Logică Matematică şi Computaţională
Cursurile VIII și IX

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2023–2024, Semestrul I

Cuprinsul acestui set de cursuri

Algebre Boole – definiție

Definiție

O *latice booleană* este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarcă

În orice latice booleană, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg\, x$).
Existența complementului oricărui element al unei latici booleene de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\bar{} : B \to B$ (sau $\neg : B \to B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.
Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.

Definiție (*algebră Boole* sau *algebră booleană*: latice booleană înzestrată și cu operația de complementare)

O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o structură algebrică $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o latice booleană, iar $\bar{} : B \to B$ este operația de complementare asociată acestei latici booleene.

Exemple de algebre Boole

Notație și terminologie

O algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ va mai fi notată $(B, \leq, \bar{}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$.
Întrucât laticea booleană $\mathcal{L} = (B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ subiacentă algebrei Boole $\mathcal{B}$ are o unică operație de complementare asociată, astfel că ea determină în mod unic structura de algebră Boole $\mathcal{B}$, vom numi laticea booleană $\mathcal{L}$ tot *algebră Boole*, adică nu vom face neapărat distincția între laticile booleene și algebrele Boole, la fel cum nu facem neapărat distincția între latici, latici Ore și latici Dedekind.

- Orice structură algebrică poate fi desemnată de mulțimea elementelor sale (mulțimea sa subiacentă), dar poate fi notată și altfel decât această mulțime.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu L_n mulțimea elementelor lanțului cu n elemente, iar cu $\mathcal{L}_n$ întreaga structură algebrică a lanțului cu n elemente, fie ea de poset, poset mărginit, latice, latice mărginită (desigur, distributivă) sau algebră Boole (în cazul lui $\mathcal{L}_1$ sau $\mathcal{L}_2$: vom vedea). Așa cum am menționat mai sus, nu este obligatoriu să se facă această distincție.

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarcă

O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Exemple de algebre Boole

Definiție

- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numește *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemplu (algebra Boole a valorilor de adevăr pentru logica clasică)

Lanțul cu două elemente este o algebră Boole.
Într–adevăr, $\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$ (i. e. $0 \leq 1$ și $0 \neq 1$):

- este un lanț, deci o latice distributivă, cu $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- este, evident, o latice mărginită;
- are proprietatea că 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente (fapt valabil în orice latice mărginită), deci $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$.

Așadar, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole.
Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard* și are următoarea diagramă Hasse ca poset:

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarcă

În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ și o mulțime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I = \{f | f : I \to L_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $f, g \in L_2^I$:

- $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in L_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:

1. $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$
2. $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$

(dacă $|I| \geq 2$, atunci $\mathcal{L}_2^I$ nu e lanț, deci $\vee \neq \max$ și $\wedge \neq \min$ în $\mathcal{L}_2^I$)

1. $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$
2. $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$

- $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in L_2$:

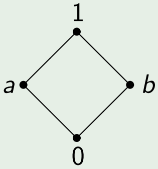
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ și $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, …, $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Am notat: $0 = (0,0)$, $1 = (1,1)$, $a = (0,1)$, $b = (1,0)$, unde $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.
Diagrama de mai sus este corectă, pentru că ordinea parțială produs, $\leq$, satisface:

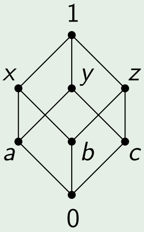
- $(0,0) \leq (0,1) \leq (1,1)$,
- $(0,0) \leq (1,0) \leq (1,1)$,
- $(0,1)$ și $(1,0)$ sunt incomparabile ($(0,1) \not\leq (1,0)$ și $(1,0) \not\leq (0,1)$, pentru că $1 \not\leq 0$ în $\mathcal{L}_2$).

Definițiile operațiilor de algebră Boole se fac pe componente, pornind de la cele ale lui $\mathcal{L}_2$ (de exemplu, $a \vee b = (0,1) \vee (1,0) = (0 \vee 1, 1 \vee 0) = (1,1) = 1$), dar pot fi determinate și din diagrama Hasse a acestei algebre Boole.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

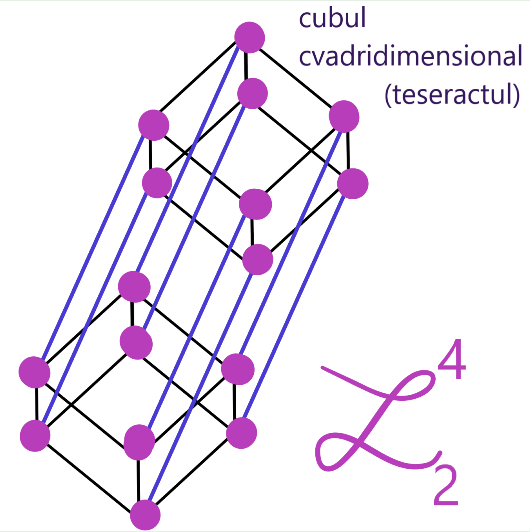
Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Cu notația uzuală $L_2 = \{0, 1\}$ pentru elementele algebrei Boole standard, elementele din diagrama Hasse de mai sus sunt: $0 = (0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$ și $1 = (1, 1, 1)$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu



Exemple de algebre Boole

Exemplu

Pentru orice mulțime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\ }, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.
Acest fapt poate fi verificat foarte ușor, cu definiția unei algebre Boole, folosind funcțiile caracteristice ale submulțimilor lui I raportat la I sau, direct, calcul cu mulțimi pentru a demonstra proprietățile operațiilor lui $\mathcal{P}(I)$.

Exercițiu (temă)

Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.
Indicație: presupuneți prin absurd că există o algebră Boole care să fie un lanț $(L, \max, \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ cu cel puțin 3 elemente, adică există $x \in L \setminus \{0, 1\}$. L fiind total ordonată, avem: $x \leq \overline{x}$ sau $\overline{x} \leq x$. Cine este $\overline{x}$, conform definiției complementului?

Propoziție (temă)

Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).

Operații și operații derivate ale unei algebre Boole

Definiție

Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, se definesc următoarele *operații binare derivate*:

- *implicația (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \overline{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarcă (complementarea este autoduală (autoinversă, idempotentă))

Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$.
Acest fapt se arată direct cu definiția complementului, folosind unicitatea lui în algebre Boole. Într–adevăr, definiția complementului $\overline{x}$ al lui x arată că x satisface condițiile care definesc complementul $\overline{\overline{x}}$ al lui $\overline{x}$: x satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ x \wedge \overline{x} = 0, \end{cases}$ iar $\overline{\overline{x}}$ este unicul element al lui B cu proprietățile: $\begin{cases} \overline{\overline{x}} \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ \overline{\overline{x}} \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$ Așadar $x = \overline{\overline{x}}$.

Să recapitulăm definiția unei algebre Boole

Înainte de a trece mai departe, amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\ }$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Să recapitulăm definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\ }$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Principiul dualității pentru algebre Boole

Remarcă

Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{\ }, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole* $\mathcal{B}$.
Se știe, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ și $\wedge$,
- $\leq$ și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.
Este imediat că operația unară $\bar{\ }$ este duală ei însăși. Spunem că operația $\bar{\ }$ este *autoduală*.
Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: $\vee$ cu $\wedge$, $\leq$ cu $\geq$, 0 cu 1 (iar operația $\bar{\ }$ rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximale cu elementele minimale.*

Legile lui de Morgan pentru algebre Boole arbitrare

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menționa altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.
- Următoarea propoziție conține o proprietate aritmetică foarte importantă a algebrelor Boole, pe care o cunoaștem deja pentru cazul particular al algebrei Boole a părților unei mulțimi.

Propoziție (legile lui de Morgan)

Pentru orice $x, y \in B$:

1. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
2. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Demonstrație: **(1)** Avem de arătat că $\overline{x} \wedge \overline{y}$ este complementul lui $x \vee y$. Conform definiției și unicității complementului, este suficient să demonstrăm că: $(x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 1$ și $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 0$.
Aplicăm distributivitatea, comutativitatea, definiția complementului și faptul că 0 și 1 sunt minimul și, respectiv, maximul lui $\mathcal{B}$:
$x \vee y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee \overline{y}) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1;$
$(x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (0 \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$
(2) Rezultă din (1), prin dualitate.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Amintim:

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *o latice și* $a, b, x, y \in L$*.*
Dacă $a \leq b$ *și* $x \leq y$*, atunci:* $a \vee x \leq b \vee y$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge y$*.*
În particular (aplicând proprietatea de mai sus și reflexivitatea unei relații de ordine): dacă $a \leq b$*, atunci* $a \vee x \leq b \vee x$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge x$*.*

Propoziție

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ *o algebră Boole. Atunci, pentru orice* $x, y \in B$*, au loc următoarele echivalențe:*

1. $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$
2. $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$
3. $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$
4. $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$
5. $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Demonstrație: Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
(1) Următorul șir de implicații demonstrează rezultatul de la acest punct: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform autodualității complementării.
(2) Aplicând, pe rând, definiția relației de ordine în funcție de $\vee$, punctul **(1)**, **legile lui de Morgan** și definiția relației de ordine în funcție de $\wedge$ în orice latice (și comutativitatea lui $\wedge$), obținem șirul de echivalențe: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $\overline{x \vee y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.
(3) $x \leq y$ implică $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$ implică $x \wedge \overline{y} = 0$. Am aplicat lema anterioară, definiția complementului și faptul că 0 este minimul lui B.
Acum aplicăm faptul că 0 este minimul lui B, distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$, definiția complementului, faptul că 1 este maximul lui B și definiția lui $\leq$ în funcție de $\vee$ în orice latice (și comutativitatea lui $\vee$): dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, prin urmare $x \leq y$.
Am demonstrat faptul că $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$.
Acum aplicăm punctul **(1)**, **legile lui de Morgan**, faptul evident că $\overline{0} = 1$ și autodualitatea complementării, și obținem: $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

(4) Din punctul **(3)** și definiția implicației booleene, obținem: $x \leq y$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$.
(5) Să observăm că, oricare ar fi $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b = 1$ ddacă $[a = 1$ și $b = 1]$. Într–adevăr, implicația directă rezultă din faptul că $a \wedge b \leq a$ și $a \wedge b \leq b$ și faptul că 1 este maximul lui B, iar implicația reciprocă este trivială. Reflexivitatea și antisimetria lui $\leq$, punctul **(4)**, proprietatea de mai sus și definiția echivalenței booleene ne dau: $x = y$ ddacă $[x \leq y$ și $y \leq x]$ ddacă $[x \rightarrow y = 1$ și $y \rightarrow x = 1]$ ddacă $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1$ ddacă $x \leftrightarrow y = 1$.

Propoziție (legea de reziduație)

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența:

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

Demonstrație: Vom demonstra echivalența din enunț prin dublă implicație.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și $\overline{\beta}$, obținem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole și definiția implicației într-o algebră Boole, și obținem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ și aplicând tranzitivitatea unei relații de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.

"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiția implicației într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și β, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ și tranzitivitatea unei relații de ordine, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Echivalența algebre Boole–inele Boole–secțiune facultativă

Observație

Pentru toate definițiile legate de acest paragraf al cursului de față și pentru demonstrațiile rezultatelor enunțate aici, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, dar și celelalte cărți din acea listă bibliografică.
Pentru un exemplu de aplicație la teorema următoare, a se vedea referatul despre ecuații booleene din seria de materiale didactice pe care le–am trimis pe mail.
Demonstrațiile omise aici nu fac parte din materia pentru examen.

