Logică Matematică şi Computaţională
Cursurile X, XI și XII

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2023–2024, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE D
8. Mulțimi consistente
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE *D*
8. Mulțimi consistente
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

- **Logica matematică** este o ramură a matematicii care se ocupă cu exprimarea formalizată (i. e. formală, simbolică) a legilor gândirii și studierea acestora cu mijloace matematice.
- Ne propunem să studiem **logica clasică**, în două forme ale ei: **logica clasică a propozițiilor** și **logica clasică a predicatelor** sau a **propozițiilor cu variabile**. Vom face deosebirea dintre aceste două tipuri de logică clasică mai târziu. Ambele sunt **logici bivalente**, adică operează cu doar două **valori de adevăr**: **fals** și **adevărat**.
- Așadar, în **logica clasică**, toate enunțurile (propozițiile, afirmațiile) sunt presupuse a fi **adevărate** sau **false**. Aceasta nu este o condiție trivială, nici măcar dacă eliminăm din discuție enunțurile interogative și pe cele exclamative, după cum ne amintim din primul curs, din exemplul cu enunțul subiectiv, precum și cel cu **paradoxul mincinosului:** să se determine dacă următoarea afirmație este **adevărată** sau **falsă**: *Această afirmație este falsă.*

- În acest curs vom începe studiul **logicii propoziționale clasice**.
- Vom studia **sistemul formal al calculului propozițional clasic** sub trei aspecte fundamentale:
  1. **sintaxa**, care se ocupă de limbajul formal al calculului propozițional clasic, i. e. de cadrul formal, de exprimarea în simboluri a obiectelor matematice cu care vom lucra;
  2. **algebra**, care asociază o structură algebrică sistemului formal descris în partea de sintaxă și folosește această asociere pentru a transfera proprietățile algebrice ale acelei structuri în proprietăți logice, și invers;
  3. **semantica**, aceasta fiind partea în care, pe baza structurii algebrice atașate logicii, se calculează efectiv **valorile de adevăr** ale enunțurilor (**fals** sau **adevărat**).
- Există și alte aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic, cum ar fi: aspectul **topologic**, cel **probabilist** etc., dar studierea lor depășeste cadrul și scopul acestui curs.
- Toate aceste aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic sunt denumite *dimensiuni ale sistemului logic*.

1 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?

2 Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice

3 Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice

4 Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice

5 Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

6 Semantica Logicii Propoziționale Clasice

7 Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE D

8 Mulțimi consistente

9 Rezoluția în calculul propozițional clasic

10 Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

11 Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Alfabetul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiții și notații

Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propozițional clasic:

1. *variabilele propoziționale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulțime infinită, și de obicei considerată numărabilă; vom nota cu V mulțimea variabilelor propoziționale;
2. *conectorii logici primitivi*:
   $\neg$: *negația* (se citește: "non" sau "not");
   $\rightarrow$: *implicația* (se citește: "implică");
3. parantezele: (,), [, și].

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* și sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivați*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, și care vor fi prezentați mai jos.

Să notăm cu A *alfabetul sistemului formal al calculului propozițional clasic*, adică mulțimea simbolurilor primitive: $A = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), [,]\}$.

Cuvintele peste alfabetul simbolurilor primitive

Definiție

Șirurile (alăturările) finite și nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Notație

Așadar *mulțimea cuvintelor* calculului propozițional clasic este mulțimea A^+ a cuvintelor finite și nevide peste alfabetul A:
$A^+ = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$.

Exemplu

$u \to \neg v$, $\neg (u \to \neg v) \to w$, $\to u \to\to uv\neg)$ sunt **cuvinte**.

Observație

Intuiția ne determină să conferim "înțeles" simbolurilor primitive, și ne spune că primele două cuvinte din exemplul anterior "au sens", în timp ce al treilea "nu are sens". Dintre cuvintele peste alfabetul definit mai sus, le vom selecta pe cele care "au sens", și le vom numi *enunțuri*. Urmează definiția lor riguroasă:

Cuvintele care “au sens“: enunțurile

Definiție

Un *enunț* este un cuvânt φ care satisface una dintre condițiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propozițională;
- (E_2) există un enunț ψ a. î. $\varphi = \neg\,\psi$;
- (E_3) există două enunțuri ψ și χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$;
- (E_4) orice enunț se obține prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3).

Definiție

Variabilele propoziționale se numesc *enunțuri atomice* sau *enunțuri elementare*. Enunțurile care nu sunt variabile propoziționale, adică se află în cazul (E_2) sau (E_3) din definiția anterioară, se numesc *enunțuri compuse*.

Notație

Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

Remarcă

Conform definiției enunțurilor, **toate enunțurile** se obțin prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), așadar E este cea mai mică mulțime de cuvinte peste A care include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, i. e. cea mai mică (în sensul incluziunii, adică în posetul $(\mathcal{P}(A^+), \subseteq)$) submulțime M a lui A^+ cu proprietățile:

1. $V \subseteq M$,
2. pentru orice $\varphi \in M$, rezultă că $\neg\varphi \in M$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in M$, rezultă că $\varphi \rightarrow \psi \in M$.

Într–adevăr, $V \subseteq E$, E este, conform definiției sale, închisă la negație și implicație și, prin inducție după lungimea unui enunț $\varphi \in E$ sau după numărul de conectori logici din φ (adică numărul de aplicări ale regulilor (E_2) și (E_3) prin care se obține φ pornind de la variabile propoziționale) sau după numărul de aplicări ale regulilor (E_1) și (E_2) prin care se obține φ (anume numărul de variabile propoziționale și conectori logici primitivi din φ) rezultă că E este inclusă în orice mulțime $M \subseteq A^+$ cu $V \subseteq M$ și astfel încât M e închisă la negație și implicație.
De exemplu, să procedăm prin inducție după numărul $n \in \mathbb{N}$ al conectorilor logici din cadrul unui enunț. Fie, așadar, $M \subseteq A^+$ astfel încât $V \subseteq M$ și M e închisă la negație și implicație. Demonstrăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, orice $\varphi \in E$ conținând n conectori logici primitivi (i.e. obținut prin n aplicări ale regulilor (E_2) și (E_3)) aparține lui M.

$\underline{n = 0}$: Dacă un enunț φ nu conține niciun conector logic, atunci φ este variabilă propozițională: $\varphi \in V \subseteq M$, deci $\varphi \in M$.
$\underline{n \in \mathbb{N} \longrightarrow n+1}$: Presupunem că $n \in \mathbb{N}$, astfel încât orice enunț format cu cel mult n conectori logici aparține lui M. Fie φ un enunț care conține $n+1 \geq 1$ conectori logici. Atunci φ nu este variabilă propozițională, așadar există $\psi \in E$ astfel încât $\varphi = \neg\,\psi$ sau există $\chi, \xi \in E$ astfel încât $\varphi = \chi \rightarrow \xi$. În primul caz enunțul ψ conține $n-1$ conectori logici, așadar $\psi \in M$ conform ipotezei de inducție, iar în al doilea caz fiecare dintre enunțurile χ, ξ conține cel mult $n-1$ conectori logici, așadar $\chi, \xi \in M$ conform ipotezei de inducție. M este închisă la negație și implicație, prin urmare $\varphi \in M$.
Cum toate cuvintele din A^+, așadar toate enunțurile $\varphi \in E$, sunt de lungime finită, deci conțin câte un număr finit de conectori logici, rezultă că $E \subseteq M$.

Notăm (ad–hoc) cu $\mathcal{M}$ mulțimea submulțimilor lui A^+ închise la conectorii logici primitivi (implicit la toți conectorii logici, după cum arată definițiile de mai jos ale celor derivați): $\mathcal{M} = \{M \subseteq A^+ \mid (\forall\,\psi, \chi \in M)\,(\neg\,\psi, \psi \rightarrow \chi \in M)\}$.

E este cea mai mică mulțime de cuvinte peste A închisă la conectorii logici care include pe V

Remarcă

$\mathcal{M}$ este sistem de închidere (i.e. familie Moore) pe $\mathcal{P}(A^+)$.
Într–adevăr, $A^+ \in \mathcal{M}$, iar, dacă I este o mulțime nevidă și $(M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}$, atunci, pentru orice $\psi, \chi \in \bigcap\limits_{i \in I} M_i$, avem, pentru fiecare $i \in I$, $\psi, \chi \in M_i$, așadar $\neg\psi, \psi \rightarrow \chi \in M_i$, prin urmare $\neg\psi, \psi \rightarrow \chi \in \bigcap\limits_{i \in I} M_i$, așadar $\bigcap\limits_{i \in I} M_i \in \mathcal{M}$.

Notăm cu $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(A^+) \rightarrow \mathcal{P}(A^+)$ operatorul de închidere asociat lui $\mathcal{M}$.

Remarcă (E e închiderea lui V în familia Moore a submulțimilor lui A^+ închise la $\neg$ și $\rightarrow$)

Conform primei remarci din această secțiune, $V \subseteq E$, $E \in \mathcal{M}$ și, pentru orice $M \in \mathcal{M}$ cu $V \subseteq M$, rezultă că $E \subseteq M$, adică E este mai mică decât M în sensul incluziunii, așadar E este cel mai mic membru al familiei Moore $\mathcal{M}$ care include pe V, adică: $E = C_{\mathcal{M}}(V)$.

Rolul parantezelor; parantezări corecte

Observație

În definiția de mai sus a enunțurilor, se subînțelege faptul că parantezele au rolul obișnuit: aici, parantezele pot încadra enunțuri, și se folosesc pentru a încadra enunțuri compuse în interiorul altor enunțuri compuse, indicând ordinea în care se aplică regulile (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea unui enunț compus (impropriu spus, ordinea "aplicării conectorilor logici primitivi" pentru obținerea acelui enunț).
O *parantezare corectă* a unui enunț este o dispunere a parantezelor în interiorul acelui enunț astfel încât fiecare pereche de paranteze să încadreze un (alt) enunț, și, desigur, astfel încât ordinea aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea enunțului respectiv să fie indicată corect de acea parantezare.
Adică, pentru orice enunțuri ψ și $\psi \rightarrow \chi$:

- $\neg(\psi)$ este o parantezare corectă a enunțului $\neg\psi$;
- $\psi \rightarrow (\chi)$, $(\psi) \rightarrow \chi$ și $(\psi) \rightarrow (\chi)$ sunt parantezări corecte ale enunțului $\psi \rightarrow \chi$.

Prioritățile conectorilor logici

Observație

Observăm că, în scrierea enunțurilor, dată de definiția de mai sus, conectorii logici primitivi apar scriși la fel ca niște operatori:

- $\neg$ apare scris la fel ca un operator unar;
- $\rightarrow$ apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenție**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic "unar" $\neg$ și prioritate mai mică celui "binar", $\rightarrow$.
Noțiunea de **prioritate** are aici semnificația obișnuită, de determinare a ordinii "aplicării conectorilor logici", corect spus de determinare a ordinii aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru construirea unui enunț.
Conectorul cu prioritate mai mare "se va aplica" primul, i. e., pentru orice enunțuri α și β, scrierea $\neg\alpha \rightarrow \beta$ va semnifica $(\neg\alpha) \rightarrow \beta$.

Egalitatea între enunțuri

Observație

Egalitatea între enunțuri care apare în scrierea regulilor (E_2) și (E_3) este egalitatea obișnuită între cuvinte peste un alfabet, între șiruri de simboluri, anume **literal identitatea**, adică egalitatea simbol cu simbol, i. e. egalitatea lungimilor și identitatea (coincidența) simbolurilor de pe aceeași poziție în fiecare cuvânt (ca la șiruri de caractere: identitatea literă cu literă, caracter cu caracter), modulo o parantezare corectă.
Adică: două enunțuri **scrise numai cu simboluri primitive** (vom vedea ce sunt simbolurile derivate) sunt *egale* ddacă există câte o parantezare corectă pentru fiecare astfel încât, cu acele parantezări, enunțurile respective să fie literal identice (ca și cuvinte peste alfabetul prezentat mai sus, format din simbolurile primitive).

Remarcă

Dacă recitim observația anterioară, vom remarca faptul că orice enunț se află în **exact una** (i. e. **una și numai una**) dintre cele 3 situații prezentate de regulile (E_1), (E_2) și (E_3).

Remarcă

Noțiunea de enunț este definită recursiv: se pornește de la variabilele propoziționale și se aplică recursia dată de regulile (E_2) și (E_3).
Din faptul că enunțurile sunt șiruri **finite** de simboluri primitive și observația că, prin aplicarea oricăreia dintre regulile (E_1), (E_2) și (E_3), lungimea enunțului format până la momentul curent crește cu cel puțin câte o unitate, deducem faptul că orice enunț se obține prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) de un număr finit de ori, i. e. printr–un număr finit de aplicări ale regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), i. e., pornind de la variabilele propoziționale (evident, de la un număr finit de variabile propoziționale), într–un număr finit de pași, fiecare pas constând în aplicarea unei reguli de recursie: (E_2) sau (E_3).

Pentru a putea defini riguros egalitatea de enunțuri, să definim:

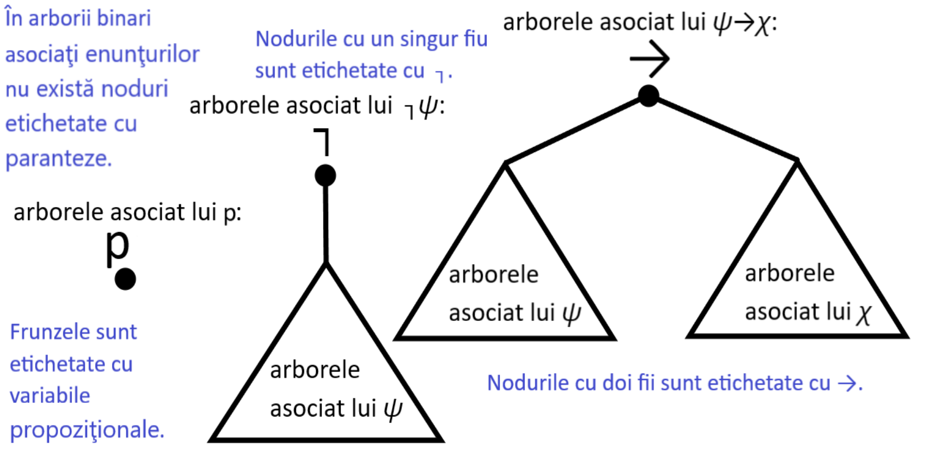
Definiție (arborii binari asociați enunțurilor)

Orice enunț are un *arbore binar asociat*, definit **recursiv** astfel:

- pentru orice variabilă propozițională p, arborele binar asociat lui p este arborele cu un singur nod, etichetat cu p;
- pentru orice enunț ψ, arborele binar asociat enunțului $\neg\psi$ are rădăcina etichetată cu, conectorul logic $\neg$, și arborele binar asociat lui ψ ca unic subarbore;

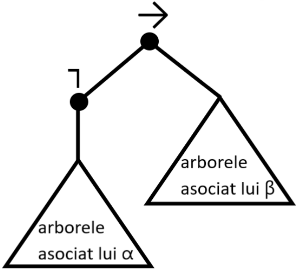
Definiție (arborii binari asociați enunțurilor – continuare)

- pentru orice enunțuri ψ și χ, arborele binar asociat enunțului $\psi \rightarrow \chi$ are rădăcina etichetată cu, conectorul logic $\rightarrow$, arborele binar asociat lui ψ ca subarbore stâng și arborele binar asociat lui χ ca subarbore drept.

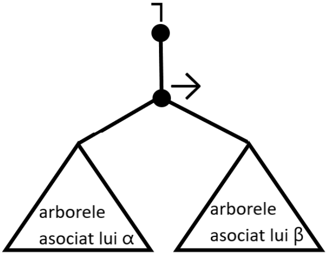


Așadar, pentru orice enunțuri α și β:

arborele asociat lui ┐α→β:



arborele asociat lui ┐(α→β):



Remarcă (unicitatea arborelui binar asociat unui enunț)

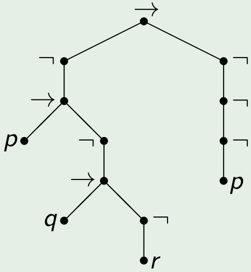
Cum un enunț se află în unul și numai unul dintre cazurile (E_1), (E_2) și (E_3), se demonstrează inductiv că un enunț are un unic arbore binar asociat: dacă S e mulțimea enunțurilor care au câte un unic arbore binar asociat, atunci, conform definiției anterioare:

1. $V \subseteq S$,
2. pentru orice $\psi \in S$, rezultă $\neg\psi \in S$,
3. pentru orice $\psi, \chi \in S$, rezultă că $\psi \rightarrow \chi \in S$,

prin urmare $S = E$, conform definiției mulțimii E a tuturor enunțurilor.

Exemplu

Arborele binar asociat enunțului $\neg(p \to \neg(q \to \neg r)) \to \neg\neg\neg p$, unde $p, q, r \in V$, este:



Într–o *parantezare corectă* a enunțului corespunzător unui astfel de arbore, perechile de paranteze încadrează enunțurile corespunzătoare unor **subarbori**, iar enunțurile corespunzătoare subarborilor diferiți de întregul arbore și care au rădăcina etichetată cu $\to$ sunt *obligatoriu* încadrate între paranteze.

Definiție

Considerăm două enunțuri ca fiind *egale* (modulo parantezări corecte) ddacă au același arbore binar asociat, în care ordinea fiilor unui nod (deci diferența dintre subarborele stâng și subarborele drept) contează (adică inversând doi subarbori distincți ai unui nod obținem un arbore diferit).

Riguros:

Definiție (enunțurile, arborii binari asociați lor și parantezările corecte)

Mulțimea E a *enunțurilor* calculului propozițional clasic este cea mai mică submulțime $E \subseteq A^+$ a mulțimii cuvintelor (finite și nevide) peste alfabetul A al simbolurilor primitive având proprietățile:

1. $V \subseteq E$; oricărui $p \in V$ îi asociem arborele cu un singur nod, etichetat cu p;
2. dacă $\psi \in E$, atunci $\neg(\psi) \in E$;
   în plus, dacă $\psi \in V$ sau există $\alpha \in E$ astfel încât $\psi \in \{\neg\alpha, \neg(\alpha)\}$, atunci avem și $\neg\psi \in E$;
   enunțurilor $\neg\psi$ și $\neg(\psi)$ le asociem arborele binar având rădăcina etichetată cu $\neg$ și, ca unic subarbore al rădăcinii, arborele binar asociat lui ψ;
3. dacă $\psi, \chi \in E$, atunci $(\psi) \to (\chi) \in E$;
   în plus, dacă $\psi \in V$ sau există $\alpha \in E$ astfel încât $\psi \in \{\neg\alpha, \neg(\alpha)\}$, atunci avem și $\psi \to (\chi) \in E$;
   similar, dacă $\chi \in V$ sau există $\beta \in E$ astfel încât $\chi \in \{\neg\beta, \neg(\beta)\}$, atunci avem și $(\psi) \to \chi \in E$;
   iar, dacă există $\alpha, \beta \in E$ astfel încât $\psi \in V \cup \{\neg\alpha, \neg(\alpha)\}$ și $\chi \in V \cup \{\neg\beta, \neg(\beta)\}$, atunci avem și $\psi \to \chi \in E$;
   enunțurilor $\psi \to \chi$, $\psi \to (\chi)$, $(\psi) \to \chi$ și $(\psi) \to (\chi)$ le asociem arborele binar având rădăcina etichetată cu $\to$, arborele binar asociat lui ψ ca subarbore stâng al rădăcinii și arborele binar asociat lui χ ca subarbore drept al rădăcinii.

