

Seminar de Logică Matematică și Computațională

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

2022–2023, Semestrul I

Exercițiul 1. Există două triburi pe insula Tufa - Tu și Fa. Membrii tribului Tu spun întotdeauna adevărul, iar membrii tribului Fa mint întotdeauna. Un călător întâlnește trei băștinași - A , B , C . Fiecare dintre ei face o declarație călătorului:

- A spune: ” B și C spun adevărul dacă și numai dacă C spune adevărul”;
- B spune: ”dacă A și C spun adevărul atunci este fals faptul că A spune adevărul când B și C spun adevărul”;
- C spune: ” B minte dacă și numai dacă A sau B spun adevărul”.

Să se determine din ce triburi fac parte A , B , C :

- (1) prin calcul semantic în logica propozițională clasică;
- (2) printr-un program în Prolog.

Rezolvare: (1) Fie $a, b, c \in V$, două câte două distincte. Să instanțiem variabilele propoziționale a, b, c cu următoarele propoziții:

a : ” A spune adevărul”

b : ” B spune adevărul”

c : ” C spune adevărul”

Să notăm cu $\alpha, \beta, \gamma \in E$ enunțurile corespunzătoare afirmațiilor făcute de A , B , C :

$$\alpha = (b \wedge c) \leftrightarrow c$$

$$\beta = (a \wedge c) \rightarrow \neg((b \wedge c) \rightarrow a)$$

$$\gamma = \neg b \leftrightarrow (a \vee b)$$

Fie o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$. Conform notației din curs, $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ este unica prelungire a lui h la mulțimea E a tuturor enunțurilor care transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard \mathcal{L}_2 (lanțul cu exact 2 elemente, algebra booleană a valorilor de adevăr pentru logica clasică), și astfel calculează valorile de adevăr ale tuturor enunțurilor pe baza valorilor de adevăr pe care h le atribuie variabilelor propoziționale. (Amintesc că \tilde{h} este numită tot *interpretare/evaluare/semantică* și poate fi notată la fel ca h : restricția ei la mulțimea V a variabilelor propoziționale.)

Presupunem că h atribuie variabilelor propoziționale a , respectiv b , respectiv c valoarea $1 \in \mathcal{L}_2$ (reprezentând valoarea de adevăr ”adevărat”) ddacă A , respectiv B , respectiv C spune adevărul.

Afirmația făcută de A este adevărată ddacă A spune adevărul, prin urmare enunțurile α și a au aceeași valoare de adevăr în interpretarea h . La fel pentru enunțurile β și b , respectiv γ și c . Așadar:

$$\tilde{h}(\alpha) = h(a) = \tilde{h}(a), \text{ așadar } 1 = \tilde{h}(\alpha) \leftrightarrow \tilde{h}(a) = \tilde{h}(\alpha \leftrightarrow a);$$

$$\tilde{h}(\beta) = h(b) = \tilde{h}(b), \text{ așadar } 1 = \tilde{h}(\beta) \leftrightarrow \tilde{h}(b) = \tilde{h}(\beta \leftrightarrow b);$$

$$\tilde{h}(\gamma) = h(c) = \tilde{h}(c), \text{ așadar } 1 = \tilde{h}(\gamma) \leftrightarrow \tilde{h}(c) = \tilde{h}(\gamma \leftrightarrow c).$$

Acum putem proceda prin calcul boolean, sau putem considera toate valorile posibile pentru $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$:

$h(a)$	$h(b)$	$h(c)$	$\tilde{h}(\neg b)$	$\tilde{h}(a \vee b)$	$\tilde{h}(a \wedge c)$	$\tilde{h}(b \wedge c)$	$\tilde{h}(\alpha)$	$\tilde{h}(\beta)$	$\tilde{h}(\gamma)$	$\tilde{h}(\alpha \leftrightarrow a)$	$\tilde{h}(\beta \leftrightarrow b)$	$\tilde{h}(\gamma \leftrightarrow c)$
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0

