Poseturi şi Latici – Produse Directe, Sume Ordinale, Sublatici

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică, Semestrul I, 2023-2024

Mnemonic din curs, pentru exerciţiul următor:

O subalgebră a unei algebre de un anumit tip este, prin definiţie, o submulţime a mulţimii(lor) suport a acelei algebre care este închisă la toate operaţiile algebrei. O subalgebră devine algebră de acelaşi tip cu operaţiile induse, adică operaţiile algebrei restricţionate la acea submulţime.

În cazul exerciţiului, este vorba despre sublaticile (închise la $\vee, \wedge$) unei latici $\neq \emptyset$

sublaticile mărginite ale unei latici mărginite (închise la $\vee, \wedge, 0, 1$).

Laticea din următorul exerciţiu este finită şi nevidă (deci mărginită), aşadar toate sublaticile sale sunt finite, deci cele nevide sunt latici mărginite, dar nu toate sunt sublatici mărginite ale ei: doar cele care conţin minimul şi maximul acestei latici sunt sublatici mărginite ale ei, adică submulţimi ale mulţimii sale de elemente închise la întreaga sa structură de latice mărginită, înzestrate cu operaţiile (binare şi zeroare) şi relaţia de ordine indusă pe aceste submulţimi.

Amintesc că toate submulţimile total ordonate T *ale unei latici* L *sunt sunt sublatici ale acesteia, pentru că lanţul vid este în mod trivial sublatice, iar un lanţ nevid* T *inclus în* L *satisface, pentru orice* x,y ϵ T*, avem, în laticea* L*:*

cum T este lanţ, x şi y sunt comparabile, adică x ≤ y sau y ≤ x;

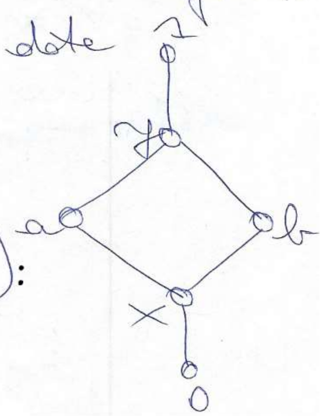
ca în orice latice: x ≤ y ⇔ x v y = y ⇔ x ∧ y = x, iar y ≤ x ⇔ x v y = x ⇔ x ∧ y = y;

aşadar există min{x,y} = x ∧ y şi max{x,y} = x v y în L, şi avem:

x ∧ y = min{x,y} ϵ {x,y} ⊆ T; x v y = max{x,y} ϵ {x,y} ⊆ T;

prin urmare x ∧ y ϵ T şi x v y ϵ T, deci T este sublatice a lui L.

Exerciţiu: Să se determine sublaticile şi sublaticile mărginite ale laticii mărginite date de diagrama Hasse alăturată;



$\mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2 = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$:

RESOLVARE:

Singurele elemente incomparabile ale lui L sunt a şi b, prin urmare o sublatice S a lui L este lanţ ⇔ a ∉ S sau b ∉ S.

Dacă o sublatice S a lui L nu este lanţ, adică a ∈ S şi b ∈ S, ⇒ $\begin{cases} x = a \wedge b \in S \\ \text{şi} \\ y = a \vee b \in S, \end{cases}$ deci {x, a, b, y} ⊆ S, Toate sublatticile nevide ale lui L sunt latici finite şi nevide, deci sunt latici mărginite, dar, dintre ele, singurele sublatici mărginite ale lui L sunt cele care conţin pe 0 şi pe 1 din L.

Aşadar, avem:

- sublatticile total ordonate ale lui L:

(i) $\emptyset$ → nu e sublatice mărginită a lui L;

(ii) $\mathcal{L}_1 \cong \{\alpha\}$, cu $\alpha \in L$; (izomorfe ca latici) → la fel şi mai jos şi

niciuna dintre acestea nu este sublatice mărginită a lui L;

(iii) $\mathcal{L}_2 \cong \{\alpha, \beta\} \subseteq L$, cu $\alpha < \beta$, singura dintre acestea care este sublatice mărginită a lui L este $\{0, 1\}$;

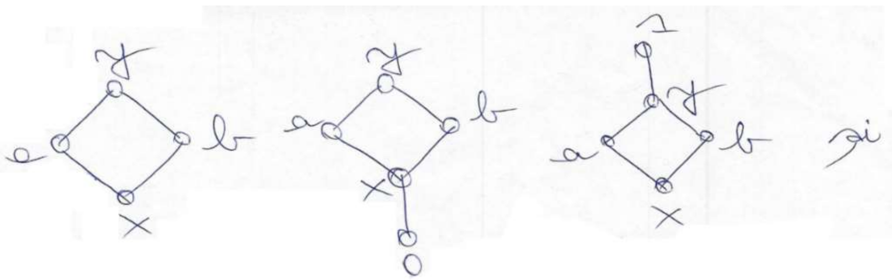
(iv) $\mathcal{L}_3 \cong \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq L$, cu $\alpha < \beta < \gamma$; dintre acestea, cele care sunt sublatici mărginite ale lui L sunt cele cu $\alpha = 0$ și $\gamma = 1$, i.e. $\{0, x, 1\}$, $\{0, a, 1\}$, $\{0, b, 1\}$ și $\{0, y, 1\}$;

(v) $\mathcal{L}_4 \cong \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq L$, cu $\alpha < \beta < \gamma < \delta$; dintre acestea, cele care sunt sublatici mărginite ale lui L sunt cele cu $\alpha = 0$ și $\delta = 1$;

(vi) $\mathcal{L}_5 \cong \{0, x, a, y, 1\} \cong \{0, x, b, y, 1\}$; dintre acestea, ambele sunt sublatici mărginite ale lui L;

L nu are sublatici total ordonate de cardinal ≥ 6;

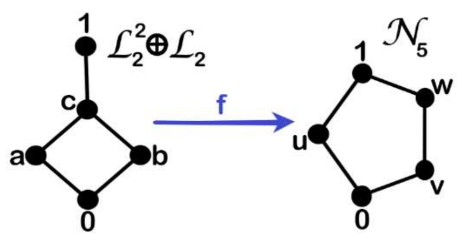
- sublaticile lui L care nu sunt lanțuri:



L, dintre acestea, singura care este sublatice mărginită a lui L este L.

