

Operații cu Familii Arbitrare de Mulțimi

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Material facultativ

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro

2024–2025, Semestrul II

Vom demonstra distributivitatea produsului cartezian față de intersecție și reuniune. Pentru intuiție, vom trata la început cazul finit, cu toate că nu este necesar pentru demonstrarea cazului general și, desigur, rezultă din acesta.

Remarca 1 (proprietăți din TEMELE COLECTIVE OBLIGATORII). Fie A, B, C mulțimi. Atunci:

$$\textcircled{1} A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \text{ și } (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A);$$

$$\textcircled{2} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \text{ și } (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A).$$

Exercițiul 2. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ și $(A_{i,j})_{i \in \overline{1,n}, j \in \overline{1,k}}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

$$\textcircled{1} (A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \dots \cap A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \dots \cap A_{2,k}) \times \dots \times (A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \dots \cap A_{n,k}) = (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \dots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \dots \times A_{n,2}) \cap \dots \cap (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \dots \times A_{n,k});$$

$$\textcircled{2} (A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup \dots \cup A_{2,k}) \times \dots \times (A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup \dots \cup A_{n,k}) = \bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_n=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{n,j_n}) = \bigcup_{j_1 \in \overline{1,k}, \dots, j_n \in \overline{1,k}} (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{n,j_n}) = \bigcup_{j_1 \in \overline{1,k}, \dots, j_n \in \overline{1,k}} \prod_{i=1}^n A_{i,j_i} = \bigcup_{(j_1, \dots, j_n) \in (\overline{1,k})^n} \prod_{i=1}^n A_{i,j_i},$$

unde la punctul $\textcircled{2}$ avem de demonstrat prima egalitate, iar ultimele 3 egalități sunt scrieri alternative ale membrului drept al primeia.

Rezolvare: A se observa că, în enunțul de mai sus, am folosit asociativitatea produsului cartezian, a intersecției și a reuniunii pentru a scrie fără a paranteza termenii acestor operații doi câte doi.

$\textcircled{1}$ O demonstrație directă este cea mai simplă aici.

În următoarele echivalențe, când scot domeniul valorilor pentru variabilele cuantificate de sub cuantificatori, aplic proprietatea că, dacă un enunț cuantificat este legat printr-un conector logic de un enunț p care nu depinde de variabila cuantificată, atunci domeniul cuantificatorului poate fi extins peste conectorul logic și enunțul p ; așadar, pentru orice mulțimi M, N și orice enunțuri $p(x)$ care depinde numai de variabila x și $q(y)$ care depinde numai de variabila y , avem, ținând seama și de asociativitatea conjuncției logice: $(\exists x \in M) (\exists y \in N) (p(x) \text{ și } q(y))$ ddacă $(\exists x \in M) (\exists y) (y \in N \text{ și } p(x) \text{ și } q(y))$ ddacă $(\exists x) [x \in M \text{ și } (\exists y) (y \in N \text{ și } p(x) \text{ și } q(y))]$ ddacă $(\exists x) (\exists y) (x \in M \text{ și } y \in N \text{ și } p(x) \text{ și } q(y))$. Această proprietate se poate aplica succesiv; o voi aplica direct pentru toate variabilele.

Fie a arbitrar, fixat. Au loc, conform definiției produsului direct, a intersecției și a reuniunii, precum și proprietății de mai sus și asociativității și comutativității conjuncției logice:

$a \in (A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \dots \cap A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \dots \cap A_{2,k}) \times \dots \times (A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \dots \cap A_{n,k})$ ddacă $(\exists a_1 \in A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \dots \cap A_{1,k}) (\exists a_2 \in A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \dots \cap A_{2,k}) \dots (\exists a_n \in A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \dots \cap A_{n,k}) (a = (a_1, a_2, \dots, a_n))$ ddacă $(\exists a_1) (\exists a_2) \dots (\exists a_n) (a_1 \in A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \dots \cap A_{1,k} \text{ și } a_2 \in A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \dots \cap A_{2,k} \text{ și } \dots \text{ și } a_n \in A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \dots \cap A_{n,k} \dots \text{ și } a = (a_1, a_2, \dots, a_n))$ ddacă $(\exists a_1) (\exists a_2) \dots (\exists a_n) (a_1 \in A_{1,1} \text{ și } a_1 \in A_{1,2} \text{ și } \dots \text{ și } a_1 \in A_{1,k} \text{ și } a_2 \in A_{2,1} \text{ și } a_2 \in A_{2,2} \text{ și } \dots \text{ și } a_2 \in A_{2,k} \text{ și } \dots \text{ și } a_n \in A_{n,1} \text{ și } a_n \in A_{n,2} \text{ și } \dots \text{ și } a_n \in A_{n,k} \text{ și } a = (a_1, a_2, \dots, a_n))$ ddacă $(\exists a_1) (\exists a_2) \dots (\exists a_n) (a_1 \in A_{1,1} \text{ și } a_2 \in A_{2,1} \text{ și } \dots \text{ și } a_n \in A_{n,1} \text{ și } a_1 \in A_{1,2} \text{ și } a_2 \in A_{2,2} \text{ și } \dots \text{ și } a_n \in A_{n,2} \text{ și } \dots \text{ și } a_1 \in A_{1,k} \text{ și } a_2 \in A_{2,k} \text{ și } \dots \text{ și } a_n \in A_{n,k} \text{ și } a = (a_1, a_2, \dots, a_n))$ ddacă $(\exists a_1) (\exists a_2) \dots (\exists a_n) ((a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_{1,1} \times A_{2,1} \times \dots \times A_{n,1} \text{ și } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_{1,2} \times A_{2,2} \times \dots \times A_{n,2} \text{ și } \dots \text{ și } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_{1,k} \times A_{2,k} \times \dots \times A_{n,k} \text{ și } a = (a_1, a_2, \dots, a_n))$ ddacă $(\exists a_1) (\exists a_2) \dots (\exists a_n) ((a_1, a_2, \dots, a_n) \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \dots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \dots \times A_{n,2}) \cap \dots \cap (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \dots \times A_{n,k}) \text{ și } a = (a_1, a_2, \dots, a_n))$ ddacă $(\exists (a_1, a_2, \dots, a_n)) ((a_1, a_2, \dots, a_n) \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \dots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \dots \times A_{n,2}) \cap \dots \cap (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \dots \times A_{n,k}))$ ddacă $(\exists (a_1, a_2, \dots, a_n)) ((a_1, a_2, \dots, a_n) \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \dots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \dots \times A_{n,2}) \cap \dots \cap (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \dots \times A_{n,k}))$ ddacă $a \in (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \dots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \dots \times A_{n,2}) \cap \dots \cap (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \dots \times A_{n,k})$.

Așadar $(A_{1,1} \cap A_{1,2} \cap \dots \cap A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cap A_{2,2} \cap \dots \cap A_{2,k}) \times \dots \times (A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \dots \cap A_{n,k}) = (A_{1,1} \times A_{2,1} \times \dots \times A_{n,1}) \cap (A_{1,2} \times A_{2,2} \times \dots \times A_{n,2}) \cap \dots \cap (A_{1,k} \times A_{2,k} \times \dots \times A_{n,k})$.

② Aici putem proceda prin inducție, folosind punctul ② din Remarca 1.

Fie A o mulțime, și, pentru fiecare $m \in \mathbb{N}^*$, A_m o mulțime. Demonstrăm că, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $A \times (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = (A \times A_1) \cup (A \times A_2) \cup \dots \cup (A \times A_m)$ și $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \times A = (A_1 \times A) \cup (A_2 \times A) \cup \dots \cup (A_m \times A)$.

$m = 1$: În mod trivial, $A \times A_1 = A \times A_1$ și $A_1 \times A = A_1 \times A$.

$m \mapsto m + 1$: Fie $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A \times (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = (A \times A_1) \cup (A \times A_2) \cup \dots \cup (A \times A_m)$ și $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \times A = (A_1 \times A) \cup (A_2 \times A) \cup \dots \cup (A_m \times A)$.

Conform punctului ② din Remarca 1, asociativității reuniunii și ipotezei de inducție, avem:

$$A \times (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup A_{m+1}) = A \times [(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cup A_{m+1}] = [A \times (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m)] \cup (A \times A_{m+1}) = (A \times A_1) \cup (A \times A_2) \cup \dots \cup (A \times A_m) \cup (A \times A_{m+1});$$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup A_{m+1}) \times A = [(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cup A_{m+1}] \times A = [(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \times A] \cup (A_{m+1} \times A) = (A_1 \times A) \cup (A_2 \times A) \cup \dots \cup (A_m \times A) \cup (A_{m+1} \times A).$$

Raționamentul prin inducție matematică după $m \in \mathbb{N}^*$ este încheiat.

Acum demonstrăm, tot prin inducție, că, pentru fiecare $s \in \overline{1, n}$, $(A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup \dots \cup A_{2,k}) \times \dots \times (A_{s,1} \cup A_{s,2} \cup \dots \cup A_{s,k}) = \bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s})$.

$s = 1$: În mod trivial, $A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,k} = \bigcup_{j_1=1}^k A_{1,j_1}$.

$s \mapsto s + 1$: Fie $s \in \overline{1, n-1}$ astfel încât $(A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup \dots \cup A_{2,k}) \times \dots \times (A_{s,1} \cup A_{s,2} \cup \dots \cup A_{s,k}) = \bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s})$.