Conform tabelului de mai sus, singurele interpretări h care satisfac $\tilde{h}(\alpha \leftrightarrow a) = \tilde{h}(\beta \leftrightarrow b) = \tilde{h}(\gamma \leftrightarrow c) = 1$ au următoarele valori în a, b, c : $h(a) = h(b) = 1$ și $h(c) = 0$. (Desigur, există o infinitate de astfel de interpretări, pentru că h poate lua orice valoare în orice variabilă propozițională din mulțimea infinită $V \setminus \{a, b, c\}$: valorile lui \tilde{h} în α, β, γ depind doar de valorile lui h în a, b, c .)

Așadar: A și B spun adevărul, iar C minte, deci A și B fac parte din tribul Tu, iar C din tribul Fa.

(2) Temă pentru laborator.

Exercițiul 2. Fie V mulțimea variabilelor propoziționale, iar E mulțimea enunțurilor logicii propoziționale clasice, și $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$. Demonstrați că, în logica propozițională clasică:

- (1) mulțimea $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \neg \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$ e nesatisfiabilă;
- (2) dacă $\vdash \alpha \vee \beta \vee \gamma$, atunci mulțimea $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$ e nesatisfiabilă;
- (3) dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, atunci mulțimea $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$ e satisfiabilă; să se rezolve această cerință:
 - demonstrând că această mulțime are un model;
 - prin tehnica rezoluției, în cazul în care variabilele propoziționale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt două câte două distincte;
- (4) în cazul în care $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ și sunt două câte două distincte, să se rezolve cerința de la punctul (1) și prin tehnica rezoluției.

La punctele (3) și (4), pentru a pune elementele mulțimii sau conjuncția lor în FNC, să se procedeze prin două metode:

- folosind proprietățile echivalenței semantice derivate din proprietăți booleene;
- folosind tabele semantice.

Rezolvare: Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ o interpretare arbitrară. Cu notația din curs, $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ va fi unica prelungire a lui h la E care transformă conectorii logici în operații booleene.

Vom folosi faptul că h , și deci \tilde{h} , poate lua orice valori booleene în elementele lui V , dar \tilde{h} nu poate lua orice valori booleene în elementele lui $E \setminus V$. (În orice tautologie va lua valoarea 1, iar, de exemplu, în negația oricărei tautologii va lua valoarea 0.)

(1) Presupunem prin absurd că $h \models \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \neg \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$, adică:

$h \models \alpha \rightarrow \beta$, adică $1 = \tilde{h}(\alpha \rightarrow \beta) = \tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\beta)$, așadar $\tilde{h}(\alpha) \leq \tilde{h}(\beta)$;

$h \models \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)$, i.e. $1 = \tilde{h}(\beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) = \tilde{h}(\beta) \rightarrow (\tilde{h}(\gamma) \wedge \tilde{h}(\delta))$, prin urmare $\tilde{h}(\beta) \leq \tilde{h}(\gamma) \wedge \tilde{h}(\delta)$;

$h \models \neg \beta \rightarrow \gamma$, i.e. $1 = \tilde{h}(\neg \beta \rightarrow \gamma) = \overline{\tilde{h}(\beta)} \rightarrow \tilde{h}(\gamma)$, deci $\tilde{h}(\beta) \leq \tilde{h}(\gamma)$;

$h \models \gamma \rightarrow \alpha$, i.e. $1 = \tilde{h}(\gamma \rightarrow \alpha) = \tilde{h}(\gamma) \rightarrow \tilde{h}(\alpha)$, așadar $\tilde{h}(\gamma) \leq \tilde{h}(\alpha)$;

$h \models \delta \rightarrow \neg \alpha$, i.e. $1 = \tilde{h}(\delta \rightarrow \neg \alpha) = \tilde{h}(\delta) \rightarrow \overline{\tilde{h}(\alpha)}$, prin urmare $\tilde{h}(\delta) \leq \overline{\tilde{h}(\alpha)}$.