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiție

Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lemă

În orice inel Boole B, au loc: pentru orice elemente $x, y \in B$, $xy = yx$ și $x + x = 0$ (cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul 2 în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui 0 este 1, 0 fiind elementul neutru al acestui grup aditiv: $0 = 0$).

Echivalența algebre Boole–inele Boole–secțiune facultativă

Teoremă (echivalența algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole)

Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- *Fie $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ un inel Boole. Definim operațiile $\vee$, $\wedge$ și $\bar{\ }$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, pe care o vom nota cu $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

- *Fie $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole. Definim operațiile $+$ și $\cdot$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ este un inel Boole, pe care îl vom nota cu $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ (unde am notat cu $-$ operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).

- *Aplicațiile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{I}$ sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$, și, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.*

Subalgebre Boole

Definiție

O submulțime S a lui B se numește *subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$* ddacă este **închisă la operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$**, i. e.:

1. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;
2. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;
3. pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;
4. $0, 1 \in S$.

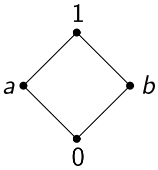
Propoziție

Au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți din definiția unei subalgebre Boole, aplicate unei submulțimi nevide S a lui B:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$
- $(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4)$

Subalgebre Boole

Demonstrație: Fie $\emptyset \neq S \subseteq B$.
"$(1) \Leftarrow (2), (3):$" Presupunem că S satisface (2) și (3). Fie $x, y \in S$. Conform (3), (2), **legilor lui de Morgan** și autodualității complementării, rezultă că $\overline{x}, \overline{y} \in S$, deci $\overline{x} \wedge \overline{y} \in S$, deci $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \in S$, dar $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = x \vee y$, așadar $x \vee y \in S$.
"$(2) \Leftarrow (1), (3):$" Prin dualitate, din implicația anterioară.
"$(4) \Leftarrow (1), (2), (3):$" Fie $x \in S$, arbitrar. Atunci, conform (3), (1) și (2), rezultă $\overline{x} \in S$, deci $1 = x \vee \overline{x} \in S$ și $0 = x \wedge \overline{x} \in S$.
"$(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4):$" De exemplu, în $\mathcal{L}_2^2$ (rombul, cu diagrama Hasse figurată mai jos), considerând $S := \{0, a, 1\}$, se observă că S satisface (1), (2) și (4), dar nu satisface (3), întrucât $\overline{a} = b \notin S$.



Subalgebre Boole

Remarcă

Proprietatea **(4)** din definiția unei subalgebre Boole arată că orice subalgebră Boole S este nevidă, fapt implicat și de remarca de mai jos.

Remarcă

Este imediat că o subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este o algebră Boole cu operațiile induse pe S de operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$ și cu ordinea parțială indusă pe S de ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Notație

Operațiile induse (adică restricțiile la S ale operațiilor lui $\mathcal{B}$) se notează, de obicei, la fel ca operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, iar ordinea parțială indusă (adică ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$ restricționată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Remarcă

Este imediat că orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este închisă la operațiile derivate $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ ale lui $\mathcal{B}$ (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), și că operațiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicația și, respectiv, echivalența algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicația și, respectiv, echivalența lui $\mathcal{B}$).

Morfisme booleene

În cele ce urmează, renunțăm la fixarea algebrei Boole notate $\mathcal{B}$.

Definiție

Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \bot, \top)$, o funcție $f : A \to B$ se numește *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operațiile de algebre Boole ale lui A și B**, i. e. ddacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ și, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$.

Scris desfășurat, o funcție $f : A \to B$ este *morfism boolean* ddacă:

1. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
2. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$
3. pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$
4. $f(0) = \bot$ și $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole și ea însăși.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este același lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole și ea însăși, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Morfisme booleene

Propoziție

Cu notațiile din definiția anterioară, au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți ale unui morfism boolean, aplicate unei funcții $f : A \to B$:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$

Demonstrație: Fie $f : A \to B$ o funcție.
"$(1) \Leftarrow (2), (3)$:" Dacă f satisface (2) și (3), atunci, pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(\overline{\overline{x \vee y}}) = f(\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}) = \neg f(\overline{x} \wedge \overline{y}) = \neg(f(\overline{x}) \sqcap f(\overline{y})) = \neg(\neg f(x) \sqcap \neg f(y)) = \neg\neg f(x) \sqcup \neg\neg f(y) = f(x) \sqcup f(y)$. Am aplicat autodualitatea complementării și legile lui de Morgan.
"$(2) \Leftarrow (1), (3)$:" Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.
"$(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$:" Dacă f satisface (1), (2) și (4), atunci, pentru orice $x \in A$, $\perp = f(0) = f(x \wedge \overline{x}) = f(x) \sqcap f(\overline{x})$ și $\top = f(1) = f(x \vee \overline{x}) = f(x) \sqcup f(\overline{x})$, ceea ce, conform definiției și unicității complementului, arată că $f(\overline{x})$ este complementul lui $f(x)$ în algebra Boole B, adică $f(\overline{x}) = \neg f(x)$.

Morfisme booleene

"$(4) \Leftarrow (1),(2),(3):$" Dacă f satisface (1), (2) și (3), atunci, pentru orice $x \in A$, $\perp= f(x) \sqcap \neg f(x) = f(x) \sqcap f(\overline{x}) = f(x \wedge \overline{x}) = f(0)$ și, dual, $\top = f(1)$.

Remarcă (temă)

Orice morfism boolean comută cu implicația și echivalența booleană.
Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.
Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

- Următoarea propoziție conține un exemplu foarte important de algebre Boole izomorfe.

Algebre Boole izomorfe

Propoziție

Pentru orice mulțime I, algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, I)$ și $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).

Demonstrație: Dacă $I = \emptyset$, atunci cele două algebre Boole din enunț coincid cu algebra Boole trivială, așadar sunt izomorfe, cu izomorfismul boolean dat de identitatea algebrei Boole triviale.
În cele ce urmează, vom considera I nevidă.
Putem considera $L_2 = \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$, ceea ce ne permite să exprimăm operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ în funcție de operațiile aritmetice $+$, $-$ și $\cdot$ de pe $\mathbb{N}$, astfel: pentru orice $x, y \in L_2 = \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} x \vee y = \max\{x, y\} = x + y - x \cdot y, \\ x \wedge y = \min\{x, y\} = x \cdot y, \\ \overline{x} = 1 - x. \end{cases}$$

Aceste egalități pot fi verificate ușor, de exemplu prin considerarea tuturor cazurilor privind valorile posibile ale lui $x, y \in L_2 = \{0, 1\}$.

Algebre Boole izomorfe

Așadar, în algebra Boole $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, unde $L_2^I = \{f | f : I \to L_2\} = \{f | f : I \to \{0, 1\}\}$, operațiile sunt definite punctual pe baza celor ale lui $\mathcal{L}_2$, astfel:

- $0 : I \to L_2$, pentru orice $i \in I$, $0(i) := 0$;
- $1 : I \to L_2$, pentru orice $i \in I$, $1(i) := 1$;
- pentru orice $f : I \to L_2$, $\overline{f} : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $\overline{f}(i) := \overline{f(i)} = 1 - f(i) = (1 - f)(i)$, unde 1 este funcția constantă de mai sus; așadar $\overline{f} = 1 - f$;
- pentru orice $f : I \to L_2$ și $g : I \to L_2$, $f \vee g : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$,
  $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i) = f(i) + g(i) - f(i) \cdot g(i) = (f + g - f \cdot g)(i)$;
  așadar $f \vee g = f + g - f \cdot g$;
- pentru orice $f : I \to L_2$ și $g : I \to L_2$, $f \wedge g : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i) = f(i) \cdot g(i) = (f \cdot g)(i)$; așadar $f \wedge g = f \cdot g$.

Algebre Boole izomorfe

Amintim că am demonstrat că următoarea funcție este o bijecție:
$\varphi : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}^I = L_2^I$, definită prin: oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A) := \chi_A \in \{f | f : I \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^I = L_2^I$ (funcția caracteristică a lui A raportat la I).
În cele ce urmează, vom aplica proprietățile funcțiilor caracteristice.
$\varphi(\emptyset) = \chi_\emptyset = 0$ și $\varphi(I) = \chi_I = 1$.
Pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, $\varphi(\overline{A}) = \chi_{\overline{A}} = \chi_{I \setminus A} = 1 - \chi_A = 1 - \varphi(A) = \overline{\varphi(A)}$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cup B) = \chi_{(A \cup B)} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cap B) = \chi_{(A \cap B)} = \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B)$.
Așadar φ este un morfism boolean, iar faptul că este și bijectivă arată că φ este un izomorfism boolean.

Definiția unei algebre Boole

O **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\ }$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\ }$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Filtre ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, arbitrară.
- Vom nota $\geq := \leq^{-1}$.

Definiție

O submulțime nevidă F a lui B se numește *filtru* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in B$, următoarele condiții sunt satisfăcute:

(F_1) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;

(F_2) dacă $x \in F$ și $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Notație

Mulțimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $Filt(\mathcal{B})$.

Remarcă

Orice filtru al lui $\mathcal{B}$ îl conține pe 1. Într–adevăr, dacă F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, atunci F este nevid prin definiție, deci există un element $x \in F$; dar, ca orice element al lui B, x satisface $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform condiției (F_2) din definiția unui filtru.

Filtre ale unei algebre Boole

Remarcă

Este imediat că $\{1\}$ și B sunt filtre ale lui $\mathcal{B}$, iar aceste filtre sunt respectiv minimul (a se vedea remarca anterioară) și maximul posetului $(Filt(\mathcal{B}), \subseteq)$.

Definiție

$\{1\}$ se numește *filtrul trivial* al lui $\mathcal{B}$, iar B se numește *filtrul impropriu* al lui $\mathcal{B}$. Orice filtru $F \neq \{1\}$ se numește *filtru netrivial*, și orice filtru $F \neq B$ se numește *filtru propriu* al lui $\mathcal{B}$.

Remarcă

Intersecția tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ este $\{1\}$ (filtrul trivial). Acest lucru rezultă imediat din faptul că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ în sensul incluziunii.

Filtre proprii

Remarcă

Un filtru al lui $\mathcal{B}$ este propriu ddacă nu îl conține pe 0.
Într–adevăr, un filtru este egal cu B ddacă îl conține pe 0, pentru că B conține pe 0, iar, dacă un filtru F îl conține pe 0, atunci F conține toate elementele lui B, conform condiției (F_2).

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci: $F = B$ ddacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ și $\overline{a} \in F$.

Demonstrație: Dacă $F = B$, atunci $0 \in F$ și $\overline{0} = 1 \in F$.
Reciproc, dacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ și $\overline{a} \in F$, atunci, conform condiției (F_1) din definiția unui filtru, rezultă că $0 = a \wedge \overline{a} \in F$, prin urmare $F = B$, conform remarcii anterioare.

Filtrele sunt închise la conjuncții finite

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, \ldots, x_n \in F$, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$.