Egalitatea enunțurilor modulo parantezări corecte

Definiție (enunțurile, arborii binari asociați lor și parantezările corecte – continuare)

Considerăm relația binară $\Bumpeq$ pe E definită prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\varphi \Bumpeq \psi$ ddacă φ și ψ au același arbore binar asociat, în care ordinea fiilor unui nod contează. Evident, $\Bumpeq$ este o relație de echivalență pe E.
Identificăm mulțimea factor $E/\Bumpeq$ cu E, identificând fiecare $\varphi \in E$ cu $\varphi/\Bumpeq$. Deci oricare două enunțuri φ, ψ astfel încât $\varphi \Bumpeq \psi$ vor fi considerate egale.

Exemplu

Dacă $p, q \in V$, atunci $(\neg\, p) \rightarrow (\neg\,(\neg\, q)) \Bumpeq \neg\, p \rightarrow \neg\,\neg\, q$, așadar considerăm $(\neg\, p) \rightarrow (\neg\,(\neg\, q)) = \neg\, p \rightarrow \neg\,\neg\, q$.

Conectorii logici derivați

Notație (abrevieri pentru enunțuri compuse)

Pentru orice enunțuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notațiile (abrevierile):

$\varphi \vee \psi := \neg\, \varphi \rightarrow \psi$	(*disjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ “sau“ ψ)
$\varphi \wedge \psi := \neg\, (\varphi \rightarrow \neg\, \psi)$	(*conjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ “și“ ψ)
$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	(*echivalența logică* dintre φ și ψ; se citește: φ “echivalent cu“ ψ)

Definiție

Simbolurile $\vee$, $\wedge$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici derivați*.

Observație

Conectorii logici derivați se scriu ca niște operatori binari, și le vom acorda aceeași prioritate cu aceea a conectorului logic primitiv “binar“ $\rightarrow$.

Remarcă

În această prezentare a sistemului formal al logicii propoziționale clasice, am considerat negația și implicația ca și conectori logici primitivi, iar disjuncția, conjuncția și echivalența ca și conectori logici derivați, introduși prin notațiile de mai sus, pe baza celor primitivi.

Există prezentări ale sistemului formal al logicii propoziționale clasice care sunt echivalente cu cea din acest curs și care folosesc alți conectori logici primitivi.

Schemele (i. e. tipurile) de axiome

- Am definit limbajul cu care vom lucra. Acum vom defini, tot la acest nivel, formal, sintactic, noțiunea de “adevăr“ în logica pe care o construim. “Adevărurile sintactice“ vor fi “teoremele“ acestei logici, iar, pentru a le obține, vom da un set de axiome și vom defini o modalitate prin care, din adevăruri sintactice stabilite până la un moment dat, se deduc alte adevăruri sintactice. Acea modalitate se va numi **regula de deducție modus ponens**.

Definiție

O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziționale clasice este un enunț de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunțuri arbitrare:

$$\begin{array}{ll} (A_1) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A_2) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (A_3) & (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{array}$$

Fiecare dintre scrierile (A_1), (A_2) și (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Mulțimea axiomelor, i. e. a enunțurilor pornind de la care se deduc adevărurile sintactice

Definiție (continuare)

Axiomele logicii propoziționale clasice se obțin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunțurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunțuri precizate (date), adică axiomele sunt enunțuri de una dintre formele (A_1), (A_2) și (A_3), cu φ, ψ și χ enunțuri date.
Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1), (A_2) și (A_3), simplu, **axiome**.

Notație

Notăm cu Ax mulțimea axiomelor:

$$\begin{array}{rll} Ax = & \{\varphi \to (\psi \to \varphi), & \\ & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)), & \\ & (\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to (\psi \to \varphi) & \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}. \end{array}$$

- Așa cum am anunțat, acum vom defini **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), adică modalitatea prin care, din aceste axiome, se obțin toate **teoremele** (**adevărurile sintactice**) în acest sistem logic.

Remarcă

Se poate demonstra că schemele de axiome de mai sus sunt **independente**, i. e. niciuna dintre ele nu poate fi dedusă din celelalte două prin modalitatea de deducție sintactică pe care o vom defini.
O modalitate pentru a demonstra acest fapt este să se definească semantica logicii propoziționale clasice, ca în cursul următor, să se demonstreze Teorema de Completitudine Tare, care afirmă că deducția sintactică, coincide cu deducția semantică, apoi să se arate că, pentru fiecare două dintre aceste trei axiome, există cel puțin o evaluare care le atribuie valoarea 1 (reprezentând **adevărul**), dar celei de–a treia axiome îi atribuie valoarea 0 (reprezentând **falsul**).
Acest fapt arată și că, între aceste trei scheme de axiome, nu există două din care să se deducă sintactic **toate** adevărurile sintactice (teoremele) acestui sistem logic, care se deduc din toate cele trei scheme de axiome.
Se pot, însă, defini alte seturi echivalente de scheme de axiome (adică seturi de scheme de axiome din care se deduc sintactic aceleași teoreme), cu aceiași sau cu alți conectori logici primitivi.

Notație (scrierea regulilor de deducție)

Notația uzuală pentru reguli de deducție ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\dfrac{\text{condiția } C_1}{\text{consecința } C_2}$, cu semnificația că: dacă este satisfăcută condiția C_1, atunci este satisfăcută consecința C_2.

Regula de deducție **modus ponens** și teoremele formale

Definiție (teoremele (formale), i. e. adevărurile sintactice)

Teoremele formale (numite și, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziționale clasice sunt enunțurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziționale clasice poate fi obținută prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) de un număr finit de ori.

Notații

Mulțimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T.
Faptul că un enunț φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiție (regula de deducție modus ponens (MP))

Regula (T_2) se numește *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:
$\dfrac{\vdash \psi,\ \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}$, sau, echivalent: $\dfrac{\psi,\ \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$.

Definiția recursivă a mulțimii teoremelor formale

Notăm (ad–hoc) cu $\mathcal{MP}$ mulțimea mulțimilor de enunțuri închise la regula **MP**: $\mathcal{MP} = \{M \subseteq E \mid (\forall\, \varphi, \psi \in E)\,(\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M \Rightarrow \varphi \in M)\}$.

Remarcă

$\mathcal{MP}$ este o familie Moore, i. e. un sistem de închidere pe $\mathcal{P}(E)$.
Într–adevăr, $E \in \mathcal{MP}$, iar, dacă I este o mulțime nevidă și $(M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{MP}$, atunci, pentru orice $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\psi, \psi \rightarrow \varphi \bigcap_{i \in I} M_i$, așadar, pentru fiecare $i \in I$, $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M_i$, așadar $\neg\,\psi, \psi \rightarrow \chi \in M_i$, prin urmare $\neg\,\psi, \psi \rightarrow \chi \in \bigcap\limits_{i \in I} M_i$, așadar $\bigcap\limits_{i \in I} M_i \in \mathcal{M}$.

Considerăm operatorul de închidere asociat lui $\mathcal{MP}$: $C_{\mathcal{MP}} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Remarcă (T este închiderea mulțimii axiomelor în familia Moore $\mathcal{MP}$)

Regula (T_3), chiar fără precizarea finitudinii, spune că T este cea mai mică mulțime închisă la regulile (T_1) și (T_2), i. e. cea mai mică mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulțime M a lui E cu proprietățile:

1. $M \supseteq Ax$,
2. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii, adică în posetul $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$), pentru că regula (T_3) spune că nu se află în T niciun element care să nu se obțină prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2), adică niciun element care să nu fie nici axiomă, nici enunț obținut prin aplicarea succesivă a regulii **MP**, pornind de la axiome.
Într–adevăr, conform definiției lui T, $Ax \subseteq T$ și T este închisă la (MP), adică $T \in \mathcal{MP}$.
Prin inducție după numărul de aplicări ale regulilor (T_1) și (T_2) în urma cărora se obține un $\varphi \in T$ (adică – vom vedea – după lungimea unei demonstrații formale pentru φ) rezultă că T este inclusă în orice mulțime $M \subseteq E$ cu $Ax \subseteq M$ și astfel încât M e închisă la (MP), adică, pentru orice $M \in \mathcal{MP}$ cu $Ax \subseteq M$, are loc $T \subseteq M$.
Așadar T este cea mai mică mulțime din familia Moore $\mathcal{MP}$ care include mulțimea Ax a axiomelor, adică: $T = C_{\mathcal{MP}}(Ax)$.

Demonstrațiile formale

Definiție

Fie φ un enunț. O *demonstrație formală pentru* φ este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

În scrierea definiției de mai sus, am folosit faptul că $\overline{1, 0} = \emptyset$ (pentru o scriere uniformă a definiției, fără a trata separat cazul $i = 1$). Având în vedere acest lucru, este clar că, într–o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă.

Remarcă

Este imediat că, dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o demonstrație formală.

Teoremele sunt enunțurile care admit demonstrații formale

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1) și (2) din definiția unei demonstrații formale exprimă exact regulile (T_1) și (T_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o teoremă formală ddacă există o demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o teoremă formală poate avea mai multe demonstrații formale și poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Enunțurile deductibile din ipoteze

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime de enunțuri. Enunțurile care *se deduc sintactic din ipotezele* Σ, numite și *consecințele sintactice ale lui* Σ, se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_0) orice enunț $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ, atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_3) orice enunț care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obține prin aplicarea regulilor (CS_1), (CS_0) și (CS_2) de un număr finit de ori.

Notație

Notăm faptul că un enunț φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiție (și regula de deducție din ipoteze este tot modus ponens)

Regula (CS_2) se numește tot *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia tot "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:
$$\frac{\Sigma \vdash \psi, \ \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}.$$

Definiția recursivă a unei mulțimi de consecințe sintactice

Notație

Notăm cu $D(\Sigma)$ mulțimea consecințelor sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri: $D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$.

Remarcă ($D(\Sigma)$ este închiderea lui $Ax \cup \Sigma$ în familia Moore $\mathcal{MP}$)

Regula (CS_3), chiar fără precizarea finitudinii numărului de aplicări ale acestor reguli, spune că mulțimea $D(\Sigma)$ a consecințelor sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri este cea mai mică mulțime închisă la regulile (CS_1), (CS_0) și (CS_2), adică cea mai mică mulțime de enunțuri (cea mai mică în sensul incluziunii, i.e. în posetul $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$) care include mulțimea axiomelor și mulțimea Σ a ipotezelor și e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulțime M a lui E cu proprietățile:

1. $M \supseteq Ax$,
2. $M \supseteq \Sigma$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

pentru că (CS_3) spune că mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ nu conține alte elemente decât cele obținute din regulile (CS_1), (CS_0) și (CS_2).

Într–adevăr, conform definiției de mai sus, $Ax \subseteq D(\Sigma)$ și $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$, deci $Ax \cup \Sigma \subseteq D(\Sigma)$, $D(\Sigma)$ este închisă la (MP), adică $D(\Sigma) \in \mathcal{MP}$, și, prin inducție după numărul de aplicări ale regulilor (CS_0), (CS_1) și (CS_2) în urma cărora se obține un $\varphi \in E$ cu $\Sigma \vdash \varphi$ (adică – vom vedea – după lungimea unei demonstrații formale din ipotezele din Σ pentru φ) rezultă că $D(\Sigma)$ este inclusă în orice mulțime $M \subseteq E$ cu $Ax \subseteq M$ și $\Sigma \subseteq M$ (i.e $Ax \cup \Sigma \subseteq M$) și astfel încât M e închisă la (MP).
Așadar $D(\Sigma)$ este cea mai mică mulțime din familia Moore $\mathcal{MP}$ care include pe $Ax \cup \Sigma$, adică: $D(\Sigma) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma)$.

Remarcă (deducția pornind de la axiome și de la ipotezele din Σ)

Definiția consecințelor sintactice ale lui Σ este exact definiția teoremelor formale în care mulțimea Ax se înlocuiește cu $Ax \cup \Sigma$.

Demonstrații formale din ipoteze

Definiție

Fie φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri. O Σ–*demonstrație formală pentru* φ (*demonstrație formală din mulțimea de ipoteze* Σ *pentru* φ) este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. $\varphi_i \in \Sigma$;
3. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* Σ–demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

Amintindu–ne că $\overline{1, 0} = \emptyset$, este clar că, într–o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă sau un element al lui Σ.

Remarcă

Este imediat că, dacă Σ este o mulțime de enunțuri și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o Σ–demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o Σ–demonstrație formală.

Enunțurile deductibile din ipoteze sunt exact enunțurile care admit demonstrații formale din acele ipoteze

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1), (2) și (3) din definiția unei Σ–demonstrații formale exprimă exact regulile (CS_1), (CS_0) și (CS_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o consecință sintactică a lui Σ ddacă există o Σ–demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o consecință sintactică a lui Σ poate avea mai multe Σ–demonstrații formale și poate avea Σ–demonstrații formale de lungimi diferite.

Următoarele tipuri de inducție se pot scrie ca simple aplicări ale proprietăților operatorilor de închidere de mai sus: aplicarea proprietăților din definiția unui operator de închidere pentru operatorii $C_{\mathcal{M}}$, respectiv $C_{\mathcal{MP}}$, respectiv $C_{\mathcal{MP}}$ asociați familiilor Moore $\mathcal{M}$ pe $(\mathcal{P}(A^+), \subseteq)$, respectiv $\mathcal{MP}$ pe $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, respectiv, din nou, $\mathcal{MP}$ pe $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$.

Observație

Noțiunile de **teoremă formală** și **consecință sintactică a unei mulțimi de ipoteze** au fost definite recursiv, la fel ca aceea de **enunț**.

Inducția după un concept

Observație

O tehnică importantă de demonstrație la care vom apela în acest capitol al cursului este ceea ce vom numi *inducție după un concept*, pe care o vom întâlni în trei forme:

1. *inducție după enunțuri*
2. *inducție după teoreme formale*
3. *inducție după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*

Acest tip de inducție poate fi privit atât ca **inducție structurală**, cât și ca **inducția obișnuită după un număr natural**, iar, cu proprietățile de mai sus: $E = C_{\mathcal{M}}(V)$, $T = C_{\mathcal{MP}}(Ax)$ și $D(\Sigma) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma)$ pentru orice $\Sigma \subseteq E$, această tehnică de demonstrație poate fi înlocuită cu aplicarea proprietăților operatorilor de închidere.
Într–adevăr, să descriem această metodă de demonstrație, în fiecare dintre cele trei forme în care poate să apară într–un raționament matematic în logica propozițională.

Remarcă

Descriem aici *inducția după enunțuri*.
Fie P o proprietate asupra cuvintelor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă un enunț ψ satisface proprietatea P, atunci enunțul $\neg\psi$ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri ψ și χ satisfac proprietatea P, atunci enunțul $\psi \rightarrow \chi$ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după enunțuri* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală** sau, echivalent, ca aplicare a proprietăților operatorilor de închidere asupra lui $C_{\mathcal{M}}$;
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**.

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție structurală sau, echivalent, ca aplicare a definiției unui operator de închidere asupra lui $C_{\mathcal{M}}$)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea enunțurilor este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de cuvinte care include mulțimea variabilelor propoziționale și care este închisă la regulile (E_2) și (E_3) din definiția enunțurilor, i. e. mulțimea E a enunțurilor este cea mai mică mulțime M de cuvinte care satisface proprietățile:

- $V \subseteq M$;
- *închiderea la* (E_2): dacă $\psi \in M$, atunci $\neg\psi \in M$;
- *închiderea la* (E_3): dacă $\psi, \chi \in M$, atunci $\psi \rightarrow \chi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a cuvintelor care satisfac proprietatea P include pe V și este închisă la regulile (E_2) și (E_3), rezultă că $M_P \supseteq E$, i.e. toate enunțurile sunt printre cuvintele care satisfac proprietatea P.

O altă formulare a acestui raționament este următoarea: dacă demonstrăm că submulțimea $M_P = \{\alpha \in A^+ \mid P(\alpha)\}$ a lui A^+ include pe V si este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, adică $V \subseteq M_P$ și $M_P \in \mathcal{M}$, rezultă că M_P este mai mare în sensul incluziunii decât cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe V, adică $M_P \supseteq C_{\mathcal{M}}(V) = E$, deci M_P include mulțimea E a enunțurilor, i.e. toate enunțurile au proprietatea P.

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după enunțuri poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de numărul de pași în care se obține un enunț din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ se obține într–un singur pas, adică φ este o variabilă propozițională, atunci φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ se obține în $n + 1$ pași, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem două cazuri:
  1. $\varphi = \neg\,\psi$, pentru un enunț ψ care se obține în n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ satisface proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P;
  2. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două enunțuri ψ și χ care se obțin, fiecare, în cel mult n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ satisfac proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P.

Întrucât orice enunț se obține într–un număr finit de pași din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), **principiul inducției matematice** (obișnuite, după un număr natural) ne asigură de faptul că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice enunț satisface proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă

Descriem aici *inducția după teoreme formale*.

Fie P o proprietate asupra enunțurilor.

Presupunem că avem de demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.

Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \to \varphi$ (sunt teoreme formale și – este corect și cu și fără această adăugire) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după teoreme formale* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs amândoi pașii de mai sus, atunci am demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.

Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală** sau, echivalent, ca aplicare a proprietăților operatorilor de închidere asupra lui $C_{\mathcal{MP}}$;
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**.

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție structurală, sau, echivalent, ca aplicare a definiției unui operator de închidere asupra lui $C_{\mathcal{MP}}$)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea teoremelor formale este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea T a teoremelor formale este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei doi pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că $M_P \supseteq T$, i. e. toate teoremele formale sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Sau, cu o formulare echivalentă: dacă demonstrăm că mulțimea $M_P = \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$ include mulțimea axiomelor și este închisă la (MP), adică $M_P \supseteq Ax$ și $M_P \in \mathcal{MP}$, rezultă cu M_P este mai mare în sensul incluziunii decât cea mai mică mulțime din $\mathcal{MP}$ care include pe Ax, anume mulțimea T a teoremelor formale, adică $M_P \supseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax) = T$, i.e. toate teoremele formale au proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după teoreme formale poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei demonstrații formale pentru o teoremă formală, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
  - teorema formală φ_j admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - teorema formală $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice (obișnuite) arată că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice teoremă formală satisface proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă

Descriem aici *inducția după consecințele sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*.
Fie Σ o mulțime de enunțuri și P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice enunț din Σ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt consecințe sintactice ale lui Σ și – este corect și cu și fără această adăugire)) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală** sau, echivalent, ca aplicare a proprietăților operatorului de închidere $C_{\mathcal{MP}}$;
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**.

