

# Operații cu Numere Cardinale

## SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Claudia MUREŞAN, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București, Facultatea de Matematică și Informatică

Semestrul I, 2023-2024

Exerc. Definițiile sumei, respectiv produsului, respectiv puterii de cardinale sunt uimitoriale, și multumite  $\rightarrow B$

$$|A| + |B| := |A \sqcup B|,$$

$$|A| \cdot |B| := |A \times B|;$$

$$\bigcup_{i=1}^{|B|} |A| := |B^A|,$$

$$\text{unde } B^A := \{ f \mid f : A \rightarrow B \}.$$

Se demonstrează că aceste definiții sunt independente de reprezentările.

REZOLVARE:

Fe  $\rightarrow B$ ,  $A, A'$ ,  $B, B'$  multimi s.d.

$$|A| = |A'| \Rightarrow |B| = |B'|, \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \cong A' \Rightarrow B \cong B', \quad \text{sunt bijective.}$$

Aren't we demonstrating

$$|A \sqcup B| = |A' \sqcup B'|, |A \times B| = |A' \times B'|$$

$$|B^A| = |B'^{A'}|$$

$A \sqcup B \cong A' \sqcup B'$ ,  $A \times B \cong A' \times B'$

$B^A \cong B'^{A'}$

Let's consider some injective functions:

$$A \xrightarrow{\varphi} A' \text{ and } B \xrightarrow{\psi} B'$$

so consider  $A \sqcup B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$

and  $A' \sqcup B' = (A' \times \{1\}) \cup (B' \times \{2\})$

$$= \{(a, 1) \mid a \in A\} \cup \{(b, 2) \mid b \in B\},$$

$$= \{(a', 1) \mid a' \in A'\} \cup \{(b', 2) \mid b' \in B'\}.$$

Define function  $f$ :

$$A \sqcup B \xrightarrow{f} A' \sqcup B'$$

such that

$$(a \in A)(f(a, 1) := (\varphi(a), 1))$$

$$(b \in B)(f(b, 2) := (\psi(b), 2))$$

$f$  is injective.

$$\begin{aligned}
 & (\forall a' \in A) (f(q^{-1}(a')), 1) = \\
 & = (q(q^{-1}(a')), 1) = (a', 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\forall b' \in B) (f(\psi^{-1}(b')), 2) = \\
 & = (\psi(\psi^{-1}(b')), 2) = (b', 2).
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$  e surjetiva. (\*).

Se  $(x, i), (y, j) \in A \sqcup B$ ,  
 s.t.  $f(x, i) = f(y, j)$ .

$$f(x, i) = \begin{cases} (q(x), 1) & \text{de. } i=1 \\ (\psi(x), 2) & \text{de. } i=2 \end{cases}$$

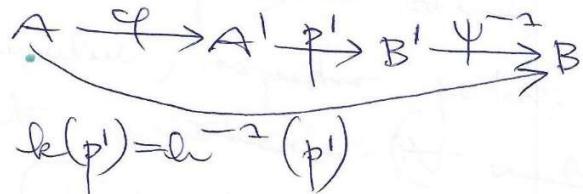
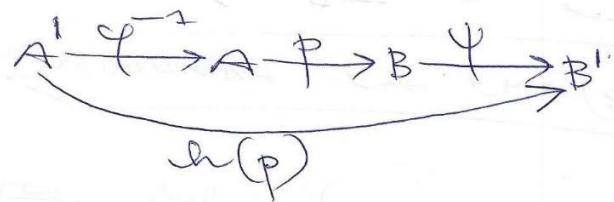
$$f(y, j) = \begin{cases} (q(y), 1) & \text{de. } j=1 \\ (\psi(y), 2) & \text{de. } j=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow i = \overline{j}.$$

Since  $i = j = 1$ , it  $\Rightarrow x, y \in A$

$$\begin{aligned}
 & (q(x), 1) = f(x, i) = f(y, j) = \\
 & = (\psi(y), 2) \Rightarrow q(x) = \psi(y) \Rightarrow x = y \\
 & (q(x), 1) = f(x, i) = f(y, j) = (\psi(y), 2) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \psi(x) = \psi(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{矛盾.}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x, i) = (y, j) \Rightarrow f \text{ e injetiva. } (*)$   
 $(*) , (\star) \Rightarrow f \text{ e bijetiva. } \Rightarrow$   
 $\Rightarrow A \times B \cong A' \times B', \text{ s.p.g.} =$   
 $\leftarrow$   
 Fe  $g: A \times B \rightarrow A' \times B'$ ,  $(\forall a \in A)$   
 $(\forall b \in B)(g(a, b) := (\varphi(a), \psi(b))),$   
 $(\forall (a, b) \in A \times B')$   
 $(g(\varphi^{-1}(a'), \psi^{-1}(b')) =$   
 $= (\varphi(\varphi^{-1}(a')), \psi(\psi^{-1}(b'))) =$   
 $= (a, b'), \Rightarrow g \text{ e surjetiva. } (\star \star)$   
 $\leftarrow$   
 Fe  $(a, b), (x, y) \in A \times B$ ,  $\exists \alpha,$   
 $g(a, b) = g(x, y) \Leftrightarrow (\varphi(a), \psi(b)) =$   
 $= (\varphi(x), \psi(y)), \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(a) = \varphi(x) \Leftrightarrow a = x \\ \psi(b) = \psi(y) \Leftrightarrow b = y \end{cases}$   
 $\Rightarrow (a, b) = (x, y), \Rightarrow g \text{ e injetiva. } (\star \star \star)$   
 $(\star \star), (\star \star \star) \Rightarrow g \text{ e bijetiva. } \Rightarrow$   
 $\Rightarrow A \times B \cong A' \times B',$



Definir Funktion  $h: B^A \rightarrow B'^{A'}$ ,  
 $(\forall p \in B^A)(h(p) := \psi \circ p \circ \varphi^{-1})$ ,

precum  $\exists$  Funktion  $k: B'^{A'} \rightarrow B^A$   
 $(\forall p' \in B'^{A'})(k(p') := \psi^{-1} \circ p' \circ \varphi)$ .