Demonstrație: Pentru $n = 0$, ne amintim dintr–un curs anterior că $\inf(\emptyset) = \max(B) = 1 \in F$, pentru că orice filtru îl conține pe 1, așa cum am arătat într–o remarcă de mai sus.
Pentru $n \neq 0$, demonstrăm afirmația prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.
Pentru $n = 1$, afirmația este trivială.
Presupunem afirmația adevărată pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat. Considerăm $n + 1$ elemente $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in F$. Conform ipotezei de inducție, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$. Acum, asociativitatea lui $\wedge$ și condiția (F_1) din definiția unui filtru arată că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n+1} = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge x_{n+1} \in F$.
Rezultă că afirmația este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Așadar, afirmația este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Filtre generate de o mulțime

Propoziție ($Filt(\mathcal{B})$ e o familie Moore pe $\mathcal{P}(B)$)

Intersecția oricărei familii de filtre ale lui $\mathcal{B}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Demonstrație: Fie $(F_i)_{i\in I}$ o familie de filtre ale lui $\mathcal{B}$. Să notăm cu F intersecția acestei familii de filtre: $F := \bigcap_{i\in I} F_i$. Dacă $I = \emptyset$, atunci $F = \bigcap_{i\in\emptyset} F_i = B$, care este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Acum să presupunem că $I \neq \emptyset$. Conform unei remarci de mai sus, pentru fiecare $i \in I$, $1 \in F_i$, așadar $1 \in \bigcap_{i\in I} F_i = F$, deci $F \neq \emptyset$. Demonstrăm că F satisface condiția (F_1). Fie $x, y \in F = \bigcap_{i\in I} F_i$, așadar, pentru orice $i \in I$, $x, y \in F_i$, deci, pentru orice $i \in I$, $x \wedge y \in F_i$, conform condiției (F_1) aplicate filtrelor F_i. Urmează că $x \wedge y \in \bigcap_{i\in I} F_i = F$. Acum să demonstrăm că F satisface condiția (F_2). Fie $x \in F = \bigcap_{i\in I} F_i$, ceea ce înseamnă că, pentru orice $i \in I$, $x \in F_i$. Acum, fie $y \in B$, a. î. $x \leq y$. Rezultă că, pentru orice $i \in I$, $y \in F_i$, conform condiției (F_2) aplicate filtrelor F_i. Așadar, $y \in \bigcap_{i\in I} F_i = F$. Am demonstrat că F este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Filtre generate de o mulțime

Corolar (proprietatea familiilor Moore care dă operatorii asociați lor)

Pentru orice submulțime X a lui B, există un cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X, anume intersecția tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X.

Demonstrație: Fie X o submulțime arbitrară a lui B. Familia filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X, fie aceasta $\mathcal{F}$, este nevidă, pentru că această familie conține filtrul impropriu, B. Conform propoziției anterioare, rezultă că intersecția familiei $\mathcal{F}$ este un filtru, care, evident, include pe X, fie acesta F. Înseamnă că $F \in \mathcal{F}$, conform definiției familiei $\mathcal{F}$. Dar $F = \bigcap\limits_{G \in \mathcal{F}} G$, așadar F este inclus în fiecare $G \in \mathcal{F}$. Prin urmare, F este minimul posetului $(\mathcal{F}, \subseteq)$, i. e. F este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X.

Definiție ($X \longrightarrow [X)$ e operatorul de închidere asociat lui $Filt(\mathcal{B})$)

Pentru orice submulțime X a lui B, cel mai mic filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ care include pe X se notează cu $[X)$ sau $\langle X \rangle$ și se numește *filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X*. Pentru orice element $x \in B$, filtrul generat de singletonul $\{x\}$ se notează cu $[x)$ sau $\langle x \rangle$ și se numește *filtrul principal al lui $\mathcal{B}$ generat de x*. (Deci filtrele principale sunt filtrele generate de singletonuri; altfel spus, filtrele principale sunt filtrele generate de câte un singur element.)

Elementele filtrelor generate de o mulțime

Remarcă (caracterizarea filtrelor generate de o mulțime)

Definiția unui filtru generat arată că, pentru orice $X \subseteq B$, $F = [X)$ ddacă mulțimea F satisface următoarele trei condiții:

1. F este un filtru al lui $\mathcal{B}$;
2. $X \subseteq F$;
3. pentru orice filtru G al lui $\mathcal{B}$, dacă $X \subseteq G$, atunci $F \subseteq G$.

Ultima dintre aceste trei condiții afirmă că, dacă un filtru G al lui $\mathcal{B}$ include o submulțime X a lui B, atunci G include filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X.

Remarcă

Conform remarcii care arată că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$, urmează că $[\emptyset) = \{1\}$.

Remarcă

Este imediat, atât direct din definiția unui filtru generat de o mulțime, cât și din caracterizarea anterioară, că, oricare ar fi un filtru F al lui $\mathcal{B}$, are loc egalitatea: $[F) = F$.

Elementele filtrelor generate de o mulțime

Propoziție

Pentru orice submulțime nevidă X a lui B,
$[X) = \{a \in B \mid (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\, (\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)\, (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a)\}$.

Demonstrație: Fie
$F := \{a \in B \mid (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\, (\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)\, (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a)\}$.
Demonstrăm că $F = [X)$, folosind remarca de mai sus privind caracterizarea filtrelor generate. Pentru început, să arătăm că F este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$X \neq \emptyset$, așadar există $x \in X$. Luând, în scrierea lui F de mai sus, $n = 1$ și $x_1 = x$, rezultă că toți majoranții lui x din $\mathcal{B}$ se află în F. În particular, $x \in F$, pentru că $x \leq x$. Prin urmare, $F \neq \emptyset$.
Fie $x, y \in F$. Atunci, conform definiției mulțimii F, există $n, m \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$ și $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_m \leq y$. Conform unui rezultat valabil în orice latice, rezultă că $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_m \leq x \wedge y$, așadar $x \wedge y \in F$.
Acum, fie $x \in F$ și $y \in B$, a. î. $x \leq y$. Faptul că $x \in F$ înseamnă că există $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$, iar de aici, din relația $x \leq y$ și din tranzitivitatea lui $\leq$, obținem $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y$, ceea ce arată că $y \in F$.
Am demonstrat că F este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
Pentru orice $x \in X$, are loc $x \leq x$, așadar $x \in F$. Prin urmare, $X \subseteq F$.

Elementele filtrelor generate de o mulțime

Fie G un filtru al lui $\mathcal{B}$ a. î. $X \subseteq G$, și fie $x \in F$. Arătăm că rezultă $x \in G$. Faptul că $x \in F$ arată că există $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$. Dar $X \subseteq G$, așadar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$, prin urmare $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in G$, conform lemei anterioare, și deci $x \in G$ conform proprietății (F_2) din definiția unui filtru.
Așadar, $F \subseteq G$.
Conform remarcii de mai sus privind caracterizarea filtrelor generate de o mulțime, am demonstrat că $F = [X)$.

Corolar

Pentru orice $x \in B$, $[x) = \{a \in B \mid x \leq a\}$.

Demonstrație: Se aplică propoziția anterioară și idempotența lui $\wedge$, din care, prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$, se demonstrează imediat că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigwedge_{i=1}^{n} x = x$.

Exemplu (temă)

Iată un exemplu de filtru care nu este principal, ceea ce înseamnă că nu este finit generat (vom vedea); astfel, acest exemplu arată și faptul că, în general, filtrele nu sunt închise la conjuncții arbitrare (vom vedea).

Elementele filtrelor generate de o mulțime

Exemplu (temă – continuare)

Fie X o mulțime. Considerăm algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ și următoarea submulțime a ei: $F = \{A \mid A \subseteq X, |\overline{A}| < \infty\}$, unde $\overline{A} = X \setminus A$ pentru orice $A \subseteq X$; i. e. F este mulțimea părților cofinite ale lui X.
Atunci F este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ (evident, F este filtru propriu ddacă X este infinită). Și, dacă mulțimea X este infinită, atunci F nu este filtru principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$.

Corolar

Pentru orice filtru F al lui $\mathcal{B}$ și orice element $x \in B$,
$[F \cup \{x\}) = \{a \in B \mid (\exists f \in F)\,(f \wedge x \leq a)\}$.

Demonstrație: Fie $G := \{a \in B \mid (\exists f \in F)\,(f \wedge x \leq a)\}$.
Fie $a \in [F \cup \{x\})$. Conform propoziției privind forma filtrului generat de o mulțime, aceasta înseamnă că există $n \in \mathbb{N}^*$ și există $x_1, \ldots, x_n \in F \cup \{x\}$, a. î. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$.
Asociativitatea și comutativitatea lui $\wedge$ ne asigură de faptul că putem presupune că $x_1, \ldots, x_k \in F$ și $x_{k+1} = \ldots = x_n = x$, pentru un $k \in \overline{0, n}$, unde $k = 0$ înseamnă că $x_1 = \ldots = x_n = x$, iar $k = n$ înseamnă că $x_1, \ldots, x_n \in F$.
Idempotența lui $\wedge$ arată că $x_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_n = x \wedge \ldots \wedge x = x$, atunci când $k < n$.

Elementele filtrelor generate de o mulțime

Fie $f := x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$, cu $f := 1$ atunci când $k = 0$. Conform unei leme de mai sus, are loc $f \in F$.

Am obținut că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \begin{cases} f, & k = n, \\ f \wedge x, & k < n. \end{cases}$

Dar $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$, așadar, dacă are loc $k < n$, atunci $f \wedge x \leq a$, iar, dacă are loc $k = n$, atunci $f \wedge x = \inf\{f, x\} \leq f \leq a$, prin urmare, și în acest caz, $f \wedge x \leq a$ (datorită tranzitivității lui $\leq$).

Am obținut că $a \in G$, deci $[F \cup \{x\}) \subseteq G$.

Acum fie $a \in G$, adică există $f \in F$ a. î. $f \wedge x \leq a$.

$f \in F$, așadar $f, x \in F \cup \{x\} \subseteq [F \cup \{x\})$, deci $f, x \in [F \cup \{x\})$, iar $[F \cup \{x\})$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, prin urmare $f \wedge x \in [F \cup \{x\})$, conform condiției (F_1), și deci $a \in [F \cup \{x\})$, conform condiției (F_2) din definiția unui filtru.

Am obținut și $G \subseteq [F \cup \{x\})$.

Așadar, $[F \cup \{x\}) = G = \{a \in B \mid (\exists f \in F)(f \wedge x \leq a)\}$.

Altă demonstrație: Se putea urma și această cale în demonstrația acestui corolar: este ușor de arătat că mulțimea G definită mai sus este un filtru și că $F \cup \{x\} \subseteq G$; acum, ultimul punct din remarca privind caracterizarea filtrelor generate de o mulțime arată că $[F \cup \{x\}) \subseteq G$; apoi, ca mai sus, se demonstrează cealaltă incluziune.

Filtrele finit generate sunt principale

Remarcă

După cum am menționat mai sus, $Filt(\mathcal{B})$ este o familie Moore/sistem de închidere pe $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$, iar funcția care duce fiecare $M \subseteq B$ în $[M)$ este operatorul de închidere pe $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ asociat lui $Filt(\mathcal{B})$.

Notație

Pentru orice mulțime M, vom nota cu $|M| < \infty$ faptul că M este finită.

Remarcă

Propoziția următoare arată că filtrele finit generate coincid cu filtrele principale, întrucât reciproca ei este trivială.

Propoziție

Orice filtru finit generat (i. e. generat de o mulțime finită) este principal.

