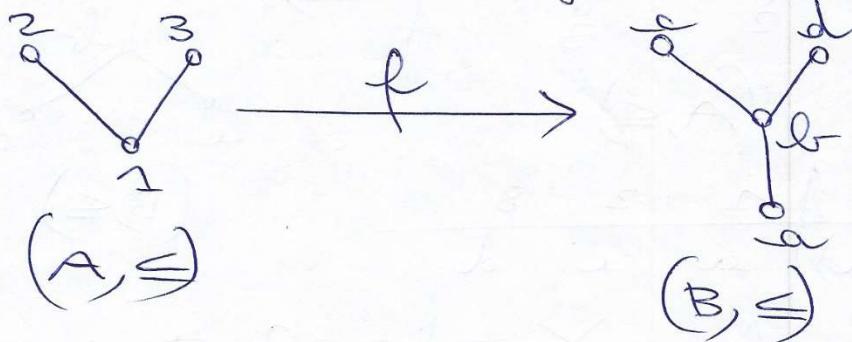
$$\sup(f(X)) = f(\sup(X)).$$

Să dăm exemplu în
nesiguranță de mai sus
stricte.

Vom folosi notatiile următoare:
 $\geq := \leq^{-1}$, $< := \leq \cap \neq$, $> := <^{-1} =$
 $\Rightarrow \cap \neq$.

\rightarrow DAT \in UN STUDENT,
Exemplu de funcție între
nu pasărește înnumărabile;

Considerăm poartările date
de următoarele diagrame Hasse:



și $f: A \rightarrow B$ definită prin
tabelul: $\begin{array}{c|ccc} u & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(u) & a & c & d \end{array}$

$f(2) \leq f(2) \geq f(2) \leq f(3)$
cănd f e iată.

$$\begin{aligned} \text{Fie } X &= \{2, 3\} \subset A, \\ \inf(X) &= \inf\{2, 3\} = 2. \quad (*) \\ \inf(f(X)) &= \inf(f(\{2, 3\})) = \\ &= \inf\{f(2), f(3)\} = \inf\{c, d\} = b, \quad (***) \\ f(2) &= a < b. \quad (**), \end{aligned}$$

$$(*), (**), (***) \Rightarrow f(\inf(X)) < \inf(f(X)).$$

Exemplu de funcție monotone care nu prezintă supremum și:

Înălțime exemplul precedent:

fie:



$(A \leq)$



$(B \leq)$

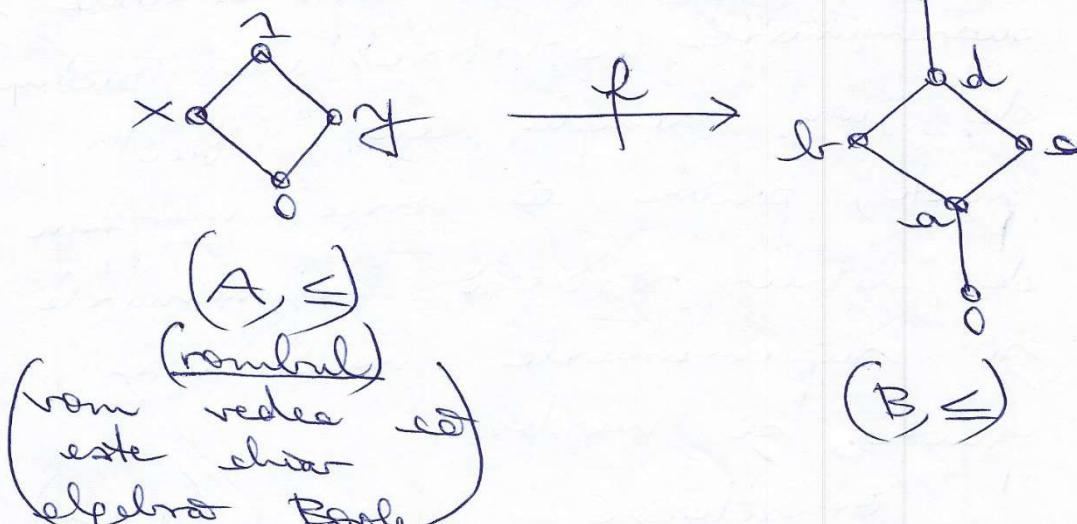
m	1	2	3
$f(m)$	a	c	d

\exists fie $X = \{2, 3\} \subset A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sup(X) = 2 \\ f(X) = \{c, d\} \Rightarrow \sup(f(X)) = b. \end{array} \right]$$

$\Rightarrow f(\sup(X)) = f(z) = a > b =$
 $= \sup(f(Y))$ se observă că f
 și obținem (pt. că $a \geq b$) $(A \geq B)$ și $(B \geq A)$.
Exemplu de funcție obținută
 între două lăbuli care nu
 prezintă infimumul și nici
 supremumul, nici măcar pe cele
 ale perechilor de elemente, căci
 nu este morfism de lăbuli.