<u>Exerciţiu:</u> *Să se determine toate morfismele de latici mărginite de la suma ordinală* $\mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ *a rombului cu lanţul cu două elemente la pentagon (*$\mathcal{N}_5$*).*

<u>Rezolvare:</u> *Fie elementele lui* $\mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ *şi cele ale lui* $\mathcal{N}_5$ *notate ca în următoarele diagrame Hasse, iar* f : {0,a,b,c,1} -> {0,u,v,w,1}.



Observăm că singurele elemente incomparabile ale lui $\mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ *sunt* a *şi* b.

Conform unei proprietăţi dintr-un exerciţiu din curs, f *este morfism de latici de la* $\mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ *la* $\mathcal{N}_5$ *ddacă* f *e izotonă şi* f(a)vf(b) = f(avb) = f(c), *iar* f(a)^f(b) = f(a^b) = f(0), *prin urmare* f *este morfism de latici mărginite de la* $\mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ *la* $\mathcal{N}_5$ *ddacă* f *e izotonă,* f(a)vf(b) = f(avb) = f(c), f(a)^f(b) = f(a^b) = f(0) = 0 *şi* f(1) = 1 *ddacă* f(a)vf(b) = f(c), f(a)^f(b) = f(0) = 0 *şi* f(1) = 1, *întrucât orice astfel de funcţie este izotonă, pentru că satisface* f(0) = 0 ≤ f(a), f(b) ≤ f(a) v f(b) = f(c) ≤ 1 = f(1).

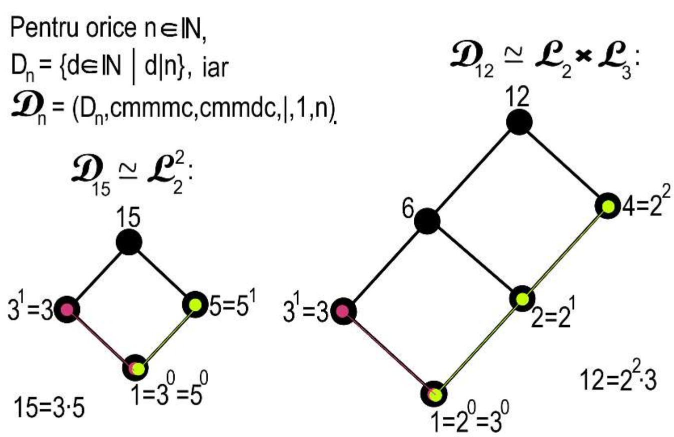
Perechile de elemente ale lui $\mathcal{N}_5$ *având conjuncţia* 0 *sunt:* {u,v}, {u,w} *şi* {0,x} *pentru fiecare* x ϵ {0,u,v,w,1}, *aşadar:* f(a)^f(b)=0 ddacă (f(a),f(b)) ϵ {{u,v}, {u,w}} U {{0,x} | x ϵ {0,u,v,w,1}} ddacă (f(a),f(b)) ϵ {(0,0), (0,u), (u,0), (0,v), (v,0), (0,w), (w,0), (0,1), (1,0), (u,v), (v,u), (u,w), (w,u)}.

Prin urmare morfismele de latici mărginite de la $\mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ la $\mathcal{N}_5$ sunt:

f(0)	f(a)	f(b)	f(c)	f(1)
0	0	0	0	1
0	0	u	u	1
0	u	0	u	1
0	0	v	v	1
0	v	0	v	1
0	0	w	W	1
0	w	0	w	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	u	v	1	1
0	v	u	1	1
0	u	w	1	1
0	w	u	1	1

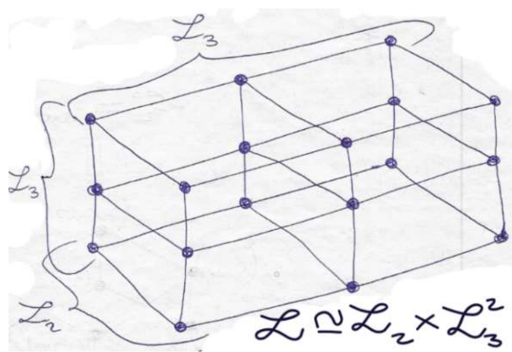
<u>Mnemonic</u> din curs: laticea numerelor naturale înzestrate cu ordinea $|$ ("divide pe") este mărginită, cu primul element 0 şi ultimul element 1, distributivă şi completă, cu supremumul oricărei submulţimi dat de cel mai mic multiplu comun, iar infimumul său dat de cel mai mare divizor comun al elementelor acesteia: aşadar aceasta are următoarea structură de latice mărginită: $\mathcal{N}$ = (IN,cmmmc,cmmdc,|,1,0).