În consecință, $\tilde{h}(\gamma) \leq \tilde{h}(\alpha) \leq \tilde{h}(\beta) \leq \tilde{h}(\gamma) \wedge \tilde{h}(\delta) \leq \tilde{h}(\delta) \leq \overline{\tilde{h}(\alpha)}$, deci $\tilde{h}(\alpha) \leq \overline{\tilde{h}(\alpha)}$. Cum $\tilde{h}(\alpha) \in \{0, 1\}$, rezultă că $\tilde{h}(\alpha) = 0$, așadar $\tilde{h}(\gamma) \leq 0$, deci $\tilde{h}(\gamma) = 0$, prin urmare $\tilde{h}(\gamma) \wedge \tilde{h}(\delta) = 0 \wedge \tilde{h}(\delta) = 0$, așadar $\tilde{h}(\beta) \leq 0$, deci $\tilde{h}(\beta) = 0$.

Dar $\overline{\tilde{h}(\beta)} \leq \tilde{h}(\gamma)$, deci $\overline{0} \leq 0$, adică $1 \leq 0$; contradicție. Prin urmare $h \not\models \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \neg \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$. Cum interpretarea h este arbitrară, rezultă că nicio interpretare nu satisface mulțimea de enunțuri $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \neg \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$, adică această mulțime este nesatisfiabilă.

(2) Presupunem că $\vdash \alpha \vee \beta \vee \gamma$. Atunci $\models \alpha \vee \beta \vee \gamma$ conform **Teoremei de Completitudine (TC)**, ceea ce înseamnă că orice interpretare satisface enunțul $\alpha \vee \beta \vee \gamma$. Așadar $h \models \alpha \vee \beta \vee \gamma$, adică $1 = \tilde{h}(\alpha \vee \beta \vee \gamma) = \tilde{h}(\alpha) \vee \tilde{h}(\beta) \vee \tilde{h}(\gamma)$, prin urmare: $\tilde{h}(\alpha) = 1$ sau $\tilde{h}(\beta) = 1$ sau $\tilde{h}(\gamma) = 1$.

Presupunem prin absurd că $h \models \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$, deci, folosind și calculele de la punctul (1):

$h \models \alpha \rightarrow \beta$, așadar $\tilde{h}(\alpha) \leq \tilde{h}(\beta)$;

$h \models \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)$, prin urmare $\tilde{h}(\beta) \leq \tilde{h}(\gamma) \wedge \tilde{h}(\delta)$;

$h \models \gamma \rightarrow \alpha$, așadar $\tilde{h}(\gamma) \leq \tilde{h}(\alpha)$;

$h \models \delta \rightarrow \neg \alpha$, prin urmare $\tilde{h}(\delta) \leq \overline{\tilde{h}(\alpha)}$.

Și aici rezultă că $\tilde{h}(\gamma) \leq \tilde{h}(\alpha) \leq \tilde{h}(\beta) \leq \tilde{h}(\gamma) \wedge \tilde{h}(\delta) \leq \tilde{h}(\delta) \leq \overline{\tilde{h}(\alpha)}$, deci $\tilde{h}(\alpha) \leq \overline{\tilde{h}(\alpha)}$, așadar $\tilde{h}(\alpha) = 0$, prin urmare $\tilde{h}(\gamma) = 0$. Conform celor de mai sus, rezultă că $\tilde{h}(\beta) = 1$. Dar atunci $1 = \tilde{h}(\beta) \leq \tilde{h}(\gamma) \wedge \tilde{h}(\delta) = 0 \wedge \tilde{h}(\delta) = 0$, deci $1 \leq 0$; contradicție. Așadar $h \not\models \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$.

Cum interpretarea h este arbitrară, rezultă că mulțimea $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$ e nesatisfiabilă.