Considerăm lăbulile:



și $f: A \rightarrow B$, $\frac{u \mid 0 \times z \mid 1}{f(u) \mid 0 \times b \mid c \mid 1}$.

Cum $f(0) \leq f(x) \leq f(z) \leq f(1)$, $\Rightarrow f$

nu este surjectiv.

$$\begin{aligned}
 & \inf\{\epsilon \times \gamma\} = 0; f(0) = 0 < a, \\
 & \inf(f(\{\epsilon \times \gamma\})) = \inf\{\epsilon b \times \gamma\} = a, \\
 & \Rightarrow f(\inf\{\epsilon \times \gamma\}) < \inf(f(\{\epsilon \times \gamma\})), \\
 & \sup\{\epsilon \times \gamma\} = z; f(z) = z > d, \\
 & \sup(f(\{\epsilon \times \gamma\})) = \sup\{\epsilon b \times \gamma\} = d, \\
 & \Rightarrow f(\sup\{\epsilon \times \gamma\}) > \sup(f(\{\epsilon \times \gamma\})).
 \end{aligned}$$

Exemplu de morfism de lățăi
care nu poartă înfășurările și
superașările arbitrare, nu putem
de un exemplu cu lățăi
finite, pentru că orice morfism
de lățăi poartă înfășurările
și superașările multiniilor
finite, și verde.

Considerăm lățul (\mathbb{R}, \leq) ,
unde \leq este relația de ordine
naturală pe \mathbb{R} .

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$,
definim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel:
pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-z, & \text{daca } x \leq a, \\ x, & \text{daca } a < x < b, \\ x+z, & \text{daca } x \geq b. \end{cases}$$

f este otono intre (R, \leq)
 și (R, \leq) (i.e., f este
 endomorfism al posetului (R, \leq)).
 (R, \leq) este lant, \Rightarrow (r. cursul)
 $\Rightarrow (R, \max, \min, \leq)$ este latică.

Am văzut în seminare că
 orice funcție izotonă intre un
 lant și o latică este
 morfism de latică, precum și
 că proprietatea care să generalizeze
 pe acesta, nume că orice
 funcție izotonă postrăză
 minime și maxime obținere.

Prin urmare, pentru orice $x, y \in R$, avem:
 $f(\min\{x, y\}) = \min\{f(x), f(y)\} \Rightarrow$
 și $f(\max\{x, y\}) = \max\{f(x), f(y)\}.$

$\Rightarrow f$ este morfism de lăție (endomorfism al lăției $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$).

Considerăm intervalul deschis $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \inf((a, b)) &= a; f(a) = a-1, \\ f((a, b)) &= (a, b). \Rightarrow \inf(f((a, b))) = \\ &= \inf((a, b)) = a. \end{aligned}$$

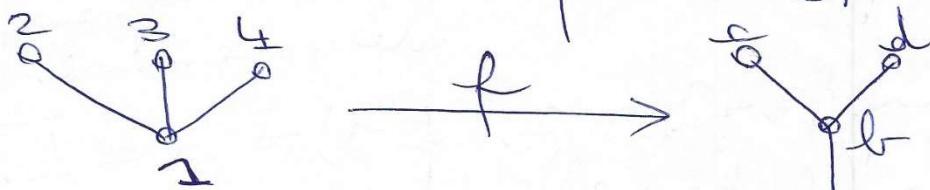
$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\inf((a, b))) &= a-1 < a = \\ &= \inf(f((a, b))), \\ \sup((a, b)) &= b; f(b) = b+1, \\ f((a, b)) &= (a, b). \Rightarrow \sup(f((a, b))) = \\ &= \sup((a, b)) = b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\sup((a, b))) &= b+1 > b = \\ &= \sup(f((a, b))). \end{aligned}$$

Obs.: Am demonstrat la seminar că orice morfism de poseturi păstrează infimumurile și supremurile arbitrare.