Demonstrație: $[\emptyset) = \{1\} = [1)$.
Rămâne de analizat cazul filtrelor generate de mulțimi finite și **nevide**.
Fie $X := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq B$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, și $F := [X)$ (filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X).
Vom demonstra că $F = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ (i. e. că F este filtrul principal generat de conjuncția tuturor elementelor lui X).

Filtrele finit generate sunt principale

$F = [X)$, așadar $X \subseteq F$, adică $x_1, \ldots, x_n \in F$. O lemă de mai sus spune că orice filtru conține toate conjuncțiile finite între elemente ale sale. Rezultă că $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$.
Deci F este un filtru care conține elementul $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$. Pe de altă parte, filtrul principal $[x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ este, prin definiție, cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include singletonul $\{x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n\}$, adică este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care conține elementul $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$. Rezultă că $[x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \subseteq F$.
Dar $F = [X)$, deci, conform propoziției anterioare,
$F = \{a \in B \mid (\exists\, k \in \mathbb{N}^*)\, (\exists\, y_1, y_2, \ldots, y_k \in X)\, (y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k \leq a)\}$.
Fie $a \in F$, arbitrar, fixat. Atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ și există $y_1, y_2, \ldots, y_k \in X$, a. î. $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k \leq a$. Dar $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, deci $y_1, y_2, \ldots y_k \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, așadar $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k$, datorită idempotenței conjuncției. Am obținut că $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k \leq a$, prin urmare $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$, ceea ce înseamnă că $a \in [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ (a se vedea mai sus forma unui filtru principal).
Deci are loc și cealaltă incluziune: $F \subseteq [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$.
Așadar, $F = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$.

Filtrele finite sunt principale

Corolar

Orice filtru finit este principal.

Demonstrație: Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$, cu $|F| < \infty$. Conform unei remarci de mai sus, $F = [F)$. Așadar F este un filtru finit generat, prin urmare F este un filtru principal, conform propoziției anterioare.

Corolar

Orice filtru al unei algebre Boole finite este principal.

Demonstrație: Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$, prin urmare $F \subseteq B$. Dacă $|B| < \infty$, atunci $|F| \leq |B| < \infty$, deci F este un filtru finit. Conform corolarului anterior, rezultă că F este un filtru principal.

Remarcă

Demonstrația propoziției anterioare arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$,

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n),$$

fapt valabil și pentru $n = 0$, întrucât $\inf(\emptyset) = 1$ (a se vedea un curs anterior).

Filtre prime, ultrafiltre

Definiție

Un filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ se numește *filtru prim* ddacă, pentru orice $a, b \in B$, $a \vee b \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$.

Definiție

Un element maximal al mulțimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ (raportat la incluziune) se numește *filtru maximal* sau *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$.
Cu alte cuvinte, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U a. î., pentru orice filtru propriu F, $U \subseteq F$ implică $U = F$.
Altfel formulat, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U cu proprietatea că, pentru orice filtru F, $U \subseteq F$ implică $U = F$ sau $F = B$.

Notație

Mulțimea ultrafiltrelor (filtrelor maximale ale) lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Max}(\mathcal{B})$.

Lemă

Fie P un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $a, b \in B$. Atunci:

1. *$a \wedge b \in P$ ddacă $a \in P$ și $b \in P$;*
2. *dacă P este un filtru prim, atunci: $a \vee b \in P$ ddacă $a \in P$ sau $b \in P$.*

Demonstrație: (1) Implicația directă se obține din condiția (F_2) din definiția unui filtru și faptul că $a \wedge b = \inf\{a, b\} \leq a$ și $a \wedge b = \inf\{a, b\} \leq b$. Implicația reciprocă rezultă din condiția (F_1) din definiția unui filtru.
(2) Implicația directă se obține din definiția unui filtru prim. Implicația reciprocă rezultă din condiția (F_2) din definiția unui filtru și faptul că $a \leq \sup\{a, b\} = a \vee b$ și $b \leq \sup\{a, b\} = a \vee b$.

Ultrafiltrele coincid cu filtrele prime

Propoziție (caracterizare a ultrafiltrelor)

Fie U un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;*
2. *U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$;*
3. *orice element $a \in B$ satisface: $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.*

Demonstrație: (1) $\Rightarrow$ (2): Ipoteza acestei implicații spune că U este ultrafiltru.
Presupunem prin absurd că U nu este filtru prim, i. e. există $a, b \in B$ a. î.
$a \vee b \in U$, $a \notin U$ și $b \notin U$.
Dar $a \in U \cup \{a\} \subseteq [U \cup \{a\})$ și $U \subseteq [U \cup \{a\})$, iar $b \in U \cup \{b\} \subseteq [U \cup \{b\})$ și $U \subseteq [U \cup \{b\})$.
Prin urmare, $U \subseteq [U \cup \{a\})$, iar $a \in [U \cup \{a\})$ și $a \notin U$, și, de asemenea, $U \subseteq [U \cup \{b\})$, iar $b \in [U \cup \{b\})$ și $b \notin U$. Rezultă că $U \subsetneq [U \cup \{a\})$ și $U \subsetneq [U \cup \{b\})$, prin urmare $[U \cup \{a\}) = [U \cup \{b\}) = B$, întrucât U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$. Acest fapt este echivalent cu $0 \in [U \cup \{a\})$ și $0 \in [U \cup \{b\})$, în conformitate cu o caracterizare de mai sus a filtrelor proprii.

Ultrafiltrele coincid cu filtrele prime

Conform unui corolar anterior, $[U \cup \{a\}) = \{x \in B \mid (\exists\, e \in U)\,(e \wedge a \leq x)\}$ și $[U \cup \{b\}) = \{x \in B \mid (\exists\, f \in U)\,(f \wedge b \leq x)\}$.
Prin urmare, există $e, f \in U$ a. î. $a \wedge e = b \wedge f = 0$.
Aplicând distributivitatea lui $\mathcal{B}$, obținem:
$0 = 0 \vee 0 = (a \wedge e) \vee (b \wedge f) = (a \vee b) \wedge (a \vee f) \wedge (e \vee b) \wedge (e \vee f) \in U$, pentru că $a \vee b \in U$, $a \vee f = \sup\{a, f\} \geq f \in U$, $e \vee b = \sup\{e, b\} \geq e \in U$, $e \vee f = \sup\{e, f\} \geq f \in U$, și datorită condițiilor (F_2) și (F_1) din definiția unui filtru. Dar acest lucru înseamnă că $U = B$, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii la care am apelat și mai înainte. Dar U este un ultrafiltru, deci, în particular, U este un filtru propriu. Am obținut o contradicție.
Prin urmare, U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Ipoteza acestei implicații spune că U este filtru prim. Pentru orice $a \in B$, $a \vee \overline{a} = 1 \in U$, pentru că orice filtru conține pe 1, iar acum definiția unui filtru prim arată că $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ a. î. $U \subsetneq F$, așadar există un element $a \in F \setminus U$. Conform ipotezei acestei implicații, faptul că $a \notin U$ implică $\overline{a} \in U \subset F$, prin urmare $a \in F$ și $\overline{a} \in F$, deci $F = B$ conform unei caracterizări a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Dar acest lucru înseamnă că U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$, datorită chiar definiției ultrafiltrelor.

Ultrafiltre ale unei algebre Boole

Corolar (caracterizare a ultrafiltrelor)

Fie U un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;*
2. *oricare ar fi $a \in B$,* **exact** *unul dintre elementele a și $\overline{a}$ se află în U;*
3. *oricare ar fi $a \in B$, are loc echivalența: $a \in U$ ddacă $\overline{a} \notin U$.*

Demonstrație: $(1) \Rightarrow (2)$: Fie $a \in B$, arbitrar, fixat. Dacă U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$, atunci, conform propoziției anterioare, $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$, și, în plus, U este un filtru prim, așadar nu putem avea simultan $a \in U$ și $\overline{a} \in U$, cum arată o caracterizare a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Înseamnă că **exact** unul dintre elementele a și $\overline{a}$ aparține lui U.
$(2) \Rightarrow (1)$: Ipoteza acestei implicații arată că nu există $a \in B$, a. î. $a \in U$ și $\overline{a} \in U$, prin urmare U este un filtru propriu, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Deci U este un filtru propriu și, conform ipotezei acestei implicații, oricare ar fi $a \in B$, avem $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$, ceea ce înseamnă că U este un ultrafiltru, după cum arată propoziția anterioară.
$(2) \Leftrightarrow (3)$: Afirmația (3) este o simplă transcriere a lui (2), dacă ținem seama de autodualitatea operației de complementare ($\overline{\overline{a}} = a$, pentru orice $a \in B$).

Mulțimi inductiv ordonate

- În continuare, vom face o serie de preparative pentru demonstrarea celei mai importante teoreme din teoria algebrelor Boole, anume **Teorema de reprezentare a lui Stone**.
- Pentru definițiile elementelor distinse ale unui poset cu care vom lucra în continuare (majorant, element maximal), a se vedea cursurile anterioare.

Definiție

O *mulțime inductiv ordonată* este un poset cu proprietatea că orice parte total ordonată a sa are (cel puțin) un majorant.

- În definiția anterioară, **parte total ordonată** a unui poset $(P, \leq)$ înseamnă submulțime S a lui P care este lanț cu ordinea indusă (**ordinea indusă** este $\leq \cap S^2$), i. e. submulțime $S \subseteq P$ cu proprietatea că oricare două elemente ale submulțimii S sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$.

Remarcă

Orice mulțime inductiv ordonată este nevidă, pentru că ea conține măcar un element, anume un majorant al submulțimii $\emptyset$ a ei.

Remarcă

După cum am demonstrat într–un curs anterior, orice element al unui poset nevid este majorant pentru $\emptyset$.

Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn

Remarcă

Cele două remarci anterioare arată că, pentru a demonstra că un poset este mulțime inductiv ordonată, este suficient să demonstrăm că:

- posetul este nevid;
- orice parte total ordonată **nevidă** a sa are (cel puțin) un majorant.

Lemă (Lema lui Zorn)

Orice mulțime inductiv ordonată are (cel puțin) un element maximal.

- Pentru demonstrația **Lemei lui Zorn**, a se consulta cărțile din bibliografia din Cursul I. De asemenea, numeroase cărți de noțiuni de bază de algebră superioară conțin demonstrația acestei leme.
- Acest enunț este uneori întâlnit sub numele de **Axioma lui Zorn**. Motivul este că enunțul acesta este echivalent cu **Axioma alegerii**, și unii autori îl includ în sistemul axiomatic al teoriei mulțimilor în locul **Axiomei alegerii**, care, în acest caz, devine **Lema alegerii**.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Cunoaștem aceste definiții:

- *algebra Boole trivială* este algebra Boole cu un singur element, i. e. algebra Boole cu $0 = 1$;
- *o algebră Boole netrivială* este o algebră Boole care nu este trivială, i. e. o algebră Boole cu cel puțin două elemente, i. e. o algebră Boole cu $0 \neq 1$.

Remarcă

Este evident, din faptul că filtrul trivial $\{1\}$ este inclus în orice filtru al lui $\mathcal{B}$, că au loc echivalențele: $\mathcal{B}$ are filtre proprii ddacă $\{1\}$ este filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ ddacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole netrivială.

Teoremă (Teorema de existență a ultrafiltrului)

Orice filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ este inclus într–un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$.
Cu alte cuvinte, pentru orice filtru propriu F al lui $\mathcal{B}$, există un ultrafiltru U al lui $\mathcal{B}$, a. î. $F \subseteq U$.

