

Breviar pentru Secțiunea despre Mulțimi Ordonate, Latici și Algebre Boole a Cursului de Logică Matematică și Computațională

Claudia MUREȘAN

cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro

Universitatea din București, Facultatea de Matematică și Informatică

~ ANUL I DE STUDIU AL CICLULUI DE LICENȚĂ, SEMESTRUL II ~

1 Relații de ordine

Remarca 1.1. Pentru orice mulțime A , Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică. Într-adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică și antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică și antisimetrică;
- așadar: R e simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică și antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ și $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarca 1.2. Pentru orice mulțime A , Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară și faptul că Δ_A este tranzitivă.

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relație reflexivă pe A , în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relație de echivalență pe A și cea mai mică relație de ordine pe A , în sensul incluziunii.

Remarca 1.3 (obținerea unei relații de ordine dintr-o relație de preordine; aplicație: ordinele de complexitate ale algoritmilor). Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație de preordine pe A .

Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă $[xRy \text{ și } yRx]$). Se demonstrează că \sim este o relație de echivalență pe A .

Considerăm mulțimea factor $A/\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe A/\sim definim relația binară \leq , astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy .

Se demonstrează că \leq este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanți**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) și $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalența: xRy ddacă zRt . Și se demonstrează că \leq este o relație de ordine pe A/\sim .

Remarca 1.4. Dacă A e o mulțime nevidă, atunci nu există nicio relație binară pe A care să fie și reflexivă, și ireflexivă, prin urmare nu există nicio relație binară pe A care să fie și relație de ordine, și relație de ordine strictă

Exercițiul 1.1 (ordine versus ordine strictă). Fie A o mulțime, O mulțimea relațiilor de ordine pe A și S mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A .

Să se demonstreze că aplicațiile $\varphi : O \rightarrow S$ și $\psi : S \rightarrow O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = < \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ și $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
 - scăzând din orice relație de ordine pe A diagonala lui A , se obține o relație de ordine strictă pe A ;
 - reunind orice relație de ordine strictă pe A cu diagonala lui A , se obține o relație de ordine pe A ;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ și $\varphi \circ \psi = id_S$, ceea ce înseamnă că φ și ψ sunt bijecții între O și S .

Definiția 1.1. Fie A o mulțime, \leq o relație de ordine pe A și $<$ o relație de ordine strictă pe A .

Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$ se numește *relația de ordine strictă asociată lui \leq* ;

- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numește *relația de ordine asociată lui $<$* .

(A se vedea exercițiul anterior.)

Remarca 1.5. Relația de ordine strictă asociată unei relații de ordine totale este o relație totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulțimea pe care este definită este \emptyset).

Notația 1.1. Pentru orice mulțime A , orice $R \subseteq A^2$ și orice $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$, vom nota faptul că $a_1 R a_2, a_2 R a_3, \dots$ și prin: $a_1 R a_2 R a_3 \dots$.

Definiția 1.2. • O mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează (A, \leq) și se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set”).

- Dacă, în plus, \leq este o relație de ordine totală, atunci (A, \leq) se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Observația 1.1. Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operații**, ci cu o **relație binară**.

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notațiile din definiția anterioară, A se numește *mulțimea elementelor*, sau *mulțimea suport*, sau *mulțimea subiacentă* posetului (A, \leq) ; vom vedea și noțiunile de **substructură** a unui poset și **morfism** de poseturi.

Definiția 1.3. Fie (A, \leq) un poset și $< := \leq \setminus \Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ și } a \neq b\}$ relația de ordine strictă asociată lui \leq .

Relației de ordine \leq pe A i se asociază *relația de succesiune* (numită și *relația de acoperire*), notată \prec și definită astfel: $\prec := \{(a, b) \in A^2 \mid a < b \text{ și nu există } x \in A \text{ a. i. } a < x < b\} \subseteq A^2$.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numește *succesor al lui a* (se mai spune că b *acoperă pe a*)
- a se numește *predecesor al lui b* (sau se spune că a *este acoperit de b*)

Remarca 1.6 (temă). Cu notațiile din definiția anterioară, \prec e asimetrică (deci și ireflexivă) și nu e tranzitivă.

Notația 1.2 (notații uzuale într-un poset). Cu notațiile din definiția anterioară: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Definiția 1.4. Fie (A, \leq) un poset și $<$ ordinea strictă asociată lui \leq . Spunem că mulțimea A este *densă raportat la ordinea \leq* , sau că \leq este o *ordine densă pe A* ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. i. $a < x < b$, i. e. ddacă $\prec = \emptyset$ în posetul (A, \leq) .

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse:

- Amintim că relațiile binare (pe mulțimi finite și nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relațiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ține seama de proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie ale unei relații de ordine pentru a elimina redundanțele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăți. Această reprezentare grafică a unei relații de ordine se numește *diagramă Hasse*.
- Și această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relații (de ordine) pe mulțimi finite și nevide.
- Dacă (A, \leq) este un poset finit și nevid (i. e. cu A finită și nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului (A, \leq) este graful neorientat având mulțimea nodurilor egală cu A și mulțimea muchiilor egală cu relația de succesiune \prec asociată lui \leq și a cărei reprezentare grafică respectă regula:
 - orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. i. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
 - orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găsește în relația de ordine strictă $<$ asociată lui \leq , i. e. nodurile “strict mai mari” decât el.

Observația 1.2. Faptul că, într-un poset finit și nevid (A, \leq) , două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $< := \leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului (A, \leq) prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y și
- x și y sunt conectate printr-un lanț (mai precis, prin cel puțin un lanț; aici, **lanț** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulțimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulțime total ordonată a posetului (A, \leq) , adică este un lanț cu ordinea indusă).

Observația 1.3. În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Observația 1.4. Diagrama Hasse a unei mulțimi liniar ordonate este “liniară”.

Amintim că o mulțime liniar ordonată se mai numește mulțime total ordonată sau lanț.

Notăția 1.3. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota lanțul cu k elemente prin \mathcal{L}_k (articolul hotărât va fi explicat în remarca următoare). De obicei, mulțimea suport a lanțului \mathcal{L}_k se notează cu L_k . Evident, orice mulțime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanțul cu k elemente.

Remarca 1.7. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanțul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulțime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

Mai precis, dacă L_k este o mulțime cu exact k elemente, iar \leq și \sqsubseteq sunt două ordini totale pe L_k , atunci poseturile (L_k, \leq) și (L_k, \sqsubseteq) sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k și M_k sunt mulțimi cu exact k elemente, iar \leq este o ordine totală pe L_k și \sqsubseteq este o ordine totală pe M_k , atunci poseturile (L_k, \leq) și (M_k, \sqsubseteq) sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulțumim cu explicația intuitivă: două poseturi finite și nevide sunt **izomorfe** dacă au aceeași diagramă Hasse.

Elemente distinse într-un poset:

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie (A, \leq) un poset și $X \subseteq A$.

Remarca 1.8. Este imediat faptul că relația binară pe X dată de mulțimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X , și că, dacă ordinea \leq pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiția 1.5. Ordinea pe X din remarca anterioară se numește *ordinea indusă de \leq pe X* și se notează tot cu \leq . Posetul (X, \leq) se numește *subposet* sau *submulțime (parțial) ordonată a lui (A, \leq)* .

Dacă (X, \leq) este un lanț (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci (X, \leq) se numește *submulțime total ordonată a lui (A, \leq)* .

Definiția 1.6. Un element $a \in A$ se numește:

- *minorant pentru X* dacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru X* dacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarca 1.9. X poate avea mai mulți minoranți (majoranți), și poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Definiția 1.7. • Un minorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numește *minim al lui X* sau *prim element al lui X* sau *cel mai mic element al lui X* și se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.

- Un majorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numește *maxim al lui X* sau *ultim element al lui X* sau *cel mai mare element al lui X* și se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarca 1.10. Minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui \leq implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notația de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (și \leq)). La fel pentru maxim.

Definiția 1.8. Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit*. (Minimul și maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiția anterioară.)

Remarca 1.11. O mulțime care are minim sau maxim are cel puțin un element (pentru că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi și la fel și maximul), deci nu poate fi vidă.