$h$  und  $k$  sind inverse  
umkehrbar.

$$\begin{aligned}
 & (\forall p \in B^A)(k(h(p)) = \underbrace{\psi^{-1} \circ \psi \circ p \circ \varphi^{-1} \circ \varphi}_{= p},) \\
 & (\forall p' \in B'^{A'})(h(k(p')) = \underbrace{\psi \circ \psi^{-1} \circ p' \circ \varphi \circ \varphi^{-1}}_{= p'}), \\
 & \Rightarrow k = h^{-1}, \Rightarrow h \text{ e invertible, deci}
 \end{aligned}$$

bijectiva.  $\Rightarrow B^A \cong B'^{A'}$

## MATERIAL FACULTATIV: calcul de cardinale

Prop. (Principul Includerii și Excluderii)

Excluderii:  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $M_1, \dots, M_n \rightarrow$  multimi finite.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & |\bigcup_{i=1}^n M_i| = \sum_{i=1}^n |M_i| - \\
 & - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \\
 & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \\
 & - \dots + (-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap \dots \cap M_n| = \\
 & = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}|
 \end{aligned}$$

$$|\dots \cap M_{i_k}|$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \left| \bigcap_{i=1}^n M_i \right| = \sum_{i=1}^n |M_i| - \\
 & - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cup M_j| + \\
 & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \dots \\
 & + (-1)^{n-2} \cdot |M_1 \cup \dots \cup M_n| = \\
 & = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} \\
 & \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots \cup M_{i_k}|.
 \end{aligned}$$

Dem. (b) se dem analog  
zu (a), der unterschiedl. U

zu P. an dem. lte (a),

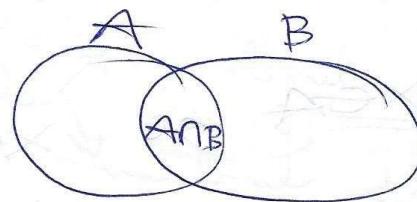
Von dem. (a) von dann (frei)  
methode,

(a)  $\rightarrow$  METHODA I:  
Folium festig + multmole

finite A și B, are loc egalitatea:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \text{ ceea ce}$$

se poate demonstra mai multe moduri:



- intuitiv:

- folosind diagrame de noi sau pentru a observa faptul că:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = \\ &= (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

reuniri disjuncte, după cum se poate observa prin analiza elementelor celor 3 termeni și fiecare reunire.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |A \cup B| &= |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| \\ &= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| = \end{aligned}$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B|.$$

• followed formula to find  
 $x(A \cup B)$  see often in exact  
 same structure some have 4 (main  
 structure) 3 does  
 $x(A \cup B)$

(1)  $x \notin A \Rightarrow x \in B$ , cos in

core  $\times$  contribute in problem  
 per core  $\Rightarrow$  demonstration to

membrane stay in 1;

membrane dept in  $1+1-1=1$

(2)  $x \notin A \Rightarrow x \in B$ , cos in

core  $\times$  contribute in

membrane stay in 1;

membrane dept in  $1+0-0=1$

(3)  $x \notin A \Rightarrow x \in B$ , cos in / core

$\times$  contribuie la membrul stang cu 1  
 $\rightarrow$  membrul drept cu  $0 + 1 - 0 = 1$   
 (4)  $x \notin A \wedge x \notin B$ , deci nu care

$\times$  contribuie la membrul stang cu 0;  
 $\rightarrow$  membrul drept cu  $0 + 0 - 0 = 0$   
 $\Rightarrow$  egalitatea  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$   
 este valabilă.

folosind funcții caracteristice (se vede un Urc(c) și un Urc(s))  
 $T = A \cup B \Rightarrow (\forall x \in T)(x =$   
 și fct. caracteristică a lui  $x$   
 raportă la  $T$ ), sau:  $(\forall x \in T)$   
 $|T| = \sum_{x \in T} x(\alpha)$ , iar  $x =$   
 $A \cup B$

$$= X_A + X_B - X_{A \cap B}, \text{ since}$$

$$(\forall x \in T) (X_{A \cup B}(x) = X_A(x) +$$

$$+ X_B(x) - X_{A \cap B}(x)) \text{ prin urmare:}$$

$$|A \cup B| = \sum_{x \in T} X_{A \cup B}(x) =$$

$$= \sum_{x \in T} (X_A(x) + X_B(x) - X_{A \cap B}(x))$$

$$= \sum_{x \in T} X_A(x) + \sum_{x \in T} X_B(x) -$$

$$- \left( \sum_{x \in T} X_{A \cap B}(x) \right) = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Principiu de demonstrare  
principiu-exclusivitatem

$\exists$  d'Exclusivitate Principiu Includerii

$\exists$  d'Inclusivitate Principiu Exclusivitatem

Procedură prin inducție după

$n \in \mathbb{N}^*$ .