Remarcă (Corectitudinea inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție structurală sau, echivalent, ca aplicare a definiției unui operator de închidere asupra lui $C_{\mathcal{MP}}$)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor, include mulțimea Σ și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- orice enunț din Σ aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și toate enunțurile din Σ și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că M_P include mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, i. e. toate consecințele sintactice ale lui Σ sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Altfel formulat, dacă demonstrăm că mulțimea $M_P = \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$ conține toate axiomele și enunțurile din Σ și e închisă la (MP), adică $M_P \supseteq Ax \cup \Sigma$ și $M_P \in \mathcal{MP}$, rezultă că M_P este mai mare în sensul incluziunii decât cea mai mică mulțime din $\mathcal{MP}$ care include pe $Ax \cup \Sigma$, anume mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, i.e. $M_P \supseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) = D(\Sigma)$, adică toate enunțurile deductibile sintactic din Σ au proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după consecințele sintactice ale lui Σ poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei Σ–demonstrații formale pentru o consecință sintactică a lui Σ, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă sau un enunț din Σ, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă sau un enunț din Σ, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_{n+1} = \varphi_j \to \varphi$, iar:
  - φ_j admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_{n+1} = \varphi_j \to \varphi$ admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_{n+1} = \varphi_j \to \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice arată că această demonstrație este completă.

Remarcă

Este imediat, direct din definițiile date, că, pentru orice $\varphi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$:

1. $\emptyset \vdash \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$;
2. dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
3. dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

Cu operatori de închidere, proprietățile de mai sus se scriu astfel:

1. $D(\emptyset) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \emptyset) = C_{\mathcal{MP}}(Ax) = T$;
2. cum $Ax \subseteq Ax \cup \Sigma$ și orice operator de închidere e crescător, rezultă că $T = C_{\mathcal{MP}}(Ax) \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) = D(\Sigma)$;
3. cum orice operator de închidere este extensiv, $\Sigma \subseteq Ax \cup \Sigma \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) = D(\Sigma)$.

Observație

Întreaga prezentare de până acum a fost efectuată la **nivel sintactic**: am pornit de la un **alfabet** (o **mulțime de simboluri**), am definit un tip particular de **cuvinte peste acest alfabet**, numite **enunțuri**, apoi un tip particular de enunțuri, numite **teoreme formale**, și **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), care indică modul în care, din teoreme formale, se obțin alte teoreme formale, cu generalizarea la **consecințe sintactice** ale unor mulțimi de enunțuri.

Acesta este **sistemul Hilbert**

Definiție și notație

Deducția pe baza axiomelor (A_1), (A_2), (A_3) și a regulii de deducție **MP** se numește *sistemul Hilbert* pentru calculul propozițional clasic.
Vom nota cu $\mathcal{L}$ acest sistem formal pentru logica propozițională clasică.

În tot restul acestui capitol – i.e. până la secțiunea despre rezoluția propozițională – ne vom referi la sistemul Hilbert pentru logica propozițională clasică.

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE *D*
8. Mulțimi consistente
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

În această secțiune vom prezenta unele proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$, dintre care cea mai importantă este **Teorema deducției**. Acest rezultat ne va conduce la cele mai semnificative teoreme formale ale lui $\mathcal{L}$.

Remarcă (demonstrată mai jos)

Conform punctului (1), în (2) din propoziția următoare avem chiar echivalență: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $(\exists\, \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)$, adică $D(\Sigma) = \bigcup\limits_{\substack{\Gamma \subseteq \Sigma \\ |\Gamma| < \aleph_0}} D(\Gamma)$.

Propoziție (o numim ad–hoc Propoziția $\star$)

Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. *dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;*
2. *dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma \subseteq \Sigma$ a. î. Γ este o mulțime finită și $\Gamma \vdash \varphi$;*
3. *dacă $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in \Delta$ și $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.*

Demonstrație: (1) Presupunem că $\Sigma \subseteq \Delta$ și demonstrăm, prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ, că orice consecință sintactică a lui Σ este și consecință sintactică a lui Δ.

Așadar considerăm următoarea proprietate asupra enunțurilor: pentru orice $\varepsilon \in E$:

$P(\varepsilon)$: $\quad \Delta \vdash \varepsilon$

și demonstrăm că $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$, i. e. mulțimea

Propoziția $\star$, (1): dintr–o mulțime de ipoteze se deduc toate enunțurile deductibile din submulțimile sale

consecințelor sintactice ale lui Σ este inclusă în mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P. Este suficient să demonstrăm că mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P include mulțimea axiomelor și pe Σ și este închisă la (MP).

Cazul 1: Dacă φ este axiomă, atunci $\Delta \vdash \varphi$. Așadar $Ax \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.

Cazul 2: Dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci, cum $\Sigma \subseteq \Delta$, rezultă că $\varphi \in \Delta$, prin urmare $\Delta \vdash \varphi$. Așadar $\Sigma \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.

Cazul 3 (pasul de inducție): presupunem că există $\psi \in E$, a. î. ψ și $\psi \to \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, adică $\psi, \psi \to \varphi \in \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$, i. e. au loc: $\Delta \vdash \psi$ și $\Delta \vdash \psi \to \varphi$. Atunci $\Delta \vdash \varphi$ prin (MP), adică $\varphi \in \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.

Demonstrația primului punct este încheiată, pentru că cele de mai sus arată că mulțimea $\{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$ include pe Ax și pe Σ și e închisă la (MP), așadar $\{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$ include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, anume mulțimea $D(\Sigma)$, i. e. $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$, așadar, dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$.

Formularea acestui raționament cu operatori de închidere:

Dacă $\Sigma \subseteq \Delta$, atunci $Ax \cup \Sigma \subseteq Ax \cup \Delta$, prin urmare, întrucât orice operator de închidere e crescător, $D(\Sigma) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Delta) = D(\Delta)$, așadar, dacă $\Sigma \vdash \varphi$, adică $\varphi \in D(\Sigma)$, atunci $\varphi \in D(\Delta)$, adică $\Delta \vdash \varphi$.

Propoziția $\star$, (2): orice enunț deductibil dintr–o mulțime de ipoteze se deduce dintr–o submulțime finită a sa

(2) Și aici procedăm prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ. Considerăm următoarea proprietate asupra enunțurilor: pentru orice $\varepsilon \in E$:

$$Q(\varepsilon): \quad (\exists \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0,\ \Gamma \vdash \varepsilon)$$

și demonstrăm că $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid Q(\varepsilon)\}$.

Cazul 1: Dacă $\varphi \in Ax$, atunci $\vdash \varphi$, i. e. $\emptyset \vdash \varphi$; $\emptyset \subseteq \Sigma$ și $\emptyset$ este o mulțime finită, așadar φ satisface proprietatea Q.

Cazul 2: Dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci: $\{\varphi\} \vdash \varphi$, iar $\{\varphi\} \subseteq \Sigma$ și $\{\varphi\}$ este o mulțime finită, așadar φ satisface proprietatea Q

Cazul 3 (pasul de inducție): dacă există $\psi \in E$, a. î. ψ și $\psi \to \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. există $\Gamma_1 \subseteq \Sigma$ și $\Gamma_2 \subseteq \Sigma$ a. î. Γ_1 și Γ_2 sunt finite, $\Gamma_1 \vdash \psi$ și $\Gamma_2 \vdash \psi \to \varphi$, atunci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Sigma$, $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2| < \aleph_0$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ este o mulțime finită, iar, întrucât $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ și $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, prin aplicarea punctului (1) obținem: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ și $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi \to \varphi$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ prin (MP), așadar φ satisface proprietatea Q.

Am încheiat demonstrația punctului (2), întrucât cele de mai sus arată că mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea Q include pe Ax și pe Σ și e închisă la (MP), așadar include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste

proprietăți, anume mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ. i. e.:
$D(\Sigma) \subseteq \{\varepsilon \in E \mid (\exists \Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0) (\varepsilon \in D(\Gamma))\} = \bigcup_{\substack{\Gamma \subseteq \Sigma, \\ |\Gamma| < \aleph_0}} D(\Gamma)$.

FORMULAREA ACESTUI RAŢIONAMENT CU OPERATORI DE ÎNCHIDERE:

Notăm cu $G = \{\Gamma \in \mathcal{P}(\Sigma) \mid |\Gamma| < \aleph_0\}$ și cu $M = \bigcup_{\Gamma \in G} D(\Gamma)$.

Desigur, $\emptyset \subseteq \Sigma$ și $|\emptyset| = 0 < \aleph_0$, așadar $\emptyset \in G$, deci $G \neq \emptyset$, prin urmare reuniunea anterioară își include termenii: oricare ar fi $\Gamma \in G$, $D(\Gamma) \subseteq M$. Vom folosi în mod repetat această proprietate, precum și faptul că operatorii de închidere sunt crescători și extensivi.

Cum $\emptyset \in G$, $Ax \subseteq T = D(\emptyset) \subseteq M$.

Pentru orice $\sigma \in \Sigma$, au loc $\{\sigma\} \subseteq \Sigma$ și $|\{\sigma\}| = 1 < \aleph_0$, așadar $\{\sigma\} \in G$, iar $\sigma \in \{\sigma\} \subseteq Ax \cup \{\sigma\} \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \{\sigma\}) = D(\{\sigma\}) \subseteq M$, deci $\sigma \in M$, așadar $\Sigma \subseteq M$.

Fie $\alpha, \beta \in E$ cu $\alpha, \alpha \to \beta \in M$, adică există $\Gamma_1, \Gamma_2 \in G$ astfel încât $\alpha \in D(\Gamma_1)$ și $\alpha \to \beta \in D(\Gamma_2)$. Atunci $\Gamma_1 \subseteq \Sigma$, $\Gamma_2 \subseteq \Sigma$, $|\Gamma_1| < \aleph_0$ și $|\Gamma_2| < \aleph_0$, așadar $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Sigma$ și $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2| - |\Gamma_1 \cup \Gamma_2| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2| < \aleph_0$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \in G$, iar $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \supseteq \Gamma_2$, așadar $Ax \cup \Gamma_1 \subseteq Ax \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \supseteq Ax \cup \Gamma_2$, prin urmare $C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Gamma_1) \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \supseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Gamma_2)$, adică $D(\Gamma_1) \subseteq D(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \supseteq D(\Gamma_2)$, așadar

Propoziția $\star$, (3): enunțurile deductibile din enunțuri deductibile dintr–o mulțime Σ de ipoteze se deduc din Σ

$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in D(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \in \mathcal{MP}$, prin urmare $\beta \in D(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \subseteq M$, deci $\beta \in M$. Am demonstrat că $M \in \mathcal{MP}$.
Așadar $Ax \cup \Sigma \subseteq M$ și $M \in \mathcal{MP}$, prin urmare
$M \supseteq \min(\{S \in \mathcal{P}(E) \mid S \in \mathcal{MP}, Ax \cup \Sigma \subseteq S\}, \subseteq) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) = D(\Sigma)$, ceea ce încheie demonstrația punctului (2).
De fapt, conform punctului (1), are loc și $D(\Gamma) \subseteq D(\Sigma)$ pentru fiecare $\Gamma \in G$, așadar $M = \bigcup\limits_{\Gamma \in G} D(\Gamma) \subseteq D(\Sigma)$, prin urmare $D(\Sigma) = M = \bigcup\limits_{\Gamma \in G} D(\Gamma) = \bigcup\limits_{\substack{\Gamma \subseteq \Sigma, \\ |\Gamma| < \aleph_0}} D(\Gamma)$.

(3) Aici vom folosi **Teorema deducției** (vedeți mai jos), în demonstrarea căreia se utilizează numai punctul (1) din această propoziție.
Am preferat scrierea punctelor acestei propoziții unul după altul, în același rezultat, dar puteam intercala, undeva între punctele (1) și (3), rezultatul de mai jos numit **Teorema deducției** și abreviat (TD).
Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci, conform punctului (2), există o mulțime finită Γ a. î. $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vdash \varphi$.
Dacă $\Gamma = \emptyset$, atunci $\emptyset \vdash \varphi$, adică $\vdash \varphi$, prin urmare $\Sigma \vdash \varphi$.
Dacă $\Gamma \neq \emptyset$, atunci fie $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Delta$.

Dacă orice enunț din Δ este consecință sintactică a lui Σ, atunci, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $\Sigma \vdash \gamma_i$.
$\Gamma \vdash \varphi$ înseamnă că $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi$, ceea ce, conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\} \vdash \gamma_n \to \varphi$, ceea ce, din nou conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}\} \vdash \gamma_{n-1} \to (\gamma_n \to \varphi)$, și, continuând astfel, prin aplicări succesive ale (TD), obținem $\vdash \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \ldots \to (\gamma_{n-1} \to (\gamma_n \to \varphi)) \ldots)$, așadar $\Sigma \vdash \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \ldots \to (\gamma_{n-1} \to (\gamma_n \to \varphi)) \ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_1$, de unde, prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \gamma_2 \to (\gamma_3 \to \ldots \to (\gamma_{n-1} \to (\gamma_n \to \varphi)) \ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_2$, și, continuând în acest mod, prin aplicări succesive ale regulii de deducție (MP), se obține $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația punctului (3).

DEMONSTRAȚIE PENTRU PUNCTUL (3) CU OPERATORI DE ÎNCHIDERE, FĂRĂ A FOLOSI **Teorema deducției:**

Este comod să folosim următoarea lemă, pe care o vom utiliza și mai târziu:

Lemă

$D : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ este operatorul de închidere corespunzător familiei Moore $\{M \in \mathcal{MP} \mid Ax \subseteq M\}$ a mulțimilor de enunțuri închise la (MP) care includ mulțimea axiomelor.

Demonstrația lemei: Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma)$, iar

$C_{\mathcal{MP}} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ este operator de închidere, deci este idempotent, extensiv și crescător. Fie $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$.
$\Sigma \subseteq Ax \cup \Sigma \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) = D(\Sigma)$.
Dacă $\Sigma \subseteq \Delta$, atunci $Ax \cup \Sigma \subseteq Ax \cup \Delta$, așadar
$D(\Sigma) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Delta) = D(\Delta)$.
Așadar D este extensiv și crescător, prin urmare $D(\Sigma) \subseteq D(D(\Sigma))$. Cum $Ax \subseteq Ax \cup \Sigma \subseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma)$, deci $Ax \cup C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma)$, avem și: $D(D(\Sigma)) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup D(\Sigma)) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma)) = C_{\mathcal{MP}}(C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma)) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) = D(\Sigma)$. Așadar $D(\Sigma) \subseteq D(D(\Sigma))$, adică D este idempotent.
Am demonstrat că D este operator de închidere. Familia Moore asociată lui D este imaginea lui D: $D(\mathcal{P}(E)) = \{D(\Sigma) \mid \Sigma \in \mathcal{P}(E)\} = \{C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) \mid \Sigma \in \mathcal{P}(E)\} \subseteq \{C_{\mathcal{MP}}(\Sigma) \mid \Sigma \in \mathcal{P}(E)\} = C_{\mathcal{MP}}(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{MP}$: familia Moore asociată lui $C_{\mathcal{MP}}$.
Pentru orice $\Sigma \in \mathcal{P}(E)$, $D(\Sigma) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma) \supseteq Ax \cup \Sigma \supseteq Ax$. Așadar $D(\mathcal{P}(E)) \subseteq \{M \in \mathcal{MP} \mid Ax \subseteq M\}$.
Acum fie $M \in \mathcal{MP}$ astfel încât $Ax \subseteq M$, astfel că $Ax \cup M = M$. Atunci $D(M) = C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup M) = C_{\mathcal{MP}}(M) = M$, întrucât M aparține familiei Moore $\mathcal{MP}$ asociate lui $C_{\mathcal{MP}}$. Așadar $M \in D(\mathcal{P}(E))$, deci are loc și $\{M \in \mathcal{MP} \mid Ax \subseteq M\} \subseteq D(\mathcal{P}(E))$.
Așadar $D(\mathcal{P}(E)) = \{M \in \mathcal{MP} \mid Ax \subseteq M\}$.

SĂ REVENIM LA DEMONSTRAŢIA PUNCTULUI (3) DIN **Propoziția (*)**:

Conform ipotezei implicației de la punctul (3), $\Delta \subseteq D(\Sigma)$ și $\varphi \in D(\Delta)$. Conform lemei anterioare, D este operator de închidere, așadar e crescător și idempotent, prin urmare $\varphi \in D(\Delta) \subseteq D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$, deci $\varphi \in D(\Sigma)$, adică $\Sigma \vdash \varphi$.

Propoziție (principiul identității și principiul terțului exclus)

Pentru orice $\varphi \in E$, următoarele enunțuri sunt teoreme formale:

1. **principiul identității** *(abreviat* **PI***):* $\vdash \varphi \to \varphi$;
2. **principiul terțului exclus** *(abreviat* **PTE***):* $\vdash \varphi \vee \neg\, \varphi$.

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$.
(1) Aceasta este o demonstrație sintactică pentru enunțul $\varphi \to \varphi$:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) & (A_1) \\
\vdash [\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)] & (A_2) \\
\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi) & (MP) \\
\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi) & (A_1) \\
\vdash \varphi \to \varphi & (MP)
\end{array}$$

(2) Prin definiție, $\varphi \vee \neg\, \varphi = \neg\, \varphi \to \neg\, \varphi$, iar, conform (PI): $\vdash \neg\, \varphi \to \neg\, \varphi$.

Observație (tehnică de efectuare a demonstrațiilor sintactice)

Uneori, este convenabil ca **demonstrațiile formale (demonstrațiile sintactice)**, cum este cea de mai sus, dar și multe raționamente care urmează în acest curs, să fie alcătuite "de la coadă la cap" (desigur, "pe ciornă").
Demonstrații ca, de exemplu, cea a punctului (1) din propoziția ce succedă **Teorema deducției**, demonstrație care începe prin considerarea unei mulțimi de ipoteze, ar fi dificil de conceput "de la cap la coadă".

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalență:

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

(Vom abrevia prin "TD" denumirea acestei teoreme.)

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Din punctul (1) din Propoziția $\star$ și (MP), obținem: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, așadar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$, dar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, deci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
"$\Leftarrow$": Ipoteza acestei implicații este: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Aici vom proceda prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze $\Sigma \cup \{\varphi\}$.
Considerăm următoarea proprietate asupra enunțurilor: pentru orice $\varepsilon \in E$:

$$P(\varepsilon): \quad \Sigma \vdash \varphi \to \varepsilon$$

și demonstrăm că $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.