Definiția 1.9. Un element $x \in X$ se numește:

- *element minimal al lui X* dacă este minimul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x , sau, echivalent, dacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, dacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui X* dacă este maximul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x , sau, echivalent, dacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, dacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarca 1.12. Din definiția anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X și minorant pentru X dacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X dacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și majorant pentru X dacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X dacă $x = \max(X)$

Remarca 1.13. Orice poset finit și nevid are elemente maximale și elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit și nevid (A, \leq) , există un element minimal e și un element maximal E în posetul (A, \leq) , cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

În orice poset finit și nevid, orice element care nu este element maximal are cel puțin un succesor, și orice element care nu este element minimal are cel puțin un predecesor.

În orice poset finit și nevid, închiderea tranzitivă a relației de succesiune este relația de ordine strictă, iar închiderea reflexiv-tranzitivă a relației de succesiune (i. e. preordinea generată de relația de succesiune) este relația de ordine.

Definiția 1.10. *Infimumul lui X* este cel mai mare minorant al lui X , adică maximul mulțimii minoranților lui X , și se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.

Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X , adică minimul mulțimii majoranților lui X , și se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarca 1.14. Infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulțimea minoranților este nevidă.

Dar, fiind maximul unei mulțimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât și notația, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (și \leq)).

La fel pentru supremum.

Remarca 1.15. Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparține mulțimii dacă este minimul mulțimii: $\exists \inf(X) \in X$ dacă $\exists \min(X)$, și atunci $\min(X) = \inf(X)$.

Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparține mulțimii dacă este maximul mulțimii: $\exists \sup(X) \in X$ dacă $\exists \max(X)$, și atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarca 1.16. Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ ($\in A$) dacă:
 - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
 - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ ($\in A$) dacă:
 - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
 - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lema 1.1. Fie (L, \leq) un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- $x \leq y$
- există în L $\inf\{x, y\} = x$
- există în L $\sup\{x, y\} = y$

Principiul dualității pentru poseturi:

- **Principiul dualității pentru poseturi:** Orice rezultat privind un poset arbitrar (fapt esențial) (A, \leq) rămâne valabil dacă înlocuim \leq cu \leq^{-1} (notată \geq ; conform definiției inversei unei relații binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ dacă $y \leq x$; la fel în continuare), $<$ cu $<^{-1}$ (notată $>$), \prec cu \prec^{-1} (notată \succ), toți minoranții cu majoranți (ca noțiuni) și vice-versa, toate elementele minimale cu elemente maxime și vice-versa, toate minimurile cu maximuri și vice-versa și toate infimumurile cu supremumuri și vice-versa.
- Valabilitatea acestui principiu este ușor de observat din faptul că: pentru orice ordine \leq , \geq este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ și relația de succesiune \succ , \leq este totală dacă \geq este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranții lui (X, \leq) sunt exact majoranții lui (X, \geq) și vice-versa, elementele minimale ale lui (X, \leq) sunt exact elementele maxime ale lui (X, \geq) și vice-versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ și vice-versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există dacă $\max(X, \geq)$ există, și, atunci când există, sunt egale; la fel vice-versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ și vice-versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noțiunile de minorant și majorant sunt *duale una alteia*, și la fel pentru noțiunile de element minimal și element maximal, minim și maxim, infimum și supremum, respectiv.
- Posetul (A, \geq) se numește *posetul dual* al posetului (A, \leq) .
- Este evident că dualul dualului unui poset (A, \leq) este chiar (A, \leq) .
- Ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualității pentru poseturi**, vom scrie, simplu, “prin dualitate”.
- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obține prin “răsturnarea diagramei Hasse” a acelui poset “cu susul în jos”.
- Lanțurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarca 1.17. Fie (A, \leq) un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \not\leq b$;
- dacă (A, \leq) este lanț, atunci: $b < a$ dacă $a \not\leq b$.

Remarca 1.18. Fie (L, \leq) un poset și $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în (L, \leq) $\inf(X)$ și $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Remarca 1.19. Pentru orice mulțime T , în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap_{A \in X} A$

Remarca 1.20 (temă: scrieți această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$). Fie (L, \leq) un poset și $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în (L, \leq) $\sup(X)$ și $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în (L, \leq) $\inf(X)$ și $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarcă următoare.
Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în (L, \leq) $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în (L, \leq) $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Remarca 1.21. Într-un poset (L, \leq) , $\sup(\emptyset)$ există dacă $\min(L)$ există, și, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$.

Propoziția 1.1. Fie (L, \leq) un poset. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L ;
- pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L .

2 Funcții izotone

Definiția 2.1. Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție.

f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observația 2.1. Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinele naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarca 2.1. Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul (A, \leq) și posetul dual lui (B, \sqsubseteq) , anume (B, \sqsupseteq) , unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Remarca 2.2. Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă.

Exercițiul 2.1 (temă). Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.

I. e., dacă:

- (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) sunt două poseturi,
- $< := \leq \setminus \Delta_A$ și $\sqsubset := \sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinele stricte asociate lui \leq și, respectiv, \sqsubseteq ,
- iar $f : A \rightarrow B$ este o funcție izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

Definiția 2.2. O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exercițiul 2.2 (temă). Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) . Arătați că, dacă (L, \leq) este lanț, atunci inversa lui f , f^{-1} , este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Exercițiul 2.3 (temă). Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție surjectivă izotonă între două poseturi (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) . Arătați că, dacă (L, \leq) este lanț, atunci (M, \sqsubseteq) este lanț.

Remarca 2.3. Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare.

Exercițiul 2.4 (Teorema Knaster–Tarski (temă)). Fie (L, \leq) un poset, iar $f : L \rightarrow L$ o funcție izotonă.

Dacă există în posetul (L, \leq) $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

- $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui f*) și $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;
- dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Și **dual**: dacă există în posetul (L, \leq) $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

- $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui f*) și $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;
- dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulțimi parțial ordonate (poseturi):

Definiția 2.3. Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set”) o pereche (A, \leq) formată dintr-o mulțime A și o **relație de ordine** \leq pe A , i. e.:

- \leq este o **relație binară** pe A : $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- \leq este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- \leq este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$

- \leq este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine \leq este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci (A, \leq) se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Relația de ordine strictă asociată ordinii \leq este $\leq^{\text{not.}} = \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.

Relația de succesiune asociată ordinii \leq este $\prec^{\text{not.}} = \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists a \in A) (x < a < y)\}$.

Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Remarca 2.4. Cu notațiile din definiția anterioară, avem:

- \geq este o relație de ordine pe A
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui \geq
- \succ este relația de succesiune asociată lui \geq

3 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Pe tot parcursul acestei secțiuni, (A, \leq) va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.

Următoarea definiție o generalizează pe cea din Cursul III în care posetul de referință era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulțime arbitrară.

Definiția 3.1. • Se numește *sistem de închidere pe posetul mărginit (A, \leq)* o submulțime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulțime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în (A, \leq) $\inf(S) \in M$.

- Se numește *operator de închidere pe posetul mărginit (A, \leq)* o funcție $C : A \rightarrow A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietățile:

- $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
- $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
- dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Remarca 3.1. Orice sistem de închidere pe (A, \leq) conține $\inf(\emptyset) = \max(A)$, așadar orice sistem de închidere pe (A, \leq) este nevid.

Exemplul 3.1. • id_A este un operator de închidere pe (A, \leq) .

- Funcția constantă $C : A \rightarrow A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe (A, \leq) .
- A este un sistem de închidere pe (A, \leq) .
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe (A, \leq) .
- \emptyset nu este un sistem de închidere pe (A, \leq) .

Propoziția 3.1. Dacă M este un sistem de închidere pe (A, \leq) , atunci, pentru orice $x \in A$, există în (A, \leq) $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.

Iar, dacă definim $C_M : A \rightarrow A$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe (A, \leq) .

Propoziția 3.2. Fie $C : A \rightarrow A$ un operator de închidere pe (A, \leq) . Atunci imaginea lui C este un sistem de închidere pe (A, \leq) , având ca elemente exact punctele fixe ale lui C : $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. Vom nota cu $M_C = C(A)$.

Propoziția 3.3. Aplicațiile din cele două propoziții precedente sunt inverse una alteia, adică:

- pentru orice operator de închidere $C : A \rightarrow A$ pe (A, \leq) , $C_{M_C} = C$;
- pentru orice sistem de închidere M pe (A, \leq) , $M_{C_M} = M$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe (A, \leq) și mulțimea sistemelor de închidere pe (A, \leq) sunt în bijecție.