$n=1 \vdash |M_1| = |M_2| \rightarrow$  este evident,

$n=2 \rightarrow n \geq 2 \vdash P_p \text{ și } n \geq 2$

Si identitatea este valabila  
 $n-2$  multimi. pt.  
 Atunci vom folosi egalitatea  
 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$  stabilita  
 numai sus.

$$\begin{aligned}
 & |M_1 \cup \dots \cup M_n| = \\
 &= |(M_1 \cup \dots \cup M_{n-1}) \cup M_n| = \\
 &= |M_1 \cup \dots \cup M_{n-1}| + |M_n| - \\
 &\quad - |(M_1 \cup \dots \cup M_{n-1}) \cap M_n| \text{ (distributiv)} \\
 &= |M_1 \cup \dots \cup M_{n-1}| + |M_n| - \\
 &\quad - \left| \bigcup_{i=1}^{n-2} (M_i \cap M_n) \right| \text{ (ipoteza de inducere)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-2} (-1)^{k-1} \cdot \left| \bigcap_{j=1}^k M_{i_j} \right| + \\
 &+ |M_n| + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-2} (-1)^k \\
 &\cdot \left| \bigcap_{j=1}^k (M_{i_j} \cap M_n) \right|
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} (-1)^{k-1} \cdot \left| \prod_{j=1}^k M_{i_j j} \right|$$

$$+ |M_n| + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} (-1)^k$$

$$\cdot \left| \prod_{j=1}^k M_{i_j j} \cap M_n \right| = (-1)^{k+1-1}$$

poate da suma totală  
în indicii  $\leq n-1$

poate da  
suma totală  
în  
spate  
indicele  $n$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} \cdot \left| \prod_{j=1}^k M_{i_j j} \right|$$

$\Rightarrow$  Identitatea este valabilă  
în orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a)

METHODE A II - A:  
se adună considerând elementele  $x$  din  $UM_i$  la randul de la mijlocul momentului spălător, fără

Presupunem că  $x$  aparține la  $k$  dintre cele  $n$  multimi  $M_1, \dots, M_n$   
cu  $k \in \overline{1, n}$ , de exemplu  $x$  aparține numai multimilor  $M_1, \dots, M_k$   
cu  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

Pentru fiecare  $\sigma \in I_{k,n}$ , dintr-un intersectie a  $\sigma$  multimi distincte  
 dintre  $M_1, \dots, M_n$ ,  $x$  se afla in  
 cele mai multe multimi care se  
 intersecteaza  $\sigma$  si se numita  
 multimea  $M_{\sigma(1)} \cap \dots \cap M_{\sigma(k)}$  adica in  
 exact  $C_{k,n}^{\sigma}$  dintr-un numar de  
 intersectii.

Pentru fiecare  $\sigma \in I_{k+1,n}$ ,  
 $x$  nu se afla in niciuna  
 dintr-un intersectie a  $\sigma$  multimi  
 distincte dintre  $M_1, \dots, M_n$ .

$\Rightarrow x$  contribuie la  $\sum_{\sigma \in I_{k+1,n}} (-1)^{n-k}$

coordonatelor  
 membrului secundar din  
 cu  $I_j$  identitatei

sunt din membrul drept  
 identitatei cu  $\sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} \cdot C_{k,s}^{\sigma} =$

$$= 1 - (1-1)^k = 1 - 0 = 1, \quad s=1$$

$(-1)^0 \cdot C_{k,0}^{\sigma}$

$\Rightarrow$  Identitatea este satisfăcută.

(a)

$\rightarrow$  METODA A III - A =  
 $\frac{1}{M} \text{ Not } T := M_1 \cup \dots \cup M_n \quad (\forall x \in T)(x \in M_i \text{ fct. exacte a lui } X \text{ rap. la } T)$   
 folosind identitatea  $X = X_A \cup X_B = X_A + X_B - X_{A \cap B}$   
 $\forall A, B \in P(T)$   
 prin un retrasament  
 după număr\* similar cu scela  
 de la METODA I, se demonstrează

$$X_{\bigcup_{k=1}^n M_k} = \sum_{k=1}^n \sum_{x \in c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq n} (-1)^k$$

$X_{\bigcup_{j=1}^n M_{ij}}$  spot se folosește faptul  
 $\forall X \subseteq T \quad |X| = \sum_{x \in X} X_X(x)$

Pt. fct. caracteristică v. următoare

Numerele naturale, întregi, rationale, reale etc. și operațiile cu acestea pot fi definite pornind de la numerele cardinale și operațiile cu acestea: de exemplu, puterile naturale ale numerelor naturale pot fi definite ca numere cardinale ale unor mulțimi de funcții, ca în curs.

În următorul exercițiu, adoptăm punctul de vedere naiv și, pe baza operațiilor cu numere naturale cunoscute din învățământul preuniversitar, calculăm numărul funcțiilor care se pot defini între două mulțimi finite, apoi pe cel al funcțiilor bijective, injective, surjective între aceleași mulțimi.

In următorul exercițiu vom calcula numărul de funcții precum și numărul de funcții bijective, injective și surjective între două mulțimi finite numere.

Pentru orice multime  $M$ , vom nota cu  $|M|$  cardinalul lui  $M$ .

Exerc.:  $A, B \rightarrow$  mulțimi,  
 (i)  $|A| = a \in \mathbb{N}^*$ ,  $|B| = b \in \mathbb{N}^*$

Să se demonstreze că cardinalul lui  $\left| \{f | f: A \rightarrow B\} \right| = b^a$

(deci  $|BA| = b^a$ )  
 $= |B|^{|A|}$

$$(ii) |\{f \mid f: A \rightarrow B, f \text{ injectiv}\}| =$$

$$= \begin{cases} a!, & \text{dacă } a = b, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

$$(iii) |\{f \mid f: A \rightarrow B, f \text{ injectiv}\}| =$$

$$= \begin{cases} A^a = \frac{b!}{(b-a)!}, & \text{dacă } a \leq b, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

arranjamente  
de  $b$  luate cate  $a$

$$(iv) |\{f \mid f: A \rightarrow B, f \text{ surjectiv}\}| =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{dacă } a < b, \\ b^a - C_b^1 (b-1)^{a-1} + C_b^2 (b-2)^{a-2} \\ - \dots + (-1)^{b-1} \cdot C_b^{b-1} = \\ = \sum_{i=0}^{b-1} (-1)^i \cdot C_b^i \cdot (b-i)^{a-i}, & \text{dacă } a \geq b, \end{cases}$$