Să notăm, pentru fiecare număr natural n, cu D_n mulţimea divizorilor naturali ai lui n, iar cu $\mathcal{D}_n$ sublaticea lui $\mathcal{N}$ având mulţimea suport D_n, astfel că $\mathcal{D}_0 = \mathcal{N}$:



Să descompunem, ca în aceste exemple, pentru un n natural nenul arbitrar, laticea finită $\mathcal{D}_n$ în produs direct de lanţuri, şi apoi să vedem că lanţurile sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi, adică nu se pot scrie ca produse directe de poseturi neizomorfe cu ele, de unde se poate demonstra că descompunerea unei latici în produs direct de lanţuri este unică (modulo izomorfism şi modulo comutativitatea şi asociativitatea produsului direct de poseturi).

De exemplu, observând că laticea dată prin următoarea diagramă Hasse este egală cu produsul direct de lanţuri $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3 \times \mathcal{L}_3$), prin combinarea produselor directe dintre aceste lanţuri în toate modurile posibile, în conformitate cu asociativitatea şi comutativitatea produsului direct, rezultă toate



descompunerile acestei latici $\mathcal{L}$ în produs direct de latici, anume produsele directe ale fiecăreia dintre următoarele familii de latici:

- familia singleton { $\mathcal{L}$ };
- {$\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3^2$};
- {$\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_{,3}$};
- {$\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_3$}.

Amintesc că izomorfismele de poseturi între două latici Ore sunt izomorfisme de latici, iar izomorfismele de latici între latici mărginite sunt izomorfisme de latici mărginite, întrucât morfismele de poseturi păstrează minimele şi maximele arbitrare, aşadar morfismele surjective de latici între latici mărginite sunt morfisme de latici mărginite.

Desigur, la fiecare dintre cele patru familii de latici de mai sus pot fi adăugate oricâte copii ale laticii mărginite triviale: lanţul $\mathcal{L}_1$, care este element neutru la produsul direct de poseturi, după cum vom vedea mai jos, adică orice poset $\mathcal{P}$ este *izomorf cu produsul direct $\mathcal{P} \times \mathcal{L}_1$ (la rândul său izomorf cu $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{P}$, conform comutativităţii produsului direct de poseturi modulo izomorfism de poseturi).*

Aşadar, să descompunem laticea divizorilor unui număr natural nenul în produs direct de poseturi, apoi să demonstrăm că lanţurile nu se pot descompune în produse directe de poseturi neizomorfe cu ele.

Exercițiu: $n \in \mathbb{N}^*$; $D_n := \{d \in \mathbb{N}^* \mid d|n\}$; $\mathcal{D}_n := (D_n, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |, 1, n)$ = laticea mărginită a divizorilor naturali ai lui n. Să se descompună $\mathcal{D}_n$ în produs direct de lanțuri (de unde rezultă, desigur, toate descompunerile lui $\mathcal{D}_n$ în produs direct de latici).

REZOLVARE: Vom stabili un izomorfism de latici mărginite între $\mathcal{D}_n$ și un produs direct de lanțuri.

$\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{L}_1$, întrucât $D_1 = \{1\}$, aşadar $|D_1| = 1$. Acum să presupunem că $n \geq 2$.

Fie $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ descompunerea canonică a lui n: $k \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_k$ → numere naturale prime două câte două distincte, iar $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{N}^*$.

Fie $\mathcal{L}=(L,\vee,\wedge,\leq,0,1):=\prod_{j=1}^{k}\mathcal{L}_{e_j+1}$,

unde: $(\forall\, j\in\overline{1,k})\ (\mathcal{L}_{e_j+1}:=(\overline{0,e_j},$ $\max,\min,\leq,0,e_j)=$ lanțul cu e_j+1 elemente, în care am luat ca mulțime suport mulțimea primelor e_j+1 numere naturale și ca relație de ordine $\leq:=$ $:=$ ordinea naturală de pe $\mathbb{N}$, restricționată la $\overline{0,e_j})$.

Definim $f:L\rightarrow\Delta_n$,

$(\forall\,\alpha_1\in\overline{0,e_1})\ldots(\forall\,\alpha_k\in\overline{0,e_k})$

$(f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k):=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\in\Delta_n)$.

Pentru orice $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k),$ $(\beta_1,\ldots,\beta_k)\in L$ (i.e. $\alpha_j,\beta_j\in$ $\in\overline{0,e_j},\ \forall\, j\in\overline{1,k}$), avem:

$f((\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\vee(\beta_1,\ldots,\beta_k))=$

$=f(\max\{\alpha_1,\beta_1\},\ldots,\max\{\alpha_k,\beta_k\})=$

$=p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}=$

$= \text{cmmmc}\{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}\} =$

$= \text{cmmmc}\{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), f(\beta_1, \ldots, \beta_k)\};$

$f((\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \wedge (\beta_1, \ldots, \beta_k)) =$

$= f(\min\{\alpha_1, \beta_1\}, \ldots, \min\{\alpha_k, \beta_k\}) =$

$= p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}} =$

$= \text{cmmdc}\{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}\} =$

$= \text{cmmdc}\{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), f(\beta_1, \ldots, \beta_k)\},$

$f(0) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ de } 0}) = p_1^0 \cdot \ldots \cdot p_k^0 = 1,$

$f(1) = f(e_1, \ldots, e_k) = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} = n,$

Așadar, f comută cu $\vee$, $\wedge$, 0, 1, deci este morfism de latici mărginite. (*)

$(\forall d \in D_n)(d \mid n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \Rightarrow (\exists \alpha_1 \in \overline{0, e_1}) \ldots (\exists \alpha_k \in \overline{0, e_k}) (d = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k))) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este surjectivă. (**)

$$(\forall\, \alpha_1, \beta_1 \in \overline{0, e_1}) \ldots (\forall\, \alpha_k, \beta_k \in \overline{0, e_k})$$

$$(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = f(\beta_1, \ldots, \beta_k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k} \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow[\text{canonice}]{\text{unicitatea descompunerii}} \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (\beta_1, \ldots, \beta_k)). \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este injectivă.