4 Latici

- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

laticile Ore și laticile Dedekind.

Orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore.

- Așadar, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

Definiția 4.1. O *latice Ore* este un poset (L, \leq) cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Remarca 4.1. Orice lanț este latice Ore, pentru că, dacă (L, \leq) este un lanț nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ și $\max\{x, y\}$, așadar există în (L, \leq) $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Definiția 4.2. O *latice Dedekind* este o structură algebrică (L, \vee, \wedge) , unde L este o mulțime, iar \vee și \wedge sunt două operații binare pe L (adică $\vee : L^2 \rightarrow L$ și $\wedge : L^2 \rightarrow L$; aceste operații binare sunt notate infixat și numite, respectiv, *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Lema 4.1. Fie (L, \leq) un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $x \leq y$
- (ii) există în L $\inf\{x, y\} = x$
- (iii) există în L $\sup\{x, y\} = y$

Lema 4.2. Fie (L, \vee, \wedge) o latice Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $x \wedge y = x$
- (ii) $x \vee y = y$

Teorema 4.1. Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

- (i) Fie $\mathcal{L} := (L, \leq)$ o latice Ore. Definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde \vee și \wedge sunt operații binare pe mulțimea L , definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore \mathcal{L} . Atunci $\Phi(\mathcal{L})$ este o latice Dedekind.
- (ii) Fie $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde \leq este o relație binară pe mulțimea L , definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ dacă $x \vee y = y$ (ceea ce este echivalent cu $x \wedge y = x$, după cum ne asigură o leamnă de mai sus). Atunci $\Psi(\mathcal{L})$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
- (iii) Aplicațiile Φ și Ψ sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore \mathcal{L} , $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$, și, pentru orice latice Dedekind \mathcal{L} , $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într-un anumit moment.
- Pentru orice latice L , vom folosi oricare dintre notațiile: (L, \leq) , (L, \vee, \wedge) și (L, \vee, \wedge, \leq) , în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L : ordinea ei parțială \leq , operațiile ei binare \vee și \wedge , sau toate acestea.

Exemplul 4.1. Cu ultima dintre notațiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T ;
- orice lanț (L, \max, \min, \leq) .

Propoziția 4.1 (două inegalități nestricte și de același sens într-o latice se pot compune cu \vee , precum și cu \wedge , membru cu membru; altfel spus, relația de ordine într-o latice este compatibilă cu \vee și cu \wedge). *Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici (L, \vee, \wedge, \leq) , dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.*

Principiul dualității pentru latici:

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: \vee și \wedge , \leq și \geq , respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.

Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă (L, \vee, \wedge, \leq) este o latice, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că (L, \wedge, \vee, \geq) este, de asemenea, o latice, iar această latice se numește *duala* latici (L, \vee, \wedge, \leq) .

Este evident că duala dualei unei latici (L, \vee, \wedge, \leq) este chiar (L, \vee, \wedge, \leq) .

Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară (L, \vee, \wedge, \leq) rămâne valabil dacă în el inter schimbăm \vee cu \wedge și \leq cu \geq .*

Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.

De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, “prin dualitate”.

5 Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiția 5.1. Fie (L, \vee, \wedge) și (M, \sqcup, \sqcap) două latici și $f : L \rightarrow M$ o funcție.

f se numește *morfism de latici* dacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

$$(i) \quad f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$$

și

$$(ii) \quad f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y).$$

Un morfism de latici de la o latice la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici.

Remarca 5.1. Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici.

Remarca 5.2. Orice morfism de latici este funcție izotonă, dar nu și reciproc.

Exercițiul 5.1 (util pentru alte exerciții). Fie (L, \vee, \wedge, \leq) și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ latici, iar $f : L \rightarrow M$ o funcție.

Să se demonstreze că o f e morfism de latici dacă f e izotonă și păstrează infimumurile și supremumurile perechilor de elemente incomparabile din L , i.e. dacă, pentru orice $x, y \in L$:

- dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \sqsubseteq f(y)$;
- dacă $x \parallel y$, atunci $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$ și $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Definiția 5.2. Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcție inversabilă și a cărei inversă este tot un morfism de latici.

Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice și ea însăși (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiția 5.3. Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*.

În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziția 5.1. O funcție între două latici este un izomorfism de latici dacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcție bijectivă.

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Propoziția 5.2. O funcție între două latici este izomorfism de latici dacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).

6 Latici mărginite

Definiția 6.1. Un poset mărginit care este latice se numește *latice mărginită*.

Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.

Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.

O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.

O latice mărginită se mai numește *latice cu 0 și 1* sau *latice cu prim și ultim element*.

Definiția 6.2. Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numește *laticea mărginită trivială*.

Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latice mărginită netrivială*.

Definiția 6.3. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ două latici mărginite și $f : L \rightarrow M$ o funcție.

f se numește *morfism de latici mărginite* dacă este morfism de latici și $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$.

Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarca 6.1. Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.

Definiția 6.4. Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcție inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.

Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latice mărginită și ea însăși (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiția 6.5. Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe*.

Propoziția 6.1. O funcție între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite dacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcție bijectivă.

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Remarca 6.2. De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarca 6.3. Am văzut că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare.

Prin urmare, orice funcție izotonă surjectivă între două poseturi mărginite păstrează minimul și maximul, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de-al doilea poset, și duce maximul primului poset în maximul celui de-al doilea poset.

Remarca 6.4. Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulțime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulțimii (desigur, și există o astfel de ordine totală).

Semnificația acestei afirmații este că oricare două lanțuri finite cu aceeași mulțime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru, pentru că știm că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulțime finită A , dacă \leq și \sqsubseteq sunt ordini totale pe A , atunci poseturile (laticile) (A, \leq) și (A, \sqsubseteq) sunt izomorfe.

Ca o consecință imediată, oricare două lanțuri finite de același cardinal (i. e. cu același număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanțul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanțuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru; deci și ca latici mărginite, conform remarciilor anterioare).

7 Sublatici și sublatici mărginite

Definiția 7.1. Dată o latice (L, \vee, \wedge) , o submulțime M a lui L se numește *sublatice a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice ale lui L , adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice mărginită a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice mărginită ale lui L , adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Remarca 7.1. Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operațiile *induse* pe M de operațiile lui L , adică restricțiile operațiilor lui L la M :

- restricția lui \vee la M este operația binară \sqcup pe M , definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricția lui \wedge la M este operația binară \sqcap pe M , definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite: restricția lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente); restricția lui 0 la M la M este 0 (și aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente).

Operațiile induse se notează, de obicei, la fel ca operațiile laticii L :

- operația \sqcup , definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu \vee ;
- operația \sqcap , definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu \wedge ;
- în cazul laticilor mărginite, primul și ultimul element al sublaticii mărginite M , ca prim și, respectiv, ultim element al laticii mărginite M , se notează, de obicei tot cu 0 și 1 , respectiv.

Remarca 7.2. Cu notațiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parțială a unei sublaticii M a lui L (ca latice cu operațiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parțială a lui L restricționată la M , care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parțială a lui L :

- notând cu \sqsubseteq ordinea laticii M , pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea \sqsubseteq a laticii M este, într-adevăr, restricția lui \leq la M , și \sqsubseteq se notează, de obicei, tot cu \leq .

Remarca 7.3. Orice submulțime a unei latici \mathcal{L} este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat și sublatice, pentru că poate să nu conțină infimumurile și supremumurile din \mathcal{L} ale perechilor de elemente ale sale.

Exercițiul 7.1 (temă). Orice submulțime total ordonată a unei latici \mathcal{L} este sublatice a lui \mathcal{L} .

Exercițiul 7.2 (temă). Să se demonstreze că:

- imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
- mai general: imaginea printr-un morfism de latici (mărginite) a unei sublaticii (mărginite) a domeniului său este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
- preimaginea printr-un morfism de latici (mărginite) a unei sublaticii (mărginite) a codomeniului său este o sublatice (mărginită) a domeniului acelui morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcție), deci acest caz particular la punctul (iii) este trivial.)