$\frac{b!}{(b-i)! \cdot i!}$  notată  $\binom{b}{i}$ ,  
combinări de  $b$  luate cate  $i$

REZOLVARE:

Pentru orice multimi finite  $A$ .

nu este  $X \geq Y$ , cu  $|X| = n \in N^*$   
 și  $|Y| = y \in N^*$ , notăm că:

$$N(\rightarrow y) := |\{f \mid f: X \rightarrow Y\}|;$$

$$\text{NBij } (\rightarrow y) := |\{f \mid f: X \rightarrow Y, \\ f \rightarrow \text{bijectiv}\}|;$$

$$\text{Ninj } (\rightarrow y) := |\{f \mid f: X \rightarrow Y, \\ f \rightarrow \text{injectiv}\}|;$$

$$\text{Nsurj } (\rightarrow y) := |\{f \mid f: X \rightarrow Y, \\ f \rightarrow \text{surjectiv}\}|,$$

Notatiile sunt corecte, în  
 sensul că nu depind de  
 reprezentările claselor de multimi  
 de cardinal  $\rightarrow$  respectiv  $y$ ,  
 adică nu depind de  
 multimiilor  $X, Y$  cu  $|X| = n$   
 și  $|Y| = y$ .

Într-o altă parte, pentru orice multimi  $X', Y'$ , cu  $|X'| = \infty$  și  $|Y'| = \infty$ , avem:

$$\begin{cases} |X| = |X'| \Leftrightarrow \exists \text{ surjectie } q: X \rightarrow X' \\ |Y| = |Y'| \Leftrightarrow \exists \text{ surjectie } \psi: Y \rightarrow Y' \end{cases}$$

$X' \xrightarrow{q} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\psi} Y'$   
dacă notăm cu:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(X, Y) := \{f \mid f: X \rightarrow Y\}, \\ \mathcal{B}(X, Y) := \{f \mid f: X \rightarrow Y, f \text{ bijectiv}\}, \\ \mathcal{I}(X, Y) := \{f \mid f: X \rightarrow Y, f \text{ injectiv}\}, \\ \mathcal{S}(X, Y) := \{f \mid f: X \rightarrow Y, f \text{ surjectiv}\} \end{cases}$$

și la fel pentru  $X'$  și  $Y'$ ,  
stăruim este evident și urmă de demonstrație:

- funcția  $\ln_{\mathcal{F}}: \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathcal{F}(X', Y')$ ,  
definită prin:  $(\forall f \in \mathcal{F}(X, Y)) \ln_{\mathcal{F}}(f) := \psi \circ f \circ q$ . Este corect definită și

injectivă) cu inversă  $h_{\mathcal{F}}^{-1} : \mathcal{F}(X'Y)$   
 $\rightarrow \mathcal{F}(XY), (\forall g \in \mathcal{F}(X'Y')) (h_{\mathcal{F}}^{-1}(g) =$   
 $= \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1})$ , unde  $\varphi^{-1}$  și  
 $\psi^{-1}$  sunt inversele injectivilor  
 și respectiv  $\psi$  (pt. că  $h_{\mathcal{F}}^{-1} \circ h_{\mathcal{F}}$   
 este  $\text{id}_{\mathcal{F}(XY)}$  și  $h_{\mathcal{F}} \circ h_{\mathcal{F}}^{-1}$   
 este  $\text{id}_{\mathcal{F}(X'Y')}$ )  
 • funcția  $h_B : B(XY) \rightarrow B(X'Y')$   
 definită prin:  $(\forall f \in B(XY))$   
 $(h_B(f)) := \psi \circ f \circ \varphi \in B(X'Y')$   
 este corectă definită și injectivă  
 cu inversă  $h_B^{-1} : B(X'Y') \rightarrow B(XY)$   
 $(\forall g \in B(X'Y')) (h_B^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1})$   
 • funcția  $h_J : J(XY) \rightarrow J(X'Y')$   
 definită prin:  $(\forall f \in J(XY))$   
 $(h_J(f)) := \psi \circ f \circ \varphi \in J(X'Y')$  este  
 corectă definită și injectivă  
 cu inversă  $h_J^{-1} : J(X'Y') \rightarrow J(XY)$

$$(\forall g \in \mathcal{G}(X,Y)) (\text{In}_{\mathcal{G}}^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1}),$$

• funcție  $\text{In}_{\mathcal{G}}: \mathcal{G}(X,Y) \rightarrow \mathcal{G}(X',Y')$ ,  
 definită printru:  $(\forall f \in \mathcal{G}(X,Y)) (\text{In}_{\mathcal{G}}(f) :=$   
 $\psi \circ f \circ \varphi \in \mathcal{G}(X',Y'))$  este corect  
 definită și bijectivă, cu inverse  
 $\text{In}_{\mathcal{G}}^{-1}: \mathcal{G}(X',Y') \rightarrow \mathcal{G}(X,Y), (\forall g \in$   
 $\mathcal{G}(X',Y')) (\text{In}_{\mathcal{G}}^{-1}(g) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi^{-1}).$

Așadar, sună astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(X,Y) \xrightarrow{\text{In}_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}(X',Y'), \Rightarrow \\ \Rightarrow N(\mathcal{F}) = |\mathcal{F}(X,Y)| = |\mathcal{F}(X',Y')| \\ \mathcal{B}(X,Y) \xrightarrow{\text{In}_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}(X',Y'), \Rightarrow \\ \Rightarrow NB(\mathcal{B}) = |\mathcal{B}(X,Y)| = |\mathcal{B}(X',Y')| \\ \mathcal{P}(X,Y) \xrightarrow{\text{In}_{\mathcal{P}}} \mathcal{P}(X',Y'), \Rightarrow \\ \Rightarrow NP(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}(X,Y)| = |\mathcal{P}(X',Y')| \\ \mathcal{G}(X,Y) \xrightarrow{\text{In}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}(X',Y'), \Rightarrow \\ \Rightarrow NG(\mathcal{G}) = |\mathcal{G}(X,Y)| = |\mathcal{G}(X',Y')| \end{array} \right.$$