Demonstrație: Fie F un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ care îl includ pe F:
$\mathcal{P} := \{G \mid G \in Filt(\mathcal{B}), G \neq B, G \supseteq F\}$.
Demonstrăm că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ este o mulțime inductiv ordonată.
Evident, $F \in \mathcal{P}$, așadar $\mathcal{P} \neq \emptyset$.
Fie $\mathcal{T}$ o parte total ordonată nevidă a lui $\mathcal{P}$ (i. e. $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$, și, oricare ar fi $G, H \in \mathcal{T}$, avem: $G \subseteq H$ sau $H \subseteq G$).
Notăm cu $M := \bigcup\limits_{G \in \mathcal{T}} G$. Demonstrăm că M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în $(\mathcal{P}, \subseteq)$.
Evident, pentru orice $G \in \mathcal{T}$, $M \supseteq G$, deci M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în mulțimea părților lui $\mathcal{B}$, ordonată cu $\subseteq$. Mai avem de demonstrat că $M \in \mathcal{P}$, i. e. că M este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ care îl include pe F.
Să nu uităm că $\mathcal{T} \neq \emptyset$.
Fiecare element al lui $\mathcal{P}$ îl include pe F, prin urmare fiecare $G \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ satisface $G \supseteq F$, așadar $M = \bigcup\limits_{G \in \mathcal{T}} G \supseteq F$.
Acum să demonstrăm că M este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$M \supseteq F \neq \emptyset$ (pentru că F este filtru), deci $M \neq \emptyset$.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Să demonstrăm că M satisface condiția (F_1) din definiția unui filtru. Fie $x, y \in M = \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G$, așadar există $G, H \in \mathcal{T}$, a. î. $x \in G$ și $y \in H$. Dar $(\mathcal{T}, \subseteq)$ este total ordonată, deci $G \subseteq H$ sau $H \subseteq G$. Dacă, de exemplu, $G \subseteq H$, atunci rezultă că $x, y \in H$, iar H este un filtru al lui $\mathcal{B}$, deci satisface condiția (F_1), așadar $x \wedge y \in H \subseteq M$, prin urmare $x \wedge y \in M$. Cazul $H \subseteq G$ se tratează analog. Deci M satisface condiția (F_1).
Acum să demonstrăm că M satisface condiția (F_2) din definiția unui filtru. Fie $x \in M$ și $y \in B$, cu $x \leq y$. $x \in M = \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G$, așadar există $G \in \mathcal{T}$ a. î. $x \in G$.
Dar G este un filtru al lui $\mathcal{B}$, deci satisface condiția (F_2), iar $x \leq y$, așadar $y \in G \subseteq M$, prin urmare $y \in M$. Deci M satisface condiția (F_2).
Am demonstrat că M este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
Fiecare $G \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$, deci $0 \notin G$, conform unei caracterizări a filtrelor proprii. Rezultă că $0 \notin \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G = M$, deci M este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii.
Prin urmare, $M \in \mathcal{P}$, deci M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în posetul $(\mathcal{P}, \subseteq)$.
Am demonstrat că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ este o mulțime inductiv ordonată.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Conform **Lemei lui Zorn**, rezultă că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ are (cel puțin) un element maximal. Fie U un element maximal al lui $(\mathcal{P}, \subseteq)$.
Atunci $U \in \mathcal{P}$, deci U este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ și $U \supseteq F$.
Fie P un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ a. î. $U \subseteq P$. Cum $F \subseteq U$, rezultă că $F \subseteq P$.
Așadar P este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ care îl include pe F, adică $P \in \mathcal{P}$. Dar U este un element maximal al lui $(\mathcal{P}, \subseteq)$, iar $P \in \mathcal{P}$ și $U \subseteq P$. Conform definiției unui element maximal al unui poset, rezultă că $U = P$.
Așadar, U este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ și, pentru orice filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ cu $U \subseteq P$, rezultă că $U = P$. Deci U este un element maximal al mulțimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$, adică U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$.
Am demonstrat că U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$ și $F \subseteq U$.

Corolar

Orice algebră Boole netrivială are (cel puțin) un ultrafiltru.

Demonstrație: Conform remarcii care precedă **Teorema de existență a ultrafiltrului**, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este netrivială, atunci $\mathcal{B}$ are cel puțin un filtru propriu, de exemplu filtrul trivial $\{1\}$. Aplicând **Teorema de existență a ultrafiltrului**, rezultă că $\mathcal{B}$ are (cel puțin) un ultrafiltru care include acest filtru propriu.

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm două algebre Boole arbitrare $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ și $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$.

Remarcă

Pentru orice morfism boolean $f : A \to B$, au loc:

- $f(0) = 0$, deci $0 \in f^{-1}(\{0\})$, adică $\{0\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$;
- $f(1) = 1$, deci $1 \in f^{-1}(\{1\})$, adică $\{1\} \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Propoziție

Fie $f : A \to B$ un morfism boolean. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *f este injectiv;*
2. *$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;*
3. *$f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.*

Demonstrație: $(1) \Rightarrow (3)$: Fie $x \in f^{-1}(\{1\})$, ceea ce este echivalent cu $f(x) \in \{1\}$, i. e. $f(x) = 1$. Dar $f(1) = 1$, așadar faptul că f e injectivă implică $x = 1$, i. e. $x \in \{1\}$. Deci $f^{-1}(\{1\}) \subseteq \{1\}$, iar cealaltă incluziune are loc pentru orice morfism boolean, prin urmare $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene

$(3) \Rightarrow (1)$: Fie $x, y \in A$, a. î. $f(x) = f(y)$, ceea ce este echivalent cu $f(x) \leftrightarrow f(y) = 1$, conform unei proprietăți aritmetice a algebrelor Boole demonstrate mai sus. Dar orice morfism boolean comută cu echivalența booleană, prin urmare $f(x) \leftrightarrow f(y) = f(x \leftrightarrow y)$. Am obținut: $f(x \leftrightarrow y) = 1$, i. e. $x \leftrightarrow y \in f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, deci $x \leftrightarrow y = 1$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform aceleiași proprietăți aritmetice la care am făcut apel și mai sus. Am demonstrat că f este injectivă.

Echivalența $(1) \Leftrightarrow (2)$ rezultă, prin dualitate, din echivalența $(1) \Leftrightarrow (3)$, pe care tocmai am demonstrat–o.

Un alt mod de a încheia demonstrația acestei propoziții este demonstrarea echivalenței $(2) \Leftrightarrow (3)$, care poate fi efectuată astfel: pentru orice $x \in A$, au loc echivalențele: $x \in f^{-1}(\{0\})$ ddacă $f(x) = 0$ ddacă $\overline{f(x)} = \overline{0}$ (conform unei alte proprietăți aritmetice a algebrelor Boole demonstrate mai sus) ddacă $f(\overline{x}) = 1$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{1\})$. Așadar, dacă $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, atunci, pentru orice $x \in A$, avem: $x = \overline{\overline{x}} \in f^{-1}(\{1\})$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ddacă $\overline{x} = 0$ ddacă $x = \overline{\overline{x}} = \overline{0} = 1$ ddacă $x \in \{1\}$; deci $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$. Reciproc, dacă $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, atunci, pentru orice $x \in A$, avem: $x \in f^{-1}(\{0\})$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ ddacă $\overline{x} = 1$ ddacă $x = \overline{\overline{x}} = \overline{1} = 0$ ddacă $x \in \{0\}$; deci $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Remarcă

Algebra Boole trivială este izomorfă cu $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ și cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^{\emptyset} = \mathcal{L}_2^0$, care are drept mulțime suport pe $L_2^0 = L_2^{\emptyset} = \{f \mid f : \emptyset \to L_2\} = \{(\emptyset, \emptyset, L_2)\}$ (acest triplet este, după cum știm, unica funcție de la $\emptyset$ la L_2).

- Pentru o formulare clară a următoarelor două rezultate, vom renunța, în cele ce urmează, la fixarea algebrei Boole $\mathcal{B}$.

Teoremă (Teorema de reprezentare a lui Stone)

Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, X)$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ o algebră Boole netrivială și $X := \mathrm{Max}(\mathcal{B})$ (X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$).
Conform corolarului **Teoremei de existență a ultrafiltrului**, $X \neq \emptyset$.
Să definim o funcție $d : B \to \mathcal{P}(X)$, prin: pentru orice $a \in B$,
$d(a) := \{U \in X \mid a \in U\}$.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Fie $a, b \in B$ și $U \in X$, toate arbitrare și fixate. Din lema care succede definiția ultrafiltrelor și faptul că ultrafiltrele coincid cu filtrele prime, cunoscut din propoziția privind caracterizarea ultrafiltrelor, obținem:

$$\begin{array}{lll} U \in d(a \wedge b) & \text{ddacă} & a \wedge b \in U \\ & \text{ddacă} & a \in U \text{ și } b \in U \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \text{ și } U \in d(b) \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \cap d(b) \end{array}$$

și

$$\begin{array}{lll} U \in d(a \vee b) & \text{ddacă} & a \vee b \in U \\ & \text{ddacă} & a \in U \text{ sau } b \in U \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \text{ sau } U \in d(b) \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \cup d(b). \end{array}$$

Am obținut: $d(a \wedge b) = d(a) \cap d(b)$ și $d(a \vee b) = d(a) \cup d(b)$, pentru orice $a, b \in B$.

Cum orice filtru îl conține pe 1, are loc: $d(1) = X$. Întrucât orice ultrafiltru este filtru propriu, iar niciun filtru propriu nu îl conține pe 0, are loc: $d(0) = \emptyset$.

Conform unei propoziții de mai sus despre morfisme booleene, rezultă că d comută și cu operația de complementare (fapt care putea fi demonstrat și folosind corolarul privind caracterizarea ultrafiltrelor), așadar d este un morfism boolean.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Pentru încheierea demonstrației, a rămas de arătat că d este injectiv. Fie $a \in d^{-1}(\{\emptyset\})$, ceea ce este echivalent cu: $d(a) = \emptyset$. Presupunem prin absurd că $a \neq 0$. Atunci filtrul principal $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ nu îl conține pe 0, prin urmare $[a)$ este un filtru propriu, conform unei caracterizări a filtrelor proprii. Din **Teorema de existență a ultrafiltrului**, rezultă că există un ultrafiltru U cu $[a) \subseteq U$. Dar $a \in [a)$, prin urmare $a \in U$, adică $U \in d(a) = \emptyset$; am obținut o contradicție. Așadar, $a = 0$, adică $d^{-1}(\{\emptyset\}) \subseteq \{0\}$, deci $d^{-1}(\{\emptyset\}) = \{0\}$, întrucât cealaltă incluziune este satisfăcută de orice morfism boolean de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{P}(X)$. Această egalitate arată că morfismul boolean d este injectiv, conform propoziției anterioare.

Corolar (reformulare a Teoremei de reprezentare a lui Stone)

Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole netrivială. Conform **Teoremei de reprezentare a lui Stone**, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$. Conform unei propoziții din cursul anterior, există un izomorfism boolean $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}_2^X$. Prin urmare, compunerea $\varphi \circ d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X$ este un morfism boolean injectiv.

Consecință a Teoremei de reprezentare a lui Stone

Remarcă

Algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, se scufundă în orice algebră Boole netrivială, i. e., oricare ar fi o algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, de la $\mathcal{L}_2$ la $\mathcal{B}$ există un morfism injectiv de algebre Boole, anume morfismul care duce pe 0 în 0 și pe 1 în 1. (Morfismele injective se numesc *scufundări*.)

