

Breviar rezumativ* pentru partea teoretică a cursului de LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Claudia MUREȘAN

cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro

Universitatea din București, Facultatea de Matematică și Informatică

~ ANUL I DE STUDIU AL CICLULUI DE LICENȚĂ, SEMESTRUL II ~

CUPRINSUL CURSULUI DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulțimi, funcții și relații. Relații binare. Relații de echivalență
- Relații de ordine. Mulțimi (parțial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre și congruențe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone (*algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrelor Boole*). Structura algebrelor Boole finite

Capitolul 2: Logica propozițională clasică:

- Sintaxa (*o primă prezentare pentru logica propozițională clasică: sistemul Hilbert*)
- Algebra Lindenbaum–Tarski (*o algebră Boole asociată logicii propoziționale clasice*)
- Semantica (*calculul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente: $0 = \text{fals}$, $1 = \text{adevărat}$*)
- Teorema de completitudine (*deducția sintactică, coincide cu deducția semantică*)
- Rezoluția propozițională (*echivalentă cu sistemul Hilbert*)
- Deducția naturală (*echivalentă cu sistemul Hilbert*)

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor (*predicat \equiv propoziție cu variabile*):

- Structuri de ordinul I (*structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate*)
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine (*deducția sintactică, coincide cu deducția semantică*)
- Rezoluția în logica clasică a predicatelor

*Acest breviar nu conține toate noțiunile și proprietățile care apar în cursul de Logică Matematică și Computațională, dar, în forma sa finală, le va conține (sau referi prin trimiteri la curs) pe cele principale, pe care este foarte important să le rețineți, din partea teoretică, matematică, a acestui curs.

Varianța curentă a acestui breviar va fi actualizată periodic; la fel pentru breviarele mai extinse pentru capitolele/secțiunile cursului.

Vă recomand să folosiți acest rezumat pentru a vă ghida învățarea la acest curs, iar, înainte de examen, să printați versiunea sa curentă, alături de versiunile curente ale breviarelor mai extinse.

Vom folosi notația “dacă” drept prescurtare pentru sintagma “dacă și numai dacă”.

Amintesc abrevierea “i. e.” (“id est”), semnificând “adică”.

Vom nota cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulțimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \dots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintesc abrevierea $\exists!$, cu semnificația “există și este unic”; $\exists!$ **nu** este un cuantificator.

Denumiri alternative:

- *algebră* \equiv *structură algebrică*;
- *mulțime factor* \equiv *mulțime cât*;
- *relație de ordine* \equiv *relație de ordine parțială*;
- *relație de ordine totală* \equiv *relație de ordine liniară*;
- *relație de succesiune* \equiv *relație de acoperire*;
- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) \equiv *mulțime parțial ordonată* \equiv *mulțime ordonată* (i. e. mulțime înzestrată cu o relație de ordine pe ea);
- *lanț* \equiv *mulțime liniar ordonată* \equiv *mulțime total ordonată*;
- *funcție izotonă* \equiv *funcție care păstrează ordinea* \equiv *funcție crescătoare*;
- *funcție antitonă* \equiv *funcție care inversează ordinea* \equiv *funcție descrescătoare*;
- *algebră Boole* \equiv *algebră booleană*;
- *morfism boolean* \equiv *morfism de algebre Boole*;
- *filtru maximal* \equiv *ultrafiltru*.

Noțiuni generice:

- dacă o structură algebrică \mathcal{A} are *mulțimea subiacentă* (i. e. *mulțimea suport*, adică mulțimea elementelor) A și este înzestrată cu un set de operații și relații, atunci o *structură algebrică subiacentă a lui \mathcal{A}* este o structură algebrică având tot mulțimea suport A și o parte dintre operațiile și relațiile structurii algebrice \mathcal{A} ;
- un *morfism de structuri algebrice* este o funcție între mulțimile suport a două structuri algebrice de același tip care comută cu operațiile acelor structuri algebrice;
- un *izomorfism de structuri algebrice* este un morfism inversabil între două algebre de același tip, i. e. un morfism care este o funcție inversabilă (deci bijectivă) și a cărei inversă este tot un morfism între acele algebre;
- o *subalgebră* a unei algebre \mathcal{A} este o submulțime S a mulțimii suport a lui \mathcal{A} închisă la operațiile algebrei \mathcal{A} ; S devine astfel algebră de același tip cu \mathcal{A} cu *operațiile induse* pe S de operațiile lui \mathcal{A} , i. e. restricțiile operațiilor algebrei \mathcal{A} la mulțimea S ; dacă \mathcal{A} este înzestrată și cu o relație, atunci restricția acesteia la S se numește *relația indusă* de aceasta pe S ;
- o *congruență* a unei algebre \mathcal{A} este o relație de echivalență (a se vedea mai jos) pe mulțimea suport a lui \mathcal{A} compatibilă cu operațiile algebrei \mathcal{A} , ceea ce permite ca mulțimea factor (a se vedea mai jos) a mulțimii subiacente lui \mathcal{A} prin acea relație de echivalență să fie organizată în mod canonic ca algebră de același tip cu \mathcal{A} .

Urmează definiții, notații și rezultate din acest curs.

- Se folosește următoarea convenție: dacă o mulțime A este suportul unei structuri algebrice \mathcal{A} , atunci prin A vom înțelege deopotrivă mulțimea A și structura algebrică \mathcal{A} , în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* dacă mulțimea ei suport este nevidă, respectiv finită;

1 Capitolul 1: Preliminarii algebrice

- Pentru orice mulțimi A și B , vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecție cu B ;
- notăm cu \mathcal{Set} clasa tuturor mulțimilor;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $|A|$ cardinalul lui A : $|A| = \{B \in \mathcal{Set} \mid A \cong B\}$, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulțimea părților lui A);
- pentru orice $A, B \in \mathcal{Set}$, avem:
 $|A| = |B|$ dacă $A \cong B$;
 $|A| \leq |B|$ dacă există o funcție injectivă $i : A \rightarrow B$ dacă există o funcție surjectivă $s : B \rightarrow A$;
 $|A| < |B|$ dacă nu există o funcție injectivă $j : B \rightarrow A$ dacă nu există o funcție surjectivă $t : A \rightarrow B$;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulțimi*; aici, produsul direct al unei mulțimi cu ea însăși; în general, notăm cu $A^1 = A$ și cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulțimi* (se definește și A^0 , care este un singleton, i. e. o mulțime cu un singur element);
- pentru orice mulțimi A, I, J și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, notăm:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\} = \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\};$$

$$A^I = \prod_{i \in I} A = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A)\} = \{f \mid f : I \rightarrow A\} \stackrel{not.}{=} A^{|I|}, \text{ pentru că } |I| = |J| \implies |A^I| = |A^J|;$$
conform notației anterioare, $A^0 = A^{|\emptyset|} = A^\emptyset = \{f \mid f : \emptyset \rightarrow A\} = \{(\emptyset, \emptyset, A)\}$;
a se vedea, în curs, și produsele directe de structuri algebrice, precum și puterile unei structuri algebrice;
- pentru orice mulțime A , o *relație binară pe A* este o submulțime a lui A^2 ;
- dacă A este o mulțime și $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \rho b$ și se citește *a este în relația ρ cu b* ;
- pentru orice mulțime A , se notează cu Δ_A relația binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ și numită *diagonala lui A* ; Δ_A este relația de **egalitate** pe A : pentru orice $a, b \in A$, avem: $a \Delta_A b$ dacă $a = b$;
- pentru orice mulțime A , se notează cu id_A *funcția identică a lui A* , i. e. funcția $id_A : A \rightarrow A$ definită prin: $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$; ca relație binară pe A , id_A coincide cu Δ_A ;

- o relație binară ρ pe o mulțime A se zice:

- ①. *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \rho x$;
- ②. *ireflexivă* ddacă nu există $x \in A$ cu proprietatea că $x \rho x$;
- ③. *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $y \rho x$;
- ④. *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho x$, atunci $x = y$;
- ⑤. *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \rho y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
- ⑥. *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \rho y$ și $y \rho z$, atunci $x \rho z$;