Bu definitie, avem:

$|A| = |B| \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ bijectie } f: A \rightarrow B;$   
 (exist pe care l-am folosit  
 și mai sus)

$|A| \leq |B| \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ injectie } f: A \rightarrow B;$   
 $|A| \geq |B| \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ surjectie } f: A \rightarrow B,$

În acest caz fizic și  
 număr, în ceea ce continuul = nr.  
 de elemente (intuitiv), sunt clare,  
 în aceasta interpretare intuitivă  
 echivalențele de mai sus, din  
 chiar definitiile funcțiilor

$\xrightarrow{\text{bij}}$ ,  
 $\xrightarrow{\text{inj}}$ ,  
 $\xrightarrow{\text{surj}}$

Așadar:

NB1  $\exists(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a = b;$   
 NIN2  $\exists(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a \leq b;$   
 NSUR3  $\exists(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a \geq b,$

În cele ce urmărești, postrăm

notăile  $\mathbb{F}(X, Y)$ ,  $\mathbb{B}(X, Y)$ ,  $\mathbb{J}(X, Y)$ ,  $\mathbb{S}(X, Y)$   
 pentru multimile funcțiilor, respectiv  
 funcțiilor bijective, injective, surje-  
 tive și deținând multimi orbitare  
 $X$  și  $Y$ .

Trecem la rezolvarea propo-  
 zitionii exercițiului.

$$(i) N(a, b) = |\mathbb{F}(A, B)|, = ?,$$

Procedăm prin inducție  
 matematică după  $a \in \mathbb{N}^*$

$a = 1$ :  $N(1, b) = b$  (este oare  
 funcție pentru fiecare valoare  
 posibilă a unei funcții din  
 $\mathbb{F}(A, B)$  în unicul element al  
 lui  $A$ , numărul cardinalul lui  $B$ ;  
 Mai precis, suntem în casă:  
 $A = \{\alpha\}$ , deci:  $N(1, b) =$   
 $= |\mathbb{F}(\{\alpha\}, B)| = |\{f \mid f: \{\alpha\} \rightarrow B\}|$

$$= \left| \{ f(x) \mid f: \{x\} \rightarrow B \} \right| = |B| = b^{\alpha}$$

~~$= b^{-1} = b^{-\alpha}$ . Verifica:  $B \cong \mathbb{F}(\{x\}, B)$ ,  $\beta \in B \Rightarrow \mathbb{F}(f(x), B) = \mathbb{F}$~~

~~$\alpha - 1 \rightarrow \alpha \geq 2$ :  $\beta \in A \Rightarrow \alpha \geq 2$  și~~

~~egalează valoarea pt.  $\alpha - 1$ .~~

~~În  $x \in A$ , există, fixat, și~~

$$A' := A \setminus \{x\}, \Rightarrow \begin{cases} A = A' \cup \{x\}, \\ x \notin A', \\ |A'| = \alpha - 1 \geq 1. \end{cases}$$

~~Stabilim bijecție:~~

~~$B \cong \mathbb{F}(\{x\}, B)$ ,~~

~~$\beta \rightarrow f, f(x) := \beta,$~~

~~Conform ipotezei de inducție~~

$$|\mathbb{F}(A', B)| = N(\alpha - 1, b) \cong b^{\alpha - 1}$$

$$\begin{aligned} N(a, b) |\mathbb{F}(A, B)| &= \left| \{ f \mid f: A \rightarrow B \} \right| = \\ &= \left| \{ f|_{A'} \mid f: A \rightarrow B \} \right| \cdot \left| \{ f|_{f(A')} \mid f: A \rightarrow B \} \right| \\ &\cdot \left| \{ f(x) \mid f: A \rightarrow B \} \right| = \\ &= |\mathbb{F}(A', B)| \cdot |B| = N(\alpha - 1, b) \cdot b = \\ &= b^{\alpha - 1} \cdot b = b^\alpha. \quad \text{În curate:} \end{aligned}$$

$$|\mathbb{F}(A \times B)| = |\mathbb{F}(A')| \cdot |\mathbb{F}(B)| \text{ w. de val.}$$

possibile p.t.  $f(x) \in f \in \mathbb{F}(A \times B)$

$$= |\mathbb{F}(A')| \cdot |B|.$$

Verentă de rezolvare: stabilim bijectie:

$$\begin{cases} \mathbb{F}(A \times B) \cong \mathbb{F}(A') \times_B \\ f \rightarrow (f|_{A'}, f(x)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathbb{F}(A \times B)| = |\mathbb{F}(A') \times_B|$$

$$= |\mathbb{F}(A')| \cdot |B|,$$

Răsonament matematic este încheiat

( $\forall a \in N^*$ )

$$\Rightarrow N(a, b) = |\mathbb{F}(A \times B)| = b^a = |B|^a$$

(met. inducție)

(ii) P.p. că  $a = b$ ,

$$\begin{aligned} NBIZ_n(a, b) &= |\mathbb{B}(A \times B)| = ? \\ NBIZ_n(a, a) & \end{aligned}$$

Efectuam inducție matematică după  $a \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{a=1 \vdash \text{NBIG}(1,1) = |\mathcal{B}(\{\alpha\}, \{\beta\})|}{|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A} = \{\alpha\}, \\ \mathcal{B} = \{\beta\}, \text{ pt. 2 elem. } \alpha, \beta \end{cases}}$$

$$\Rightarrow |\mathcal{F}(\{\alpha\}, \{\beta\})| = N(1,1) = 1^2 = 1 = 1! = a!$$

pt. ca unice funcții între două  
simploruri ( $f: \{\alpha\} \rightarrow \{\beta\}$ ,  $f(\alpha) := \beta$ )  
este bijectivă.