Cazul 1 (pas de verificare): Dacă ψ este o axiomă, atunci $\vdash \psi$, și, cum $\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ conform (A_1), o aplicare a regulii (MP) ne dă $\vdash \varphi \to \psi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Cazul 2 (tot pas de verificare): Dacă $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$, atunci avem două subcazuri:

Subcazul 2.1: $\psi \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ conform (A_1), deci $\Sigma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$. Așadar $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ prin (MP).

Subcazul 2.2: $\psi = \varphi$. Conform (PI), $\vdash \varphi \to \varphi$, deci $\vdash \varphi \to \psi$ și, prin urmare, $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Cazul 3 (pasul de inducție): dacă există un enunț α a. î. α și $\alpha \to \psi$ satisfac ipoteza de inducție, adică proprietatea P, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \to \alpha$ și $\Sigma \vdash \varphi \to (\alpha \to \psi)$, atunci, întrucât $\vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi)) \to ((\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi))$ conform (A_2), deci $\Sigma \vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi)) \to ((\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi))$, aplicând (MP), obținem $\Sigma \vdash (\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi)$, și, aplicând (MP) încă o dată, obținem $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Așadar mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P include pe Ax și $\Sigma \cup \{\varphi\}$ și e închisă la (MP), prin urmare această mulțime include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, adică pe $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varepsilon\}$, iar această din urmă mulțime conține pe ψ conform ipotezei acestei implicații, prin urmare ψ are proprietatea P, adică $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Remarcă

În demonstrațiile pentru (PI), (PTE) și (TD), axioma (A_3) nu a fost folosită.

Notăm cu $M = \{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varphi \to \varepsilon\}$ și demonstrăm că $D(\Sigma \cup \{\varphi\}) \subseteq M$, procedând la fel ca mai sus.
Pentru orice $\alpha \in Ax$, cum $Ax \subseteq T$, avem $\vdash \alpha$. În particular, orice axiomă de tip (A_1) este teoremă formală, așadar $\vdash \alpha \to (\varphi \to \alpha)$. Conform regulii de deducție (MP), rezultă că $\vdash \varphi \to \alpha$, prin urmare $\Sigma\varphi \to \alpha$, adică $\alpha \in M$, așadar $Ax \subseteq M$.
Pentru orice $\sigma \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \sigma$. Ca mai sus, avem, pentru axioma de tip (A_1): $\vdash \sigma \to (\varphi \to \sigma)$, așadar $\Sigma \vdash \sigma \to (\varphi \to \sigma)$. Conform lui (MP), rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \to \sigma$, adică $\sigma \in M$, așadar $\Sigma \subseteq M$.
Conform (PI), $\vdash \varphi \to \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, adică $\varphi \in M$, așadar $\{\varphi\} \subseteq M$.
Acum fie $\alpha, \beta \in E$, astfel încât $\alpha, \alpha \to \beta \in M$, adică $\Sigma \vdash \varphi \to \alpha$ și $\Sigma \vdash \varphi \to (\alpha \to \beta)$. Următorul enunț este axiomă de tip (A_2), așadar: $\vdash [\varphi \to (\alpha \to \beta)] \to [(\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)]$, prin urmare $\Sigma \vdash [\varphi \to (\alpha \to \beta)] \to [(\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)]$. Aplicând succesiv (MP), obținem $\Sigma \vdash (\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \beta)$, apoi $\Sigma \vdash \varphi \to \beta$, adică $\beta \in M$. Așadar M este închisă la (MP), adică $M \in \mathcal{MP}$.
Am demonstrat că $M \supseteq Ax \cup \Sigma \cup \{\varphi\}$ și $M \in \mathcal{MP}$. Prin urmare M este mai mare în sensul incluziunii decât cea mai mică mulțime din $\mathcal{MP}$ care include pe $Ax \cup \Sigma \cup \{\varphi\}$, adică $M \supseteq C_{\mathcal{MP}}(Ax \cup \Sigma \cup \{\varphi\}) = D(\Sigma \cup \{\varphi\})$.
Conform ipotezei acestei implicații, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, adică $\psi \in D(\Sigma \cup \{\varphi\}) \subseteq M$, așadar $\psi \in M$, adică $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Limbajul acestei teorii matematice versus metalimbaj

Observație

Denumirea de **teoremă** pentru rezultatul anterior este o denumire din **metalimbaj**, pentru că acest rezultat este o proprietate a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.
Denumirea de **teoremă formală** este din limbajul sistemului formal al logicii propoziționale clasice, ea denumește un tip de obiect cu care lucrează acest sistem formal.
Este importantă această distincție. Similaritatea celor două denumiri se datorează faptului că acest sistem formal (al logicii propoziționale clasice) este o formalizare a unor legi ale gândirii (în special a procedeelor gândirii care sunt, în mod curent, folosite în elaborarea raționamentelor matematice), și conține denumiri care îi sugerează întrebuințarea, destinația.
Aceleași considerații sunt valabile pentru **conectorii logici** din sistemul formal al calculului propozițional clasic: $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$, versus **conectorii logici din metalimbaj**, folosiți în enunțurile referitoare la calculul propozițional clasic, scriși fie prin denumirile lor: "non" sau "not" sau "negație", "implică" sau "rezultă", "sau", "și", "echivalent" sau "ddacă", fie prin simbolurile consacrate, în cazul implicației și echivalenței: $\Rightarrow$ și $\Leftrightarrow$, respectiv.
La fel pentru alți termeni din acest sistem logic, precum și din sistemul formal al calculului cu predicate clasic, prezentat în ultimul curs.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E$, arbitrare, fixate.

Notație (pentru următoarele reguli de deducție)

Regula de deducție $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$ va semnifica faptul că φ se deduce printr–o demonstrație formală din ipotezele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, adică: $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Remarcă (cu notația de tip $\dfrac{\text{ipoteze}}{\text{concluzie}}$)

Regula de deducție $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$ implică regula $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi_1, \ldots, \Sigma \vdash \varphi_n}{\Sigma \vdash \varphi}$ pentru orice $\Sigma \subseteq E$, de unde, luând $\Sigma = \emptyset$, obținem și cazul particular: $\dfrac{\vdash \varphi_1, \ldots, \vdash \varphi_n}{\vdash \varphi}$.

Într–adevăr, dacă avem $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$, adică $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$, și au loc $\Sigma \vdash \varphi_1, \ldots, \Sigma \vdash \varphi_n$, atunci, conform afirmației (3) din Propoziția $\star$, rezultă că $\Sigma \vdash \beta$.

Remarcă (modus ponens, cu scrierea de mai sus)

Conform afirmației (3) din Propoziția $\star$, pentru orice $\Sigma \subseteq E$, mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, în particular mulțimea teoremelor formale, este inchisă la regula $\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, pe care o numim tot **modus ponens**.

Propoziție

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

(tranzitivitatea implicației)

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi}{\varphi \rightarrow \chi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$	(TD)
$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	(TD)
$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	(TD)

Așadar:

$$
\begin{array}{ll}
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) & \text{teorema formală anterioară} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) & \text{(MP)} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \psi \to \chi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi & \text{(MP)}
\end{array}
$$

Ca mai sus, folosind (MP), se obțin următoarele reguli de deducție din teoremele formale care le precedă. De fapt, conform (TD), aceste reguli de deducție sunt echivalente cu teoremele formale respective. De exemplu:

- axioma (A_1) este echivalentă cu această regulă de deducție:

(afirmarea concluziei)

- $\dfrac{\varphi}{\psi \to \varphi}$

- axioma (A_3) este echivalentă cu această regulă de deducție:

(principiul reducerii la absurd)

- $\dfrac{\neg\,\varphi \to \neg\,\psi}{\psi \to \varphi}$

(inversarea premiselor)

- $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
- $\dfrac{\varphi \to (\psi \to \chi)}{\psi \to (\varphi \to \chi)}$

Demonstrație:

$$
\begin{array}{ll}
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi) & \text{ipoteză} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to \chi & \text{(MP)} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \chi & \text{(MP)} \\
\{\psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to \chi & \text{(TD)} \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi) & \text{(TD)} \\
\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)) & \text{(TD)}
\end{array}
$$

(negarea premisei)

- $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ și $\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
- $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi \to \psi}$ și $\dfrac{\neg\varphi}{\varphi \to \psi}$

Demonstrație:

$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$	ipoteză
$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	**afirmarea concluziei**
$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$	ipoteză
$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$	(MP)
$\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$	(TD)
$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	(TD)

Așadar:

$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	teorema formală anterioară
$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$	**inversarea premiselor**

(principiul dublei negații)

- $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ și $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
- $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$

Demonstrație:

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$	ipoteză
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	**afirmarea concluziei**
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	(MP)
$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(TD)

Așadar:

$\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	
$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	**principiul reducerii la absurd**

(principiul contrapoziției)

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg\psi \rightarrow \neg\varphi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \psi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\psi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	(TD)
$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	**principiul reducerii la absurd**
$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	(TD)

(comutativitatea disjuncției)

- $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$
- $\dfrac{\varphi \vee \psi}{\psi \vee \varphi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \varphi \vee \psi$	ipoteză
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\,\varphi \rightarrow \psi$	definiția lui $\vee$
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\neg\,\varphi$	**principiul contrapoziției**
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\,\psi \rightarrow \varphi$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$	(TD)

(comutativitatea conjuncției)

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$
- $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi \wedge \varphi}$

Demonstrație: Să observăm că:

$\{\psi \to \neg\,\varphi\} \vdash \psi \to \neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\psi \to \neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\psi \to \psi$	**principiul dublei negații**
$\{\psi \to \neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash (\psi \to \neg\,\varphi) \to (\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi)$	(TD)
$\vdash \neg\,(\neg\,\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to \neg\,(\psi \to \neg\,\varphi)$	**principiul contrapoziției**

$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$	ipoteză
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\varphi \to \neg\,\psi)$	definiția lui $\wedge$
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash (\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi) \to (\varphi \to \neg\,\psi)$	(A_3)
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\varphi \to \neg\,\psi) \to \neg\,(\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi)$	**principiul contrapoziției**
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi)$	(MP)
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\neg\,\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to \neg\,(\psi \to \neg\,\varphi)$	teorema formală de mai sus
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\psi \to \neg\,\varphi)$	(MP)
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi$	definiția lui $\wedge$
$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$	(TD)

Din **comutativitatea conjuncției** și definiția echivalenței obținem:

(comutativitatea echivalenței)

- $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \leftrightarrow \varphi}$

(prima lege a lui De Morgan)

- $\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ și $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\dfrac{\neg\varphi \vee \neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)}$ și $\dfrac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi}$

Demonstrație:

$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$	ipoteză
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\psi \vee \neg\varphi$	**comutativitatea disjuncției**
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	definiția lui $\vee$
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	**principiul dublei negații**
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	definiția lui $\wedge$
$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	(TD)

$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	ipoteză
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	definiția lui $\wedge$
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$	**principiul dublei negații**
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$	definiția lui $\vee$
$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(TD)

(adevărul nu implică falsul)

- $\vdash (\varphi \to \neg\,\varphi) \to \neg\,\varphi$
- $\dfrac{\varphi \to \neg\,\varphi}{\neg\,\varphi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \to \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\varphi \to \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \to \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi \to \neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\varphi \to \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\varphi$	(MP)
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash (\varphi \to \neg\,\varphi) \to \neg\,\varphi$	(TD)
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi \to \neg\,(\varphi \to \neg\,\varphi)$	**principiul contrapoziției**
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,(\varphi \to \neg\,\varphi)$	(MP)
$\vdash \neg\,\neg\,\varphi \to \neg\,(\varphi \to \neg\,\varphi)$	(MP)
$\vdash (\varphi \to \neg\,\varphi) \to \neg\,\varphi$	**principiul reducerii la absurd**

(slăbirea)

- $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$ și $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$
- $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$
- $\dfrac{\varphi \to \chi, \psi \to \chi}{(\varphi \vee \psi) \to \chi}$

Demonstrație:

$\vdash \varphi \to (\neg \varphi \to \psi)$	**negarea premisei**	$\vdash \psi \to (\neg \varphi \to \psi)$	(A_1)
$\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	definiția lui $\vee$	$\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$	definiția lui $\vee$

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \varphi \vee \psi$	ipoteză
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg \varphi \to \psi$	definiția lui $\vee$
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \psi \vee \varphi$	ipoteză
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg \psi \to \varphi$	definiția lui $\vee$
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg \chi \to \neg \psi$	**principiul contrapoziției**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg \chi \to \chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg \chi \to \neg\neg \chi$	**principiul contrapoziției**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg\neg \chi$	**adevărul nu implică falsul**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \chi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi$	(TD)

(slăbirea conjuncției)

- $\vdash (\varphi \land \psi) \to \varphi$ și $\vdash (\varphi \land \psi) \to \psi$
- $\dfrac{\varphi \land \psi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi \land \psi}{\psi}$
- $\dfrac{\chi \to \varphi, \chi \to \psi}{\chi \to (\varphi \land \psi)}$
- caz particular: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \land \psi}$

Demonstrație:

$\vdash \neg\varphi \to (\neg\varphi \lor \neg\psi)$	**slăbirea**
$\vdash (\neg\varphi \lor \neg\psi) \to \neg(\varphi \land \psi)$	**prima lege a lui De Morgan**
$\vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \land \psi)$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash (\varphi \land \psi) \to \varphi$	**principiul reducerii la absurd**

Așadar:

$\vdash (\psi \land \varphi) \to \psi$	ipoteză
$\vdash (\varphi \land \psi) \to (\psi \land \varphi)$	**comutativitatea conjuncției**
$\vdash (\psi \land \varphi) \to \varphi$	**tranzitivitatea implicației**

$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \chi \to \varphi$	ipoteză
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\chi$	**principiul contrapoziției**
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \chi \to \psi$	ipoteză
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\chi$	**principiul contrapoziției**
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \neg\chi$	**slăbirea**
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**prima lege a lui De Morgan**
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\} \vdash \chi \to (\varphi \wedge \psi)$	**principiul reducerii la absurd**

Acum să considerăm cazul particular în care χ este o teoremă formală. Atunci avem:

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \to \varphi$	**afirmarea concluziei**
$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi$	ipoteză
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \to \psi$	**afirmarea concluziei**
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \to (\varphi \wedge \psi)$	regula de deducție de mai sus
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$	
$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$	(MP)

(implicația în funcție de negația antecedentului și disjuncție)

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\varphi \vee \psi)$
- $\vdash (\neg\,\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Demonstrație:

$\vdash (\neg\neg\,\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\,\varphi \rightarrow \psi))$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash \neg\neg\,\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul dublei negații**
$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\,\varphi \rightarrow \psi)$	(MP)
$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\varphi \vee \psi)$	definiția disjuncției
$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\neg\,\varphi) \rightarrow ((\neg\neg\,\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\,\varphi$	**principiul dublei negații**
$\vdash (\neg\neg\,\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	(MP)
$\vdash (\neg\,\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	definiția disjuncției

Din regula de deducție **slăbirea conjuncției**, cazul particular, și următoarele teoreme formale: **principiul dublei negații**, **prima lege a lui De Morgan**, **comutativitatea disjuncției**, **comutativitatea conjuncției** și **implicația în funcție de negația antecedentului și disjuncție**, obținem următoarele teoreme formale, pe care le numim tot:

- **principiul dublei negații**: $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$
- **prima lege a lui De Morgan**: $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (a se revedea **comutativitatea echivalenței**)
- **comutativitatea disjuncției**: $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$
- **comutativitatea conjuncției**: $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$
- **implicația în funcție de negația antecedentului și disjuncție**: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

Din regula de deducție **slăbirea conjuncției**, cazul particular, **principiul contrapoziției** și **principiul reducerii la absurd** obținem următoarea teoremă formală, pe care o numim tot:

- **principiul reducerii la absurd**: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

(dubla premisă)

- $\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
- $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$

Demonstrație:

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\{\varphi\} \vdash \psi \to (\varphi \wedge \psi)$	(TD)
$\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	(TD)

$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$	ipoteză
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$	**slăbirea conjuncției**
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteză
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$	(MP)
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	(TD)
$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$	(TD)

- **falsul implică orice**: $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$
- **orice implică adevărul**: $\vdash \psi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$

Demonstrație:

$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	**negarea premisei**
$\vdash (\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)) \to ((\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi)$	**dubla premisă**
$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$	(TD)

$\vdash \neg\varphi \to (\psi \to \neg\varphi)$	(A_1)
$\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)$	**inversarea premiselor**
$\vdash \psi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$	definiția lui $\vee$

(negarea termenilor unei echivalențe)

- $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi}$

Demonstrație:

$\varphi \leftrightarrow \psi$	ipoteză
$\varphi \to \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\neg\psi \to \neg\varphi$	**principiul contrapoziției**
$\psi \to \varphi$	**slăbirea conjuncției**
$\neg\varphi \to \neg\psi$	**principiul contrapoziției**
$\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$	**slăbirea conjuncției**

(distributivitatea disjuncției față de conjuncție)

- $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$

Demonstrație: aplicând definiția lui $\vee$:

$\{(\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash \varphi \vee \chi = \neg \varphi \rightarrow \chi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash \psi \vee \chi = \neg \psi \rightarrow \chi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash (\neg \varphi \vee \neg \psi) \rightarrow \chi$	**slăbirea**
$\{(\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash \neg (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg \varphi \vee \neg \psi)$	**prima lege a lui De Morgan**
$\{(\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash \neg (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi = (\varphi \wedge \psi) \vee \chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi)$	(TD)
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi = \neg (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$	ipoteză
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \chi \rightarrow \neg \neg \chi$	**principiul dublei negații**
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \neg (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg \neg \chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \neg \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$	**principiul reducerii la absurd**
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \neg \chi \rightarrow \varphi = \chi \vee \varphi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \varphi \vee \chi$	**comutativitatea disjuncției**
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \neg \chi \rightarrow \psi = \chi \vee \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash \psi \vee \chi$	**comutativitatea disjuncției**
$\{(\varphi \wedge \psi) \vee \chi\} \vdash (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$	**slăbirea conjuncției**
$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$	**slăbirea conjuncției**
$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$	**slăbirea conjuncției**

Disjuncție și conjuncție logică între n enunțuri

Notație (abrevieri definite recursiv)

Fie $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots \in E$, arbitrare. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem următoarele scrieri (prioritățile: ca la operatori unari, deci aceeași prioritate ca $\neg$):

$$\bigvee_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigvee_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \vee \gamma_n, & n > 1, \end{cases} \quad \text{și} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigwedge_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \wedge \gamma_n, & n > 1. \end{cases}$$

Exercițiu (temă)

Folosind **dubla premisă** și (MP), să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

$$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)),$$

iar, folosind acest fapt, împreună cu **dubla premisă** și (TD), să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi \in E$, au loc echivalențele:

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \{\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vdash (\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i) \rightarrow \varphi.$$

A se vedea și Propoziția 7.2.53/pagina 160/cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, precum și demonstrația Propoziției $\star$ de mai sus.