- o relație binară ρ pe o mulțime A se numește:

- ①. (*relație de*) *preordine* ddacă este reflexivă și tranzitivă;
- ②. (*relație de*) *echivalență* ddacă este o preordine simetrică;
- ③. (*relație de*) *ordine (parțială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
- ④. (*relație de*) *ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relație de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \rho y$ sau $y \rho x$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definește *inversa lui ρ* ca fiind relația binară pe A notată cu ρ^{-1} și dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A și orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;

- pentru orice relații binare ρ și σ pe o mulțime A , avem:

- ①. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
- ②. $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
- ③. $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcup_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
- ④. $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A , $(\bigcap_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecției cu inversarea);

- pentru orice mulțime A și orice relații binare ρ și σ pe A , compunerea dintre relațiile binare ρ și σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ și se definește astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists b \in A) ((a, b) \in \sigma \text{ și } (b, c) \in \rho)\}$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ și, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$;

- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:

- ①. ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
- ②. ρ este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$;
- ③. ρ este simetrică ddacă $\rho \subseteq \rho^{-1}$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \rho$ ddacă $\rho = \rho^{-1}$;
- ④. ρ este antisimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- ⑤. ρ este asimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$;
- ⑥. ρ este tranzitivă ddacă $\rho^2 = \rho \circ \rho \subseteq \rho$;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , se numește *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui ρ* cea mai mică (în sensul incluziunii) relație binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ ;

- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A , *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui ρ* se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relație binară ρ pe o mulțime A , au loc echivalențele:
 - ①. ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
 - ②. ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
 - ③. ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;
- pentru orice relație binară ρ pe o mulțime A :
 - ①. $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
 - ②. $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
 - ③. $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;
- pentru orice mulțime nevidă A , o *partiție a lui A* este o familie nevidă de părți nevide ale lui A două câte două disjuncte și având reuniunea egală cu A ; vom nota mulțimea partițiilor lui A cu $\text{Part}(A)$;
- pentru orice mulțime A , notăm cu $\text{Eq}(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe A ;
- pentru orice mulțime A , dacă $\sim \in \text{Eq}(A)$, atunci, oricare ar fi $x \in A$, se definește *clasa de echivalență a lui x în raport cu \sim* ca fiind mulțimea elementelor lui A care sunt în relația \sim cu x ; pentru orice $x \in A$, se notează cu x/\sim sau cu \hat{x} clasa de echivalență a lui x în raport cu \sim , i. e.: $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ (are loc a doua egalitate pentru că \sim , fiind relație de echivalență, în particular este simetrică);
- pentru orice mulțime A și orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, se notează cu A/\sim *mulțimea factor* (sau *cât*) *a lui A prin \sim* , i. e. mulțimea claselor de echivalență ale relației de echivalență \sim : $A/\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ (A/\sim se obține prin “împărțirea” lui A în clasele de echivalență ale lui \sim); A/\sim este o partiție a lui A ;
- pentru orice mulțime nevidă A , $\text{Eq}(A) \cong \text{Part}(A)$, întrucât funcția $\varphi : \text{Eq}(A) \rightarrow \text{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\sim$ pentru orice $\sim \in \text{Eq}(A)$, este o bijecție; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulțime $I \neq \emptyset$ și orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \text{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relația de echivalență pe A care are drept clase mulțimile A_i , cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$, adică: $x \sim y$ ddacă x și y se află într-o aceeași mulțime din familia $(A_i)_{i \in I}$;
- un *poset* este o mulțime înzestrată cu o relație de ordine;
 dacă (P, \leq) este un poset (cu mulțimea suport P , înzestrată cu relația de ordine \leq), iar $x, y \in P$, atunci:
 spunem că x și y sunt *comparabile* ddacă $x \leq y$ sau $y \leq x$;
 notăm cu $x||y$ faptul că x și y sunt *incomparabile*, i.e. $x \not\leq y$ și $y \not\leq x$;
 un *lanț* este o mulțime înzestrată cu o relație de ordine totală, i.e. un poset în care oricare două elemente sunt comparabile;