(3) Presupunem că α, β, γ și δ sunt variabile propoziționale.

Prima metodă: Cum $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, rezultă că există (chiar o infinitate de) interpretări $g : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ care iau în $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valorile: $g(\alpha) = g(\beta) = g(\gamma) = g(\delta) = 0$.

Cu notația din curs, rezultă că orice astfel de interpretare satisface:

$\tilde{g}(\alpha \rightarrow \beta) = \tilde{g}(\alpha) \rightarrow \tilde{g}(\beta) = 0 \rightarrow 0 = 1$, așadar $g \models \alpha \rightarrow \beta$;

$\tilde{g}(\beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) = \tilde{g}(\beta) \rightarrow (\tilde{g}(\gamma) \wedge \tilde{g}(\delta)) = 0 \rightarrow (0 \wedge 0) = 0 \rightarrow 0 = 1$, prin urmare $g \models \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)$;

$\tilde{g}(\gamma \rightarrow \alpha) = \tilde{g}(\gamma) \rightarrow \tilde{g}(\alpha) = 0 \rightarrow 0 = 1$, așadar $g \models \gamma \rightarrow \alpha$;

$\tilde{g}(\delta \rightarrow \neg \alpha) = \tilde{g}(\delta) \rightarrow \overline{\tilde{g}(\alpha)} = 0 \rightarrow \overline{0} = 0 \rightarrow 1 = 1$, prin urmare $g \models \delta \rightarrow \neg \alpha$.

Așadar $g \models \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$, prin urmare această mulțime de enunțuri e satisfiabilă.

A se observa faptul că g are aceeași valoare în $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, așadar aici nu avem nevoie ca variabilele propoziționale $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ să fie două câte două distincte.

Metoda rezoluției: Amintesc definiția echivalenței semantice: $\sim = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi, \psi \in E, \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\} \in \text{Eq}(E)$ (cu notația din curs pentru mulțimea relațiilor de echivalență pe o mulțime; aici, pe mulțimea E a enunțurilor logicii propoziționale clasice). Conform **TC**, rezultă că, pentru orice enunțuri φ, ψ , avem: $\varphi \sim \psi$ dacă și numai dacă $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă, oricare ar fi interpretarea $g : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, are loc $1 = \tilde{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{g}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{g}(\psi)$, deci $\tilde{g}(\varphi) = \tilde{g}(\psi)$.

Pentru a aplica tehnica rezoluției, trebuie să punem fiecare element al mulțimii $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$ în **formă normală conjunctivă (FNC)**, adică trebuie să găsim enunțuri φ, ψ, χ, ξ în FNC astfel încât: $\varphi \sim \alpha \rightarrow \beta, \psi \sim \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \chi \sim \gamma \rightarrow \alpha$ și $\xi \sim \delta \rightarrow \neg \alpha$.

PRIMA METODĂ PENTRU PUNEREA ACESTOR ENUNȚURI ÎN FNC:

$\alpha \rightarrow \beta \sim \neg \alpha \vee \beta$;

$\beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta) \sim \neg \beta \vee (\gamma \wedge \delta) \sim (\neg \beta \vee \gamma) \wedge (\neg \beta \vee \delta)$;

$\gamma \rightarrow \alpha \sim \neg \gamma \vee \alpha$;

$\delta \rightarrow \neg \alpha \sim \neg \delta \vee \neg \alpha$.

Cum $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, rezultă că enunțurile $\neg \alpha \vee \beta, (\neg \beta \vee \gamma) \wedge (\neg \beta \vee \delta), \neg \gamma \vee \alpha$ și $\neg \delta \vee \neg \alpha$ sunt în FNC.