8 Latici distributive

Propoziția 8.1. În orice latice (L, \vee, \wedge) , următoarele două afirmații, numite legile de distributivitate, sunt echivalente:

- (d_1) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- (d_2) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definiția 8.1. O latice se zice *distributivă* dacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Remarca 8.1. A se observa că egalitățile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalități să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că și cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

Remarca 8.2. Pentru orice mulțime T , laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă.

Remarca 8.3. Orice lanț este o latice distributivă.

Remarca 8.4. Orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarca 8.5. Imaginea oricărei latici distributive printr-un morfism de latici este o latice distributivă.

A se vedea în curs diagramele Hasse ale *diamantului* și *pentagonului* – cele mai mici latici nedistributive, întrucât:

Propoziția 8.2 (caracterizare a laticilor distributive). O latice L este distributivă dacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.

9 Elemente complementate în latici mărginite

Definiția 9.1. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.

Un element $x \in L$ se zice *complementat* dacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.

Un astfel de element y se numește *complement al lui x* .

O latice mărginită se zice *complementată* dacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarca 9.1. În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x , atunci x este un complement al lui y , după cum arată comutativitatea lui \vee și \wedge .

Remarca 9.2. În orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite:

Remarca 9.3. În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

10 Latici complete

Definiția 10.1. O latice (L, \leq) se zice *completă* dacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ și $\sup(A)$ în posetul (L, \leq) .

Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplul 10.1. Pentru orice mulțime T , laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă și completă.

Remarca 10.1. • Orice latice completă (L, \leq) este nevidă și mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ și $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ și $\max(L) = 1$, cu notația clasică pentru primul și ultimul element al unei latici.

- Orice latice finită și nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat mai sus, orice latice nevidă conține infimumurile și supremumurile tuturor submulțimilor sale finite și nevide și, în plus, orice latice finită și nevidă are prim și ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul și infimumul mulțimii vide.
- O latice (L, \leq) este completă dacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în (L, \leq) , dacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în (L, \leq) .

11 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiția 11.1. Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notată $(A, \leq) \dot{+} (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$, unde $\leq \dot{+} \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod B$: $\leq \dot{+} \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$: $\leq \times \sqsubseteq := \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care (A, \leq) are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar (B, \sqsubseteq) are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod (B \setminus \{0\})$, cu aceleași identificări ca mai sus: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Observația 11.1. Definiția de mai sus a relației binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiției unui produs direct arbitrar de relații binare, prezentate într-un curs anterior.

În unele cărți și articole se folosesc următoarele denumiri:

- *suma ordinală* definită ca mai sus e numită *sumă alipită*;
- *suma directă* definită ca mai sus e numită *sumă ordinală*.

În cursurile mele mai vechi puteți găsi notațiile $\dot{+}$ și \oplus pentru sumele directe, respectiv ordinale inversate. La **examen** este necesar să le folosiți pe cele din cursul de anul acesta.

Remarca 11.1 (temă). Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \dot{+} \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, și sumă ordinală, $\leq \oplus \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \coprod B$, $A \times B$ și $A \coprod (B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică: $(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.

Remarca 11.2 (temă). Se observă că:

- **suma directă și suma ordinală de poseturi sunt asociative, dar nu sunt comutative;**
- **produsul direct de poseturi este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi (A, \leq_A) , (B, \leq_B) și (C, \leq_C) , există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A, b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \rightarrow B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiția unui produs direct de algebre).

Remarca 11.3 (temă). Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi.

- Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
- Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și (B, \sqsubseteq) sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
- Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și (A, \leq) sunt izomorfe.
- Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.
- Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarca 11.4. Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanț nevid (L, \leq) este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu (L, \leq) și fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

A se vedea în curs cum arată **diagramele Hasse** ale poseturilor sumă directă, produs direct și sumă ordinală între două poseturi finite.

Definiția 11.2. Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I} (A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i \in I} \leq_i$ este următoarea relație binară pe produsul direct de mulțimi $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\}$: pentru orice $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } (\forall i \in I) (f(i) \leq_i g(i))$$

După cum știm din rezultatul privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare, relația \leq definită mai sus este o **relație de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I} (A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

Notația 11.1. Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine (A^I, \leq) (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \rightarrow A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă și succesiunea asociate ordinii produs:

Remarca 11.5. Cu notațiile din definiția anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ și, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relația de ordine strictă asociată lui \leq_i , iar cu \prec_i relația de succesiune asociată lui \leq_i , și cu $<$ notăm relația de ordine strictă asociată ordinii produs \leq , iar cu \prec notăm relația de succesiune asociată lui \leq , atunci:

- $< = \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I} \text{ și } (\exists k \in I) (a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec = \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists k \in I) [a_k \prec_k b_k \text{ și } (\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i = b_i)]\}$.

Remarca 11.6. Din remarca anterioară deducem că, dacă (A, \leq_A) și (B, \leq_B) sunt poseturi, iar relația de succesiune asociată lui \leq_A , respectiv \leq_B , este \prec_A , respectiv \prec_B , atunci relația de succesiune asociată ordinii produs, $\leq = \leq_A \times \leq_B$, este:

$$\prec = \{((a, b), (a', b')) \in (A \times B)^2 \mid (a = a' \text{ și } b \prec_B b') \text{ sau } (a \prec_A a' \text{ și } b = b')\}$$

A se observa, din această expresie a lui \prec , corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr-o diagramă Hasse.

Remarca 11.7. Produsul direct al familiei vide de mulțimi este un **singleton**, adică o mulțime cu un singur element. Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*, *)\}$.

12 Algebre produs direct

A se revedea, de mai sus, definiția **produsului direct al unei familii de poseturi**.

În această definiție se pot înlocui poseturile cu mulțimi înzestrate cu **relații binare** arbitrare, și se obține produsul direct al respectivelor mulțimi înzestrate cu relația produs direct al respectivelor relații binare.

Această construcție poate fi generalizată la mulțimi înzestrate cu **relații n -are**.

Dar **produsul direct** se poate defini și pentru structuri algebrice de același tip înzestrate cu anumite **operații**, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.

Produsul direct al unor latici este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) și o **algebră produs direct cu două operații binare** (latice Dedekind).

Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații**.

Exercițiul 12.1 (temă). Pe baza celor de mai jos, să se scrie produsul de algebre și pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operație p -ară (de aritate p , cu p argumente)** și o **relație k -ară**, unde $p, k \in \mathbb{N}$ (sau \mathbb{N}^*).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr-o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă: vom vedea).

Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i .

Atunci putem defini *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) , cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n A_i$,
cu *operațiile produs direct*:
- $\odot \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n \odot_i \stackrel{\text{notație}}{=} (\odot_1, \dots, \odot_n)$,
- $f \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n f_i \stackrel{\text{notație}}{=} (f_1, \dots, f_n)$,
- $c \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n c_i \stackrel{\text{notație}}{=} (c_1, \dots, c_n)$
și *relația binară produs direct*:
- $\rho \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n \rho_i = \rho_1 \times \dots \times \rho_n$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$:

- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in A$, $x \odot y \stackrel{\text{definiție}}{=} (x_1 \odot_1 y_1, \dots, x_n \odot_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, $f(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \stackrel{\text{definiție}}{=} (c_1, \dots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in A$, prin definiție, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \dots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \odot_1, f_1, c_1, \rho_1) = \dots = (A_n, \odot_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \dots, b_n) \mid b_1, \dots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i .

Atunci putem defini *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) , cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (h(i) \in A_i)\},$

cu operațiile produs direct \odot (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și relația binară produs direct ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \odot h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \odot h)(i) = g(i) \odot_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, $g \rho h$ dacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \rightarrow B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Scrisoare alternativă pentru *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) :

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\},$

cu operațiile produs direct \odot (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și relația binară produs direct ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, $(a_i)_{i \in I} \odot (b_i)_{i \in I} := (a_i \odot_i b_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I} \in A$, $f((a_i)_{i \in I}) := (f_i(a_i))_{i \in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, prin definiție, $(a_i)_{i \in I} \rho (b_i)_{i \in I}$ dacă $a_i \rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in B)\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip:

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume (A, \odot, f, c, ρ) , unde:

- A este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element: $A = \{a\}$;
- operațiile \odot , f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume: $a \odot a := a$, $f(a) := a$ și $c := a$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(a, a)\}$, deci ρ nu poate fi decât \emptyset sau $\{(a, a)\}$; dar ρ este produsul familiei vide de relații binare, care este tot un produs direct al familiei vide de mulțimi, deci este tot un singleton, așadar $\rho = \{(a, a)\}$.