$$\frac{a-1 \rightarrow a \geq 2 : \text{ pt. } a \geq 2 \text{ și}}{\text{există } \text{NBIG}(a-1, a-1) = (a-1)! \text{ valabil.}}$$

$$A' := A - \{\alpha\} \Rightarrow \begin{cases} A = A' \cup \{\alpha\} \\ \alpha \notin A' \\ |A'| = a-1 \geq 1 \end{cases}$$

Stabilum injectio:

$$\begin{cases} \mathbb{B}(A \rightarrow B) \cong \bigcup_{\beta \in B} \mathbb{B}(A', B - \{\beta\}) \\ \Downarrow \\ f \longrightarrow g : A' = A - \{\alpha\} \rightarrow B - \{f(\alpha)\} \end{cases}$$

~~$\begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \end{array} \text{+} \text{+}$~~   ~~$(g(\alpha) = f(\alpha))$~~

$\Rightarrow NBJ(A \rightarrow \alpha) = |\mathbb{B}(A \rightarrow B)| =$

$$= \left| \bigcup_{\beta \in B} \mathbb{B}(A', B - \{\beta\}) \right| =$$

~~$\begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \end{array} \text{+} \text{+}$~~   ~~$(g(\alpha) = f(\alpha))$~~

$\xrightarrow{\text{removere disjuncta}}$

$$= \sum_{\beta \in B} \left| \mathbb{B}(A', B - \{\beta\}) \right| =$$

$$= \sum_{\beta \in B} NBJ(A - \gamma, \alpha - \gamma) =$$

$$= |B| \cdot NBJ(A - \gamma, \alpha - \gamma) =$$

$$= \alpha \cdot NBJ(A - \gamma, \alpha - \gamma) =$$

$$= \alpha \cdot (\alpha - \gamma)! = \alpha!,$$

~~Hac eum \*~~

$$\Rightarrow NBJ(A, \alpha) = |\mathbb{B}(A \rightarrow B)| = \alpha!.$$

$$(iii) \quad P_p \leftarrow a \leq b,$$

$$\text{Ninj}(a, b) = |\text{Nj}(A \setminus B)| = ?.$$

$\forall f \in \mathbb{J}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ,  $\Rightarrow g : A \rightarrow f(A)$

$(\forall n \in A)(g(n) := f(n))$  *set by force*

$g \in \mathbb{B}(\mathcal{A} \rightarrow f(A))$ .

Stahlbau  
objekte:

$$\begin{aligned}
 & \forall (A, B) \rightarrow \cup B(A, B') \\
 & \quad B' \subseteq B, \\
 & \quad |B'| = \omega \\
 & f \rightarrow g \in B(A, f(A)), \\
 & \quad (\forall x)(g(x) := f(x)).
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{NINJ}(a, b) = |\mathbb{J}(A_B)| =$$

$$= \left| \begin{array}{c} U \\ B^1 \subseteq B, \\ |B^1| = \alpha \end{array} \right| \mathcal{B}(A \setminus B^1) \right| = \sum_{\substack{B^1 \subseteq B, \\ |B^1| = \alpha}} \left| \mathcal{B}(A \setminus B^1) \right| =$$

reundine disputata

$$= \sum_{\substack{B^i \subseteq B \\ |B^i| = \alpha}} NB^i J(\alpha, \alpha) = |\{B^i \mid B^i \subseteq B, |B^i| = \alpha\}|.$$

$$\begin{aligned} \text{NBij}(a, b) &= C_b^a, \quad \text{NBij}(a, a) = \\ &= C_a^a \cdot a! = A_a^a = \frac{b!}{(b-a)!}. \end{aligned}$$

(iv)  $\# - \text{ca } a \geq b,$

în  $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b\}$ .

Pentru fiecare  $i \in \overline{1, b}$ , notăm

$$M_i = \{f \mid f: A \rightarrow B, \beta_i \notin f(A)\} \cong \mathbb{F}(A \setminus B \setminus \{\beta_i\}). \Rightarrow$$

în respectiv deci cardinal echivalente

dice f în construcție se face  $B \setminus \{\beta_i\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |M_i| &= |\mathbb{F}(A \setminus B \setminus \{\beta_i\})| = \\ &= |\mathbb{F}(A \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_b\})| \\ &= N(a, b-1) \stackrel{(1)}{=} (b-1)^a. \end{aligned}$$

$$\left( \bigwedge_{k \in \overline{1, b}} \left( \bigwedge_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq b} \left( \bigcap_{j=1}^k M_{i_j} = \{f \mid f: A \rightarrow B, \right. \right. \right.$$

$$\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k} \notin f(A) \Rightarrow \#(A \setminus \{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}\}) =$$

fiecare  $f \rightarrow$  construire lui  
 $f$  de  $B - \{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}\}$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left| \bigcap_{j=1}^k M_{i_j} \right| = N(a, b-k) \stackrel{(i)}{=} (b-k)$$

$$g(A \setminus B) = \#(B) - (M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_b) \Rightarrow$$

Principiul Includerii  
și al Excluderii

$$NSURF(a, b) = |g(A \setminus B)| =$$

$$= |f(A \setminus B) - (M_1 \cup \dots \cup M_b)| =$$

$$= |f(A \setminus B)| - |M_1 \cup \dots \cup M_b| =$$

$$= N(a, b) - \left( \sum_{i=1}^b |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq b} |M_i \cap M_j| + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq b} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \dots \\
 & \dots + (-1)^{b-2} \cdot |M_1 \cap \dots \cap M_b| = \\
 & = b^a - \left( C_b^1 \cdot (b-1)^a - C_b^2 \cdot (b-2)^a + \right. \\
 & + C_b^3 \cdot (b-3)^a - \dots + (-1)^{b-2} \cdot \left. (b-1)^a \right) = 0 \\
 & = b^a - C_b^1 \cdot (b-1)^a + C_b^2 \cdot (b-2)^a - \\
 & - C_b^3 \cdot (b-3)^a + \dots + (-1)^{b-2} \cdot C_b^{b-1} + \\
 & + (-1)^b \cdot C_b^b \cdot 0 = \sum_{i=0}^b (-1)^i \cdot C_b^i \cdot (b-i)^a.
 \end{aligned}$$

Pentru următorul exercițiu, a se vedea cursul privind relațiile între mulțimi, secțiunea despre relații binare pe o mulțime, paragraful despre relații de echivalență și partițile asociate acestora.