- pentru orice poset (P, \leq) , notăm cu $<$ *relația de ordine strictă asociată lui \leq* , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $< = \leq \setminus \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$ (și avem $\leq = < \cup \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b \text{ sau } a = b\}$), și cu \prec *relația de succesiune asociată lui \leq* , i. e. relația binară pe mulțimea P definită prin: $\prec = \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists x \in P) (a < x < b)\}$; muchiile din diagrama Hasse a unui poset finit sunt date de perechile din relația de succesiune (a se vedea în curs noțiunea de *diagramă Hasse* și construcția pentru diagrama Hasse a unui produs direct, a unei sume directe, respectiv a unei sume ordinale de poseturi finite);
- inversa unei relații de ordine notate \leq se notează, uzual, cu \geq : $\geq = \leq^{-1}$; avem, de asemenea, notațiile uzuale: $> = <^{-1}$ și $\succ = \prec^{-1}$; dualul unui poset (P, \leq) este posetul (P, \geq) , având relația de ordine strictă $>$ și relația de succesiune \succ ;
- o *funcție izotonă* între două poseturi (P, \leq) și (Q, \leq) este o funcție $f : P \rightarrow Q$, cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in P$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$; un *izomorfism de poseturi* este o funcție izotonă bijectivă și cu inversa izotonă între acele poseturi;
- o *funcție antitonă* între două poseturi este o funcție izotonă între unul dintre acele poseturi și dualul celuilalt;
- pentru orice n natural nenul, notăm cu \mathcal{L}_n lanțul cu n elemente și cu L_n mulțimea suport a lui \mathcal{L}_n ; \mathcal{L}_n este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. între oricare două lanțuri cu n elemente există un izomorfism de poseturi;
- dacă (P, \leq) este un poset și $S \subseteq P$, atunci:
 - $\leq \cap S^2$ se notează tot cu \leq și este o relație de ordine pe S , numită *relația de ordine indusă pe S* de relația de ordine \leq de pe P ; (S, \leq) se numește *subposet* al lui (P, \leq) ;
 - un *minorant* al lui S în (P, \leq) este un element $p \in P$ cu proprietatea că $(\forall s \in S) (p \leq s)$;
 - un *majorant* al lui S în (P, \leq) este un element $p \in P$ cu proprietatea că $(\forall s \in S) (p \geq s)$;
 - un *element minimal* al lui (S, \leq) este un element $s \in S$ cu proprietatea că s este minorant pentru mulțimea elementelor lui S comparabile cu s , sau, echivalent, $(\nexists x \in S) (s > x)$;
 - un *element maximal* al lui (S, \leq) este un element $s \in S$ cu proprietatea că s este majorant pentru mulțimea elementelor lui S comparabile cu s , sau, echivalent, $(\nexists x \in S) (s < x)$;
 - minimul* lui S , notat cu $\min(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este un minorant al lui S care aparține lui S ;
 - maximul* lui S , notat cu $\max(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este un majorant al lui S care aparține lui S ;
 - infimumul* lui S , notat cu $\inf(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este cel mai mare minorant al lui S : $\inf(S) = \max(N)$, unde N este mulțimea minoranților lui S ;
 - supremumul* lui S , notat cu $\sup(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este cel mai mic majorant al lui S : $\sup(S) = \min(M)$, unde M este mulțimea majoranților lui S ;
 - dacă există, $\min(P)$ se notează, de obicei, cu 0 ;
 - dacă există, $\max(P)$ se notează, de obicei, cu 1 ;
 - un *poset mărginit* este un poset cu minim și maxim;
 - dualul unui poset mărginit $(P, \leq, 0, 1)$ este posetul $(P, \geq, 1, 0)$;
- o *latice* este o structură algebrică (L, \vee, \wedge, \leq) , unde: \vee și \wedge sunt două operații binare pe mulțimea L (numite, respectiv, *disjuncție* și *conjuncție*, sau și *join* și *meet*), fiecare idempotentă, comutativă și asociativă, și care satisfac *absorbția*: $(\forall x, y \in L) (x \wedge (x \vee y) = x)$, sau, echivalent:

$(\forall x, y \in L) (x \vee (x \wedge y) = x)$, iar \leq este o relație de ordine pe L cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\}$ în posetul (L, \leq) ;

- în orice latice (L, \vee, \wedge, \leq) , pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc:

$x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$, precum și:

$x \wedge y = \inf\{x, y\}$ și $x \vee y = \sup\{x, y\}$,

așadar laticea (L, \vee, \wedge, \leq) este complet determinată:

atât de structura algebrică (L, \vee, \wedge) , numită *laticea Dedekind* subiacentă lui (L, \vee, \wedge, \leq) ,

cât și de posetul (L, \leq) , numit *laticea Ore* subiacentă lui (L, \vee, \wedge, \leq) ,

astfel că spunem că (L, \vee, \wedge) este laticea (L, \vee, \wedge, \leq) , și posetul (L, \leq) este laticea (L, \vee, \wedge, \leq) ;

- o *sublatice* a unei latici (L, \vee, \wedge, \leq) este o latice (S, \vee, \wedge, \leq) , unde $S \subseteq L$ este *închisă* la \vee și \wedge , i.e., pentru orice $x, y \in S$, au loc $x \vee y, x \wedge y \in S$, iar operațiile \vee, \wedge și relația \leq de pe S sunt *induse* de cele de pe L , adică sunt restricțiile acestora la S : $\vee|_S: S \times S \rightarrow S$, $\wedge|_S: S \times S \rightarrow S$ și $\leq \cap S^2$;
- o *latice mărginită* este o latice care este poset mărginit, i.e. o structură algebrică $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, unde (L, \vee, \wedge, \leq) este latice, iar $(L, \leq, 0, 1)$ este poset mărginit;
- o *latice completă* este un poset (L, \leq) cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq L$, există $\inf(S)$, sau, echivalent, pentru orice $S \subseteq L$, există $\sup(S)$ în (L, \leq) ;
- orice latice completă este latice mărginită; orice latice finită este latice completă, deci mărginită;
- o *sublatice mărginită* a unei latici mărginite $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o latice mărginită $(S, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, unde (S, \vee, \wedge, \leq) este sublatice a latici (L, \vee, \wedge, \leq) , iar $0, 1 \in S$ sunt minimul, respectiv maximul latici mărginite $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$;
- *duala unei latici* (L, \vee, \wedge, \leq) este laticea (L, \wedge, \vee, \geq) ; *duala unei latici mărginite* $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea mărginită $(L, \wedge, \vee, \geq, 1, 0)$;
- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ și $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ sunt două latici, atunci o funcție $f: L \rightarrow M$ este un *morfism de latici* între \mathcal{L} și \mathcal{M} ddacă, pentru orice $x, y \in L$, au loc:
$$\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ și} \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \end{cases}$$
- orice morfism de latici este o funcție izotonă, dar nu și reciproc;
- un *izomorfism de latici* este un morfism bijectiv de latici a cărui inversă este tot morfism de latici;
- izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici, precum și cu izomorfismele de poseturi între poseturile subiacente acelor latici;
- o *latice distributivă* este o latice (L, \vee, \wedge) care satisface: $(\forall x, y, z \in L) (x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$, sau, echivalent: $(\forall x, y, z \in L) (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$;
- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul (a se vedea în curs diagramele Hasse ale acestor latici);
- orice lanț este o latice distributivă, cu operațiile binare $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$ sunt două latici mărginite, atunci o funcție $f: L \rightarrow M$ este un *morfism de latici mărginite* între \mathcal{L} și \mathcal{M} ddacă f este morfism de latici de la (L, \vee, \wedge) la (M, \vee, \wedge) și $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$ sunt două latice mărginite, atunci orice morfism surjectiv de latice de la (L, \vee, \wedge) la (M, \vee, \wedge) este morfism de latice mărginite de la \mathcal{L} la \mathcal{M} ;
- într-o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ și} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puțin un complement;
- într-o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;
- o *latice mărginită complementată* este o latice mărginită \mathcal{L} cu proprietatea că orice element al lui \mathcal{L} este complementat în \mathcal{L} ;
- o *algebră Boole* este o structură algebrică $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o latice distributivă mărginită complementată, iar $\bar{\cdot} : B \rightarrow B$ este definită prin: oricare ar fi $x \in B$, \bar{x} este unicul complement al lui x în $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicația booleană*, \rightarrow , și *echivalența booleană*, \leftrightarrow , ca operații binare pe B , astfel: pentru orice $x, y \in B$:
 - ①. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$;
 - ②. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:
 - ①. $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$ și: $\bar{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\bar{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente);
 - ②. $\bar{\bar{x}} = x$;
 - ③. **legile lui de Morgan:** pentru orice $x, y \in B$, $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \text{ și} \\ \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \end{cases}$
 - ④. $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;
 - ⑤. $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;
- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ și $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci o funcție $f : A \rightarrow B$ este un *morfism de algebre Boole* între \mathcal{A} și \mathcal{B} ddacă, pentru orice $x, y \in A$, au loc:

$$\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ f(\bar{x}) = \overline{f(x)}, \\ f(0) = 0 \text{ și } f(1) = 1; \end{cases}$$
 un *izomorfism boolean* este un morfism boolean bijectiv cu inversa tot morfism boolean;
- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ și $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci:

orice morfism de latice mărginite de la $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ la $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ este morfism boolean de la \mathcal{A} la \mathcal{B} ;

orice izomorfism de latice (deci orice morfism bijectiv de latice) de la (A, \vee, \wedge) la (B, \vee, \wedge) este izomorfism boolean de la \mathcal{A} la \mathcal{B} ;
- algebra Boole \mathcal{L}_2 (lanțul cu 2 elemente) se numește *algebra Boole standard*;
- o *algebră Boole completă* este o algebră Boole a cărei latice subiacentă este completă;

- pentru orice mulțime A , $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole completă, în care, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\bar{X} = A \setminus X$, iar pentru orice $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, $\sup(S) = \bigcup S = \bigcup_{X \in S} X$ și $\inf(S) = \bigcap S =$

$$\bigcap_{X \in S} X;$$

- pentru orice mulțime A , algebra Boole $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este izomorfă cu \mathcal{L}_2^A (putere a algebrei Boole standard), întrucât următoarea funcție este un izomorfism boolean de la $\mathcal{P}(A)$ la \mathcal{L}_2^A :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{L}_2^A, \text{ pentru orice } S \in \mathcal{P}(A), \varphi(S) = \chi_S: \text{ funcția caracteristică a lui } S \text{ raportat la } A: \\ \chi_S : A &\rightarrow L_2^A = \{0, 1\}^A = \{f \mid f : A \rightarrow L_2 = \{0, 1\}\}, \text{ definită prin: pentru orice } a \in A, \\ \chi_S(a) &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } a \in S, \\ 0, & \text{dacă } a \notin S; \end{cases} \end{aligned}$$

- se numește *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulțime nevidă F a lui B închisă la conjuncție și la majorare, i. e. o mulțime F cu proprietățile:

- ①. $\emptyset \neq F \subseteq B$;
- ②. pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
- ③. pentru orice $x \in F$ și orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

mulțimea filtrelor lui \mathcal{B} se notează cu $\text{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conține elementul 1; $\{1\}$ se numește *filtrul trivial*, iar B *filtrul impropriu* al algebrei Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ și orice $a \in B$, mulțimea notată $[a] = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui \mathcal{B} , anume cel mai mic (în raport cu incluziunea) filtru al lui \mathcal{B} care îl conține pe a , numit *filtrul principal generat de a* ;
- elementele maximale ale posetului $(\text{Filt}(\mathcal{B}) \setminus \{B\}, \leq)$ al filtrelor proprii ale unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ se numesc *filtre maximale*, iar mulțimea acestora se notează cu $\text{Max}(\mathcal{B})$;
- se numește *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul (B, \leq) , adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$;

de exemplu, dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulțimea suport a lanțului cu 2 elemente, \mathcal{L}_2 , astfel că $L_2^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulțimea subiacentă a algebrei Boole \mathcal{L}_2^n , atunci atomii lui \mathcal{L}_2^n sunt $(0, 0, \dots, 0, 0, 1), (0, 0, \dots, 0, 1, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, 0, 0)$; mai general, pentru orice mulțime I , atomii algebrei Boole \mathcal{L}_2^I sunt familiile de cifre binare $(x_i)_{i \in I} \in L_2^I$ cu proprietatea că $(\exists! k \in I)(x_k = 1)$;

- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale; filtrele maximale ale unei algebre Boole finite sunt exact filtrele generate de câte un atom al acesteia;
- **Teorema de reprezentare a lui Stone:** pentru orice algebră Boole \mathcal{B} , există un morfism Boolean injectiv de la \mathcal{B} la algebra Boole $\mathcal{P}(\text{Max}(\mathcal{B}))$, așadar există un morfism Boolean injectiv de la \mathcal{B} la algebra Boole $\mathcal{L}_2^{\text{Max}(\mathcal{B})}$;

dacă algebra Boole \mathcal{B} este finită, atunci acest morfism Boolean injectiv este un izomorfism Boolean, așadar are loc:

Teorema de structură a algebrelor Boole finite: orice algebră Boole finită \mathcal{B} este izomorfă cu \mathcal{L}_2^n , unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui \mathcal{B} ;

- se numește *congruență a unei algebre Boole* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ o relație de echivalență \sim pe B care, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, satisface proprietățile:

- ①. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea lui \sim cu \vee**);
- ②. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea lui \sim cu \wedge**);
- ③. dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea lui \sim cu \neg**);

notăm cu $\text{Con}(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui \mathcal{B} ;

- referitor la definiția anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relații binare \sim pe B cu operațiile zeroare ale lui \mathcal{B} (i. e. constantele 0 și 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$, proprietăți care sunt satisfăcute nu numai de către orice relație de echivalență \sim pe B , ci chiar de către orice relație reflexivă \sim pe B ;
- mulțimea congruențelor unei algebre Boole \mathcal{B} este în bijecție cu mulțimea filtrelor lui \mathcal{B} ;
- dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, iar \sim este o congruență a lui \mathcal{B} , atunci mulțimea factor a lui B prin \sim se organizează ca algebră Boole astfel: dacă, oricare ar fi $a \in B$, notăm cu a/\sim clasa lui a în raport cu \sim , atunci, pentru orice $x, y \in B$, se definesc:

- ①. $x/\sim \vee y/\sim = (x \vee y)/\sim$,
- ②. $x/\sim \wedge y/\sim = (x \wedge y)/\sim$,
- ③. $\overline{x/\sim} = \overline{x}/\sim$,
- ④. $0 = 0/\sim$ și $1 = 1/\sim$;

faptul că \sim este o congruență a algebrei Boole \mathcal{B} arată că operațiile de mai sus sunt bine definite, i. e. nu depind de reprezentanții claselor; $(B/\sim, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ este o algebră Boole, numită *algebra Boole factor* (sau *cât*) a lui \mathcal{B} prin \sim .

2 Capitolul 2: Logica propozițională clasică – DEOCAMDATĂ ACEASTĂ SECȚIUNE A ACESTUI BREVIAR ESTE INCOMPLETĂ

- Notăm cu V mulțimea variabilelor calculului propozițional clasic;
- notăm cu E mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic;
- dată o *interpretare* în calculul propozițional clasic, i. e. o funcție $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operații booleene;
- se notează cu $h \models \varphi$, respectiv $h \models \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ *satisfacă un enunț* $\varphi \in E$, respectiv *o mulțime de enunțuri* $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunț φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propozițională clasică;
- se notează cu $\models \varphi$ faptul că un enunț φ este *universal adevărat* (*tautologie*, *adevăr semantic*) în logica propozițională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propozițională clasică;