$\Rightarrow f$ este morfism bijectiv de latici mărginite. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f$ este izomorfism de latici mărginite de la $\mathcal{L} = \prod_{j=1}^{k} \mathcal{L}_{e_j+1}$ la $\mathcal{D}_n$.

Altă demonstraţie pentru faptul că f *este izomorfism de latici: notând, pentru fiecare* j ∈ $\overline{1,k}$ *, mulţimea suport a lanţului* $\mathcal{L}_{e_j+1}$ *cu*

cu L_{e_j+1} *:*

Pt. orice $\alpha_1, \beta_1 \in \overline{0, e_1} = L_{e_1+1}$, ..., $\alpha_k, \beta_k \in \overline{0, e_k} = L_{e_k+1}$, au loc echivalențele: $f(\alpha_1, ..., \alpha_k) \mid f(\beta_1, ..., \beta_k) \Leftrightarrow p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} \mid p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1, ..., \alpha_k \leq \beta_k \Leftrightarrow$

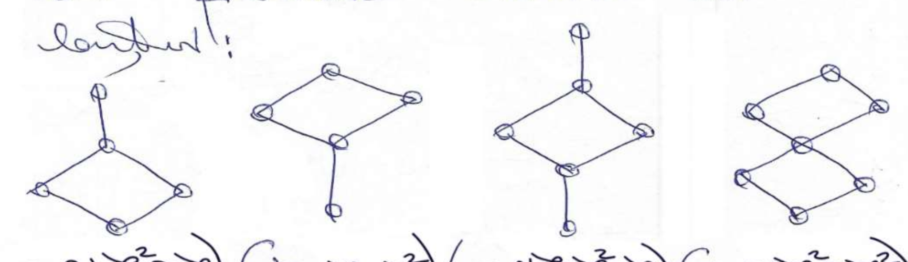
$\Leftrightarrow (\alpha_1, ..., \alpha_k) \leq (\beta_1, ..., \beta_k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(f(\alpha_1, ..., \alpha_k)) \leq f^{-1}(f(\beta_1, ..., \beta_k))$.

Echivalențele de mai sus arată că: $\begin{cases} f \text{ e izotonă conform } \text{„}\Leftarrow\text{"} \text{ din aceste echivalențe;} \\ f^{-1} \text{ e izotonă, pt. că: pt.} \end{cases}$ orice $x, y \in D_n \overset{(f \text{ e surj.})}{\Longrightarrow} (\exists \alpha_1, \beta_1 \in \overline{0, e_1} = L_{e_1+1}) ... (\exists \alpha_k, \beta_k \in \overline{0, e_k} = L_{e_k+1}) (f(\alpha_1, ..., \alpha_k) = x$ și $f(\beta_1, ..., \beta_k) = y)$, prin urmare, conform „$\Rightarrow$" din aceste echivalențe: dacă $x \mid y \Rightarrow f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$.

Deci f e bijectivă izotonă și cu inversa izotonă, adică f este izomorfism de poseturi între (poseturile subiacente lui) $\mathcal{L}$ și D_n. $\overset{\text{(v. cursul)}}{\Longleftrightarrow}$ f este izomorfism de latici între (laticile subiacente lui) $\mathcal{L}$ și D_n. $\overset{\text{(v. cursul)}}{\Longleftrightarrow}$ f este izomorfism de latici mărginite între $\mathcal{L}$ și D_n.

<u>Obs.:</u> Desigur, orice produs direct de lanțuri, fiind produs direct de latici distributive, este o latice distributivă. Dar nu orice latice distributivă este izomorfă cu un produs direct de lanțuri; nici măcar orice latice distributivă finită; desigur, orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_2$, pentru un $n \in \mathbb{N}$. Exemple de latici distributive finite care nu se descompun în produse directe de lanțuri:



$(A \cong \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2)$ $(B \cong \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2)$ $(C \cong \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2)$ $(D \cong \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2^2)$

Acest lucru se poate observa, de exemplu, din cardinalele lor: $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*)$ $\left(\prod_{i=1}^{k} \mathcal{L}_{n_i}\right.$ are cardinalul $\left.\prod_{i=1}^{k} n_i\right)$ şi, pentru orice latice L, $\mathcal{L}_1 \times L \cong L$, unde notăm cu $\cong$ existenţa unui izomorfism de latici, $|A| = |B| = 5$, $|C| = 6 = 2 \cdot 3$ şi $|D| = 7$, iar singurele descompuneri ale acestor latici în posibile produse directe de lanţuri de cardinal cel puţin 2 sunt: $\mathcal{L}_5$, $\mathcal{L}_6$ sau $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$, respectiv $\mathcal{L}_7$. Dar:

$A \not\cong \mathcal{L}_5$ şi $B \not\cong \mathcal{L}_5$;
$C \not\cong \mathcal{L}_6$ şi $C \not\cong \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$;
$D \not\cong \mathcal{L}_7$.

Vom vedea mai jos un rezultat general care demonstrează indecompozabilitatea laticilor A,B,C,D.

Exerc.:

Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ poseturi nevide, să se dem. că:

(a) dacă $|A| = 1$, atunci posetul(ri)le $(B, \sqsubseteq)$ şi $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe;

(b) dacă $|B| = 1$, atunci poseturile $(A, \leq)$ şi $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe;

(c) dacă $|A| \geq 2$ şi $|B| \geq 2$, atunci posetul $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanţ.