Conform asociativității produsului cartezian, egalităților de mai sus demonstrate prin primul raționament prin inducție și comutativității reuniunii, care permite permutarea reuniunilor la final, avem:

$$\begin{aligned} & (A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup \dots \cup A_{2,k}) \times \dots \times (A_{s,1} \cup A_{s,2} \cup \dots \cup A_{s,k}) \times (A_{s+1,1} \cup A_{s+1,2} \cup \dots \cup A_{s+1,k}) = [(A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup \dots \cup A_{2,k}) \times \dots \times (A_{s,1} \cup A_{s,2} \cup \dots \cup A_{s,k})] \times \\ & (A_{s+1,1} \cup A_{s+1,2} \cup \dots \cup A_{s+1,k}) = \left[\bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s}) \right] \times (A_{s+1,1} \cup A_{s+1,2} \cup \dots \cup A_{s+1,k}) = \\ & \left[\left(\bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s}) \right) \times A_{s+1,1} \right] \cup \left[\left(\bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s}) \right) \times A_{s+1,2} \right] \cup \dots \\ & \cup \left[\left(\bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s}) \right) \times A_{s+1,k} \right] = \left[\bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s} \times A_{s+1,1}) \right] \cup \\ & \left[\bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s} \times A_{s+1,2}) \right] \cup \dots \cup \left[\bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s} \times A_{s+1,k}) \right] = \\ & \bigcup_{j_{s+1}=1}^k \bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s} \times A_{s+1,j_{s+1}}) = \bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_s=1}^k \bigcup_{j_{s+1}=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{s,j_s} \times A_{s+1,j_{s+1}}). \end{aligned}$$

Al doilea raționament prin inducție este încheiat. Așadar $(A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,k}) \times (A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup \dots \cup A_{2,k}) \times \dots \times (A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup \dots \cup A_{n,k}) = \bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_n=1}^k (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{n,j_n})$.

Remarca 3 (proprietăți din TEMELE COLECTIVE OBLIGATORII). Fie A o mulțime, I o mulțime nevidă (de fapt, poate fi și vidă), iar $(B_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Atunci:

$$\textcircled{1} \quad A \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \times B_i) \text{ și } \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) \times A = \bigcap_{i \in I} (B_i \times A);$$

$$\textcircled{2} \quad A \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i) \text{ și } \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \times A = \bigcup_{i \in I} (B_i \times A).$$

Fie J o mulțime nevidă (de fapt, poate fi și vidă), $n \in \mathbb{N}^*$ și $(A_{i,j})_{i \in \overline{1,n}, j \in J}$ o familie de mulțimi.

Din egalitățile ② din Remarca 3 rezultă, prin inducție matematică, la fel ca la punctul ② din Exercițiul 4, că:

$$\left(\bigcup_{j \in J} A_{1,j} \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} A_{2,j} \right) \times \dots \times \left(\bigcup_{j \in J} A_{n,j} \right) = \bigcup_{j_1 \in J} \bigcup_{j_2 \in J} \bigcup_{j_n \in J} (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{n,j_n}) = \bigcup_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in J^n} (A_{1,j_1} \times A_{2,j_2} \times \dots \times A_{n,j_n}).$$

Similar, o generalizare a egalităților ① din Remarca 3 este: $\left(\bigcap_{j \in J} A_{1,j} \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} A_{2,j} \right) \times \dots \times \left(\bigcap_{j \in J} A_{n,j} \right) =$

$$\bigcap_{j \in J} (A_{1,j} \times A_{2,j} \times \dots \times A_{n,j}).$$

Exercițiul 4 (distributivitatea generalizată a produsului cartezian față de reuniune și intersecție – generalizare a proprietăților de distributivitate din exercițiul precedent). Fie I și J o mulțimi nevide (de fapt, cel mult una dintre ele poate fi și vidă), iar $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ o familie de mulțimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă și sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$). Să se demonstreze că:

$$\textcircled{1} \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j};$$

$$\textcircled{2} \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i}.$$

Rezolvare: Fie a arbitrar, fixat.

① $a \in \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j}$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j}) (a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(\forall i \in I) (a_i \in \bigcap_{j \in J} A_{i,j}) \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(\forall i \in I) (\forall j \in J) (a_i \in A_{i,j}) \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(\forall j \in J) ((a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_{i,j}) \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(a_i)_{i \in I} \in \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j} \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) (\bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}) (a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $a \in \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$. Așadar $\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{j \in J} \prod_{i \in I} A_{i,j}$.

② $a \in \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}) (a = (a_i)_{i \in I})$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(\forall i \in I) (a_i \in \bigcup_{j \in J} A_{i,j}) \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(\forall i \in I) (\exists j_i \in J) (a_i \in A_{i,j_i}) \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă (aici a se observa că au loc ambele implicații) $(\exists (a_i)_{i \in I}) [(\exists (j_i)_{i \in I} \in J^I) ((a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_{i,j_i}) \text{ și } a = (a_i)_{i \in I}]$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) ((a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i})$ și $a = (a_i)_{i \in I}$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) ((a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i})$ și $a = (a_i)_{i \in I}$ ddacă $(\exists (a_i)_{i \in I}) ((a_i)_{i \in I} \in \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i})$ ddacă $a \in \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i}$. Așadar $\prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{(j_i)_{i \in I} \in J^I} \prod_{i \in I} A_{i,j_i}$.