Exercițiu: să se determine numărul relațiilor de echivalență ce se pot defini pe o mulțime cu  $n$  elemente, unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

REZOLVARE:

Vom determina acest număr prin două metode: folosind  $\xrightarrow{\text{surjectiv}} \xleftarrow{\text{partiții}}$

Trebuie să se arate că  
 dacă multimea  $A$  are  $n$  elemente și  
 este echivalentă cu multimea  $B$ , atunci  
 și multimea  $B$  are  $n$  elemente.  
 Dacă  $A \sim B$ , există o bijectie  
 $\phi: A \rightarrow B$ .  
 Definim  $\psi: B \rightarrow A$  astfel încât  
 $\forall x \in B$  să avem  
 $\psi(x) = \phi^{-1}(x)$ .  
 Arătăm că  $\psi$  este o bijectie.  
 Dacă  $\psi(x) = \psi(y)$ , atunci  
 $\phi^{-1}(x) = \phi^{-1}(y)$ , ceea ce este contrazis.  
 Dacă  $x \neq y$ , atunci  
 $\phi^{-1}(x) \neq \phi^{-1}(y)$ , ceea ce este corect.  
 Deci  $\psi$  este o bijectie.  
 Deoarece  $\phi$  este o bijectie, atunci  
 $\phi(A) = B$ .  
 Deci  $|A| = |B|$ .

Faptul că  $|Echv(A)|$  nu  
depinde de elegerile lui  $\mathcal{A}$  și  
numărul de  $|A|$  se observă și  
din calculul propriu-zis, care  
arată, în cele 2 metode,

METODA I (folosindu-se subiectiv):  
 Fie  $A$  o mulțime cu  $|A|=n$ ,  
 $(\forall j \in Echv(A))$  (lui  $j$  i  
se poate asocia subiecte concrete)  
 pe care să vom nota cu  $p_j$   
 $P_p : A \rightarrow A/\mathcal{S}$ ,  $(\forall x \in A)$  ( $p_p(x) := \bar{x} =$   
 $\{y \in A \mid x \sim y\}$ ) = clasă lui  $x$   
 reprezentată de  $\bar{x}$ ;  
 $= |A|$  ( $\mathcal{S}$  o mulțime  $B$  cu  $|B| \leq n =$   
 $f : A \rightarrow B$ ), (lui  $f$  i se poate  
 asocia următoarele relații binare  
 pe  $A$  pe care să vom nota cu  
 $\mathcal{R}_f : \mathcal{R}_f \subseteq A^2$ ;  $(\forall x, y \in A)$  ( $x \mathcal{R}_f y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y))$ , din faptul  $\Rightarrow$   
 relație de echivalență pe  $B$  este  $\Rightarrow$   
 echivalență (reflexivă, simetrică și  
 transitară), rezulta imediat  $\Rightarrow$   
 $P_f$  este reflexivă, simetrică și  
 transitară, deci  $P_f \in \text{Echav}(A)$ .  
 Evident multimea factor  $A/P_f =$   
 $= \{f^{-1}(B)\} | B \in \mathcal{P}(B)\}$ .

Prin extindere  $p \rightarrow p_B$   
 descriem mai sus, una relație de  
 echivalență  $P_B$  pe  $A$  și corespunde  
 și una funcție surjectivă  
 și unei cunoscute  $p_B: A \rightarrow A/P_B$ ,  
 Ce relație de echivalență  $P_B$   
 corespunde luc.  
 $\Leftrightarrow$   $x P_B y \Leftrightarrow p_B(x) = p_B(y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in A$ : Además,  $\rho_{pp} = p$ , (\*)

para observar esto, + multihole

$B, C$  en  $|B| = |C| \leq n = |A|$

dado  $\varphi: B \xrightarrow{\sim} C$  este es

injetivo, ver si  $f: A \rightarrow B$  este es

surjetivo, since  $\varphi \circ f: A \rightarrow C$

este tot + surjetivo, ver si  $\rho_{\varphi \circ f} \in$

$\in \text{Echar}(A)$ , este definido por:

$(\forall x, y \in A) (\exists p \in \rho_{\varphi \circ f} \wedge \Leftrightarrow (\varphi \circ f)(x) =$

$= (\varphi \circ f)(y) \Leftrightarrow \varphi(f(x)) = \varphi(f(y)) \Leftrightarrow$

$\cancel{(\varphi \circ f)} f(x) = f(y) \Leftrightarrow \rho_f(x) = \rho_f(y)$  prm

entonces  $\rho_{\varphi \circ f} = \rho_f$ , (\*\*\*)