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE D
8. Mulțimi consistente
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Conectorii logici derivați și axiomele

Notație

E := mulțimea enunțurilor.

Notație (conectorii logici derivați)

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$:

- $\varphi \vee \psi := \neg\,\varphi \rightarrow \psi$
- $\varphi \wedge \psi := \neg\,(\varphi \rightarrow \neg\,\psi)$
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

((schemele de) axiome)

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\
(A_2) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\
(A_3) & (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Notație

Ax := mulțimea axiomelor, i. e.: $Ax := \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)), (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}$.

Deducția sintactică: pornind de la axiome și, eventual, ipoteze, pe baza regulii de deducție **modus ponens** (MP)

Notație

$T :=$ mulțimea teoremelor formale (i. e. a adevărurilor sintactice).

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \subseteq E$ și $\Delta \subseteq E$, arbitrare.

Notație

- $\vdash \varphi$: φ este teoremă formală.
- $\Sigma \vdash \varphi$: φ este consecință sintactică a mulțimii Σ de ipoteze.

(regula de deducție **modus ponens** (MP))

$$\frac{\psi, \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$$

Remarcă

- $Ax \subseteq T$
- $\vdash \varphi \iff \emptyset \vdash \varphi \implies \Sigma \vdash \varphi$
- $(\forall \sigma \in \Sigma)\,(\Sigma \vdash \sigma)$

Propoziție ($\star$)

1. $\Sigma \subseteq \Delta$ *și* $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$
2. $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow (\exists \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)$
3. $(\forall \psi \in \Delta)\,(\Sigma \vdash \psi)$ *și* $\Delta \vdash \varphi \Longrightarrow \Sigma \vdash \varphi$

Propoziție

- **principiul identității** *(PI)*: $\vdash \varphi \to \varphi$
- **principiul terțului exclus** *(PTE)*: $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$

Teoremă (Teorema deducției (TD))

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Propoziție

Au loc următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

- **tranzitivitatea implicației**: $\dfrac{\varphi \to \psi, \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$
- **falsul implică orice**: $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \to \psi$
- **orice implică adevărul**: $\vdash \psi \to (\varphi \vee \neg \varphi)$

- **slăbirea**:
  - $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
  - $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$
  - $\dfrac{\varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi}{(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi}$
- **slăbirea conjuncției**:
  - $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
  - $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$
  - $\dfrac{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi}{\chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$; • caz particular: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
  - **comutativitatea echivalenței**: $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \leftrightarrow \varphi}$
  - **negarea termenilor unei echivalențe**: $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg\,\varphi \leftrightarrow \neg\,\psi}$
  - **distributivitatea disjuncției față de conjuncție**:
    $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$
  - **implicația în funcție de negația antecedentului și disjuncție**:
    $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\,\varphi \vee \psi)$

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE D
8. Mulțimi consistente
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

- Această secțiune a cursului expune construcția unei algebre Boole care este asociată în mod canonic sistemului formal $\mathcal{L}$.
- Prin această asociere, proprietățile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ se reflectă în proprietăți booleene, și invers.

- Pe tot parcursul acestei secțiuni, $\Sigma \subseteq E$ va fi o mulțime arbitrară fixată de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$.
- Σ va reprezenta o mulțime de ipoteze, ceea ce este adesea numită o *teorie* a lui $\mathcal{L}$.

O relație de echivalență pe mulțimea enunțurilor

Lemă

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Conform regulii de deducție **slăbirea conjuncției**, cazul particular.
"$\Leftarrow$": Conform regulilor de deducție **slăbirea conjuncției** și (MP).

Definiție

Definim o relație binară $\sim_\Sigma$ pe mulțimea E a enunțurilor lui $\mathcal{L}$, astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \text{ ddacă } \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarcă

Conform lemei anterioare, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi,$$

pentru că $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Lemă

$\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \to \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$ conform remarcii anterioare, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \varphi$, prin urmare $\sim_\Sigma$ este reflexivă.
Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conform regulii de deducție **comutativitatea echivalenței**, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$, așadar $\varphi \sim_\Sigma \psi$ ddacă $\psi \sim_\Sigma \varphi$, deci $\sim_\Sigma$ este simetrică.
Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \psi$ și $\psi \sim_\Sigma \chi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, ceea ce este echivalent, conform remarcii anterioare, cu $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \chi$, $\Sigma \vdash \chi \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$. Atunci $\Sigma \vdash \varphi \to \chi$ și $\Sigma \vdash \chi \to \varphi$, conform regulii de deducție **tranzitivitatea implicației**. Din remarca anterioară, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \chi$, așadar $\sim_\Sigma$ este tranzitivă.
Deci $\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Notație

Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\widehat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalență a lui φ raportat la relația de echivalență $\sim_\Sigma$, și să considerăm mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma} = \{\widehat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

O relație de ordine pe mulțimea factor

Definiție

Pe mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma}$, definim relația binară $\leq_\Sigma$, prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Propoziție

$\leq_\Sigma$ este bine definită.

Demonstrație: Fie $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \varphi'$ și $\psi \sim_\Sigma \psi'$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, adică $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi'$, $\Sigma \vdash \varphi' \to \varphi$, $\Sigma \vdash \psi \to \psi'$ și $\Sigma \vdash \psi' \to \psi$, conform remarcii anterioare.
Avem de demonstrat că $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\widehat{\varphi'}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi'}^\Sigma$, i. e. că $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi' \to \psi'$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$. Această relație și faptul că $\Sigma \vdash \varphi' \to \varphi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \psi'$, împreună cu regula de deducție **tranzitivitatea implicației**, implică $\Sigma \vdash \varphi' \to \psi'$. Implicația reciprocă se demonstrează în mod similar.
Așadar, $\leq_\Sigma$ este bine definită.

Posetul astfel obținut este latice distributivă

Lemă

$\leq_\Sigma$ *este o relație de ordine parțială pe* $E/_{\sim_\Sigma}$.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$, i. e. $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi}^\Sigma$, așadar $\leq_\Sigma$ este reflexivă.
Din remarca precedentă, pentru orice $\varphi, \psi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, rezultă că $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\widehat{\varphi}^\Sigma = \widehat{\psi}^\Sigma$, deci $\leq_\Sigma$ este antisimetrică.
Regula de deducție **tranzitivitatea implicației** ne asigură de faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ și $\widehat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$, i. e. $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma$, ceea ce înseamnă că $\leq_\Sigma$ este tranzitivă.
Deci $\leq_\Sigma$ este o relație de ordine pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ *este o latice distributivă, în care, pentru orice* $\varphi, \psi \in E$,
$\inf\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\sup\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.
Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.

Demonstrație: Conform lemei precedente, $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este un poset.
Fie $\varphi, \psi \in E$, arbitrare, fixate.

Demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma} = \inf\{\widehat{\varphi}^{\Sigma}, \widehat{\psi}^{\Sigma}\}$, i. e. $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma}$ este cel mai mare minorant al elementelor $\widehat{\varphi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\psi}^{\Sigma}$, i. e.:

(a) $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\varphi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\psi}^{\Sigma}$, i. e. $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$;

(b) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\widehat{\chi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\varphi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\chi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\psi}^{\Sigma}$, rezultă că $\widehat{\chi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma}$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$, rezultă că
$\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.

Condiția (a) rezultă din teoremele formale **slăbirea conjuncției**, iar (b) din regula de deducție **slăbirea conjuncției**.

Acum demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma} = \sup\{\widehat{\varphi}^{\Sigma}, \widehat{\psi}^{\Sigma}\}$, i. e. $\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}$ este cel mai mic majorant al elementelor $\widehat{\varphi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\psi}^{\Sigma}$, i. e.:

(c) $\widehat{\varphi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;

(d) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\widehat{\varphi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\chi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\chi}^{\Sigma}$, rezultă că $\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\chi}^{\Sigma}$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că
$\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.

Condiția (c) rezultă din teoremele formale **slăbirea**, iar (d) din regula de deducție **slăbirea**.

Așadar, am demonstrat că $(E/{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conjuncția este $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, iar disjuncția este $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$. Unicitatea infimumului și a supremumului într–un poset demonstrează că $\vee_\Sigma$ și $\wedge_\Sigma$ sunt bine definite.

Teorema formală **distributivitatea disjuncției față de conjuncție** implică faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$, deci $(\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma) \vee_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma = (\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma) \wedge_\Sigma (\widehat{\psi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\chi}^\Sigma)$, prin urmare laticea $(E/{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$ este distributivă (amintim că, în orice latice, fiecare dintre legile de distributivitate o implică pe cealaltă).

Remarcă

Conform teoremelor formale **falsul implică orice** și **orice implică adevărul:**, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\, \varphi) \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to (\varphi \vee \neg\, \varphi)$, așadar, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg\, \varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \neg\, \varphi}^\Sigma$. Aceasta înseamnă că, indiferent cine este $\varphi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg\, \varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \vee \neg\, \varphi}^\Sigma$ sunt, respectiv, primul element și ultimul element al laticii $(E/{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$. Vom nota $0_\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \neg\, \varphi}^\Sigma$ și $1_\Sigma := \widehat{\varphi \vee \neg\, \varphi}^\Sigma$, pentru un $\varphi \in E$, arbitrar. Unicitatea minimului și a maximului unui poset arată că această definiție nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$, adică 0_Σ și 1_Σ sunt bine definite.

- Am obținut:

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o latice distributivă mărginită.*

Definiție

Pentru orice $\varphi \in E$, definim: $\overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma := \widehat{\neg\varphi}^\Sigma$.

Remarcă

Conform regulii de deducție **negarea termenilor unei echivalențe**, definiția de mai sus pentru operația unară $\overline{\cdot}^\Sigma : E/_{\sim_\Sigma} \to E/_{\sim_\Sigma}$ este corectă, pentru că nu depinde de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$, ceea ce rezultă și din demonstrația următoare și unicitatea complementului în latici distributive mărginite.

Algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată lui $\mathcal{L}$

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o algebră Boole.*

Demonstrație: Rezultatele anterioare arată că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o latice distributivă mărginită în care, pentru orice $\varphi \in E$, au loc egalitățile:

- $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma = 0_\Sigma$ și
- $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$,

prin urmare $\overline{\widehat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma$ este complementul lui $\widehat{\varphi}^\Sigma$.
Aceasta înseamnă că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.

Definiție

Algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numește *algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată sistemului formal $\mathcal{L}$.*

Remarcă (surjecția canonică transformă conectorii logici în operații booleene: nu e morfism boolean, pentru că E nu e algebră Boole)

Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$ surjecția canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \widehat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identități (unde $\rightarrow_\Sigma$ și $\leftrightarrow_\Sigma$ sunt, respectiv, implicația și echivalența booleană în algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

- (a) $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (b) $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (c) $p_\Sigma(\neg \varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
- (d) $p_\Sigma(\varphi \to \psi) = p_\Sigma(\varphi) \rightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (e) $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Într–adevăr, identitățile (a), (b) și (c) sunt chiar definițiile operațiilor algebrei Boole $E/_{\sim_\Sigma}$. Definiția implicației booleene, (a) și (c) arată că $p_\Sigma(\varphi) \rightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi) = p_\Sigma(\neg \varphi \vee \psi)$, ceea ce arată că (d) este echivalent cu faptul că $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg \varphi \vee \psi)$, care rezultă din teorema formală **implicația în funcție de negația antecedentului și disjuncție**. (e) se obține, direct, din (b) și (d).
Cele cinci identități de mai sus arată cum conectorii logici sunt convertiți de p_Σ în operații booleene.

Enunțurile deductibile din Σ sunt în 1_Σ

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$*,* $\Sigma \vdash \varphi$ *ddacă* $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$*.*

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat.

Au loc echivalențele: $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \neg\,\varphi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\,\varphi)$.
Așadar, avem de demonstrat că: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\,\varphi)$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Conform (A_1), $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow \varphi)$. Prin (MP), obținem: $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow \varphi$. Conform teoremei formale **orice implică adevărul**, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \neg\,\varphi)$. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\,\varphi)$, după cum ne asigură prima remarcă din această secțiune.
Reciproc, să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\,\varphi)$, sau, echivalent, $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\,\varphi) \leftrightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow \varphi$, conform aceleiași prime remarci din această secțiune. Dar (PTE) afirmă că $\vdash \varphi \vee \neg\,\varphi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\,\varphi$. Prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \varphi$.

Remarcă

Lema anterioară ne oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunț este o consecință sintactică a lui Σ.

Pentru $\Sigma = \emptyset$, avem teoremele formale

Notație

În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relația de echivalență $\sim_{\emptyset}$ se notează, simplu, $\sim$, și are următoarea definiție: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\,;$$

- clasele de echivalență ale lui $\sim$, $\widehat{\varphi}^{\emptyset}$ ($\varphi \in E$), se notează $\widehat{\varphi}$;
- relația de ordine $\leq_{\emptyset}$ se notează $\leq$;
- operațiile $\vee_{\emptyset}$, $\wedge_{\emptyset}$, $\bar{\ }^{\emptyset}$, $0_{\emptyset}$ și $1_{\emptyset}$ se notează, respectiv, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, 0 și 1.

Definiție

$\sim$ se numește *echivalența logică* sau *echivalența semantică* între enunțuri. Algebra Boole $(E/_{\sim}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal $\mathcal{L}$*.

Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$.

Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

Notă

- A se vedea la seminar exemple de **demonstrații algebrice** în logica propozițională clasică (realizate prin calcul boolean, folosind lema anterioară).
- În mod tipic, pentru a folosi lema anterioară în cadrul unei **demonstrații algebrice** pentru o deducție formală din ipoteze: $\Sigma \vdash \varphi$, cu $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, se folosește faptul că, pentru orice ipoteză $\sigma \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \sigma$, așadar $\widehat{\sigma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, construcția algebrei Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$, efectuată prin raționamentul de mai sus scris în cazul particular $\Sigma = \emptyset$.

Am considerat că tratarea directă a cazului general nu crește dificultatea parcursului anterior, și, din acest motiv, am ales să prezint acest caz general, a cărui particularizare la situația $\Sigma = \emptyset$ este imediată.

VOI COMPLETA ȘI SECȚIUNEA URMĂTOARE CU VARIANTELE CU OPERATORI DE ÎNCHIDERE ALE DEMONSTRAȚIILOR, ȘI VOI MODIFICA SECȚIUNEA CU SISTEME DEDUCTIVE.

1 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?

2 Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice

3 Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice

4 Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice

5 Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

6 **Semantica Logicii Propoziționale Clasice**

7 Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE D

8 Mulțimi consistente

9 Rezoluția în calculul propozițional clasic

10 Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

11 Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Interpretări (evaluări, semantici) pentru logica $\mathcal{L}$

Definiție (o interpretare e o funcție de la mulțimea variabilelor propoziționale la algebra Boole standard: $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 < 1$, i. e. o funcție care dă valori de adevăr variabilelor propoziționale)

O *interpretare* (*evaluare*, *semantică*) a lui $\mathcal{L}$ este o funcție oarecare $h : V \to \mathcal{L}_2$.

Propoziție (există o unică funcție care prelungește o interpretare la mulțimea tuturor enunțurilor și transformă conectorii logici primitivi în operații Booleene, așadar calculează valorile de adevăr ale tuturor enunțurilor pornind de la cele ale variabilelor propoziționale)

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există o unică funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăți:

- (a) $\tilde{h}(u) = h(u)$, *pentru orice* $u \in V$;
- (b) $\tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, *pentru orice* $\varphi \in E$;
- (c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$, *pentru orice* $\varphi, \psi \in E$.

Definiție

Funcția $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ din propoziția anterioară se numește tot *interpretare*.

Observație

Condiția (a) din propoziția anterioară spune că $\tilde{h}\mid_V = h$, adică funcția $\tilde{h}$ prelungește pe h la E.

În condițiile (b) și (c), în membrii stângi, în argumentele lui $\tilde{h}$, $\neg$ și $\rightarrow$ sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii drepți, $\bar{\ }$ și $\rightarrow$ sunt operațiile de complementare și, respectiv, implicație ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2$. Așadar, putem spune că funcția $\tilde{h}$ transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard.

Vom păstra notația $\tilde{h}$ pentru această unică funcție depinzând de interpretarea h.

Demonstrația propoziției anterioare: Demonstrăm existența și unicitatea lui $\tilde{h}$ prin inducție după conceptul de enunț. Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$.

Orice enunț φ se află în una **și numai una** dintre situațiile următoare:

- (E_1) $\varphi \in V$ (φ este variabilă propozițională)
- (E_2) există $\psi \in E$, a. î. $\varphi = \neg\psi$
- (E_3) există $\psi, \chi \in E$, a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$

Fiecărui $\varphi \in E$ îi asociem un element al lui $\mathcal{L}_2$, pe care îl notăm cu $\tilde{h}(\varphi)$, astfel:

1. dacă $\varphi \in V$, atunci $\tilde{h}(\varphi) := h(\varphi)$
2. dacă $\varphi = \neg\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ a fost definită, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \overline{\tilde{h}(\psi)}$
3. dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi)$ au fost definite, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi)$

Principiul inducției după conceptul de enunț ne asigură că, urmând cele trei reguli anterioare, se definesc, recursiv, valorile $\tilde{h}(\varphi)$, pentru toate $\varphi \in E$.
Riguros: definim $\tilde{h} \subseteq E \times \mathcal{L}_2$ ca o funcție parțială (i. e. relație binară funcțională) de la E la $\mathcal{L}_2$ cu cele trei proprietăți de mai sus, și notăm cu D mulțimea enunțurilor pentru care $\tilde{h}$ este definită:

$$D := \{\varepsilon \in E \mid (\exists x \in \mathcal{L}_2)((\varepsilon, x) \in \tilde{h})\}$$

Conform definiției lui $\tilde{h}$ prin proprietățile ①,②,③ de mai sus, D include mulțimea V a variabilelor propoziționale și este închisă la negație și implicație, așadar $E \subseteq D$, pentru că E este cea mai mică mulțime de cuvinte peste alfabetul A al simbolurilor primitive care include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$. Cum $D \subseteq E$, rezultă că $D = E$, adică mulțimea enunțurilor pentru care funcția parțială $\tilde{h}$ este definită este egală cu mulțimea E a tuturor enunțurilor, deci $\tilde{h}$ este funcție parțială totală (i. e. peste tot definită pe E), adică funcție $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$.
Să ne amintim că, din faptul că orice $\varphi \in E$ se află în una **și numai una** dintre cele trei situații de mai sus, am observat că φ are un unic arbore binar asociat, așadar lui φ nu i se pot asocia două valori distincte prin această recursie, i. e. valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$ este unic determinată de φ.
Aceste două proprietăți (existența și unicitatea lui $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$, pentru orice $\varphi \in E$) arată că am obținut o funcție $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ complet și corect definită, care asociază fiecărui $\varphi \in E$ valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$.