Așadar mulțimea de enunțuri $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg \alpha\}$ este echivalentă cu enunțul în FNC:

$\varepsilon = (\neg \alpha \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee \gamma) \wedge (\neg \beta \vee \delta) \wedge (\neg \gamma \vee \alpha) \wedge (\neg \delta \vee \neg \alpha)$,

adică această mulțime e satisfiabilă ddacă ε e satisfiabil. Considerăm **forma clauzală** a lui ε : enunțul ε este echivalent cu mulțimea de clauze: $\{\{\neg \alpha, \beta\}, \{\neg \beta, \gamma\}, \{\neg \beta, \delta\}, \{\neg \gamma, \alpha\}, \{\neg \delta, \neg \alpha\}\}$.

Pentru a conchide că această mulțime de clauze e **satisfiabilă**, trebuie să efectuăm **toate derivările posibile prin rezoluție** ale acestei mulțimi și să constatăm că în niciuna dintre aceste derivări nu apare clauza vidă \square . O altă posibilitate, echivalentă cu a efectua toate derivările prin rezoluție, este să aplicăm **algoritmul Davis–Putnam**. Vom proceda prin această a doua metodă, indicând la fiecare pas variabila propozițională care va fi eliminată din clauzele curente.

$\{\neg\alpha, \beta\}, \{\neg\beta, \gamma\}, \{\neg\beta, \delta\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}$ (alegem δ)
$\{\neg\alpha, \beta\}, \{\neg\beta, \gamma\}, \{\neg\beta, \neg\alpha\}, \{\neg\gamma, \alpha\}$ (alegem γ)
$\{\neg\alpha, \beta\}, \{\neg\beta, \alpha\}, \{\neg\beta, \neg\alpha\}$ (alegem β)
$\{\neg\alpha, \alpha\}, \{\neg\alpha\}$ (eliminăm clauza trivială $\{\neg\alpha, \alpha\}$)
$\{\neg\alpha\}$
\emptyset

Nu am obținut **clauza vidă** \square , așadar enunțul ε e **satisfiabil**, deci mulțimea de enunțuri $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ e **satisfiabilă**.

A DOUA METODĂ: vom pune conjuncția $\varphi = (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) \wedge (\gamma \rightarrow \alpha) \wedge (\delta \rightarrow \neg\alpha)$ a enunțurilor din această mulțime în FNC folosind un tabel semantic.

Desigur, cu notația de mai sus, $\varepsilon \sim \varphi$, dar ε nu este singura FNC echivalentă semantic cu φ .

$h(\alpha)$	$h(\beta)$	$h(\gamma)$	$h(\delta)$	$\tilde{h}(\alpha \rightarrow \beta)$	$\tilde{h}(\beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta))$	$\tilde{h}(\gamma \rightarrow \alpha)$	$\tilde{h}(\delta \rightarrow \neg\alpha)$	$\tilde{h}(\varphi)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1

Tabelul semantic de mai sus ne dă următoarea FNC, care poate fi redusă folosind următoarea proprietate booleană: pentru orice $\zeta, \xi \in E$, $(\zeta \vee \xi) \wedge (\zeta \vee \neg\xi) \sim \zeta \vee (\xi \wedge \neg\xi) \sim \zeta$:

$\varphi \sim (\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma \vee \delta) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma \vee \neg\delta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \vee \delta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \vee \neg\delta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \vee \delta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \vee \delta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \vee \neg\delta) \sim (\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma) \wedge (\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \vee \delta)$.

Desigur, având tabelul semantic de mai sus, nu mai avem nevoie să efectuăm derivări prin rezoluție, pentru că acest tabel arată că: $h \models \varphi$ ddacă $(h(a), h(b), h(c), h(d)) \in \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$, așadar φ e satisfiabil, deci mulțimea $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ e **satisfiabilă**, având ca modele toate interpretările cu valorile de mai sus în a, b, c și d (și valori arbitrare în orice $v \in V \setminus \{a, b, c, d\}$, deci o infinitate de modele).