Exercițiul 12.2 (temă). Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare. Operații zeroare \equiv constante:

Definiția 12.1. Dacă \mathcal{A} este o structură algebrică, având mulțimea suport A , iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operație n -ară* (operație de aritate n , operație cu n argumente) a lui \mathcal{A} este o funcție $f : A^n \rightarrow A$.

- Pentru orice mulțime A , $A^0 = A^\emptyset = \prod_{i \in \emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide de mulțimi: un singleton).
- Așadar, cu notațiile din definiția de mai sus: o *operație 0-ară* (operație de aritate 0, operație fără argumente) a lui \mathcal{A} este o funcție $f : A^0 \rightarrow A$, deci o funcție $f : \{a\} \rightarrow A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: **o constantă din A** .
- Constantele 0 și 1 dintr-o latice mărginită sunt operații zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 și 1 dintr-un inel unitar etc..

13 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate

Definiția 13.1. O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarca 13.1. În orice algebră Boole, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin \bar{x} (sau $\neg x$).

Existența complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\neg : B \rightarrow B$ (sau $\neg : B \rightarrow B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.

Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.

Notăție și terminologie 13.1. O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \neg, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar \neg este operația ei de complementare.

Adesea, $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este numită *latice Boole*, iar $(B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ este numită *algebră Boole*.

Exemple de algebre Boole:

- Orice structură algebrică poate fi desemnată de mulțimea elementelor sale, dar poate fi notată și altfel decât această mulțime.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu L_n mulțimea elementelor lanțului cu n elemente, iar cu \mathcal{L}_n întreaga structură algebrică a lanțului cu n elemente, fie ea de poset, poset mărginit, latice, latice mărginită (desigur, distributivă) sau algebră Boole (în cazul lui \mathcal{L}_1 sau \mathcal{L}_2 : vom vedea). Așa cum am menționat mai sus, nu este obligatoriu să se facă această distincție.

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarca 13.2. O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiția 13.2. • Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, \mathcal{L}_1) se numește *algebra Boole trivială*.

- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemplul 13.1. Lanțul cu două elemente, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole.

Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard*.

Remarca 13.3. Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarca 13.4. În particular, considerând algebra Boole standard \mathcal{L}_2 și o mulțime arbitrară I , remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I = \{f | f : I \rightarrow L_2\}, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \neg, 0, 1)$: pentru orice $f, g \in L_2^I$:

- $f \vee g, f \wedge g, \bar{f}, 0, 1 \in L_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:

(i) $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$

(ii) $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$

(dacă $|I| \geq 2$, atunci \mathcal{L}_2^I nu e lanț, deci $\vee \neq \max$ și $\wedge \neq \min$ în \mathcal{L}_2^I)

(i) $\bar{f}(i) := \overline{f(i)}$

(ii) $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$

- $f \leq g$ în \mathcal{L}_2^I ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în \mathcal{L}_2 .

Remarca 13.5. Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in L_2$:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \dots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ și $1 := \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n)$ în \mathcal{L}_2^n dacă $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \dots, x_n \leq y_n$ în \mathcal{L}_2
- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemplul 13.2. Algebra Boole \mathcal{L}_2^2 se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse.
Algebra Boole \mathcal{L}_2^3 se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse.

Exemplul 13.3. Pentru orice mulțime I , $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{}, \emptyset, I)$, unde $\bar{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.

Exercițiul 13.1 (temă). Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.

Propoziția 13.1 (temă). *Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).*

Uneori se face distincția între:

- *latice booleană*: latice distributivă mărginită complementată;
- și
- *algebră booleană (algebră Boole)*: latice booleană înzestrată cu operația de complementare.

Definiția 13.3. Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, se definesc următoarele operații binare derivate:

- *implicația (booleană)*, \rightarrow : pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \bar{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, \leftrightarrow : pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarca 13.6 (complementarea este autoduală (autoinversă)). Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\bar{\bar{x}} = x$.

14 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole

Remarca 14.1. Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{}, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole \mathcal{B}* .

Se știe, din capitolul despre latici al cursului, că:

- \vee și \wedge ,
- \leq și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.

Este imediat că operația unară $\bar{}$ este duală ei însăși. Spunem că operația $\bar{}$ este *autoduală*.

Evident, duala dualei lui \mathcal{B} este \mathcal{B} .

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: orice rezultat valabil într-o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: \vee cu \wedge , \leq cu \geq , 0 cu 1 (iar operația $-$ rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximele cu elementele minimele.

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menționa altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, -, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.

Propoziția 14.1 (legile lui de Morgan). Pentru orice $x, y \in B$:

$$(i) \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

$$(ii) \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

Propoziția 14.2. Pentru orice $x, y \in B$, au loc următoarele echivalențe:

$$(i) x = y \text{ ddacă } \bar{x} = \bar{y}$$

$$(ii) x \leq y \text{ ddacă } \bar{y} \leq \bar{x}$$

$$(iii) x \leq y \text{ ddacă } x \wedge \bar{y} = 0 \text{ ddacă } \bar{x} \vee y = 1$$

$$(iv) x \leq y \text{ ddacă } x \rightarrow y = 1$$

$$(v) x = y \text{ ddacă } x \leftrightarrow y = 1$$

Propoziția 14.3 (legea de reziduație). Pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența:

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

15 Echivalența algebre Boole – inele Boole – secțiune facultativă

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiția 15.1. Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lema 15.1. În orice inel Boole B , au loc: pentru orice elemente $x, y \in B$, $xy = yx$ și $x + x = 0$ (cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul 2 în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui 0 este 1 , 0 fiind elementul neutru al acestui grup aditiv: $0 = 0$).

Teorema 15.1 (echivalența algebră Boole \Leftrightarrow inel Boole). Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- Fie $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ un inel Boole. Definim operațiile \vee, \wedge și $-$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \bar{x} := x + 1 \end{cases}$$

Atunci $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ este o algebră Boole, pe care o vom nota cu $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

- Fie $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ o algebră Boole. Definim operațiile $+$ și \cdot pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ este un inel Boole, pe care îl vom nota cu $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ (unde am notat cu $-$ operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).

- Aplicațiile \mathcal{A} și \mathcal{I} sunt “inverse una alteia”, în sensul că, pentru orice inel Boole \mathcal{B} , $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$, și, pentru orice algebră Boole \mathcal{B} , $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.

16 Subalgebre Boole și morfisme booleene

Definiția 16.1. O submulțime S a lui B se numește *subalgebră Boole a lui B* dacă este **închisă la operațiile de algebră Boole ale lui B** , i. e.:

- (i) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;
- (ii) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;
- (iii) pentru orice $x \in S$, rezultă $\bar{x} \in S$;
- (iv) $0, 1 \in S$.

Propoziția 16.1. *Au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți din definiția unei subalgebre Boole, aplicate unei submulțimi nevide S a lui B :*

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$
- $(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4)$

Remarca 16.1. O subalgebră Boole S a unei algebre Boole B este o algebră Boole cu operațiile induse pe S de operațiile de algebră Boole ale lui B și cu ordinea parțială indusă pe S de ordinea parțială a lui B .

Notăția 16.1. Operațiile induse (adică restricțiile la S ale operațiilor lui B) se notează, de obicei, la fel ca operațiile de algebră Boole ale lui B , iar ordinea parțială indusă (adică ordinea parțială a lui B restricționată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parțială a lui B .

Remarca 16.2. Orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole B este închisă la operațiile derivate \rightarrow și \leftrightarrow ale lui B (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), și că operațiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicația și, respectiv, echivalența algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicația și, respectiv, echivalența lui B).

În cele ce urmează, renunțăm la fixarea algebrei Boole notate B

Definiția 16.2. Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \perp, \top)$, o funcție $f : A \rightarrow B$ se numește *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) dacă **f comută cu operațiile de algebre Boole ale lui A și B** , i. e. dacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ și, pentru orice $x \in A$, $f(\bar{x}) = \neg(f(x))$.