- se notează cu $\Sigma \models \varphi$ faptul că un enunț $\varphi \in E$ este *deductibil semantic din ipotezele* $\Sigma \subseteq E$ în logica propozițională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface și pe φ);
- pentru orice enunț φ , $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, și $\models \varphi$ ddacă $\emptyset \models \varphi$;
- ca orice regulă de deducție scrisă în acest mod, regula de deducție **modus ponens** (abreviată **MP**) scrisă sub forma: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, are semnificația: $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$;
- pentru orice mulțime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \neg^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum–Tarski asociată mulțimii de ipoteze Σ pentru logica propozițională clasică, despre care știm că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \text{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi}^\Sigma \in E/\sim_\Sigma$ clasa unui enunț φ în E/\sim_Σ ;
- cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/\sim, \vee, \wedge, \leq, \neg, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \text{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi} \in E/\sim$ clasa unui enunț φ în E/\sim ;
- pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ în algebra booleană E/\sim_Σ (**lemă** din calculul propozițional clasic);
- caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalența: $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum–Tarski E/\sim ;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducției** pentru calculul propozițional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \models \varphi$ (**Teorema de completitudine** tare a calculului propozițional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numește **Teorema de completitudine** a calculului propozițional clasic (**TC**);
- mulțimea T a teoremelor formale ale logicii propoziționale clasice e satisfăcută de orice interpretare;
- o mulțime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ , anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conține toate enunțurile, adică $\Delta(\Sigma) \subsetneq E$;
- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncție de disjuncții de *literali*, adică elemente din $V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\gamma)$ pentru orice interpretare h ;
- un enunț φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\models \neg \varphi$, așadar $\vdash \neg \varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din φ ;
- un enunț φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluție a clauzei vide \square din φ .

3 Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor — VOI ADĂUGA AICI REZULTATELE PRINCIPALE DIN LOGICA CLASICĂ A PREDICATELOR

Pe lângă:

- Materialele mele de curs, seminar și laborator de Logică Matematică și Computațională, inclusiv cele cu exerciții de la consultații și examene, din folderul *Class Materials* de la tab-ul FILES al canalului GENERAL al **echipei MS Teams** a acestui curs, care se vor găsi și pe pagina acestui curs de pe serverul de cursuri **MoodleUB**.
- Articolele mele de logică (inclusiv cele cu probleme date la examenul de logică matematică și computațională) din *Revista de logică* a Profesorului Adrian Atanasiu, publicație online.
- Înregistrările din **Google drive** ale lecțiilor mele de Logică Matematică și Computațională și de Programare Logică de anul acesta și din anii anteriori, dintre care cele de anul acesta se găsesc și în folderul *Recordings* de la tab-ul FILES al canalului GENERAL al **echipei MS Teams** a acestui curs.

puteți folosi, pentru a aprofunda materia din acest curs:

Bibliografie

- [1] I. Bratko, *Prolog Programming for Artificial Intelligence*, Wokingham: Addison–Wesley, 1986 (PENTRU PARTEA DE PROGRAMARE ÎN PROLOG A ACESTUI CURS, CARE NU ESTE INCLUSĂ ÎN ACESTE BREVIARE).
- [2] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.
- [3] D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.
- [4] D. Bușneag, D. Piciu, *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, Craiova, 2003.
- [5] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București, 1974, 1975, 1976.
- [6] A. A. Fraenkel, Y. Bar–Hillel, A. Levy, *Foundations of Set Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. **67**, 1973.
- [7] J. Gallier, The Completeness of Propositional Resolution: a Simple and Constructive Proof, *Logical Methods in Computer Science* **2**(5:3) (2006), pg. 1-7.
- [8] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, București, 1978, disponibilă online (scanată).
- [9] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, București, 2010 – CARTEA CARE STĂ LA BAZA ACESTUI CURS, CU EXCEPȚIA REZOLUȚIEI PENTRU LOGICA CLASICĂ ȘI A PROGRAMĂRII ÎN PROLOG.
- [10] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, București, 1969.
- [11] G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*
 - traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică și Programare Logică*, Editura Tehnică, București, 1998.
- [12] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universității din București, 1982.
- [13] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulțimilor*, Editura Universității din București, 1996.