RESOLVARE:

$$(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) \stackrel{(def.)}{=} (A \times B, \underbrace{\leq \times \sqsubseteq}_{\text{relaţie de ordine pe } A\times B}),$$

unde $\leq \times \sqsubseteq \stackrel{(def.)}{=} \{((a,b),(x,y)) \mid a, x \in A,\ b, y \in B,\ a \leq x$ şi $b \sqsubseteq y\} \subseteq (A \times B)^2$.

(a) Pp. $A = \{a\}. \Rightarrow \leq = \{(a,a)\}.$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \times B = \{a\} \times B = \{(a,b) \mid b \in B\} \\ \text{şi} \\ \leq \times \sqsubseteq = \{(a,a)\} \times \sqsubseteq = \end{cases}$$

$= \{((a,b),(a,y)) \mid b, y \in B,\ b \sqsubseteq y\}.$

Fie $f: B \to A \times B$, $(\forall b \in B)$ $(f(b) = (a,b))$ şi $g: A \times B \to B$, $(\forall b \in B)(g(a,b) = b). \Rightarrow$

am eliminat din scriere o pereche de paranteze

$\Rightarrow f$ şi g sunt (complet şi) corect definite.

Pt. orice $b \in B$, avem:

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(a, b) =$$
$$= b, \Rightarrow g \circ f = id_B, \quad (1)$$
$$(f \circ g)(a, b) = f(g(a, b)) = f(b) =$$
$$= (a, b), \Rightarrow f \circ g = id_{A \times B}. \quad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow f$ e inversabilă (deci bijectivă), cu $f^{-1} = g$. $(*)$

Pt. orice $b, c \in B$, avem:

dacă $b \sqsubseteq c, \Rightarrow f(b) = (a, b)$
$$(\leq \times \sqsubseteq)(a, c) = f(c), \Rightarrow$$
$\Rightarrow f$ e izotonă, $(**)$

dacă $(a, b)(\leq \times \sqsubseteq)(a, c), \Rightarrow$
$$\Rightarrow g(a, b) = b \sqsubseteq c = g(a, c) \Rightarrow$$
$\Rightarrow f^{-1} = g$ e izotonă. $(***)$

$(*), (**), (***) \Rightarrow f$ e izomorfism de poseturi între $(B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$.

(b) Analog cu (a), sau folosind (a), comutativitatea produsului direct de poseturi și faptul că o compunere de izomorfisme de poseturi este un izomorfism de poseturi, astfel:

dacă $|B| = 1 \overset{(a)}{\Rightarrow} (A, \leq) \underset{\substack{(\exists\, h \to \text{izom.}\\ \text{de poseturi})}}{\overset{h}{\underset{\longrightarrow}{\cong}}} (B, \sqsubseteq) \times$

$\times (A, \leq) \underset{\text{(izomorfism de poseturi)}}{\overset{k}{\underset{\longrightarrow}{\cong}}} (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$,

$k: B \times A \to A \times B$

$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(k(b, a) = (a, b))$,

$\Rightarrow k \circ h : A \to A \times B$ este un izomorfism de poseturi între $(A, \leq)$ și $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, pt. că:

$k, h \to$ bijective, $\Rightarrow k \circ h \to$ bijectivă,

$k, h \to$ izotone, $\Rightarrow k \circ h \to$ izotonă,

$k^{-1}, h^{-1} \to$ izotone $\Rightarrow (k \circ h)^{-1} =$

$= h^{-1} \circ k^{-1} \to$ izotonă.

(c) $|A| \geq 2. \Leftrightarrow (\exists\, a, x \in A)(a \neq x)$,

$|B| \geq 2. \Leftrightarrow (\exists\, b, y \in B)(b \neq y)$.

Caz 1: $\left\{\begin{array}{l} a \not\leq x \\ \text{și} \\ x \not\leq a \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, b) \\ \text{și} \\ (x, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanț.

Caz 2: $\left\{\begin{array}{l} b \not\sqsubseteq y \\ \text{și} \\ y \not\sqsubseteq b \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, y) \\ \text{și} \\ (a, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b). \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanț.

Caz 3: $\left\{\begin{array}{l} a \leq x \text{ sau } x \leq a \\ \text{și} \\ b \sqsubseteq y \text{ sau } y \sqsubseteq b. \end{array}\right.$

Putem pp. fără a restrânge generalitatea, că $a \leq x$ și $b \sqsubseteq y$ (altfel redenumim: $a \leftrightarrow x$, $b \leftrightarrow y$ (și/sau)).

Pp. abs. $\left.\begin{array}{l} x \leq a. \\ a \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow a = x$. Abs. cu $a \neq x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \not\leq a. \Rightarrow (x, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, y)$ (3)

Pp. abs. $\left.\begin{array}{l} y \sqsubseteq b. \\ b \sqsubseteq y. \end{array}\right\} \Rightarrow b = y$ Abs. cu $b \neq y$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \not\sqsubseteq b. \Rightarrow (a, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, b)$ (4)

(3), (4) $\Rightarrow (A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu e lanț.

Exercițiu: Să se demonstreze că lanțurile sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi (i.e. nu se pot descompune în produs direct de alte poseturi) (adică de poseturi neizomorfe cu ele)

REZOLVARE:

Fie $(L,\leq)$ un lanț și $(A,\leq)$, $(B,\leq)$ două poseturi, astfel încât $(L,\leq)=(A,\leq)\times(B,\leq)\overset{(def.)}{=}(A\times B,\underset{(def.)}{\leq})$

$\leq = \{((a,b),(a',b')) \mid a,a'\in A,\ a\leq a'$ și $b,b'\in B,\ b\leq b'\}$.