Remarcă

Cu terminologia menționată în remarca anterioară, **Teorema de reprezentare a lui Stone** poate fi formulată și astfel: orice algebră Boole netrivială se scufundă în algebra Boole a părților unei mulțimi (sau, echivalent, într–o putere a algebrei Boole standard).

Remarcă

Teorema de reprezentare a lui Stone arată că toate proprietățile aritmetice ale algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$, cu X mulțime arbitrară (proprietățile din calculul cu mulțimi demonstrate la seminar sau date ca temă) sunt valabile în orice algebră Boole (cu operațiile booleene corespunzătoare).

Consecință a Teoremei de reprezentare a lui Stone

Remarcă

O altă consecință a **Teoremei de reprezentare a lui Stone** și a faptului că algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, se scufundă în orice algebră Boole netrivială este că orice **identitate** pentru elementele unei algebre Boole (arbitrare) este satisfăcută în orice algebră Boole ddacă este satisfăcută în algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, ddacă este satisfăcută într–o algebră Boole netrivială fixată.

Atenție: este vorba de *identități*, adică proprietăți privitoare la elementele unei algebre Boole arbitrare în care apar doar variabile cuantificate universal (variabile care denumesc elementele algebrei Boole), operații ale algebrei Boole și relația de egalitate. Desigur, poate apărea în aceste proprietăți și relația de ordine a algebrei Boole, întrucât, după cum știm, pentru orice elemente x și y ale unei latici, au loc echivalențele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$, cu notațiile uzuale.

În cele ce urmează, x, y și z vor fi elemente ale unei algebre Boole arbitrare, iar notațiile componentelor structurii de algebră Boole vor fi uzuale.

De exemplu, proprietatea $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$ este o identitate, și, întrucât este satisfăcută în $\mathcal{L}_2$, rezultă că este satisfăcută în orice algebră Boole, ceea ce rezulta și dacă observam că această identitate este satisfăcută în $\mathcal{L}_2^3$ (cubul), de exemplu.

Consecință a Teoremei de reprezentare a lui Stone

Remarcă (continuare)

Dar proprietatea $x \vee y = 1 \Rightarrow [x = 1 \text{ sau } y = 1]$ nu este o identitate, pentru că $\Rightarrow$ apare în această proprietate. După cum se observă, proprietatea aceasta este satisfăcută în $\mathcal{L}_1$ și în $\mathcal{L}_2$, dar nu este satisfăcută în $\mathcal{L}_2^2$ sau $\mathcal{L}_2^3$, de exemplu, de fapt nu este satisfăcută în nicio algebră Boole diferită de algebra Boole trivială și de algebra Boole standard, pentru că această proprietate spune că orice element x al algebrei Boole fie este egal cu 1, fie îl are drept complement pe 1, și deci este egal cu 0, așadar $\{0, 1\}$ sunt singurele elemente ale algebrei Boole care satisface proprietatea, deci această algebră Boole poate fi doar $\mathcal{L}_1$ (pentru cazul în care $0 = 1$) sau $\mathcal{L}_2$ (pentru cazul în care $0 \neq 1$).
Pentru doritori, a se vedea și Corolarul 20 de la pagina 65 din cartea *General Lattice Theory* de G. Grätzer.

Congruențe ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole arbitrară, $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$.
- Știm că o relație de echivalență pe o mulțime este o relație binară reflexivă, simetrică și tranzitivă (adică o preordine simetrică) pe acea mulțime.

Definiție

Se numește *congruență a algebrei Boole $\mathcal{B}$* o relație de echivalență $\sim$ pe B care este compatibilă cu operațiile algebrei Boole $\mathcal{B}$, adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

1. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$;
2. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$;
3. dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$.

Congruențe ale unei algebre Boole

Remarcă

Dacă, în definiția anterioară, veți generaliza cele trei relații dând compatibilitatea lui $\sim$ cu operațiile binare $\vee$ și $\wedge$ și operația unară $\bar{}$, pentru a obține relația care dă compatibilitatea unei relații de echivalență cu o operație de aritate oarecare, atunci veți observa că: compatibilitatea cu operațiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$, i. e. constantele 0 și 1, se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$. Deci compatibilitatea cu operațiile zeroare este satisfăcută de orice relație binară reflexivă pe B, în particular de orice relație de echivalență pe B. De aceea, compatibilitatea cu 0 și 1 nu a apărut ca o cerință în definiția de mai sus.

Remarcă

O congruență a lui $\mathcal{B}$ este o relație de echivalență pe B care este și subalgebră Boole a algebrei Boole produs direct $B^2 = B \times B$.
Pentru doritori, a se vedea și o observație de la pagina 20 din cartea *A Survey on Congruence Lattice Representations*, de E. T. Schmidt.

Congruențe ale unei algebre Boole

Propoziție

În definiția de mai sus, a unei congruențe pe o algebră Boole, fiecare dintre condițiile (1) *și* (2) *este implicată de celelalte două condiții.*

Demonstrație: $(1) \Leftarrow (2), (3)$: Fie $\sim$ o relație de echivalență pe B compatibilă cu $\wedge$ și cu $\bar{\ }$, și fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim x'$ și $y \sim y'$. Atunci

$$\overline{x} \sim \overline{x'} \text{ și } \overline{y} \sim \overline{y'},$$

deci

$$\overline{x} \wedge \overline{y} \sim \overline{x'} \wedge \overline{y'},$$

prin urmare

$$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \sim \overline{\overline{x'} \wedge \overline{y'}},$$

adică

$$x \vee y \sim x' \vee y',$$

conform **legilor lui de Morgan**.
$(2) \Leftarrow (1), (3)$: Analog, sau prin dualitate, din implicația "$(1) \Leftarrow (2), (3)$".

Congruențe ale unei algebre Boole

Propoziție

Orice congruență a unei algebre Boole este compatibilă cu implicația și echivalența booleană.
I. e., pentru orice congruență $\sim$ a lui $\mathcal{B}$ și orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

- *dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'$;*
- *dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'$.*

Demonstrație: Fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim x'$ și $y \sim y'$. Aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\bar{\ }$ și cu $\vee$, precum și definiția implicației booleene, obținem:

$$\overline{x} \sim \overline{x'} \text{ și } y \sim y',$$

deci

$$\overline{x} \vee y \sim \overline{x'} \vee y',$$

adică

$$x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'.$$

Congruențe ale unei algebre Boole

Acum, aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\rightarrow$, pe care tocmai am demonstrat–o, compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$ și definiția echivalenței booleene, din $x \sim x'$ și $y \sim y'$ obținem:

$$x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y' \text{ și } y \rightarrow x \sim y' \rightarrow x',$$

așadar

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \sim (x' \rightarrow y') \wedge (y' \rightarrow x'),$$

adică

$$x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'.$$

- În secțiunea care urmează în acest curs, vom stabili o bijecție între mulțimea congruențelor unei algebre Boole și mulțimea filtrelor sale. Pentru acest lucru, ne va folosi remarca următoare.

Remarcă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $x, y \in B$. Atunci are loc echivalența: $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \rightarrow y \in F$ și $y \rightarrow x \in F$.
Într–adevăr, știm, dintr–o lemă de mai sus, că, pentru orice $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b \in F$ ddacă $a \in F$ și $b \in F$. Aplicând acest rezultat elementelor $a := x \rightarrow y$ și $b := y \rightarrow x$, obținem echivalența de mai sus.

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Notație

Notăm prin $Con(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui $\mathcal{B}$.

Propoziție

Mulțimea congruențelor unei algebre Boole este în bijecție cu mulțimea filtrelor sale.

Existența unei bijecții se demonstrează construind două funcții între cele două mulțimi, în sensuri opuse, și arătând că sunt inverse una celeilalte, așadar sunt inversabile, deci sunt bijecții.

Iată definițiile celor două funcții pentru o algebră Boole oarecare $\mathcal{B}$:

- funcția de la mulțimea filtrelor la mulțimea congruențelor: oricărui filtru F îi asociem congruența $\sim_F$, definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcția de la mulțimea congruențelor la mulțimea filtrelor: oricărei congruențe $\sim$ îi asociem filtrul $F^{\sim}$, definit prin: $F^{\sim} := \{x \in B \mid x \sim 1\}$ ($F^{\sim}$ este clasa de echivalență a lui 1 raportat la $\sim$).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Așadar, definim funcțiile:

- $\varphi : Filt(\mathcal{B}) \rightarrow Con(\mathcal{B})$, pentru orice $F \in Filt(\mathcal{B})$, $\varphi(F) \stackrel{\text{notație}}{=} \sim_F \subseteq B^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- $\psi : Con(\mathcal{B}) \rightarrow Filt(\mathcal{B})$, pentru orice $\sim \in Con(\mathcal{B})$, $\psi(\sim) \stackrel{\text{notație}}{=} F^{\sim} \subseteq B$, definit prin: $F^{\sim} := \{x \in B \mid x \sim 1\}$.

Pentru început, să demonstrăm că φ și ψ sunt corect definite, i. e.:

- pentru orice $F \in Filt(\mathcal{B})$, are loc $\sim_F \in Con(\mathcal{B})$;
- pentru orice $\sim \in Con(\mathcal{B})$, are loc $F^{\sim} \in Filt(\mathcal{B})$.

Să considerăm, așadar, un filtru F al lui $\mathcal{B}$, și să demonstrăm că relația binară $\sim_F$ pe B definită mai sus este o congruență a lui $\mathcal{B}$.

Pentru orice $x \in B$, $x = x$, deci $x \leftrightarrow x = 1 \in F$, așadar $x \sim_F x$, deci $\sim_F$ este reflexivă.

Pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$, așadar $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $y \leftrightarrow x \in F$, deci $x \sim_F y$ ddacă $y \sim_F x$, așadar $\sim_F$ este simetrică.

Pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \rightarrow y \in F$ și $y \rightarrow x \in F$, conform unei remarci de mai sus.

Fie $x, y, z \in B$, a. î. $x \sim_F y$ și $y \sim_F z$, i. e. $x \rightarrow y, y \rightarrow x, y \rightarrow z, z \rightarrow y \in F$.

Demonstrăm că $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$.

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

$(x \to y) \wedge (y \to z) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge x) \vee (y \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee 0 \vee 0 \vee (y \wedge z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge z) \leq \overline{x} \vee z = x \to z$ (pentru că $\overline{x} \wedge \overline{y} \leq \overline{x}$ și $y \wedge z \leq z$, și aplicând o lemă amintită la începutul cursului), așadar $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$.
Dar $x \to y, y \to z \in F$, așadar $(x \to y) \wedge (y \to z) \in F$, deci $x \to z \in F$, conform condițiilor (F_1) și (F_2) aplicate filtrului F.
Analog, rezultă că $z \to x \in F$.
Am obținut: $x \to z, z \to x \in F$, deci $x \sim_F z$.
Așadar $\sim_F$ este tranzitivă.
Prin urmare, $\sim_F$ este o relație de echivalență.
Fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim_F x'$ și $y \sim_F y'$, deci $x \to x', x' \to x, y \to y', y' \to y \in F$.
Să demonstrăm că $\sim_F$ este compatibilă cu $\vee$.
$(x \to x') \wedge (y \to y') = (\overline{x} \vee x') \wedge (\overline{y} \vee y') \leq (\overline{x} \vee x' \vee y') \wedge (\overline{y} \vee x' \vee y') = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee x' \vee y' = \overline{x \vee y} \vee x' \vee y' = (x \vee y) \to (x' \vee y')$. Am folosit faptul că $\overline{x} \vee x' \leq \overline{x} \vee x' \vee y'$, $\overline{y} \vee y' \leq \overline{y} \vee x' \vee y'$, din nou lema la care am apelat și mai sus, și **legile lui de Morgan**. Deci $(x \to x') \wedge (y \to y') \leq (x \vee y) \to (x' \vee y')$.
Cum $x \to x', y \to y' \in F$, rezultă că $(x \to x') \wedge (y \to y') \in F$, deci $(x \vee y) \to (x' \vee y') \in F$, prin aplicarea condițiilor (F_1) și (F_2).