Scris desfășurat, o funcție $f : A \rightarrow B$ este *morfism boolean* dacă:

- (i) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
- (ii) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$
- (iii) pentru orice $x \in A$, $f(\bar{x}) = \neg(f(x))$
- (iv) $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole și ea însăși.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este același lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole și ea însăși, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Propoziția 16.2. *Cu notațiile din definiția anterioară, au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți ale unui morfism boolean, aplicate unei funcții $f : A \rightarrow B$:*

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$

- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$

Remarca 16.3 (temă). Orice morfism boolean comută cu implicația și echivalența booleană.

Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.

Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

Propoziția 16.3. Pentru orice mulțime I , algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, I)$ și $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).

Definiția unei algebre Boole – mnemonic:

O **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B ,
- o relație de ordine parțială \leq pe B ,
- două operații binare \vee și \wedge pe B , notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{}$ pe B ,

iar aceste componente au proprietățile:

- (B, \vee, \wedge, \leq) este o **latice**, i. e.:
 - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul (B, \leq) ;
 - \vee și \wedge sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru \wedge ;
 - \vee și \wedge verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
 - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ dacă $x \vee y = y$ dacă $x \wedge y = x$;
 - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
 - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;
- laticea (B, \vee, \wedge, \leq) este **distributivă**, i. e.:
 - \vee este **distributivă** față de \wedge , i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
 - \wedge este **distributivă** față de \vee , i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
 - 0 este **minimul** posetului (B, \leq) ;
 - 1 este **maximul** posetului (B, \leq) ;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{}$ este operația de **complementare**:
 - pentru orice $x \in B$, \bar{x} este **unicul complement** al lui x , adică **unicul** element $\bar{x} \in B$ care satisface:

$$\begin{cases} x \vee \bar{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \bar{x} = 0. \end{cases}$$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, \rightarrow : pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \bar{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, \leftrightarrow : pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

17 Filtre ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$, arbitrară.
- Vom nota $\geq := \leq^{-1}$.

Definiția 17.1. O submulțime nevidă F a lui B se numește *filtru* al algebrei Boole \mathcal{B} ddacă, pentru orice $x, y \in B$, următoarele condiții sunt satisfăcute:

- (F_1) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;
- (F_2) dacă $x \in F$ și $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Notăția 17.1. Mulțimea filtrelor lui \mathcal{B} se notează cu $\text{Filt}(\mathcal{B})$.

Remarca 17.1. Orice filtru al lui \mathcal{B} îl conține pe 1. Într-adevăr, dacă F este un filtru al lui \mathcal{B} , atunci F este nevid prin definiție, deci există un element $x \in F$; dar, ca orice element al lui B , x satisface $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform condiției (F_2) din definiția unui filtru.

Remarca 17.2. Este imediat că $\{1\}$ și B sunt filtre ale lui \mathcal{B} , iar aceste filtre sunt respectiv minimul (a se vedea remarca anterioară) și maximul posetului $(\text{Filt}(\mathcal{B}), \subseteq)$.

Definiția 17.2. $\{1\}$ se numește *filtrul trivial* al lui \mathcal{B} , iar B se numește *filtrul impropriu* al lui \mathcal{B} . Orice filtru $F \neq \{1\}$ se numește *filtru netrivial*, și orice filtru $F \neq B$ se numește *filtru propriu* al lui \mathcal{B} .

Remarca 17.3. Intersecția tuturor filtrelor lui \mathcal{B} este $\{1\}$ (filtrul trivial). Acest lucru rezultă imediat din faptul că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui \mathcal{B} în sensul incluziunii.

Remarca 17.4. Un filtru al lui \mathcal{B} este propriu ddacă nu îl conține pe 0.

Într-adevăr, un filtru este egal cu B ddacă îl conține pe 0, pentru că B conține pe 0, iar, dacă un filtru F îl conține pe 0, atunci F conține toate elementele lui B , conform condiției (F_2).

Lema 17.1. Fie F un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci: $F = B$ ddacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ și $\bar{a} \in F$.

Lema 17.2 (filtrele sunt închise la conjuncții finite). Fie F un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, \dots, x_n \in F$, rezultă că $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in F$.

18 Filtre generate de o mulțime

Propoziția 18.1. Intersecția oricărei familii de filtre ale lui \mathcal{B} este un filtru al lui \mathcal{B} .

Corolarul 18.1. Pentru orice submulțime X a lui B , există un cel mai mic filtru al lui \mathcal{B} care include pe X , anume intersecția tuturor filtrelor lui \mathcal{B} care includ pe X .

Definiția 18.1. Pentru orice submulțime X a lui B , cel mai mic filtru al algebrei Boole \mathcal{B} care include pe X se notează cu $[X]$ sau $\langle X \rangle$ și se numește *filtrul lui \mathcal{B} generat de X* .

Pentru orice element $x \in B$, filtrul generat de singletonul $\{x\}$ se notează cu $[x]$ sau $\langle x \rangle$ și se numește *filtrul principal al lui \mathcal{B} generat de x* . (Deci filtrele principale sunt filtrele generate de singletonuri; altfel spus, filtrele principale sunt filtrele generate de câte un singur element.)

Remarca 18.1 (caracterizarea filtrelor generate de o mulțime). Definiția unui filtru generat arată că, pentru orice $X \subseteq B$, $F = [X]$ ddacă mulțimea F satisface următoarele trei condiții:

- (i) F este un filtru al lui \mathcal{B} ;
- (ii) $X \subseteq F$;
- (iii) pentru orice filtru G al lui \mathcal{B} , dacă $X \subseteq G$, atunci $F \subseteq G$.

Ultima dintre aceste trei condiții afirmă că, dacă un filtru G al lui \mathcal{B} include o submulțime X a lui B , atunci G include filtrul lui \mathcal{B} generat de X .

Remarca 18.2. Conform remarcii care arată că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui \mathcal{B} , urmează că $[\emptyset] = \{1\}$.

Remarca 18.3. Este imediat, atât direct din definiția unui filtru generat de o mulțime, cât și din caracterizarea anterioară, că, oricare ar fi un filtru F al lui \mathcal{B} , are loc egalitatea: $[F] = F$.

Propoziția 18.2. Pentru orice submulțime nevidă X a lui B , $[X] = \{a \in B \mid (\exists n \in \mathbb{N}^*) (\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X) (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \leq a)\}$.

Corolarul 18.2. Pentru orice $x \in B$, $[x] = \{a \in B \mid x \leq a\}$.

Exemplul 18.1 (temă). Iată un exemplu de filtru care nu este principal, ceea ce înseamnă că nu este finit generat (vom vedea); astfel, acest exemplu arată și faptul că, în general, filtrele nu sunt închise la conjuncții arbitrare (vom vedea).

Fie X o mulțime. Considerăm algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ și următoarea submulțime a ei: $F = \{A \mid A \subseteq X, |\overline{A}| < \infty\}$, unde $\overline{A} = X \setminus A$ pentru orice $A \subseteq X$; i. e. F este mulțimea părților cofinite ale lui X .

Atunci F este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ (evident, F este filtru propriu ddacă X este infinită). Și, dacă mulțimea X este infinită, atunci F nu este filtru principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$.

Corolarul 18.3. Pentru orice filtru F al lui \mathcal{B} și orice element $x \in B$, $[F \cup \{x\}] = \{a \in B \mid (\exists f \in F) (f \wedge x \leq a)\}$.

Remarca 18.4 (temă). Funcția care duce fiecare $M \subseteq B$ în $[M]$ este un operator de închidere pe $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$.

Remarca 18.5. Propoziția următoare arată că filtrele finit generate coincid cu filtrele principale, întrucât reciproca ei este trivială.

Propoziția 18.3. Orice filtru finit generat (i. e. generat de o mulțime finită) este principal.

Corolarul 18.4. Orice filtru finit este principal.

Corolarul 18.5. Orice filtru al unei algebre Boole finite este principal.

Remarca 18.6. Demonstrația propoziției anterioare arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$,

$$[\{x_1, x_2, \dots, x_n\}] = [x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n],$$

fapt valabil și pentru $n = 0$, întrucât $\inf(\emptyset) = 1$ (a se vedea un curs anterior).

19 Ultrafiltre ale unei algebre Boole

Definiția 19.1. Un filtru propriu P al lui \mathcal{B} se numește *filtru prim* ddacă, pentru orice $a, b \in B$, $a \vee b \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$.