De asemenea, $\tilde{h}$ satisface condițiile (a), (b) și (c) din enunț, prin chiar definiția ei. Am încheiat demonstrația existenței unei funcții $\tilde{h}$ care satisface cerințele din enunț, și fixăm această funcție pentru cele ce urmează, anume demonstrația unicității ei.

Fie $g : E \to \mathcal{L}_2$ o funcție care satisface aceste trei condiții:

- (a_g) $\quad g(u) = h(u)$, pentru orice $u \in V$;
- (b_g) $\quad g(\neg\varphi) = \overline{g(\varphi)}$, pentru orice $\varphi \in E$;
- (c_g) $\quad g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Să notăm cu M mulțimea enunțurilor în care $\tilde{h}$ și g coincid:

$$M := \{\varepsilon \in E \mid \tilde{h}(\varepsilon) = g(\varepsilon)\}$$

Demonstrăm că $M = E$, tot prin inducție după conceptul de enunț.

Pentru orice $\varphi \in V$, conform (a) și (a_g), avem: $\tilde{h}(\varphi) = h(\varphi) = g(\varphi)$, așadar $V \subseteq M$.

Pentru orice $\psi \in M$, conform (b), (b_g) și definiției lui M, avem: $\tilde{h}(\neg\psi) = \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{g(\psi)} = g(\neg\psi)$, așadar $\neg\psi \in M$.

Pentru orice $\psi, \chi \in M$, conform (c), (c_g) și definiției lui M, avem: $\tilde{h}(\psi \to \chi) = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi) = g(\psi) \to g(\chi) = g(\psi \to \chi)$, așadar $\psi \to \chi \in M$.

Prin urmare M include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, așadar, cum E este cea mai mică submulțime a lui A^+ cu aceste proprietăți, rezultă că $E \subseteq M$, deci, cum $M \subseteq E$, avem $M = E$, adică $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$, i. e. $\tilde{h} = g$, așadar $\tilde{h}$ este unica funcție cu proprietatățile din enunț.

Corolar (prelungirea unei interpretări la mulțimea enunțurilor transformă toți conectorii logici în operații booleene)

Pentru orice interpretare h și orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:

- (d) $\quad \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\quad \tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\quad \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Demonstrație: Conform definițiilor conectorilor logici derivați și definiției lui $\tilde{h}$:

- $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\neg\, \varphi \rightarrow \psi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} \rightarrow \tilde{h}(\psi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)}} \vee \tilde{h}(\psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\neg\,(\varphi \rightarrow \neg\, \psi)) = \overline{\tilde{h}(\varphi) \rightarrow \overline{\tilde{h}(\psi)}} = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)}} = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)}} = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) = (\tilde{h}(\varphi) \rightarrow \tilde{h}(\psi)) \wedge (\tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\varphi)) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Satisfacere și mulțimi satisfiabile

Fie h o interpretare, φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri.

Definiție (enunțuri adevărate pentru anumite valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale din scrierea lor)

Spunem că φ este *adevărat în interpretarea h* sau că *h satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$.
φ se zice *fals în interpretarea h* ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$.
Spunem că *h satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ ddacă h satisface toate elementele lui Σ.
Spunem că Σ *admite un model* sau că mulțimea Σ este *satisfiabilă* ddacă există un model pentru Σ.
Spunem că φ *admite un model* sau că φ este *satisfiabil* ddacă $\{\varphi\}$ este satisfiabilă.

Notație

Faptul h satisface enunțul φ se notează cu: $h \vDash \varphi$.
Faptul că h satisface mulțimea Σ de enunțuri se notează cu: $h \vDash \Sigma$.

Remarcă

Dacă h este model pentru Σ, atunci h este model pentru orice submulțime a lui Σ.

Vom vedea că orice interpretare satisface mulțimea T a teoremelor formale. Deocamdată, să observăm că:

Remarcă

Orice interpretare satisface $\emptyset$.
Într–adevăr, pentru orice interpretare h, avem:

$$h \vDash \emptyset \iff (\forall \varphi \in \emptyset)\,(\tilde{h}(\varphi) = 1) \iff \overbrace{(\forall \varphi)\,(\underbrace{\underbrace{\varphi \in \emptyset}_{\text{fals pentru orice } \varphi} \implies \tilde{h}(\varphi) = 1)}_{\text{adevărat pentru orice } \varphi}}^{\text{adevărat}}.$$

Definiție (adevărurile semantice și deducția semantică)

Enunțul φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare.
Enunțurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile* lui $\mathcal{L}$.
Spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecință semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare care satisface pe Σ.

Notație

Faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\vDash \varphi$.
Faptul că φ se deduce semantic din Σ se notează cu: $\Sigma \vDash \varphi$.

Le fel cum adevărurile sintactice (i. e. teoremele formale) sunt exact enunțurile deductibile sintactic din $\emptyset$:

Remarcă (adevărurile semantice sunt exact enunțurile deductibile semantic din $\emptyset$)

$$\vDash \varphi \text{ ddacă } \emptyset \vDash \varphi.$$

Într–adevăr, conform definițiilor de mai sus, remarcii anterioare și faptului că o implicație cu antecedentul adevărat este adevărată ddacă și concluzia implicației este adevărată:

$$\emptyset \vDash \varphi \Leftrightarrow (\forall h : V \to \mathcal{L}_2)(\underbrace{h \vDash \emptyset}_{\text{adevărat}} \Rightarrow h \vDash \varphi) \Leftrightarrow (\forall h : V \to \mathcal{L}_2)(h \vDash \varphi) \Leftrightarrow \vDash \varphi.$$

Observație (valorile de adevăr atribuite enunțurilor de o interpretare se calculează pe baza valorilor de adevăr atribuite variabilelor propoziționale de acea interpretare, folosind proprietatea interpretării de a transforma conectorii logici în operații booleene)

Valoarea unei interpretări într–un anumit enunț, uneori numită *interpretarea acelui enunț*, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obține atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din $\mathcal{L}_2$ tuturor variabilelor propoziționale care apar în acel enunț. Un enunț universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunț a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale care apar în acel enunț.

În cele ce urmează, vom vedea două rezultate deosebit de importante privind sistemul formal $\mathcal{L}$: **Teorema de completitudine** și o generalizare a ei, **Teorema de completitudine tare**, numită și **Teorema de completitudine extinsă**. **Teorema de completitudine a lui** $\mathcal{L}$ afirmă că adevărurile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ coincid cu adevărurile semantice ale lui $\mathcal{L}$, i. e. teoremele formale ale lui $\mathcal{L}$ sunt exact enunțurile universal adevărate, tautologiile lui $\mathcal{L}$. **Teorema de completitudine tare pentru** $\mathcal{L}$ afirmă că, în $\mathcal{L}$, consecințele sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri coincid cu consecințele semantice ale lui Σ, i. e. enunțurile care se deduc sintactic din Σ sunt exact enunțurile care se deduc semantic din Σ.

TCT pentru logica propozițională clasică

Teoremă (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru $\mathcal{L}$ (TCT))

Pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Fie Σ o mulțime de enunțuri și φ un enunț, arbitrare.
"$\Rightarrow$:" Notăm cu M mulțimea consecințelor semantice ale lui Σ:

$$M := \{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vDash \varepsilon\}$$

Demonstrăm, prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze Σ, că M include mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ:

$$\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vDash \varepsilon\}$$

Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$, a. î. $h \vDash \Sigma$, arbitrară.

- (CS_1) Dacă φ este o axiomă, atunci avem subcazurile:

• axioma (A_1): există $\psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi = \psi \to (\chi \to \psi)$

În acest subcaz, $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to (\tilde{h}(\chi) \to \tilde{h}(\psi)) = \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} \vee \tilde{h}(\psi) = 1 \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} = 1$, așadar $\varphi \in M$.

• axioma (A_2): există $\alpha, \beta, \gamma \in E$ a. î.
$\varphi = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
Dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$, $b := \tilde{h}(\beta)$ și $c := \tilde{h}(\gamma)$, atunci:
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ în $\mathcal{L}_2$, unde $1 \rightarrow 0 = 0$, iar celelalte trei implicații au valoarea 1, așadar:
dacă $a = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1 \rightarrow 1 = 1$;
dacă $a = 1$ și $b \rightarrow c = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 0 \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$;
dacă $b \rightarrow c = 1$, atunci $b \leq c$, și deci $a \rightarrow b = \overline{a} \vee b \leq \overline{a} \vee c = a \rightarrow c$, prin urmare $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$, deci $\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow 1) \rightarrow 1 = 1$.
Așadar $\varphi \in M$ și în acest subcaz.
• axioma (A_3): există $\alpha, \beta \in E$ a. î. $\varphi = (\neg\,\alpha \rightarrow \neg\,\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
Dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$ și $b := \tilde{h}(\beta)$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = (\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$, pentru că $[b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}]$, și deci $[b \rightarrow a = 1$ ddacă $\overline{a} \rightarrow \overline{b} = 1]$, iar în caz contrar ambele implicații sunt 0, pentru că ne situăm în $\mathcal{L}_2$, deci $\overline{a} \rightarrow \overline{b} = b \rightarrow a$, prin urmare $(\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$. Deci rezultă și aici că $\varphi \in M$.

- (CS_0) Dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci, cum $h \vDash \Sigma$, rezultă că $\tilde{h}(\varphi) = 1$, deci $\varphi \in M$.
- (CS_2) Dacă există $\psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, adică $\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\psi \rightarrow \varphi) = 1$, atunci $\tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \rightarrow \varphi) = 1$, așadar $1 = \tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$, adică $\varphi \in M$.

Prin urmare, mulțimea M a consecințelor semantice ale lui Σ include mulțimea $Ax \cup \Sigma$ și este închisă la regula (MP), așadar M include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, adică mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ.

Așadar, dacă φ este consecință sintactică lui Σ, atunci φ este consecință semantică lui Σ.

"$\Leftarrow$:" Presupunem că $\Sigma \vDash \varphi$, și presupunem prin absurd că $\Sigma \nvdash \varphi$, ceea ce este echivalent cu $\widehat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1_{\Sigma}$ în algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$. Prin urmare $\widehat{\varphi}^{\Sigma} \in E/_{\sim_{\Sigma}} \setminus \{1_{\Sigma}\}$, în particular $|E/_{\sim_{\Sigma}}| > 1$, deci algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$ este netrivială.
Aplicând **Teorema de reprezentare a lui Stone** algebrei Boole netriviale $E/_{\sim_{\Sigma}}$, obținem că există o mulțime $X \neq \emptyset$ și există un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim_{\Sigma}} \to \mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$.
$\widehat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1_{\Sigma}$ în $E/_{\sim_{\Sigma}}$ și $d : E/_{\sim_{\Sigma}} \to \mathcal{L}_2^X$ este injectiv, prin urmare $d(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) \neq d(1) = 1$, deci $d(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) \neq 1(=$ funcția constantă $1)$ în $\mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$, așadar există un element $x \in X$ cu $d(\widehat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Fie $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$, definită prin: pentru orice $f \in \mathcal{L}_2^X$, $\pi(f) := f(x) \in \mathcal{L}_2$.
Se arată ușor că π este un morfism boolean. De exemplu, să verificăm comutarea lui π cu $\vee$, iar comutările lui π cu celelalte operații de algebre Boole se demonstrează analog: pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^X$,
$\pi(f \vee g) = (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \pi(f) \vee \pi(g)$ în $\mathcal{L}_2$.
Considerăm următoarele funcții: incluziunea $i : V \to E$ ($i(u) := u$ pentru fiecare $u \in V$), surjecția canonică $p_{\Sigma} : E \to E/_{\sim_{\Sigma}}$, morfismul boolean injectiv $d : E/_{\sim_{\Sigma}} \to \mathcal{L}_2^X$ considerat mai sus și morfismul boolean $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$ considerat mai sus. Să notăm compunerea acestor funcții cu h: $h := \pi \circ d \circ p_{\Sigma} \circ i$;
$h : V \to \mathcal{L}_2$ este o interpretare.

$$V \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p_\Sigma} E/\sim_\Sigma \xrightarrow{d} \mathcal{L}_2^X \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}_2 \qquad h := \pi \circ d \circ p_\Sigma \circ i : V \to \mathcal{L}_2$$

Demonstrăm, prin inducție după conceptul de enunț, folosind definiția lui $\tilde{h}$, că, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, adică:

$$E \xrightarrow{p_\Sigma} E/\sim_\Sigma \xrightarrow{d} \mathcal{L}_2^X \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}_2 \qquad \tilde{h} = \pi \circ d \circ p_\Sigma : E \to \mathcal{L}_2$$

Așadar demonstrăm că următoarea mulțime este egală cu E:

$$M := \{\alpha \in E \mid \tilde{h}(\alpha) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)\}$$

Fie α un enunț arbitrar.

•(E_1) Dacă $\alpha \in V$, atunci $\tilde{h}(\alpha) = h(\alpha) = \pi(d(p_\Sigma(i(\alpha)))) = \pi(d(p_\Sigma(\alpha))) = \pi(d(\widehat{\alpha}^\Sigma)) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, așadar $\alpha \in M$.

•(E_2) Dacă există $\beta \in M$ a. î. $\alpha = \neg\,\beta$, atunci $\tilde{h}(\beta) = d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x)$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\neg\,\beta) = \overline{\tilde{h}(\beta)} = \overline{d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x)} = (\overline{d(\widehat{\beta}^\Sigma)})(x) = d(\overline{\widehat{\beta}^\Sigma}^{\Sigma})(x) = d(\widehat{\neg\,\beta}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, așadar $\alpha \in M$.

•(E_3) Dacă există $\beta, \gamma \in M$ a. î. $\alpha = \beta \to \gamma$, atunci $\tilde{h}(\beta) = d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x)$ și $\tilde{h}(\gamma) = d(\widehat{\gamma}^\Sigma)(x)$, prin urmare
$\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta \to \gamma) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d(\widehat{\beta}^\Sigma)(x) \to d(\widehat{\gamma}^\Sigma)(x) = (d(\widehat{\beta}^\Sigma) \to d(\widehat{\gamma}^\Sigma))(x) = d(\widehat{\beta}^\Sigma \to_\Sigma \widehat{\gamma}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\beta \to \gamma}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\alpha}^\Sigma)(x)$, așadar $\alpha \in M$.

Deci M include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, așadar M include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, anume mulțimea E a tuturor enunțurilor, deci $E \subseteq M \subseteq E$, așadar $M = E$, adică, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\widehat{\alpha}^{\Sigma})(x)$, în particular $\tilde{h}(\varphi) = d(\widehat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$.
Demonstrăm că $h \vDash \Sigma$. Fie $\sigma \in \Sigma$, arbitrar, fixat.
Conform identității stabilite mai sus, $\tilde{h}(\sigma) = d(\widehat{\sigma}^{\Sigma})(x)$.
Cine este $\widehat{\sigma}^{\Sigma}$ (clasa lui σ în algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$)?
Conform definiției claselor echivalenței $\sim_{\Sigma}$, unei proprietăți a consecințelor sintactice, **Teoremei deducției**, faptului că $\sigma \in \Sigma$, și deci $\Sigma \vdash \sigma$, $\widehat{\sigma}^{\Sigma} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \leftrightarrow \tau\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \rightarrow \tau$ și $\Sigma \vdash \tau \rightarrow \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau$ și $\Sigma \cup \{\tau\} \vdash \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \tau\} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$, oricare ar fi $\gamma \in E$, pentru că, în conformitate cu **Principiul terțului exclus**, $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$, prin urmare $\Sigma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$, așadar $\gamma \vee \neg\gamma \in \widehat{\sigma}^{\Sigma}$ conform egalității de mulțimi pe care tocmai am stabilit–o, i. e. $\gamma \vee \neg\gamma \sim_{\Sigma} \sigma$, deci $\widehat{\sigma}^{\Sigma} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.
Așadar, $\tilde{h}(\sigma) = d(\widehat{\sigma}^{\Sigma})(x) = d(1_{\Sigma})(x) = 1(x) = 1$.
Deci $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$, adică $h \vDash \Sigma$.
Am găsit o interpretare h cu proprietățile: $h \vDash \Sigma$ și $\tilde{h}(\varphi) \neq 1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \nvDash \varphi$. Am obținut o contradicție cu ipoteza acestei implicații. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Teoremă (Teorema de completitudine pentru $\mathcal{L}$ (TC))

Pentru orice enunț φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Se aplică **Teorema de completitudine tare** pentru $\Sigma = \emptyset$.

Notă

Uneori,

- implicația $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ este numită *corectitudinea lui $\mathcal{L}$*,
- iar implicația $\vdash \varphi \Leftarrow \vDash \varphi$ este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Dar, cel mai adesea, **echivalența** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Corolar (noncontradicția lui $\mathcal{L}$ (principiul noncontradicției))

Niciun enunț φ nu satisface și $\vdash \varphi$, și $\vdash \neg \varphi$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există un enunț φ a. î. $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg \varphi$. Atunci, conform **Teoremei de completitudine**, $\vDash \varphi$ și $\vDash \neg \varphi$, i. e., pentru orice interpretare h, avem: $\tilde{h}(\varphi) = 1$ și $1 = \tilde{h}(\neg \varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, deci $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicție.

Propoziție

Algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice, $E/\sim$, este netrivială.

Demonstrație: $\sim=\sim_{\emptyset}$. Presupunem prin absurd că $0 = 1$ în algebra Boole $E/\sim$. Fie $\psi \in E$ și $\varphi = \psi \vee \neg\,\psi \in E$. Atunci $\widehat{\varphi} = 1$, așadar $\vdash \varphi$, conform lemei de mai sus privind caracterizarea teoremelor formale prin intermediul claselor acestora în algebra Lindenbaum–Tarski $E/\sim$. Corolarul anterior (**noncontradicția logicii propoziționale clasice**) arată că $\nvdash \neg\,\varphi$, așadar, conform aceleiași leme, $1 \neq \widehat{\neg\,\varphi} = \overline{\widehat{\varphi}} = \overline{1} = 0$, prin urmare $|E/\sim| \geq 2$, adică algebra Boole $E/\sim$ este netrivială.

Notă

A se vedea la seminar exemple de **demonstrații semantice** în logica propozițională clasică, realizate atât prin calcul boolean obișnuit în $\mathcal{L}_2$, cât și prin intermediul **tabelelor de adevăr (tabelelor semantice)**.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, obținerea **Teoremei de completitudine** prin raționamentul de mai sus efectuat pe cazul particular $\Sigma = \emptyset$, folosind algebra Lindenbaum–Tarski $E/\sim$ asociată lui $\mathcal{L}$, din care, apoi, se obține **Teorema de completitudine tare**.