- dacă $L=\emptyset$, atunci $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (L,\leq)=(\emptyset,\emptyset) \\ \text{și} \\ A=\emptyset \text{ sau } B=\emptyset \end{cases} \Rightarrow (A,\leq)=$$

$=(\emptyset,\emptyset)=(L,\leq)$ sau $(B,\leq)=(\emptyset,\emptyset)=(L,\leq)$. De fapt avem „$\Leftrightarrow$", pentru că $(A,\leq)\times(\emptyset,\emptyset)=(\emptyset,\emptyset)\times(B,\leq)=(\emptyset,\emptyset)$.

- dacă $L\neq\emptyset$, atunci $\Rightarrow A\neq\emptyset$ și $B\neq\emptyset$.

De asemenea, conform Exerc. anterior $\Rightarrow |A|\leq 1$ sau $|B|\leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A|=1 \Rightarrow (L,\leq)=(A,\leq)\times(B,\leq)\cong (B,\leq) \\ \text{sau} \\ |B|=1 \Rightarrow (L,\leq)=(A,\leq)\times(B,\leq)\cong (A,\leq) \end{cases}$$

Așadar, în orice scriere (izomorfe poseturi cu ea) a unui lanț $(L,\leq)$ ca produs

$(A,\leq)\times(B,\leq)=(\emptyset,\emptyset) \Leftrightarrow [(A,\leq)=(\emptyset,\emptyset)$ sau $(B,\leq)=(\emptyset,\emptyset)]$ ... $A\times B=\emptyset \Leftrightarrow (A=\emptyset$ sau $B=\emptyset)$, și $\emptyset$ e ~~ap.~~ rel. bin., e trivial, rel. de ord.

direct de poseturi, unul dintre posetur[il]e din acel produs direct este izomorf cu $(L,\leq)$, deci lanțurile sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi.

Într-adevăr, conform celor de mai sus, dacă $(L,\leq)$ este un lanț și $(A,\leq)$, $(B,\leq)$ sunt poseturi, a.î. $(L,\leq)=(A,\leq)\times(B,\leq)=(A\times B,\leq)$, atunci A și B nu pot avea ambele cardinalul ≥ 2, deci $|A|\leq 1$ sau $|B|\leq 1$. Putem pp. $|A|\leq 1$ (fără a restrânge generalitatea, deoarece produsul direct de poseturi e comutativ, deci cazul $|B|\leq 1$ e doar o redenumire de variabile). Așadar avem 2 cazuri: $\begin{cases}|A|=0, \Leftrightarrow A=\emptyset, & \text{respectiv:}\\ |A|=1, \Leftrightarrow A=\{a\}, & \text{pt. un elem. } a\end{cases}$

dacă $A=\emptyset$, atunci $\begin{cases}(A,\leq)=(\emptyset,\emptyset) \\ \text{și} \\ A\times B=\emptyset,\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A\times B,\leq)=(\emptyset,\emptyset)$, i.e. $(L,\leq)=$
$=(\emptyset,\emptyset)=(A,\leq)$.

dacă $|A|=1$ atunci $\xrightarrow{\text{ca mai sus}}$
$\Rightarrow (L,\leq)=(A\times B,\leq)\cong(B,\leq)$.

Deci, în fiecare caz $\Rightarrow$ dacă scriem pe $(L,\leq)$ ca un produs direct de poseturi, atunci $(L,\leq)$ (sau un poset izomorf cu el) apare în acel produs direct, ceea ce înseamnă că $(L,\leq)$ este indecompozabil raportat la produsul direct de poseturi.

MATERIAL FACULTATIV

<u>Obs.:</u> Într-un produs direct <u>netrivial</u> de poseturi (i.e. produsul direct a cel puțin 2 poseturi ~~toate~~ nevide, și ~~în~~ ~~invalidează~~ care ~~excepția~~ măcar ~~primele~~ 2 poseturi au cardinalul ≥ 2) singurele elemente comparabile cu toate

celelalte elemente ale produsului direct sunt minimul și maximul produsului direct, dacă acestea există.

Dem.: Fie $(A, \le)$ și $(B, \sqsubseteq)$ poseturi cu $|A| \ge 2$ și $|B| \ge 2$.

Considerăm posetul produs $(A, \le) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \le \times \sqsubseteq)$.

Acesta are minim ddacă $(A, \le)$ și $(B, \sqsubseteq)$ au minime, și în acest caz $\min(A \times B, \le \times \sqsubseteq) = (\min(A, \le), \min(B, \sqsubseteq))$;

are maxim ddacă $(A, \le)$ și $(B, \sqsubseteq)$ au maxime, și în acest caz $\max(A \times B, \le \times \sqsubseteq) = (\max(A, \le), \max(B, \sqsubseteq))$.