Definiția 19.2. Un element maximal al mulțimii filtrelor proprii ale lui \mathcal{B} (raportat la incluziune) se numește *filtru maximal* sau *ultrafiltru* al lui \mathcal{B} .

Cu alte cuvinte, un *ultrafiltru* al lui \mathcal{B} este un filtru propriu U a. î., pentru orice filtru propriu F , $U \subseteq F$ implică $U = F$.

Altfel formulat, un *ultrafiltru* al lui \mathcal{B} este un filtru propriu U cu proprietatea că, pentru orice filtru F , $U \subseteq F$ implică $U = F$ sau $F = B$.

Notăția 19.1. Mulțimea ultrafiltrelor (filtrelor maximale ale) lui \mathcal{B} se notează cu $\text{Max}(\mathcal{B})$.

Lema 19.1. Fie P un filtru al lui \mathcal{B} și $a, b \in B$. Atunci:

- (i) $a \wedge b \in P$ ddacă $a \in P$ și $b \in P$;
- (ii) dacă P este un filtru prim, atunci: $a \vee b \in P$ ddacă $a \in P$ sau $b \in P$.

Propoziția 19.1 (caracterizare a ultrafiltrelor). Fie U un filtru propriu al lui \mathcal{B} . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) U este un ultrafiltru al lui \mathcal{B} ;
- (ii) U este un filtru prim al lui \mathcal{B} ;
- (iii) orice element $a \in B$ satisface: $a \in U$ sau $\bar{a} \in U$.

Corolarul 19.1 (caracterizare a ultrafiltrelor). Fie U un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) U este un ultrafiltru al lui \mathcal{B} ;
- (ii) oricare ar fi $a \in B$, **exact** unul dintre elementele a și \bar{a} se află în U ;
- (iii) oricare ar fi $a \in B$, are loc echivalența: $a \in U$ ddacă $\bar{a} \notin U$.

Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn:

Definiția 19.3. O mulțime inductiv ordonată este un poset cu proprietatea că orice parte total ordonată a sa are (cel puțin) un majorant.

- În definiția anterioară, **parte total ordonată** a unui poset (P, \leq) înseamnă submulțime S a lui P care este lanț cu ordinea indusă (**ordinea indusă** este $\leq \cap S^2$), i. e. submulțime $S \subseteq P$ cu proprietatea că oricare două elemente ale submulțimii S sunt comparabile în posetul (P, \leq) .

Remarca 19.1. Orice mulțime inductiv ordonată este nevidă, pentru că ea conține măcar un element, anume un majorant al submulțimii \emptyset a ei.

Remarca 19.2. După cum am demonstrat într-un curs anterior, orice element al unui poset nevid este majorant pentru \emptyset .

Remarca 19.3. Cele două remarci anterioare arată că, pentru a demonstra că un poset este mulțime inductiv ordonată, este suficient să demonstrăm că:

- posetul este nevid;
- orice parte total ordonată **nevidă** a sa are (cel puțin) un majorant.

Lema 19.2 (Lema lui Zorn). *Orice mulțime inductiv ordonată are (cel puțin) un element maximal.*

Remarca 19.4. Este evident, din faptul că filtrul trivial $\{1\}$ este inclus în orice filtru al lui \mathcal{B} , că au loc echivalențele: \mathcal{B} are filtre proprii ddacă $\{1\}$ este filtru propriu al lui \mathcal{B} ddacă \mathcal{B} este o algebră Boole netrivială.

Teorema 19.1 (Teorema de existență a ultrafiltrului). *Orice filtru propriu al lui \mathcal{B} este inclus într-un ultrafiltru al lui \mathcal{B} . Cu alte cuvinte, pentru orice filtru propriu F al lui \mathcal{B} , există un ultrafiltru U al lui \mathcal{B} , a. i. $F \subseteq U$.*

Corolarul 19.2. *Orice algebră Boole netrivială are (cel puțin) un ultrafiltru.*

20 Teorema de reprezentare a lui Stone

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene:

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm două algebre Boole arbitrare $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ și $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$.

Remarca 20.1. Pentru orice morfism boolean $f : A \rightarrow B$, au loc:

- $f(0) = 0$, deci $0 \in f^{-1}(\{0\})$, adică $\{0\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$;
- $f(1) = 1$, deci $1 \in f^{-1}(\{1\})$, adică $\{1\} \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Propoziția 20.1. *Fie $f : A \rightarrow B$ un morfism boolean. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) f este injectiv;
- (ii) $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;
- (iii) $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Remarca 20.2. Algebra Boole trivială este izomorfă cu $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ și cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^\emptyset = \mathcal{L}_2^0$, care are drept mulțime suport pe $L_2^0 = L_2^\emptyset = \{f \mid f : \emptyset \rightarrow L_2\} = \{(\emptyset, \emptyset, L_2)\}$ (acest triplet este, după cum știm, unica funcție de la \emptyset la L_2).

- Pentru o formulare clară a următoarelor două rezultate, vom renunța, în cele ce urmează, la fixarea algebrei Boole \mathcal{B} .

Teorema 20.1 (Teorema de reprezentare a lui Stone). *Pentru orice algebră Boole netrivială \mathcal{B} , există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \neg, \emptyset, X)$.*

Corolarul 20.1 (reformulare a Teoremei de reprezentare a lui Stone). *Pentru orice algebră Boole netrivială \mathcal{B} , există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_2^X$.*

Remarca 20.3. Algebra Boole standard, \mathcal{L}_2 , se scufundă în orice algebră Boole netrivială, i. e., oricare ar fi o algebră Boole netrivială \mathcal{B} , de la \mathcal{L}_2 la \mathcal{B} există un morfism injectiv de algebre Boole, anume morfismul care duce pe 0 în 0 și pe 1 în 1. (Morfismele injective se numesc *scufundări*.)

21 Congruențe ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole arbitrară, $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$.

Definiția 21.1. Se numește *congruență a algebrei Boole* \mathcal{B} o relație de echivalență \sim pe B care este compatibilă cu operațiile algebrei Boole \mathcal{B} , adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

- (i) dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$;
- (ii) dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$;
- (iii) dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$.

Remarca 21.1. Dacă, în definiția anterioară, veți generaliza cele trei relații dând compatibilitatea lui \sim cu operațiile binare \vee și \wedge și operația unară \neg , pentru a obține relația care dă compatibilitatea unei relații de echivalență cu o operație de aritate oarecare, atunci veți observa că: compatibilitatea cu operațiile zeroare ale lui \mathcal{B} , i. e. constantele 0 și 1, se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$. Deci compatibilitatea cu operațiile zeroare este satisfăcută de orice relație binară reflexivă pe B , în particular de orice relație de echivalență pe B . De aceea, compatibilitatea cu 0 și 1 nu a apărut ca o cerință în definiția de mai sus.

Remarca 21.2. O congruență a lui \mathcal{B} este o relație de echivalență pe B care este și subalgebră Boole a algebrei Boole produs direct $B^2 = B \times B$.

Propoziția 21.1. În definiția de mai sus, a unei congruențe pe o algebră Boole, fiecare dintre condițiile (1) și (2) este implicată de celelalte două condiții.

Propoziția 21.2. Orice congruență a unei algebre Boole este compatibilă cu implicația și echivalența booleană.

I. e., pentru orice congruență \sim a lui \mathcal{B} și orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

- dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'$;
- dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'$.

Remarca 21.3. Fie F un filtru al lui \mathcal{B} și $x, y \in B$. Atunci are loc echivalența: $x \leftrightarrow y \in F$ dacă și numai dacă $x \rightarrow y \in F$ și $y \rightarrow x \in F$.

22 Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Notăția 22.1. Notăm prin $\text{Con}(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui \mathcal{B} .

Propoziția 22.1. Mulțimea congruențelor unei algebre Boole este în bijecție cu mulțimea filtrelor sale.

Existența unei bijecții se demonstrează construind două funcții între cele două mulțimi, în sensuri opuse, și arătând că sunt inverse una celeilalte, așadar sunt inversabile, deci sunt bijecții.