Observația 1. Cum toate enunțurile sunt de lungime finită (i.e. cuvinte finite peste alfabetul logicii propoziționale), așadar fiecare enunț conține doar un număr finit de variabile propoziționale, în timp ce mulțimea V a variabilelor propoziționale este infinită, iar valoarea unei interpretări într-un enunț nu depinde decât de

variabilele care apar în acel enunț, rezultă că orice **enunț satisfiabil**, și implicit orice **mulțime finită de enunțuri satisfiabilă** are **o infinitate de modele**.

(4) Aici e suficient să găsim **o singură derivare prin rezoluție** în care apare **clauza vidă** \square pentru a conchide că mulțimea e **nesatisfiabilă**.

Desigur, având tabelul anterior, e suficient să observăm că $(h(a), h(b), h(c), h(d)) \in \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ implică $h \not\models \neg\beta \rightarrow \gamma$, așadar nicio interpretare nu satisface mulțimea $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \neg\beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg\alpha\}$. Dar să aplicăm tehnica rezoluției, conform cerinței de la acest punct.

Cum $\neg\beta \rightarrow \gamma \sim \beta \vee \gamma$, conform rezolvării punctului (3) rezultă că o FNC echivalentă semantic cu mulțimea $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \neg\beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ este $\psi = (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\beta \vee \delta) \wedge (\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\gamma \vee \alpha) \wedge (\neg\delta \vee \neg\alpha)$, având forma clauzală: $\{\{\neg\alpha, \beta\}, \{\neg\beta, \gamma\}, \{\neg\beta, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}\}$.

În următoarele derivări prin rezoluție pentru mulțimea de clauze de mai sus, voi marca literalii folosiți la fiecare pas. Dacă luăm mereu prima pereche de literali utilizabilă din stânga, atunci obținem următoarea derivare:

$$\begin{array}{c}
\frac{\{\neg\alpha, \beta\}, \{\neg\beta, \gamma\}, \{\neg\beta, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}}{\frac{\{\neg\alpha, \gamma\}, \{\neg\beta, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}}{\frac{\{\neg\alpha, \cancel{\beta}\}, \{\delta, \gamma\}, \{\neg\cancel{\gamma}, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}}{\frac{\{\neg\alpha, \alpha\}, \{\delta, \gamma\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}}{\text{eliminăm clauza trivială } \{\neg\alpha, \alpha\}} \quad \{\delta, \gamma\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}} \quad \{\gamma, \neg\alpha\}}
\end{array}$$

Nu am întâlnit clauza vidă în această derivare, dar nu putem conchide că mulțimea e satisfiabilă până nu efectuăm **toate derivările prin rezoluție** (sau aplicăm **algoritmul Davis–Putnam**).

Iată o derivare prin rezoluție în care apare **clauza vidă** \square :

$$\begin{array}{c}
\frac{\{\neg\alpha, \beta\}, \{\neg\beta, \gamma\}, \{\neg\beta, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}}{\frac{\{\neg\alpha, \delta\}, \{\neg\beta, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\delta, \neg\alpha\}}{\frac{\{\neg\alpha, \cancel{\delta}\}, \{\gamma\}, \{\neg\gamma, \alpha\}, \{\neg\cancel{\delta}, \neg\alpha\}}{\frac{\{\neg\cancel{\alpha}\}, \{\gamma\}, \{\neg\gamma, \cancel{\alpha}\}}{\frac{\{\neg\cancel{\gamma}\}, \{\cancel{\gamma}\}}{\square}}
\end{array}$$

Derivarea de mai sus este suficientă pentru a concluziona că mulțimea de enunțuri $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta), \neg\beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ e **nesatisfiabilă**, dar, ATENȚIE: **tehnica rezoluției** nu poate fi aplicată mai sus decât dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$! Observați tehnica rezoluției aplicată la punctul (3) pentru cazul $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, care nu acoperă și cazul de la punctul (2)! În plus, variabilele trebuie să fie două câte două distincte pentru a aplica rezoluția, pentru că altfel unele clauze folosite în regula rezoluției ar putea fi triviale.