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *și orice* $\Sigma \subseteq E$ *a. î.* $h \vDash \Sigma$*, există un unic morfism boolean* $\dddot{h}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2$ *care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice* $\varphi \in E$, $\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim_\Sigma} \arrow[dl, "\dddot{h}^{\Sigma}"] \\ & \mathcal{L}_2 & \end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\dddot{h}^{\Sigma}$ rezultă din condiția ca $\dddot{h}^{\Sigma}$ să închidă comutativ această diagramă, care face ca singura definiție posibilă pentru $\dddot{h}^{\Sigma}$ să fie: pentru orice $\varphi \in E$, $\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(p_\Sigma(\varphi)) := \tilde{h}(\varphi)$.

Cu această definiție, $\dddot{h}^{\Sigma}$ devine morfism Boolean, întrucât, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\dddot{h}^{\Sigma}(\overline{\widehat{\varphi}^{\Sigma}}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\neg\varphi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\neg\varphi) = \overline{\tilde{h}(\neg\varphi)} = \overline{\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma})}$,
$\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \widehat{\psi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) \vee \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\psi}^{\Sigma})$ și
$\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma} \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \wedge \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) \wedge \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\psi}^{\Sigma})$,
așadar $\dddot{h}^{\Sigma}$ comută și cu 0 și 1, conform proprietăților morfismelor Booleene.
Rămâne de demonstrat buna definire a lui $\dddot{h}^{\Sigma}$, i. e. independența sa de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$.

Orice interpretare induce un unic morfism boolean de la algebra Lindenbaum–Tarski la algebra Boole standard

Fie $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\widehat{\varphi}^{\Sigma} = \widehat{\psi}^{\Sigma}$, ceea ce este echivalent cu $\varphi \sim_{\Sigma} \psi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, ceea ce este echivalent cu $\Sigma \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$, conform **Teoremei de completitudine tare**. Dar $h \vDash \Sigma$, așadar $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi)$, i. e. $\dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi}^{\Sigma}) = \dddot{h}^{\Sigma}(\widehat{\psi}^{\Sigma})$. Așadar $\dddot{h}^{\Sigma}$ este bine definit.

Corolar

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\dddot{h} : E/\sim \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\dddot{h}(\widehat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/\sim \arrow[dl, "\dddot{h}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație: Se aplică propoziția precedentă pentru $\Sigma = \emptyset$.

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE *D*
8. Mulțimi consistente
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Sisteme deductive

Definiție

O mulțime Σ de enunțuri se numește *sistem deductiv* ddacă este închisă la deducții, i. e., pentru orice $\varphi \in E$, are loc:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \Sigma, \qquad \text{adică:}$$

$$\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \Sigma.$$

Remarcă

Implicația reciprocă în definiția anterioară este valabilă, conform definiției deducției sintactice, prin urmare o mulțime Σ de enunțuri este sistem deductiv ddacă, pentru orice $\varphi \in E$:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \Sigma, \qquad \text{adică:}$$

$$\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \Sigma.$$

Exemplu

În mod trivial, mulțimea E a tuturor enunțurilor este sistem deductiv.

Lemă

Orice sistem deductiv include mulțimea teoremelor formale.

Demonstrație: Dacă $\Sigma \subseteq E$ este sistem deductiv, iar φ este o teoremă formală, atunci $\emptyset \vdash \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi$ (a se revedea o remarcă asupra teoremelor formale sau Propoziția $\star$, (1)), deci $\varphi \in \Sigma$ conform definiției de mai sus.

Exemplu

Conform lemei anterioare, de exemplu, $\emptyset$ nu este sistem deductiv.

Lemă

Mulțimea teoremelor formale este sistem deductiv.

Demonstrație: Avem de demonstrat că, oricare ar fi $\varphi \in E$:

$$T \vdash \varphi \text{ implică } \varphi \in T, \text{ adică } \vdash \varphi.$$

Procedăm prin inducție după consecințele sintactice ale lui T, considerând proprietatea $\vdash \varphi$ asupra unui enunț arbitrar φ.
Dacă φ este o axiomă, atunci $\vdash \varphi$, iar $\varphi \in T$ înseamnă exact $\vdash \varphi$.
Dacă, pentru două enunțuri φ, ψ, au loc $\vdash \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow \varphi$, atunci $\vdash \varphi$, conform definiției teoremelor formale.
Așadar muțimea $T = \{\varphi \in E \mid \vdash \varphi\}$ include mulțimea $Ax \cup T$ și este închisă la (MP), prin urmare T include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, anume mulțimea $\{\varphi \in E \mid T \vdash \varphi\}$ a consecințelor sintactice ale lui T, prin urmare, oricare ar fi $\varphi \in E$, $T \vdash \varphi$ implică $\vdash \varphi$.

Mulțimea teoremelor formale este cel mai mic sistem deductiv

Propoziție

Mulțimea teoremelor formale este cel mai mic sistem deductiv.

Demonstrație: Conform celor două leme anterioare, T este cel mai mic sistem deductiv (desigur, în sensul incluziunii).

Notă

În următoarea propoziție, cu o terminologie pe care am folosit–o deja, spunem că o mulțime Σ de enunțuri este *închisă la* **modus ponens** ddacă, pentru orice enunțuri φ, ψ, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$.

Propoziție (caracterizare pentru sistemele deductive)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

1. Σ *este sistem deductiv;*
2. Σ *include mulțimea axiomelor și este închisă la* **modus ponens***;*
3. Σ *include mulțimea teoremelor formale și este închisă la* **modus ponens***.*

Demonstrație: ①⇒③: Presupunem că Σ este sistem deductiv.
Atunci, conform unei leme anterioare, $T \subseteq \Sigma$.

Mulțimea sistemelor deductive este familie Moore

Fie $\varphi, \psi \in E$ a. î. $\psi, \psi \to \varphi \in \Sigma$. Atunci, conform definiției consecințelor sintactice ale lui Σ, avem $\Sigma \vdash \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi$, prin urmare, cum Σ este sistem deductiv, $\varphi \in \Sigma$.

③⇒②: Din faptul că $Ax \subseteq T$.

②⇒①: Presupunem că $Ax \subseteq \Sigma$ și Σ este închisă la (MP).

Atunci $Ax \cup \Sigma = \Sigma$, în particular $Ax \cup \Sigma \subseteq \Sigma$.

Așadar Σ include mulțimea $Ax \cup \Sigma$ și este închisă la (MP), prin urmare Σ include cea mai mică mulțime cu aceste proprietăți, anume mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, adică: $\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \Sigma$.

Propoziție

Intersecția oricărei familii de sisteme deductive este sistem deductiv, i. e. mulțimea sistemelor deductive este un **sistem de închidere**.

Demonstrație: E este sistem deductiv.

Acum fie $(\Delta_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de sisteme deductive și $\Delta = \bigcap_{i\in I} \Delta_i$. Cum I este nevidă, avem $\Delta \subseteq \Delta_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Fie φ un enunț a. î. $\Delta \vdash \varphi$. Pentru fiecare $i \in I$, conform Propoziției $\star$, (1), rezultă că $\Delta_i \vdash \varphi$, de unde, cum Δ_i este sistem deductiv, rezultă că $\varphi \in \Delta_i$. Prin urmare $\varphi \in \Delta$, așadar Δ este sistem deductiv.

Sistemul deductiv generat de o mulțime de enunțuri

Deci familia sistemelor deductive este închisă la intersecții arbitrare.

Notație

Notăm cu $D : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ operatorul de închidere asociat sistemului de închidere format din sistemele deductive.

Corolar

Pentru orice mulțime Σ de enunțuri, $D(\Sigma)$ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, anume intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Demonstrație: Conform propoziției anterioare și definiției operatorului de închidere asociat unui sistem de închidere.

Definiție

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma)$ se numește *sistemul deductiv generat de* Σ.

Remarcă

Conform definiției unui operator de închidere, pentru orice $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$:

1. $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ (D este **extensiv**);
2. $\Sigma \subseteq \Delta$ implică $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$ (D este **crescător**);
3. $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$ (D este **idempotent**);

Propoziție (sistemul deductiv generat de o mulțime Σ de enunțuri este mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ)

Pentru orice mulțime Σ de enunțuri:

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}.$$

Demonstrație: Notăm cu Δ mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ: $\Delta = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$. Atunci $\Sigma \subseteq \Delta$.
Cum $T \subseteq \Delta$ și Δ e închisă la (MP), din propoziția de mai sus privind caracterizarea sistemelor deductive rezultă că Δ e sistem deductiv.
Acum fie Γ un sistem deductiv a. î. $\Sigma \subseteq \Gamma$, și fie φ un enunț. Dacă $\varphi \in \Delta$, adică $\Sigma \vdash \varphi$, prin urmare $\Gamma \vdash \varphi$ conform Propoziției $\star$, (1), așadar $\varphi \in \Gamma$, întrucât Γ este sistem deductiv. Deci $\Gamma \subseteq \Delta$.
Așadar Δ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, adică $\Delta = D(\Sigma)$.

Corolar

Operatorul de închidere D este finitar, *adică, oricare ar fi $\Sigma \subseteq E$, are loc:*

$$D(\Sigma) = \bigcup\{D(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0\}.$$

Demonstrație: Fie $\Sigma \subseteq E$. Conform propoziției anterioare și Propoziției $\star$, (2),

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \{\varphi \in E \mid (\exists\, \Gamma \subseteq \Sigma)\, (|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)\} = \bigcup_{\Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0} \{\varphi \in E \mid \Gamma \vdash \varphi\} = \bigcup_{\Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0} D(\Gamma).$$

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE D
8. **Mulțimi consistente**
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Mulțimi consistente (i. e. necontradictorii)

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri.

- Σ se zice *inconsistentă* ddacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in E$ (i. e. ddacă orice enunț este consecință sintactică a lui Σ);
- Σ se zice *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă.

Exemplu

Mulțimea E a tuturor enunțurilor este inconsistentă.

Remarcă

Conform Propoziției $\star$, (1), pentru orice mulțimi Σ, Δ de enunțuri, dacă $\Sigma \subseteq \Delta$, atunci $\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \{\varphi \in E \mid \Delta \vdash \varphi\}$, prin urmare:

- orice submulțime a unei mulțimi consistente este consistentă;
- orice mulțime care include o mulțime inconsistentă este inconsistentă.

Remarcă

Mulțimea T a teoremelor formale este consistentă.
Într–adevăr, conform unei propoziții de mai sus, T este sistem deductiv, deci este egală cu mulțimea enunțurilor φ cu $T \vdash \varphi$, iar $T \subsetneq E$, conform **principiului noncontradicției**.

Remarcă (consecință a celor două remarci precedente)

$\emptyset$ și Ax sunt mulțimi consistente.

Propoziție

Sistemul deductiv generat de o mulțime consistentă este o mulțime consistentă.

Demonstrație: Dacă $\Sigma \subseteq E$ este o mulțime consistentă, atunci, conform unei propoziții de mai sus privind elementele lui $D(\Sigma)$, avem:
$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} \subsetneq E$. Cum $D(\Sigma)$ este sistem deductiv, rezultă că $\{\varphi \in E \mid D(\Sigma) \vdash \varphi\} = D(\Sigma) \subsetneq E$, așadar $D(\Sigma)$ este o mulțime consistentă.

Propoziție (mulțimile consistente sunt mulțimile de enunțuri din care nu se deduc contradicții)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

1. Σ *este inconsistentă;*
2. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\,\varphi$;*
3. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\,\varphi$;*
4. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \neg\,(\varphi \rightarrow \varphi)$;*
5. *pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg\,(\varphi \rightarrow \varphi)$;*

Demonstrație: ①$\Leftrightarrow$② Conform (MP) și teoremei formale **falsul implică orice**.
②$\Leftrightarrow$③: Conform unei leme care precedă definiția relației de echivalență $\sim_\Sigma$

utilizată pentru a construi algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim_\Sigma}$.
②⇔④: Pentru orice $\varphi \in E$ și orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$,
$\tilde{h}(\neg(\varphi \to \varphi)) = \overline{\tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\varphi)} = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \tilde{h}(\varphi)} = \tilde{h}(\varphi) \wedge \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \tilde{h}(\varphi \wedge \neg \varphi)$,
așadar, conform (TCT) și definiției consecințelor semantice, $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi \wedge \neg \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \neg(\varphi \to \varphi)$ ddacă $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.
①⇒⑤: Trivial.
⑤⇒④: Trivial.

Corolar (ⓒ)

Fie $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \neg \varphi$;
2. $\Sigma \cup \{\neg \varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \varphi$.

Demonstrație: ① Dacă $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg \varphi$, așadar, conform (TD), $\Sigma \vdash \varphi \to \neg \varphi$, de unde, conform regulii de deducție **adevărul nu implică falsul** din cursul anterior, rezultă că $\Sigma \vdash \neg \varphi$.
Dacă $\Sigma \vdash \neg \varphi$, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg \varphi$ conform Propoziției $\star$, (1), iar, cum $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, din propoziția anterioară rezultă că $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.
② Conform ① și (TCT), $\Sigma \cup \{\neg \varphi\}$ este inconsistentă ddacă $\Sigma \vdash \neg\neg \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \neg\neg \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi$, întrucât, pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\neg\neg \varphi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)}} = \tilde{h}(\varphi)$.

Corolar (ⓔ)

ⓐ *Pentru orice mulțime $\Sigma \subseteq E$, au loc echivalențele:*

1. *Σ este inconsistentă;*
2. *există $\varphi \in \Sigma$ astfel încât $\Sigma \vdash \neg\,\varphi$.*

ⓑ *Pentru orice mulțime nevidă $\Sigma \subseteq E$, au loc echivalențele:*

1. *Σ este inconsistentă;*
2. *există $\varphi \in \Sigma$ astfel încât $\Sigma \vdash \neg\,\varphi$;*
3. *pentru orice $\varphi \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \neg\,\varphi$.*

Demonstrație: ⓐ Conform Corolarului ⓒ, ②⇒①.
Conform Corolarului ⓒ și faptului că $\emptyset$ e consistentă, ①⇒②.
ⓑ Conform punctului ⓐ, ①⇔②.
Conform Corolarului ⓒ, ①⇒③.
Cum $\Sigma \neq \emptyset$, ③⇒②.

Propoziție

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$*, are loc echivalența:* Σ *e consistentă ddacă algebra Boole* $E/_{\sim_\Sigma}$ *e netrivială.*

Demonstrație: Fie $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$ este trivială ddacă $0_\Sigma = 1_\Sigma$ ddacă $1_\Sigma \leq 0_\Sigma$, adică $\widehat{\varphi \vee \neg\,\varphi}^{\Sigma} \leq_\Sigma \widehat{\varphi \wedge \neg\,\varphi}^{\Sigma}$, i. e. $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\,\varphi)$, ceea ce, conform **MP**, **PTE** și (A_1), este echivalent cu $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\,\varphi$ ("$\Rightarrow$" rezultă conform **MP** și **PTE**, care ne asigură de faptul că $\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\,\varphi$, iar "$\Leftarrow$" conform **MP** și (A_1), care ne asigură de faptul că $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\,\varphi) \rightarrow ((\varphi \vee \neg\,\varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\,\varphi)))$, ceea ce înseamnă că Σ e inconsistentă conform echivalenței ①⇔② din propoziția anterioară.

Definiție (mulțimi consistente maximale)

Un element maximal al mulțimii mulțimilor consistente raportat la incluziune se numește *mulțime consistentă maximală*.

Propoziție

Orice mulțime consistentă este inclusă într–o mulțime consistentă maximală.

Demonstrație: Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime consistentă, și fie $\mathcal{M}$ mulțimea mulțimilor consistente care includ pe Σ. Atunci $\Sigma \in \mathcal{M}$, așadar $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
Demonstrăm că $(\mathcal{M}, \subseteq)$ este mulțime inductiv ordonată, apoi aplicăm **Lema lui**

Zorn.

Fie $\mathcal{T} = (\Gamma_i)_{i \in I}$ o parte nevidă total ordonată a lui $\mathcal{M}$, i. e. $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$, a. î., pentru orice $i, j \in I$, avem $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ sau $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$. Notăm cu $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \subseteq E$.

Cum $I \neq \emptyset$, rezultă că $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ pentru fiecare $i \in I$, adică Γ este majorant pentru $\mathcal{T}$. În plus, cum, pentru fiecare $i \in I$, avem $\Gamma_i \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$, așadar $\Sigma \subseteq \Gamma_i$, rezultă că $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Fie φ un enunț. Presupunem prin absurd că Γ e inconsistentă, așadar $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \neg\,\varphi$. Conform Propoziției $\star$, (2), există $k, n \in \mathbb{N}^*$ și $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \delta_1, \ldots, \delta_n \in \Gamma$ a. î. $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \vdash \varphi$ și $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \vdash \neg\,\varphi$.

Dar $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$, așadar există $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_n \in I$ a. î. $\gamma_1 \in \Gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_k \in \Gamma_{i_k}, \delta_1 \in \Gamma_{j_1}, \ldots, \delta_n \in \Gamma_{j_n}$. Cum $(\mathcal{T}, \subseteq)$ este lanț, și deci $(\{\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_k}, \Gamma_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_n}\}, \subseteq)$ este lanț finit, rezultă că există $m \in \{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_n\}$ a. î. $\Gamma_m = \max(\{\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_k}, \Gamma_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_n}\}, \subseteq)$, așadar $\Gamma_m = \Gamma_{i_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{i_k} \cup \Gamma_{j_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{j_n}$, prin urmare, conform Propoziției $\star$, (1), $\Gamma_m \vdash \varphi$ și $\Gamma_m \vdash \neg\,\varphi$, așadar, conform unei propoziții anterioare, Γ_m este inconsistentă, ceea ce contrazice faptul că $\Gamma_m \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$.

Așadar Γ este mulțime consistentă, și, cum $\Sigma \subseteq \Gamma$, rezultă că $\Gamma \in \mathcal{M}$.

În concluzie, orice parte total ordonată a mulțimii ordonate nevide $(\mathcal{M}, \subseteq)$ are un majorant în această mulțime ordonată, adică $(\mathcal{M}, \subseteq)$ este mulțime inductiv ordonată, prin urmare, conform **Lemei lui Zorn**, $(\mathcal{M}, \subseteq)$ are elemente maximale.

Fie Δ un element maximal al lui $(\mathcal{M}, \subseteq)$. Atunci $\Delta \in \mathcal{M}$, adică Δ este mulțime consistentă cu $\Sigma \subseteq \Delta$. Presupunem prin absurd că există o mulțime consistentă Λ cu $\Delta \subsetneq \Lambda$. Atunci $\Sigma \subseteq \Lambda$, așadar $\Lambda \in \mathcal{M}$, ceea ce contrazice maximalitatea lui Δ în $\mathcal{M}$. Prin urmare Δ este mulțime consistentă maximală.

Corolar

Există mulțimi consistente maximale.

Demonstrație: Aplicăm propoziția anterioară, de exemplu, pentru mulțimea consistentă $\emptyset$.