(\*), (\*\*\*),  $\Rightarrow (\forall p \in \text{Echar}(A)) / p =$

$= \rho_{pp}$

$= \rho_{\varphi \circ pp}$  +  $B$  en

$|B| = |\mathcal{A}/_p|$   $\Rightarrow \varphi: \mathcal{A}/_p \xrightarrow{\sim} B$  (injetivo)

luego conduce a

- unei echivalente  $p \in \text{Ech}(A)$   
 (concreta) corespunde o sigură funcție  
 surjectivă  $f_p: A \rightarrow A/p$
- unei echivalente  $p \in \text{Ech}(A)$   
 corespunde la orice compunere  
 $\varphi^0 p$ , cu  $\varphi^0: A/p \xrightarrow{\sim} A/p$   
 $A \xrightarrow{p} A/p \xrightarrow{g} A/p$  (injectivă)  
 $\varphi^0 p = g \circ f_p$  (sunt  $B \in \text{Part}(A)$ )  
 $\varphi^0 p$  (sunt  $B$ )
- $\exists |A/p|!$  este fel de injectiv,  
 deci  $\exists |A/p|!$  este fel de  
 compunere
- datea  $p \in \text{Ech}(A)$ ,  $|A/p|$   
 oricare surjectivă  $f: A \xrightarrow{\text{surj. B \in \text{Part}(A)}} A/p$   
 corespunde echivalenta

Se  $f \in \text{Fun}(A)$ , și este loc  $\varphi =$   
 ~~$\varphi_f$~~  dacă  $(\forall x, y \in A)[x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)]$   
~~dacă~~  $(\forall x, y \in A)[x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)]$   
 deci este o astfel de surjectie  $f$   
~~( $f: A \rightarrow A/\varphi$ ,  $f$  surjectivă,  $\varphi = \varphi_f$ )~~  
 putem defini  $\varphi': A/\varphi \rightarrow A/\varphi$ ,  
 $(\forall x \in A)(\varphi'(x) = f(x))$ ;  $(\forall x, y \in A)$   
 (even:  
~~(evid)~~  $x = y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$  și  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow$   
 $x = y$ ) în sens sănătos al  
 echivalenței,  $\Leftarrow$  următoare  
 definesc o funcție  $\varphi'$  în  $A/\varphi$   
 crește surjectivă din  $A/\varphi$  în  $A/\varphi$   
 surjectivă din  $A/\varphi$  crește  
 surjectivă din  $A/\varphi$  crește,  
 este surjectivă; definesc din  $\varphi'$   
 se poate rezulta astfel:  $f = \varphi' \circ \varphi_f$

se demonstrează că  $\varphi$  este surjectivă  
 corespunde echivalenței și  
 dacă  $f = \varphi \circ p_p$  cu  $p: A \xrightarrow{\sim} A/\mathcal{P}$   
 (injectivă)  
 $\forall p \in \text{Ednr}(A) \quad |A/\mathcal{P}| = |A| = n$ ,  
 $\forall k \in \overline{1, n} \quad (\exists p \in \text{Ednr}(A) \text{ cu } |A/\mathcal{P}| = k)$  (de exemplu  $p_{\text{char}}(A)$ ,  
 corespunzătoare partitiei  $\{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_{n-1}\}, \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_n\} = A/\mathcal{P}$   
 unde  $\{x_1, \dots, x_n\} = A$ ),  
 conform celor de mai sus.

pentru orice  $k \in \overline{1, n}$ , nr.  
 echivalențelor  $p_{\text{char}}(A)$  cu  
 $|A/\mathcal{P}| = k$  este egal cu  $\frac{1}{k!} \cdot$   
 (nr. de surjective de la  $A$   
 la  $A/\mathcal{P}$ )  $= \frac{1}{k!} \cdot$  (nr. de surjective  
 de la  $A$  în multime cu  $n$   
 elemente la  $A$  în multime cu  $k$   
 elemente) (un calcul similar)  
 $= \frac{1}{k!} \cdot \left( \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot (k-i)! \right) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |\text{Ednr}(A)| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left( \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot (k-i)! \right)$   
 $\cdot (k-n)^n$ .

METHODE A II-A (folosind partiții):

Fie  $A := \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , (se poate lucra și  $A := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $(|A|=n)$ ),

$$|\text{Ednor}(A)| = |\text{Part}(A)| = \\ = \sum_{k=1}^n S(n, k), \text{ unde } S(n, k) :=$$

$\vdash$  nr de partiții ale unei multimi cu  $n$  elemente în  $k$  clase,  
 $\{S(n, k)\}$

nr. de partiții  
cu  
este  
sunt  
nr. de

Definția de spătă a II-a,

$\forall P \in \text{Part}(A)$  cu  $|P| = k$  (partiție cu  $k$  clase)

$\exists I, m$  (putem avea)

$\rightarrow \{u_3\} \in P$  (este o singură clasă)

$\rightarrow \{u_3\} \notin P$  (nu este clasa doar  $P$  din cele elemente)

deducem că:

$$S(n, k) = \underbrace{S(n-1, k-1)}_{\text{d.c. } k=1} + \\ + k \cdot \underbrace{S(n-1, k)}_{\text{d.c. } n=k}, \Rightarrow$$

formă liniară  
 $S(n, k)$ , sau

$n$  poate să opereze  
dintr-o serie de  $k$  elemente,  
în același ordine;

$$(\forall k \in \overline{1, n}) (\forall f: \overline{1, n} \rightarrow \overline{1, k})$$

$f \rightarrow$  surjectivă) liniile  $f$  și  
partile lui  $A = \overline{1, n}$ ,

$$\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(k)\}.$$

Ce în metoda I) se deduce că  $S(n, k) = \frac{1}{k!} \cdot (\text{nr de surjective de la } \overline{1, n} \text{ la } \overline{1, k}) =$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \left( \sum_{i=1}^k C_k^i \cdot (-2)^i \cdot (k-i)^n \right),$$

$$|\text{Echar}(A)| = |\text{Part}(A)| = \\ = \sum_{k=1}^n S(n, k) = B(n) \quad (\{B(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sunt } \text{nr. lui Bell}),$$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left( \sum_{i=1}^k C_k^i \cdot (-2)^i \cdot (k-i)^n \right),$