Analog, se obține faptul că $(x' \vee y') \rightarrow (x \vee y) \in F$.
Rezultă că $x \vee y \sim_F x' \vee y'$, deci $\sim_F$ este compatibilă cu $\vee$.
Să demonstrăm că $\sim_F$ este compatibilă cu $\bar{}$.
$\overline{x} \leftrightarrow \overline{x'} = (\overline{x} \rightarrow \overline{x'}) \wedge (\overline{x'} \rightarrow \overline{x}) = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{x'}) \wedge (\overline{\overline{x'}} \vee \overline{x}) = (x \vee \overline{x'}) \wedge (x' \vee \overline{x}) =$
$(\overline{x} \vee x') \wedge (\overline{x'} \vee x) = (x \rightarrow x') \wedge (x' \rightarrow x) = x \leftrightarrow x' \in F$, prin urmare $\overline{x} \leftrightarrow \overline{x'} \in F$, deci $\overline{x} \sim_F \overline{x'}$.
Așadar $\sim_F$ este compatibilă și cu $\bar{}$.
Conform propoziției care succede definiția unei congruențe, rezultă că $\sim_F$ este compatibilă și cu $\wedge$.
Deci $\sim_F$ este o congruență a lui $\mathcal{B}$, i. e. $\varphi(F) = \sim_F \in Con(\mathcal{B})$, așadar φ este corect definită.
Acum să considerăm o congruență $\sim$ a lui $\mathcal{B}$, și să demonstrăm că submulțimea $F^{\sim}$ a lui B definită mai sus este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$\sim$ este reflexivă, prin urmare $1 \sim 1$, deci $1 \in F^{\sim}$, așadar $F^{\sim} \neq \emptyset$.
Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
Să demonstrăm că $F^{\sim}$ satisface condiția (F_1).
Dacă $x, y \in F^{\sim}$, i. e. $x \sim 1$ și $y \sim 1$, atunci, aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$, rezultă că $x \wedge y \sim 1 \wedge 1 = 1$, deci $x \wedge y \in F^{\sim}$. Așadar $F^{\sim}$ satisface condiția (F_1).
Acum să demonstrăm că $F^{\sim}$ îndeplinește condiția (F_2).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Dacă $x \in F^{\sim}$ și $x \leq y$, atunci $x \sim 1$ și $x \vee y = y$, deci, folosind faptul că $y \sim y$, datorită reflexivității lui $\sim$, și aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\vee$, rezultă că $y = y \vee x \sim y \vee 1 = 1$, deci $y \in F^{\sim}$. Așadar $F^{\sim}$ satisface și condiția (F_2).
Am demonstrat că $F^{\sim}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, i. e. $\psi(\sim) = F^{\sim} \in Filt(\mathcal{B})$, așadar ψ este corect definită.
În fine, să demonstrăm că funcțiile φ și ψ sunt inverse una celeilalte.
Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Demonstrăm că $F^{\sim_F} = F$.
Pentru orice $x \in B$, avem: $x \leftrightarrow 1 = (x \to 1) \wedge (1 \to x) = 1 \wedge (\overline{1} \vee x) = 0 \vee x = x$, așadar $F^{\sim_F} = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = \{x \in B \mid x \leftrightarrow 1 \in F\} = \{x \in B \mid x \in F\} = F$.
Deci $\psi(\varphi(F)) = F^{\sim_F} = F$.
Fie $\sim$ o congruență a lui $\mathcal{B}$. Demonstrăm că $\sim_{F^{\sim}} = \sim$, prin dublă incluziune.
Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
Dacă $(x, y) \in \sim$, i. e. $x \sim y$, atunci, din compatibilitatea lui $\sim$ cu $\leftrightarrow$, obținem: $x \leftrightarrow y \sim y \leftrightarrow y = 1 \in F^{\sim}$, prin urmare $x \sim_{F^{\sim}} y$, i. e. $(x, y) \in \sim_{F^{\sim}}$. Așadar $\sim \subseteq \sim_{F^{\sim}}$.
Calculăm: $x \wedge (x \to y) = x \wedge (\overline{x} \vee y) = (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$.
Dacă $(x, y) \in \sim_{F^{\sim}}$, i. e. $x \sim_{F^{\sim}} y$, ceea ce este echivalent (vedeți mai sus) cu $x \to y \in F^{\sim}$ și $y \to x \in F^{\sim}$, i. e. $x \to y \sim 1$ și $y \to x \sim 1$, atunci, conform calculului din paragraful anterior și compatibilității lui $\sim$ cu $\wedge$, avem:

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

$x \wedge y = x \wedge (x \rightarrow y) \sim x \wedge 1 = x$, deci $x \wedge y \sim x$. Analog, rezultă că și $x \wedge y \sim y$. Deci $x \sim x \wedge y \sim y$, prin urmare $x \sim y$, i. e. $(x, y) \in \sim$. Așadar $\sim_{F_\sim} \subseteq \sim$.
Deci $\varphi(\psi(\sim)) = \sim_{F_\sim} = \sim$.
Am demonstrat că $\psi \circ \varphi = id_{Filt(\mathcal{B})}$ și $\varphi \circ \psi = id_{Con(\mathcal{B})}$, ceea ce înseamnă că funcțiile φ și ψ sunt inverse una celeilalte, deci sunt inversabile, așadar sunt bijective, prin urmare mulțimile $Con(\mathcal{B})$ și $Filt(\mathcal{B})$ sunt în bijecție.

Propoziție

Fie $a, b, x \in B$ și F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, cu notațiile de mai sus, au loc:

1. *$a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$;*
2. *$a \sim_F b$ ddacă există un element $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$.*

Demonstrație: A se vedea corespondența dintre filtre și congruențe, forma unui filtru principal, și legea de reziduație pentru echivalențele care urmează.

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

(1) $a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in [x)$ ddacă $x \leq a \leftrightarrow b$ ddacă $x \leq (a \to b) \wedge (b \to a)$ ddacă $\begin{cases} x \leq a \to b \text{ și} \\ x \leq b \to a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} x \wedge a \leq b \text{ și} \\ x \wedge b \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \text{ și} \\ b \wedge x \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \wedge x \text{ și} \\ b \wedge x \leq a \wedge x \end{cases}$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$.

(2) "$\Rightarrow$": $a \sim_F b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in F$ ddacă există un $f \in F$ astfel încât $a \leftrightarrow b = f$, ceea ce implică $f \leq a \leftrightarrow b$, adică $a \leftrightarrow b \in [f)$, ceea ce este echivalent cu $a \sim_{[f)} b$, ceea ce este echivalent cu $a \wedge f = b \wedge f$, conform lui (1).

"$\Leftarrow$": Conform punctului (1), dacă există $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$, atunci $a \sim_{[f)} b$, adică $a \leftrightarrow b \in [f)$. Dar $f \in F$, deci $[f) \subseteq F$ (pentru că F este filtru, deci faptul că îl conține pe f implică faptul că include cel mai mic filtru care îl conține pe f, adică filtrul generat de f), așadar $a \leftrightarrow b \in F$, adică $a \sim_F b$.

Algebre Boole factor

Propoziție

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $\sim_F$ congruența asociată lui F.
Pentru fiecare $x \in B$, se notează cu $x/F := \{y \in B \mid x \sim_F y\}$ clasa de echivalență a lui x raportat la $\sim_F$.
Mulțimea factor $B/_{\sim_F} = \{x/F \mid x \in B\}$ (i. e. mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui B raportat la $\sim_F$) se mai notează cu B/F.
Atunci: B/F se poate organiza ca algebră Boole cu următoarele operații, pe care le vom nota la fel ca pe acelea ale lui $\mathcal{B}$:

- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \vee y/F := (x \vee y)/F$*
- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F := (x \wedge y)/F$*
- *pentru orice $x \in B$, $\overline{x/F} := \overline{x}/F$*
- $0 := 0/F$ *și* $1 := 1/F$

Faptul că $\sim_F$ este congruență pe $\mathcal{B}$, i. e. echivalență care comută cu operațiile lui $\mathcal{B}$, arată că operațiile lui B/F sunt **bine definite**. Într–adevăr, să considerăm $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x/F = x'/F$ și $y/F = y'/F$, i. e. $x \sim_F x'$ și $y \sim_F y'$. Cum $\sim_F$ este o congruență a lui $\mathcal{B}$, rezultă că:

Algebre Boole factor

- $x \vee y \sim_F x' \vee y'$, i. e. $(x \vee y)/F = (x' \vee y')/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\vee$ pe B/F;
- $x \wedge y \sim_F x' \wedge y'$, i. e. $(x \wedge y)/F = (x' \wedge y')/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\wedge$ pe B/F;
- $\overline{x} \sim_F \overline{x'}$, i. e. $\overline{x}/F = \overline{x'}/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\bar{\ }$ pe B/F.

Buna definire a operațiilor zeroare ale lui B/F este trivială, pentru că 0 din B/F este definit ca fiind constanta $0/F$, iar 1 din B/F este definit ca fiind constanta $1/F$.

Proprietățile acestor operații, care arată că ele determină pe B/F o structură de algebră Boole, se obțin imediat din proprietățile operațiilor algebrei Boole $\mathcal{B}$ și definițiile acestor operații pe B/F. Iată, de exemplu, demonstrația distributivității lui $\vee$ față de $\wedge$: fie $x, y, z \in B$; au loc egalitățile:

$$x/F \vee (y/F \wedge z/F) = x/F \vee (y \wedge z)/F = (x \vee (y \wedge z))/F =$$

$$((x \vee y) \wedge (x \vee z))/F = (x \vee y)/F \wedge (x \vee z)/F = (x/F \vee y/F) \wedge (x/F \vee z/F).$$

Definiție

Algebra Boole $(B/F, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0 = 0/F, 1 = 1/F)$ se numește *algebra Boole factor (sau algebra Boole cât) a lui $\mathcal{B}$ prin filtrul F.*

Algebre Boole factor

Propoziție

Pentru orice filtru F, surjecția canonică $p_F : B \to B/F$, definită prin: pentru orice $x \in B$, $p_F(x) := x/F$, este un morfism boolean surjectiv.

Demonstrație: Surjectivitatea funcției p_F este evidentă (și cunoscută de la mulțimi factor raportat la o relație de echivalență), iar comutarea lui p_F cu operațiile de algebră Boole rezultă din definiția operațiilor algebrei Boole B/F. Într–adevăr, pentru orice $x, y \in B$, avem:

$$p_F(x \vee y) = (x \vee y)/F = x/F \vee y/F = p_F(x) \vee p_F(y);$$

$$p_F(x \wedge y) = (x \wedge y)/F = x/F \wedge y/F = p_F(x) \wedge p_F(y);$$

$$p_F(\overline{x}) = \overline{x}/F = \overline{x/F} = \overline{p_F(x)};$$

$$p_F(0) = 0/F = 0;\ \ p_F(1) = 1/F = 1.$$

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci $F = 1/F$, așadar, pentru orice element $a \in B$, au loc echivalențele: $a \in F$ ddacă $a \sim_F 1$ ddacă $a/F = 1/F$.