Exemplu de morfism injectiv de poseturi care nu este surjectiv și nici epi (prin dualizarea acestui exemplu se obține un morfism injectiv de poseturi care nu este surjectiv și nici epi):

Considerăm poseturile:



(A, \leq)

(B, \leq)

$$\text{zi } f: A \rightarrow B \xrightarrow{\quad u \quad} \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(u) & a & b & c & d \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ e injectivă} \\ f(1) \leq f(2) \\ f(1) \leq f(3) \\ f(1) \leq f(4) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ e izomorf.$$

Așadar, f este morfism injectiv de poseturi,

$f^{-1}: B \rightarrow A$ este deoarece

stabebul:	\emptyset	a	b	c	d
	$f^{-1}(\emptyset)$	1	2	3	4

$b \leq c$,
 $f^{-1}(b) = 2 \neq 3 = f^{-1}(c)$ (2 și 3 sunt incomparabile în (A, \leq)),

$\Rightarrow f^{-1}$ nu este bijectie, \Rightarrow

$\Rightarrow f$ nu este isomorfism de poseturi.

$$\inf\{3, 4\} = 1; f(1) = a < b,$$

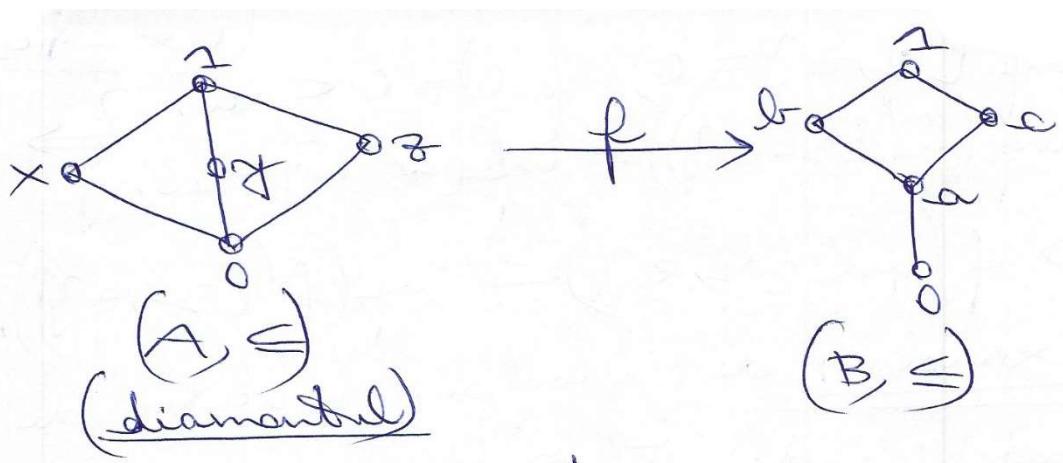
$$\inf(f(\{3, 4\})) = \inf\{c, d\} = b,$$

$$\Rightarrow f(\inf\{3, 4\}) < \inf(f(\{3, 4\})).$$

Exemplu de morfism injectiv de poseturi definit autre dans

Iatăci care nu possează
permutările de elemente
înnumere (implicit nu este morfism de lăție), studiindu-l, obținem o extenție de fct, care nu possează sup.) Considerăm lățiaile date de următoarele diagrame Hasse,

zi funcție date prin stabebul de mai jos:



$$f: A \rightarrow B, \frac{u}{f(u)} \begin{matrix} 0 \\ \hline x & y & z & 1 \end{matrix}$$

\Rightarrow f e injectivă.
 $\left. \begin{array}{l} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \\ f(0) \leq f(y) \leq f(1) \\ f(0) \leq f(z) \leq f(1) \end{array} \right\} \Rightarrow f$ este surjectivă.

Având f e morfism
 injectiv de poseturi (dor me e
 isomorfism de poseturi, pt. că
 me e isomorfism de lății;
 me e nici morfism de lății, sigur \Rightarrow decât e f
 morfism de lății, dându-i anumit
 e injectiv, e f isomorfism de lății).

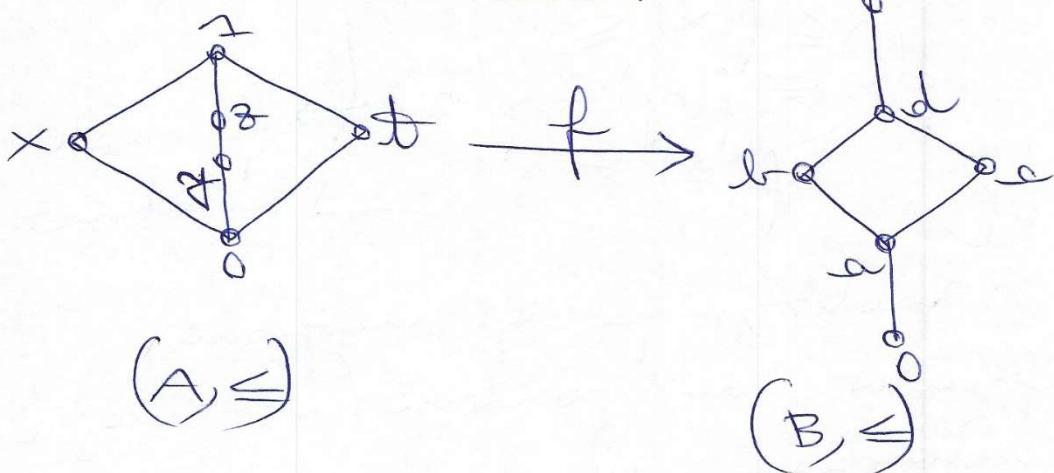
$$\inf\{x, z\} = 0; f(0) = 0 < a \rightarrow$$