Fie $(a, b) \in A \times B$ (i.e. $a \in A$ și $b \in B$) a.î. $(a, b) \ne \min(A \times B, \le \times \sqsubseteq)$ și $(a, b) \ne \max(A \times B, \le \times \sqsubseteq)$, ceea ce, conform egalităților de mai sus, este echivalent cu:

$$\begin{cases} a \ne \min(A, \le) \text{ sau } b \ne \min(B, \sqsubseteq), \\ \text{și} \\ a \ne \max(A, \le) \text{ sau } b \ne \max(B, \sqsubseteq). \end{cases}$$

CAZ 1: Dacă $a = \min(A, \le) \xRightarrow[\text{prima propr. de mai sus}]{|A| \ge 2}$

$$\begin{cases} a \ne \max(A, \le) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x \ne a); \\ \text{și} \\ b \ne \min(B, \sqsubseteq) \Leftrightarrow (\exists y \in B)(b \ne y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ne a \Rightarrow (x, y) \not(\le \times \sqsubseteq) (a, b); \\ b \ne y \Rightarrow (a, b) \not(\le \times \sqsubseteq) (x, y). \end{cases}$$

Așadar (a, b) și $(x, y) \in A \times B$ sunt incomparabile în posetul produs $(A \times B, \le \times \sqsubseteq)$.

CAZ 2: Dacă $b = \max(B, \sqsubseteq) \Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{(a doua propr. de mai sus)}]{|B| \geq 2}$ $\begin{cases} b \neq \min(B, \sqsubseteq) \Leftrightarrow (\exists y \in B)(b \not\sqsubseteq y) \\ \text{și} \\ a \neq \max(A, \leq) \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x \not\leq a), \end{cases}$

$\begin{cases} b \not\sqsubseteq y \Rightarrow (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, y), \\ x \not\leq a \Rightarrow (x, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b). \end{cases}$

Așadar (a, b) și (x, y) sunt incomparabile. $A \times B$,

Cazul rămas de tratat este:

CAZ 3: Dacă $\begin{cases} a \neq \min(A, \leq) \\ \text{și} \\ b \neq \max(B, \sqsubseteq) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\exists x \in A)(a \not\leq x), \\ \text{și} \\ (\exists y \in B)(y \not\sqsubseteq b), \end{cases}$

$\begin{cases} a \not\leq x \Rightarrow (a, b) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (x, y) \\ y \not\sqsubseteq b \Rightarrow (x, y) \cancel{(\leq \times \sqsubseteq)} (a, b). \end{cases}$

Așadar (a, b) și $(x, y) \in A \times B$ sunt incomparabile.

Prin urmare, dacă $(a, b) \in$

$\in A\times B$ nu este nici minimul nici maximul posetului produs $(A\times B, \leq \times \sqsubseteq)$, atunci acest poset conține măcar un element incomparabil cu (a,b).

Acum putem trece la CAZUL GENERAL: fie I o mulțime cu $|I|\geq 2$ și $((P_i, \leq_i))_{i\in I}$ o familie de poseturi a.î. $(\exists\, i_0, j_0 \in I)\,(i_0 \neq j_0,\ |P_{i_0}|\geq 2$ și $|P_{j_0}|\geq 2)$.

Dacă $(\exists\, i\in I)\,(P_i=\emptyset) \Rightarrow$ $\Rightarrow \prod_{i\in I}(P_i, \leq_i) = (\emptyset, \leq = \emptyset)$, care satisface proprietatea din enunț: $(\forall\, a\in\emptyset)\,[(a\neq \min(\emptyset,\emptyset)$ și $a\neq\max(\emptyset,\emptyset)) \Rightarrow (\exists\, x\in\emptyset)\,((a,x)\notin\emptyset$ și $(x,a)\notin\emptyset)]$, setsets echivalentă astfel: $(\forall e)\,[e\in\emptyset \Rightarrow$ (falsă $\forall e$)

$\Rightarrow [(e\neq \min(\emptyset,\emptyset)$ şi $e\neq \max(\emptyset,\emptyset)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists x\in\emptyset)((e,x)\notin\emptyset$ şi $(x,e)\notin\emptyset)]]$

adevărată $\forall e$, $\Rightarrow$ adevărată.

Acum presupunem că $(\forall i\in I)$ $(P_i\neq\emptyset)$. Fie $(A,\leq)=(P_{i_0},\leq_{i_0})$ şi $(B,\sqsubseteq)=\prod_{i\in I-\{i_0\}}(P_i,\leq_i)=$

$$=(P_{j_0},\leq_{j_0})\times\prod_{\underbrace{i\in I-\{i_0,j_0\}}_{\text{poate fi vid,}}}(P_i,\leq_i).$$

caz în care produsul $\prod_{i\in I-\{i_0,j_0\}}(P_i,\leq_i)$ este un poset de cardinal 1.

Fie $(e_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}P_i$ a.î. $(e_i)_{i\in I}\neq\min(\prod_{i\in I}P_i,\prod_{i\in I}\leq_i)$ şi $(e_i)_{i\in I}\neq\max(\prod_{i\in I}P_i,\prod_{i\in I}\leq_i)$.

Dar $(\prod_{i\in I}P_i,\prod_{i\in I}\leq_i)=(A,\leq)\times(B,\sqsubseteq)$, iar $|A|=|P_{i_0}|\geq 2$ şi $|B|\geq|P_{j_0}|\geq 2$. Conform cazului $|I|=2$ tratat mai sus, $\Rightarrow \left(\exists\, x\in A\times B = \prod_{i\in I} P_i\right)\left(\left((e_i)_{i\in I}, x\right) \notin [\leq\times\sqsubseteq =]\ \prod_{i\in I}\leq_i\right.$ şi $\left.\left(x,(e_i)_{i\in I}\right)\notin \leq\times\sqsubseteq = \prod_{i\in I}\leq_i\right)$.