Demonstrație: Din demonstrația propoziției privind corespondența bijectivă între filtre și congruențe, avem: $F = F^{\sim_F} = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = 1/F$.

Morfisme, filtre și algebre Boole factor

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole arbitrară $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$. A se vedea demonstrațiile acestor rezultate într–o versiune viitoare a cursului.

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean, iar F un filtru al algebrei Boole $\mathcal{A}$ și G un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci:

1. *$f^{-1}(G)$ este un filtru al lui $\mathcal{A}$;*
2. *dacă f e surjectiv, atunci $f(F)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.*

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean. Atunci $f(A)$ este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$, izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$.

Indicație: Se notează cu $F := f^{-1}(\{1\})$, care este un filtru al lui $\mathcal{A}$, fiind preimaginea printr–un morfism boolean a filtrului trivial al lui $\mathcal{B}$ (a se vedea propoziția precedentă), apoi se definește funcția $\varphi : A/F \to f(A)$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $\varphi(x/F) := f(x)$.

Morfisme, filtre și algebre Boole factor

Folosind definiția congruenței modulo filtrul F și faptul că $F = f^{-1}(\{1\})$, se arată că, pentru orice $x, y \in A$, $x/F = y/F$ ddacă $f(x) = f(y)$. În această echivalență, implicația directă arată că φ este bine definită (i. e. independentă de reprezentantul clasei care constituie argumentul său), iar implicația inversă arată că φ este injectivă. Surjectivitatea lui φ este evidentă. Folosind definiția operațiilor algebrei Boole factor A/F și faptul că f este morfism boolean, deci comută cu operațiile booleene, se arată că φ comută cu operațiile booleene, deci este morfism boolean. Așadar, φ este izomorfism boolean.

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie U un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci: U este ultrafiltru ddacă algebra Boole factor B/U este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$.

Indicație: Se aplică lema anterioară (conform căreia un element $a \in B$ are $a/U = 1/U$ ddacă $a \in U$) și un corolar de caracterizare a ultrafiltrelor de mai sus, care afirmă că un filtru U al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este ultrafiltru ddacă, oricare ar fi $a \in B$, **exact** unul dintre elementele a și $\overline{a}$ aparține lui U.

Atomi ai unei algebre Boole

- Pentru demonstrațiile rezultatelor din această secțiune a cursului de față, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I. Aceste demonstrații sunt **facultative**.

Definiție

Un *atom* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este un succesor al lui 0 din $\mathcal{B}$ (i. e. din posetul $(B, \leq)$). Adică, un *atom* al lui $\mathcal{B}$ este un element $a \in B$ cu proprietățile:

- $a \neq 0$ și
- nu există niciun element $x \in B$ a. î. $0 < x < a$,

unde am notat cu $<:=\leq \setminus \Delta_B$, i. e. $<$ este relația de ordine strictă pe B corespunzătoare relației de ordine $\leq$ de pe B, adică, pentru orice $x, y \in B$,

$$x < y \text{ ddacă } \begin{cases} x \leq y \\ \text{și} \\ x \neq y. \end{cases}$$

Atomi ai unei algebre Boole

Remarcă

- Algebra Boole trivială nu are niciun atom (deci numărul atomilor săi coincide cu numărul ultrafiltrelor sale, anume 0).
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$, cu mulțimea elementelor $L_2^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}$ are n atomi: atomii săi sunt elementele $e_1, \dots, e_n$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\substack{\text{vector de lungime } n, \\ \text{cu 1 pe poziția } i \text{ și} \\ \text{0 pe celelalte poziții}}}$.

  La fel pentru algebra Boole $\mathcal{L}_2^X$, cu X mulțime arbitrară.
- Pentru orice mulțime nevidă X (nu neapărat finită), atomii algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ sunt submulțimile lui X cu câte un singur element: $\{a\}$, cu $a \in X$.

- Am văzut la începutul acestui curs că toate filtrele unei algebre Boole finite sunt principale, adică sunt generate de câte un singur element.

Remarcă

Ultrafiltrele unei algebre Boole finite sunt filtrele generate de câte un atom al acelei algebre Boole.

Structura algebrelor Boole finite

Remarcă

Remarca anterioară arată că, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este finită, atunci există o bijecție între mulțimea atomilor lui $\mathcal{B}$ și mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, care duce fiecare atom a al lui $\mathcal{B}$ în $[a)$ (filtrul principal generat de a).

Teoremă (Teorema de structură a algebrelor Boole finite)

Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole finită, atunci $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui $\mathcal{B}$ (care este egal cu numărul ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, conform remarcii anterioare).

Corolar

Orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2 (cu exponentul dat de numărul atomilor săi, care este egal cu numărul ultrafiltrelor sale).

Corolar

Două algebre Boole finite de același cardinal sunt izomorfe.

Structura algebrelor Boole finite

Remarcă

Pentru orice mulțime finită X, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, au loc următoarele izomorfisme între algebre Boole: $\mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{L}_2^{\overline{1,n}} \cong \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\overline{1,n})$ ($\overline{1,0} = \emptyset$).

Remarcă

- **Teorema de reprezentare a lui Stone** spune că, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$. Cu alte cuvinte, orice algebră Boole $\mathcal{B}$ este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (anume subalgebra $d(B)$ dată de imaginea morfismului boolean injectiv d). Ca o paranteză, un morfism injectiv se numește *scufundare* (morfismul injectiv nu trebuie neapărat să fie morfism boolean, ci poate fi orice morfism între două structuri algebrice de același tip). Cu această terminologie, **Teorema de reprezentare a lui Stone** se poate enunța astfel: orice algebră Boole $\mathcal{B}$ se scufundă în algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$.
- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că, în cazul particular al algebrelor Boole finite, are loc proprietatea că orice algebră Boole finită este chiar **izomorfă** cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (a se vedea remarca anterioară).

Teme și teme obligatorii privind algebrele Boole

Amintesc:

Notație

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, se notează cu $\mathcal{L}_k$ lanțul cu (exact) k elemente.

Exercițiu (temă obligatorie)

(a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, iar $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, astfel încât există (cel puțin) un $i \in \overline{1,n}$ cu $k_i > 2$. Să se demonstreze că $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{k_i}$ nu este algebră Boole. (De exemplu, $\mathcal{L}_4^8$ nu e algebră Boole.)

Indicație: Se poate folosi unicitatea descompunerii unei latici în produs direct de lanțuri, rezultată din indecompozabilitatea lanțurilor raportat la produsul direct de poseturi.

(b) Fie I o mulțime nevidă arbitrară, iar $(T_i)_{i \in I}$ o familie de lanțuri (nu neapărat nevide, nu neapărat finite), date prin mulțimile lor suport, astfel încât $(\exists\, j \in I)\,(|T_j| > 2)$. Să se demonstreze că $\prod_{i \in I} T_i$ nu este algebră Boole.

Teme și teme obligatorii privind algebrele Boole

Exercițiu (temă obligatorie – continuare)

Indicație: Unicitatea descompunerii unei latici în produs direct de lanțuri este valabilă pentru latici arbitrare, nu neapărat finite; ea rezultă din indecompozabilitatea lanțurilor arbitrare (nu neapărat finite) raportat la produsul direct de poseturi. Dar se poate demonstra, ca și la punctul (a), de altfel, utilizând definițiile pe componente ale operațiilor unei structuri algebrice produs direct, că, dacă măcar unul dintre lanțurile din familia $(T_i)_{i\in I}$ nu este mărginit, atunci laticea distributivă $\prod_{i\in I} T_i$ nu este mărginită, iar, dacă toate lanțurile din familia $(T_i)_{i\in I}$ sunt mărginite, atunci laticea distributivă mărginită $\prod_{i\in I} T_i$ nu este complementată, adică are elemente fără complement.

Exercițiu (temă)

Fie $(B,\vee,\wedge,\bar{\cdot},\leq,0,1)$ o algebră Boole, iar $\leftrightarrow$ echivalența booleană a lui B. Să se demonstreze că $(B,\leftrightarrow)$ este un grup abelian, cu elementul neutru 1, în care inversul fiecărui $x\in B$ față de $\leftrightarrow$ este x.

Proprietăți aritmetice ale oricărei algebre Boole

În exercițiile următoare, vom folosi notațiile clasice pentru operațiile, relația de ordine și operațiile derivate ale unei algebre Boole, iar algebrele Boole vor fi desemnate prin mulțimile lor de elemente. Să ne amintim că, în algebrele Boole complete, disjuncțiile familiilor arbitrare de elemente sunt supremumurile acelor familii, iar conjuncțiile familiilor arbitrare de elemente sunt infimumurile acelor familii.

Exercițiu (temă)

Fie B o algebră Boole, iar $a, b, c \in B$. Să se demonstreze că:

- $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$ și $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$ (vezi generalizare în exercițiul următor);
- $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$ și $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \vee (a \to c)$ (vezi generalizare în exercițiul următor);
- $a \to b = \overline{b} \to \overline{a}$;
- $a \leq b$ implică $c \to a \leq c \to b$ și $b \to c \leq a \to c$;
- $(a \to b) \wedge (b \to c) \leq a \to c$.

Proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole complete

Exercițiu (temă)

Fie B o algebră Boole **completă**, $a, b \in B$, I și J mulțimi arbitrare, iar $(a_i)_{i \in I} \subseteq B$, $(b_j)_{j \in J} \subseteq B$. Să se demonstreze că în B au loc:

- **legile de distributivitate generalizate:** dacă $I \neq \emptyset$ și $J \neq \emptyset$, atunci:
  $a \wedge (\bigvee_{j \in J} b_j) = \bigvee_{j \in J} (a \wedge b_j)$ și $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge (\bigvee_{j \in J} b_j) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} (a_i \wedge b_j)$;
  $a \vee (\bigwedge_{j \in J} b_j) = \bigwedge_{j \in J} (a \vee b_j)$ și $(\bigwedge_{i \in I} a_i) \vee (\bigwedge_{j \in J} b_j) = \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (a_i \vee b_j)$;
- **legile lui de Morgan generalizate:**
  $\overline{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigwedge_{i \in I} \overline{a_i}$ și $\overline{\bigwedge_{i \in I} a_i} = \bigvee_{i \in I} \overline{a_i}$;
- următoarele proprietăți: dacă $I \neq \emptyset$ și $J \neq \emptyset$, atunci:
  $(\bigvee_{i \in I} a_i) \rightarrow b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \rightarrow b)$ și $(\bigwedge_{i \in I} a_i) \rightarrow b = \bigvee_{i \in I} (a_i \rightarrow b)$;
  $a \rightarrow (\bigvee_{j \in J} b_j) = \bigvee_{j \in J} (a \rightarrow b_j)$ și $a \rightarrow (\bigwedge_{j \in J} b_j) = \bigwedge_{j \in J} (a \rightarrow b_j)$.

Care dintre egalitățile de la ultimul punct sunt valabile și pentru $I = \emptyset$, $J = \emptyset$?