$$\inf(f(\inf\{x, z\})) = \inf\{b, c\} = a,$$

$$\Rightarrow f(\inf\{x, z\}) < \inf(f(\inf\{x, z\})).$$

Exemplu de morfism bijectiv de poseturi definit între două lăcașe care nu postrage nici prechisură de elemente infiniturale, nici supremumurale!

Fie lăcașele:



dacă $f: A \rightarrow B$ este printr tabelul:

a	0	x	y	z	t	s	r
$f(a)$	b	b	a	d	c	e	f

$\Rightarrow f$ este bijectivă.
 $\Rightarrow \begin{cases} f(0) \leq f(x) \\ f(x) \leq f(y) \\ f(y) \leq f(z) \\ f(z) \leq f(t) \end{cases} \Rightarrow f$ este isotonică.

Avem, f este morfism injectiv de poseturi.

$$\inf\{x, t\} = 0; f(0) = 0 < a,$$

$$\inf(f(x, t)) = \inf\{b, c\} = a,$$

$$\Rightarrow f(\inf\{x, t\}) < \inf(f(x, t)).$$

$$\sup\{x, t\} = z; f(z) = z > d,$$

$$\sup(f(x, t)) = \sup\{b, c\} = d,$$

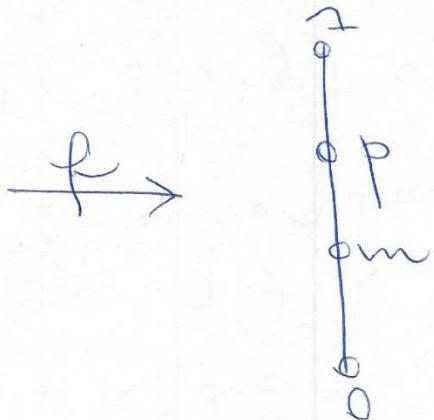
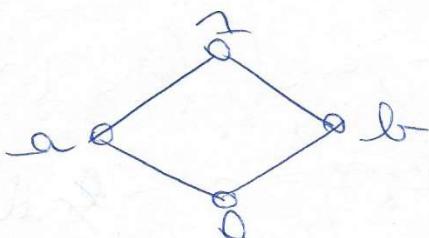
$$\Rightarrow f(\sup\{x, t\}) > \sup(f(x, t)).$$

Obs.: Evident că nu putem găsi un morfism injectiv de lăție care să nu poarte proprietatea infimale și sau supremale pentru că teorema de mai sus ne asigură de faptul că orice morfism injectiv de lăție este izomorfism de lăție, deci este izomorfism de poseturi, având proprietăți infimale și supremale arbitrară, conform

observației anterioare.

Acum să reluăm un exemplu de mai sus:

Exemplu de morfism bijectiv de poseturi definit între două lăbe distributive, care nu e morfism de lăbe:



L_2^2 (ombul)

(lăbe distributive)
 vom vedea că
 este chiar algebră
 Boole

L_4

(lăbe
distributive)

ce arde lant,
cu $\vee = \max$,
 $\wedge = \min$

x	0	a	b	1
$f(x)$	0	m	p	1

Evident, f e bijectiv. În L_2^2 even: $0 \leq a \leq 1$ și în L_4 even:
 $0 \leq b \leq 1$

$$f(0) = 0 \leq f(a) = m \leq f(b) = p \leq f(1) = b, \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ e isotone) adică f este
morfism de poseturi.
Deci f e morfism bijectiv de poseturi.

In L_2^2 even " $\begin{cases} a \vee b = 1 \\ a \wedge b = 0 \end{cases}$

In L_4 even und ~~wave~~:

$$\begin{cases} m \vee p = \max\{m, p\} = p \\ m \wedge p = \min\{m, p\} = m \end{cases}$$

Azadar: $f(a \wedge b) = f(0) = 0 \neq$
 $\neq m = m \wedge p = f(a) \wedge f(b)$, var
 $f(a \vee b) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p \neq$
 $\neq f(a) \vee f(b)$. Oricare dintre
 neegalitatile $f(a \wedge b) \neq$
 $\neq f(a) \wedge f(b)$ si $f(a \vee b) \neq$
 $\neq f(a) \vee f(b)$ arata ca f
 nu e morfism de latici.