Am înlocuit, în proprietatea de mai sus, pe (a,b) cu $(e_i)_{i\in I}$, mai precis: $a=e_{i_0}$ şi $b=(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

<u>Obs.</u>: Dacă $(P,\leq)$ şi $(Q,\sqsubseteq)$ sunt poseturi a.î.:

$$\begin{cases} |P|\geq 2,\ |Q|\geq 3 \\ \exists \max(P,\leq) \text{ şi} \\ \exists \min(Q,\sqsubseteq). \end{cases}$$

Atunci posetul sumă ordinală $(P,\leq)\oplus(Q,\sqsubseteq)$ este indecompozabil raportat la produsul direct de poseturi.

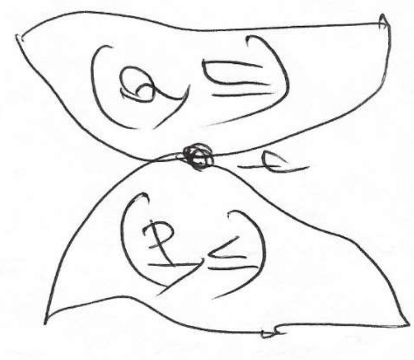
Dem.: Notăm posetul sumă ordinală astfel:

$$(P\oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) := (P,\leq)\oplus(Q,\sqsubseteq),$$

iar elementul comun al celor două poseturi în această sumă ordinală cu c:

$c \in P\oplus Q$ a.î. $\{c\} = P\cap Q$ ca submulțimi ale lui $P\oplus Q$:

$(P\oplus Q, \leq\oplus\sqsubseteq)$:



Amintesc că $\leq\oplus\sqsubseteq =$

$= \leq\cup\sqsubseteq\cup\{(x,y)\mid x\in P, y\in Q\}$.

Așadar: $\forall z\in P\oplus Q$: $\leq\cup\sqsubseteq$

- dacă $z\in P \Rightarrow z\leq c \Rightarrow z(\leq\oplus\sqsubseteq)c$
- dacă $z\in Q \Rightarrow c\leq z \Rightarrow c(\leq\oplus\sqsubseteq)z$.

Deci $(\forall z \in P \oplus Q)(c$ și z sunt comparabile în posetul $(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq))$ $\xrightarrow[\text{anterioară})]{(\text{Obs.}}$ Dacă $(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$ s-ar putea descompune într-un produs direct netrivial de poseturi, atunci $c = \min(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$ sau $c = \max(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq)$.

Dar:

- $\exists \min(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists \min(P, \leq)$, și în acest caz $\min(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) = \min(P, \leq)$;
- $\exists \max(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists \max(Q, \sqsubseteq)$, și în acest caz $\max(P \oplus Q, \leq \oplus \sqsubseteq) = \max(Q, \sqsubseteq)$,

și $c = \max(P, \leq) =$ $= \min(Q, \sqsubseteq)$.

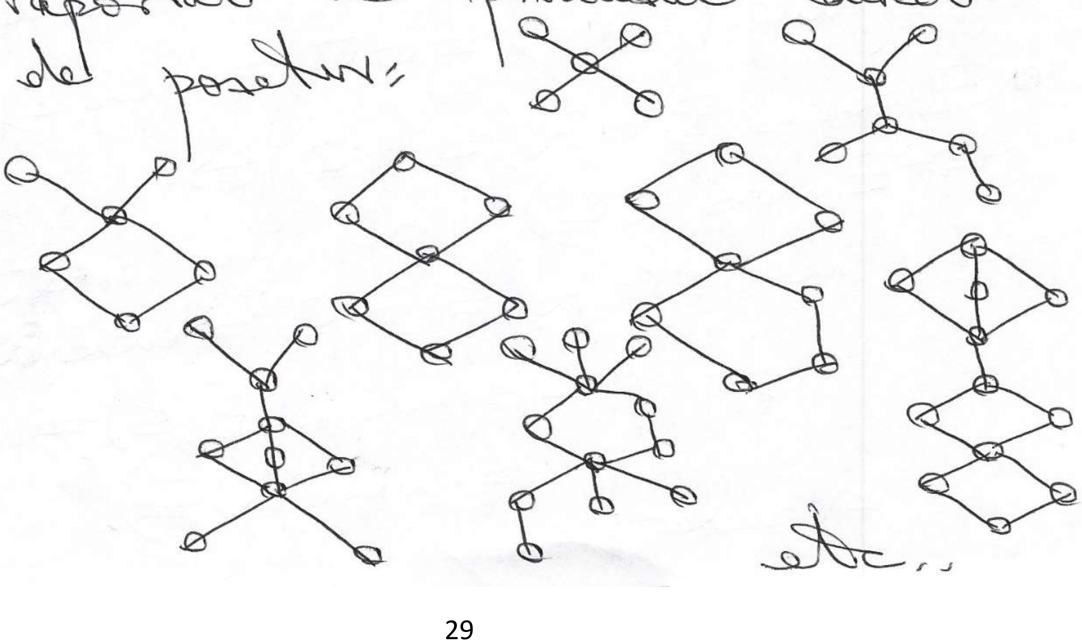
Așadar,

dacă $c = \min(P \oplus Q, \leq \oplus \leq) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \max(P, \leq) = \min(P, \leq) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |P| = 1$ $(\Leftrightarrow P = \{c\})$, ↯ cu $|P| \geq 2$,

dacă $c = \max(P \oplus Q, \leq \oplus \leq) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \min(Q, \leq) = \max(Q, \leq) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |Q| = 1$ $(\Leftrightarrow Q = \{c\})$, ↯ cu $|Q| \geq 2$.

Prin urmare, $(P \oplus Q, \leq \oplus \leq)$ este indecompozabil raportat la produsul direct de poseturi.

Ex.: Conform observației anterioare, și următoarele poseturi sunt indecompozabile raportat la produsul direct de poseturi:



etc.