Iată definițiile celor două funcții pentru o algebră Boole oarecare \mathcal{B} :

- funcția de la mulțimea filtrelor la mulțimea congruențelor: oricărui filtru F îi asociem congruența \sim_F , definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ dacă și numai dacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcția de la mulțimea congruențelor la mulțimea filtrelor: oricărei congruențe \sim îi asociem filtrul F^\sim , definit prin: $F^\sim := \{x \in B \mid x \sim 1\}$ (F^\sim este clasa de echivalență a lui 1 raportat la \sim).

Propoziția 22.2. Fie $a, b, x \in B$ și F un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci, cu notațiile de mai sus, au loc:

- (i) $a \sim_{[x]} b$ dacă și numai dacă $a \wedge x = b \wedge x$;
- (ii) $a \sim_F b$ dacă există un element $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$.

23 Algebre Boole factor

Propoziția 23.1. Fie F un filtru al lui \mathcal{B} și \sim_F congruența asociată lui F .

Pentru fiecare $x \in B$, se notează cu $x/F := \{y \in B \mid x \sim_F y\}$ clasa de echivalență a lui x raportat la \sim_F .

Mulțimea factor $B/\sim_F = \{x/F \mid x \in B\}$ (i. e. mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui B raportat la \sim_F) se mai notează cu B/F .

Atunci: B/F se poate organiza ca algebră Boole cu următoarele operații, pe care le vom nota la fel ca pe acelea ale lui \mathcal{B} :

- pentru orice $x, y \in B$, $x/F \vee y/F := (x \vee y)/F$
- pentru orice $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F := (x \wedge y)/F$
- pentru orice $x \in B$, $\overline{x/F} := \overline{x}/F$
- $0 := 0/F$ și $1 := 1/F$

Definiția 23.1. Algebra Boole $(B/F, \vee, \wedge, \overline{}, 0 = 0/F, 1 = 1/F)$ se numește *algebra Boole factor* (sau *algebra Boole cât*) a lui \mathcal{B} prin filtrul F .

Propoziția 23.2. Pentru orice filtru F , surjecția canonică $p_F : B \rightarrow B/F$, definită prin: pentru orice $x \in B$, $p_F(x) := x/F$, este un morfism boolean surjectiv.

Lema 23.1. Fie F un filtru al lui \mathcal{B} . Atunci $F = 1/F$, așadar, pentru orice element $a \in B$, au loc echivalențele: $a \in F$ dacă și numai dacă $a \sim_F 1$ dacă și numai dacă $a/F = 1/F$.

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole arbitrară $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \overline{}, 0, 1)$. A se vedea demonstrațiile acestor rezultate într-o versiune viitoare a cursului.

Propoziția 23.3 (temă pentru seminar). Fie $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism boolean, iar F un filtru al algebrei Boole \mathcal{A} și G un filtru al algebrei Boole \mathcal{B} . Atunci:

- (i) $f^{-1}(G)$ este un filtru al lui \mathcal{A} ;
- (ii) dacă f e surjectiv, atunci $f(F)$ este un filtru al lui \mathcal{B} .

Propoziția 23.4 (temă pentru seminar). Fie $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism boolean. Atunci $f(A)$ este o subalgebră Boole a lui \mathcal{B} , izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$.

Propoziția 23.5 (temă pentru seminar). Fie U un filtru al algebrei Boole \mathcal{B} . Atunci: U este ultrafiltru dacă algebra Boole factor B/U este izomorfă cu \mathcal{L}_2 .

24 Structura algebrelor Boole finite

Definiția 24.1. Un *atom* al algebrei Boole \mathcal{B} este un succesori al lui 0 din \mathcal{B} (i. e. din posetul (B, \leq)). Adică, un *atom* al lui \mathcal{B} este un element $a \in B$ cu proprietățile:

- $a \neq 0$ și
- nu există niciun element $x \in B$ a. i. $0 < x < a$,

unde am notat cu $< := \leq \setminus \Delta_B$, i. e. $<$ este relația de ordine strictă pe B corespunzătoare relației de ordine \leq de pe B , adică, pentru orice $x, y \in B$,

$$x < y \text{ dacă } \begin{cases} x \leq y \\ \text{și} \\ x \neq y. \end{cases}$$

Remarca 24.1. • Algebra Boole trivială nu are niciun atom (deci numărul atomilor săi coincide cu numărul ultrafiltrelor sale, anume 0).

- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, algebra Boole \mathcal{L}_2^n , cu mulțimea elementelor $L_2^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}$ are n atomi: atomii săi sunt elementele e_1, \dots, e_n , unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{vector de lungime } n, \text{ cu } 1 \text{ pe poziția } i \text{ și } 0 \text{ pe celelalte poziții}}$. La

fel pentru algebra Boole \mathcal{L}_2^X , cu X mulțime arbitrară.

- Pentru orice mulțime nevidă X (nu neapărat finită), atomii algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ sunt submulțimile lui X cu câte un singur element: $\{a\}$, cu $a \in X$.

Remarca 24.2. Ultrafiltrele unei algebre Boole finite sunt filtrele generate de câte un atom al acelei algebre Boole.

Remarca 24.3. Remarca anterioară arată că, dacă algebra Boole \mathcal{B} este finită, atunci există o bijecție între mulțimea atomilor lui \mathcal{B} și mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} , care duce fiecare atom a al lui \mathcal{B} în $[a]$ (filtrul principal generat de a).

Teorema 24.1 (Teorema de structură a algebrelor Boole finite). *Dacă \mathcal{B} este o algebră Boole finită, atunci \mathcal{B} este izomorfă cu \mathcal{L}_2^n , unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui \mathcal{B} (care este egal cu numărul ultrafiltrelor lui \mathcal{B} , conform remarcii anterioare).*

Corolarul 24.1. *Orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2 (cu exponentul dat de numărul atomilor săi, care este egal cu numărul ultrafiltrelor sale).*

Corolarul 24.2. *Două algebre Boole finite de același cardinal sunt izomorfe.*

Remarca 24.4. Pentru orice mulțime finită X , de cardinal $n \in \mathbb{N}$, au loc următoarele izomorfisme între algebre Boole: $\mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{L}_2^{\overline{1, n}} \cong \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\overline{1, n})$ ($\overline{1, 0} = \emptyset$).

Remarca 24.5. • **Teorema de reprezentare a lui Stone** spune că, pentru orice algebră Boole \mathcal{B} , există un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} . Cu alte cuvinte, orice algebră Boole \mathcal{B} este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} .

- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că, în cazul particular al algebrelor Boole finite, are loc proprietatea că orice algebră Boole finită este chiar **izomorfă** cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui \mathcal{B} (a se vedea remarca anterioară).

Exercițiul 24.1 (temă). Fie B o algebră Boole **completă**, i. e. o algebră Boole care e latice completă, $a, b \in B$, I și J mulțimi arbitrare, iar $(a_i)_{i \in I} \subseteq B$, $(b_j)_{j \in J} \subseteq B$. Să se demonstreze că în B au loc:

- **legile de distributivitate generalizate:** dacă $I \neq \emptyset$ și $J \neq \emptyset$, atunci:

$$a \wedge \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) = \bigvee_{j \in J} (a \wedge b_j) \text{ și } \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) \wedge \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} (a_i \wedge b_j);$$

$$a \vee \left(\bigwedge_{j \in J} b_j \right) = \bigwedge_{j \in J} (a \vee b_j) \text{ și } \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) \vee \left(\bigwedge_{j \in J} b_j \right) = \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (a_i \vee b_j);$$

- **legile lui de Morgan generalizate:**

$$\bigvee_{i \in I} a_i = \bigwedge_{i \in I} \overline{a_i} \text{ și } \bigwedge_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} \overline{a_i};$$

- următoarele proprietăți: dacă $I \neq \emptyset$ și $J \neq \emptyset$, atunci:

$$\left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) \rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b) \text{ și } \left(\bigwedge_{i \in I} a_i \right) \rightarrow b = \bigvee_{i \in I} (a_i \rightarrow b);$$

$$a \rightarrow \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) = \bigvee_{j \in J} (a \rightarrow b_j) \text{ și } a \rightarrow \left(\bigwedge_{j \in J} b_j \right) = \bigwedge_{j \in J} (a \rightarrow b_j).$$

Care dintre egalitățile de la ultimul punct sunt valabile și pentru $I = \emptyset$, $J = \emptyset$?