Propoziție

Dacă Σ este o mulțime consistentă maximală, atunci:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă* $\begin{cases} \varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma; \end{cases}$
3. *oricare ar fi $\varphi \in E$, are loc: $\varphi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \notin \Sigma$;*
4. *pentru orice $\varphi, \psi \in E$: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă* $\begin{cases} \neg\varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma. \end{cases}$

Demonstrație: (1) Conform unei propoziții de mai sus, $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$, care este tot mulțime consistentă, așadar, conform maximalității lui Σ, $\Sigma = D(\Sigma)$, care este un

sistem deductiv.
② Fie $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Sigma$. Presupunem prin absurd că $\varphi \notin \Sigma$ și $\psi \notin \Sigma$. Cum Σ este mulțime consistentă maximală, rezultă că $\Sigma \cup \{\varphi\}$ și $\Sigma \cup \{\psi\}$ sunt inconsistente, așadar, pentru orice enunț χ: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$ și $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \chi$, deci, conform (TD), $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, deci, conform celei de–a treia reguli de deducție **slăbirea**, $\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$, așadar, conform (TD), $\Sigma = \Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$, adică din Σ se deduce orice enunț, ceea ce contrazice faptul că Σ e consistentă. Așadar $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$.
Acum fie $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \psi$, prin urmare, conform primelor două reguli de deducție **slăbirea**, $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$. Dar, conform ①, Σ este sistem deductiv, așadar $\varphi \vee \psi \in \Sigma$.
③ Fie $\varphi \in E$. Conform ①, Σ este sistem deductiv, așadar $\varphi \vee \neg\varphi \in T \subseteq \Sigma$ conform (PTE) și unei proprietăți a sistemelor deductive, prin urmare $\varphi \in \Sigma$ sau $\neg\varphi \in \Sigma$ conform ②. Cum Σ este mulțime consistentă, conform unei propoziții anterioare nu putem avea $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\varphi$, așadar nu putem avea $\varphi \in \Sigma$ și $\neg\varphi \in \Sigma$, deci exact unul dintre enunțurile φ și $\neg\varphi$ se află în Σ, adică: $\varphi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \notin \Sigma$.
④ Fie $\varphi, \psi \in E$. Este imediat că, pentru orice interpretare h, are loc $\tilde{h}(\varphi \rightarrow \psi) = \tilde{h}(\neg\varphi \vee \psi)$. Din ②, (TCT) și ①, conform căruia Σ e sistem deductiv, rezultă că au loc echivalențele: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vDash \neg\varphi \vee \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \neg\varphi \vee \psi$ ddacă $\neg\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă $[\neg\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma]$.

Mulțimile consistente sunt exact mulțimile satisfiabile

Remarcă

T (și, așadar, orice submulțime a lui T) admite ca model orice interpretare. Într–adevăr, pentru orice $\varphi \in T$ și orice interpretare h, avem $\vdash \varphi$, așadar $\vDash \varphi$ conform (TC), prin urmare $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Propoziție

O mulțime de enunțuri e satisfiabilă ddacă e consistentă.

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Amintesc că $\emptyset$ e consistentă și satisfiabilă (chiar $(\forall\, h : V \to \mathcal{L}_2)\,(h \vDash \emptyset)$). Acum fie Σ o mulțime nevidă de enunțuri care admite un model h. Atunci, pentru orice $\varphi \in \Sigma$, $\tilde{h}(\varphi) = 1$, așadar $\tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, prin urmare $\Sigma \nvDash \neg\,\varphi$, așadar $\Sigma \nvdash \neg\,\varphi$ conform (TCT), deci Σ este consistentă.

"$\Leftarrow$": Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime consistentă și fie $\Gamma \subseteq E$ o mulțime consistentă maximală a. î. $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Definim $h : V \to \mathcal{L}_2$ prin: oricare ar fi $p \in V$, $h(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in \Gamma, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Adică h este funcția caracteristică lui $V \cap \Gamma$. Să demonstrăm că $\tilde{h}$ este funcția caracteristică lui Γ, adică, pentru orice $\varphi \in E$, $\tilde{h}(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \varphi \in \Gamma, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Procedăm prin inducție după conceptul de enunț, considerând proprietatea asupra unui enunț ε:

$P(\varepsilon): \quad \tilde{h}(\varepsilon) = 1$ ddacă $\varepsilon \in \Gamma$.

Cum $\tilde{h}\mid_V = h$, conform definiției lui h, orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.

Fie ψ un enunț care satisface proprietatea P, și $\varphi = \neg\,\psi$, astfel că $\tilde{h}(\varphi) = \overline{\tilde{h}(\psi)}$. Conform propoziției precedente, $\varphi \in \Gamma$ ddacă $\psi \notin \Gamma$ ddacă $\tilde{h}(\psi) = 0$ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$, deci φ satisface proprietatea P.

Acum fie ψ, χ enunțuri care satisfac proprietatea P, și $\varphi = \psi \to \chi$, astfel că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi)$. Atunci $\tilde{h}(\varphi) = 0$ ddacă $[\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\chi) = 0]$ ddacă $[\psi \in \Gamma$ și $\chi \notin \Gamma]$ ddacă $[\neg\,\psi \notin \Gamma$ și $\chi \notin \Gamma]$ ddacă $\varphi \notin \Gamma$, conform propoziției precedente, așadar φ satisface proprietatea P.

Prin urmare mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P include pe V și este închisă la $\neg$ și $\to$, așadar este egală cu mulțimea tuturor enunțurilor, adică, pentru orice enunț φ, avem: $[\tilde{h}(\varphi) = 1$ ddacă $\varphi \in \Gamma]$, în particular $h \vDash \Gamma$, așadar $h \vDash \Sigma$ întrucât $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Notă

A se vedea, în cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia cursului, cum se obține **Teorema de completitudine tare** din **Teorema de completitudine**, folosind faptul că orice mulțime consistentă e satisfiabilă.

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE *D*
8. Mulțimi consistente
9. **Rezoluția în calculul propozițional clasic**
10. Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Pentru această secțiune a cursului, precum și pentru rezoluția în calculul cu predicate, care stă la baza implementării limbajului Prolog, se poate consulta cartea următoare:

G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*

- traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică și Programare Logică*, Editura Tehnică, București, 1998.

Definiție (FNC și FND)

- Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația unei variabile propoziționale:

$$p \text{ sau } \neg\, p, \text{ cu } p \in V.$$

- O *clauză* este o disjuncție de literali.

Orice clauză se identifică cu mulțimea literalilor care o compun.

- Un enunț $\varphi (\in E)$ *este în formă normală conjunctivă* (sau *este o formă normală conjunctivă*) (*FNC*) ddacă φ este o conjuncție de clauze, i. e. o conjuncție de disjuncții de literali.

Orice FNC se identifică cu mulțimea clauzelor care o compun.

- Un enunț $\varphi (\in E)$ *este în formă normală disjunctivă* (sau *este o formă normală disjunctivă*) (*FND*) ddacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Observație

Întrucât toate enunțurile au lungime finită (i. e. sunt șiruri finite de simboluri primitive), conjuncțiile și disjuncțiile la care face referire definiția de mai sus sunt finite.

Relația de **echivalență semantică**: $\sim = \sim_{\emptyset} \in \mathrm{Eq}(E)$: relația de echivalență pe E care servește la construirea algebrei Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Folosind definiția lui $\sim$, **Teorema de completitudine**, definiția adevărurilor semantice, compatibilitatea oricărei interpretări cu conectorii logici și o proprietate valabilă în orice algebră Boole, obținem:

Remarcă (două enunțuri sunt echivalente semantic ddacă au aceeași valoare în orice interpretare)

Oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele echivalențe:
$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\, (\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\, (\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\, (\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$.

Așadar:

Remarcă

Dacă $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \sim \psi$, atunci: φ e satisfiabil ddacă ψ e satisfiabil.

Punerea unui enunț în FNC (sau FND)

Propoziție (existența FNC și FND pentru orice enunț)

Oricare ar fi $\varphi \in E$, există o FNC $\psi \in E$ și o FND $\chi \in E$ (care nu sunt unice), astfel încât $\varphi \sim \psi \sim \chi$.

Remarcă

Oricare ar fi $\varphi \in E$, putem determina o FNC (sau FND) $\psi \in E$ cu $\varphi \sim \gamma$, folosind un tabel semantic pentru φ, sau folosind următoarele proprietăți imediate (a se vedea seminarul), valabile pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

- **înlocuirea implicațiilor și echivalențelor:**

$$\alpha \to \beta \sim \neg\, \alpha \vee \beta \text{ și } \alpha \leftrightarrow \beta \sim (\neg\, \alpha \vee \beta) \wedge (\neg\, \beta \vee \alpha)$$

- **idempotența lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \alpha \sim \alpha \wedge \alpha \sim \alpha$$

- **comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha \text{ și } \alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$$

Remarcă (continuare)

- **asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \sim \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \text{ și } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \sim \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

- **principiul dublei negații:**

$$\neg\neg\alpha \sim \alpha$$

- **legile lui de Morgan:**

$$\neg(\alpha \vee \beta) \sim \neg\alpha \wedge \neg\beta \text{ și } \neg(\alpha \wedge \beta) \sim \neg\alpha \vee \neg\beta$$

- **absorbția:**

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \sim \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$$

- **legile de distributivitate:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ și } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

- **proprietățile:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \sim \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta \wedge \gamma) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta \vee \gamma) \sim \alpha$$

Observație (echivalența semantică ($\sim$) versus egalitatea de enunțuri)

Fie $\varphi \in E$. Atunci $\varphi \sim \neg\neg\varphi$, dar $\varphi \neq \neg\neg\varphi$. De exemplu, enunțurile *"Plouă."* și *"Nu e adevărat că nu plouă."* sunt echivalente semantic (adică au același sens, același înțeles), dar nu coincid (sunt fraze diferite, nici nu sunt compuse din același număr de cuvinte).

- Următoarea notație este definită, recursiv, pe întreaga mulțime E:

Notație (mulțimea variabilelor propoziționale care apar într–un enunț φ se notează $V(\varphi)$)

Pentru orice $p \in V$ și orice $\varphi, \psi \in E$, notăm:

1. $V(p) = \{p\}$
2. $V(\neg\varphi) = V(\varphi)$
3. $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

- Amintesc că, într–un tabel semantic pentru un enunț φ, ne interesează variabilele propoziționale care apar în φ, adică elementele lui $V(\varphi)$.

A se vedea, la seminar, metoda prin care un enunț φ poate fi pus în FNC folosind un tabel semantic pentru φ.

Definiție (formă clauzală)

Fie $\varphi \in E$ și $M \subseteq E$, astfel încât M este finită.

- O *formă clauzală* pentru φ este o FNC (i. e. o mulțime de clauze) ψ cu $\psi \sim \varphi$.
- O *formă clauzală* pentru M este o reuniune de forme clauzale pentru elementele lui M.

Remarcă

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci formele clauzale pentru o mulțime finită $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset E$ coincid cu formele clauzale pentru enunțul $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.
Orice enunț, prin urmare orice mulțime finită de enunțuri poate fi pusă într–o formă clauzală.

Propoziție

O mulțime de enunțuri e satisfiabilă ddacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Demonstrație: Fie $\Gamma \subseteq E$.
"$\Rightarrow$:" Orice model pentru Γ este model pentru toate submulțimile lui Γ, în particular pentru toate submulțimile finite ale lui Γ.
"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că orice submulțime finită a lui Γ este satisfiabilă.
Presupunem prin absurd că Γ e nesatisfiabilă. Cum $\emptyset$ e consistentă, deci

satisfiabilă, rezultă că Γ e nevidă, așadar există $\varphi \in \Gamma$. Conform Corolarului ⓒ, rezultă că $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash \neg\,\varphi$, așadar, conform Propoziției $\star$, (2), există o mulțime finită $\Lambda \subseteq \Gamma \setminus \{\varphi\}$ astfel încât $\Lambda \vdash \neg\,\varphi$, așadar, din nou conform Corolarului ⓒ, submulțimea finită $\Lambda \cup \{\varphi\} \subseteq \Gamma$ e nesatisfiabilă; contradicție. Așadar Γ e satisfiabilă.

Propoziție (conform căreia tehnica rezoluției de mai jos poate fi folosită pentru a demonstra teoreme formale sau deducții formale din ipoteze)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in E$ și $\Gamma \subseteq E$.

ⓐ *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$
2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\,\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\,\psi$ *nu e satisfiabil*

ⓑ *În plus, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\vDash \psi$
2. $\neg\,\psi$ *nu e satisfiabil*

ⓒ *Mai mult, următoarele afirmații sunt echivalente:*

Deducție semantică versus satisfiabilitate

1. $\Gamma \vDash \psi$
2. $\Gamma \cup \{\neg \psi\}$ nu e satisfiabilă
3. $\neg \psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg \psi$ nu e satisfiabil.

Demonstrație: Putem folosi Corolarul (c), sau definiția deducției semantice și a adevărurilor semantice, proprietatea interpretărilor de a transforma conectorii logici în operații booleene în $\mathcal{L}_2$, precum și faptul că $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 \neq 1$, ca mai jos:
(a) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\varphi_1) = \ldots = \tilde{h}(\varphi_n) = 1 \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1) = \ldots = \tilde{h}(\varphi_n) = \tilde{h}(\neg \psi) = 1$ ddacă $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg \psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg \psi) = 1$ ddacă $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg \psi$ nu e satisfiabil.
(b) $\vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\neg \psi) = 1$ ddacă $\neg \psi$ nu e satisfiabil.
(c) $\Gamma \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $h \vDash \Gamma \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \Gamma \cup \{\neg \psi\}$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg \psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă $\neg \psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg \psi\}$ nu e satisfiabilă, conform lemei anterioare, ddacă $\neg \psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg \psi$ nu e satisfiabil, conform (a).

Problema satisfiabilității

Remarcă

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E$ și $h : V \to \mathcal{L}_2$. Cum am observat mai sus:

- formele clauzale pentru o mulțime finită de enunțuri $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sunt exact formele clauzale pentru enunțul $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$;
- $h \vDash \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ddacă $h \vDash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, în particular mulțimea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ e satisfiabilă ddacă enunțul $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ e satisfiabil.

Problemă

Fiind dat un enunț φ în FNC, să se determine dacă φ e satisfiabil.

- O soluție computațională pentru problema de mai sus este **algoritmul Davis–Putnam**, bazat pe **rezoluție**.
- **Rezoluția propozițională** poate fi privită ca o regulă de deducție pentru calculul propozițional clasic.
- Utilizând **rezoluția**, se poate construi un demonstrator automat **corect și complet** pentru calculul propozițional clasic, fără alte teoreme formale și reguli de deducție, pentru că **regula rezoluției este echivalentă cu schemele de axiome** (A_1)**,** (A_2)**,** (A_3) **plus regula MP**.
- Limbajul de programare logică PROLOG este fundamentat pe rezoluția pentru calculul cu predicate clasic (care înglobează rezoluția propozițională).

Clauze și mulțimi de clauze

Definiție (și mnemonic)

- O *clauză* este o mulțime finită de literali ($\{L_1, \ldots, L_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$).
- **Clauza vidă** (i. e. clauza fără literali, clauza fără elemente) se notează cu $\square$ (pentru a o deosebi de **mulțimea vidă de clauze**, $\emptyset$, în cele ce urmează).
- O clauză C se zice *trivială* ddacă există $p \in V$ cu $p, \neg p \in C$.
- Orice clauză nevidă $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) se identifică cu enunțul în FND $\varphi = L_1 \vee \ldots \vee L_n$. Clauza C se zice *satisfiabilă* ddacă enunțul φ e satisfiabil.
- Clauza vidă ($\square$) e considerată **nesatisfiabilă** (**justificare:** $\square$ se identifică cu $\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i$; pentru orice $h : V \to L_2$, $\tilde{h}(\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i) = \bigvee\limits_{i \in \emptyset} \tilde{h}(L_i) = 0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$).
- Orice mulțime finită de clauze $M = \{C_1, \ldots, C_k\}$ (cu $k \in \mathbb{N}$ și $C_1, \ldots, C_k$ clauze) se identifică cu $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$, deci cu o FNC.
- O mulțime finită de clauze se zice *satisfiabilă* ddacă toate clauzele din componența ei sunt satisfăcute de o aceeași interpretare (au un același model, au un model comun).

Satisfiabilitate pentru (mulțimi de) clauze

Remarcă

Sunt imediate următoarele proprietăți:

- o mulțime finită de clauze este satisfiabilă ddacă FNC asociată ei e satisfiabilă;
- $\emptyset$ (mulțimea vidă de clauze) este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice clauză trivială e satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice mulțime finită de clauze triviale este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare.

(Rezoluția (regulă de deducție pentru logica propozițională clasică))

Pentru orice clauze C, D, dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, atunci:

$$\frac{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}}{C \cup D}, \text{ adică } \frac{(C \vee p) \wedge (D \vee \neg p)}{C \vee D}$$

Propoziție

Fie C și D clauze, iar S, T și U mulțimi finite de clauze. Atunci:

1. *dacă C e satisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci D e satisfiabilă; prin urmare, dacă D e nesatisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci C e nesatisfiabilă;*
2. *$C \cup D$ e satisfiabilă ddacă C e satisfiabilă sau D e satisfiabilă;*
3. *dacă $p \in V \setminus V(C)$, atunci $C \cup \{p\}$ și $C \cup \{\neg p\}$ sunt satisfiabile;*
4. *dacă S e nesatisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci T e nesatisfiabilă; prin urmare, dacă T e satisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci S e satisfiabilă;*
5. *dacă U e satisfiabilă și există $p \in V \setminus V(U)$, $G \in S$ și $H \in T$ astfel încât $p \in G \setminus H$ și $\neg p \in H \setminus G$, atunci $U \cup S$ și $U \cup T$ sunt satisfiabile;*
6. *dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, iar mulțimea de clauze $\{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}\}$ e satisfiabilă, atunci $C \cup D$ e satisfiabilă (**regula rezoluției**).*

Definiție (derivări prin rezoluție)

Fie o mulțime finită de clauze $\{D_1, \ldots, D_k\}$ și φ enunțul în FNC corespunzător acestei mulțimi de clauze:

$$\varphi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_k.$$

Dacă $i, j \in \overline{1, k}$ a. î. $i \neq j$ și există $p \in V$ cu $p \in D_i$ și $\neg\, p \in D_j$, atunci mulțimea de clauze $R := \{(D_i \setminus \{p\}) \cup (D_j \setminus \{\neg\, p\})\} \cup \{D_t \mid t \in \overline{1, k} \setminus \{i, j\}\}$ sau o FNC corespunzătoare ei, de exemplu enunțul

$$((D_i \setminus \{p\}) \vee (D_j \setminus \{\neg\, p\})) \wedge \bigwedge_{t \in \overline{1,k} \setminus \{i,j\}} D_t,$$

se numește *rezolvent* al enunțului φ sau al mulțimii de clauze $\{D_1, \ldots, D_k\}$. Deducția

$$\frac{D_1, \ldots, D_k}{R}$$

se numește *derivare prin rezoluție* a lui φ sau a mulțimii $\{D_1, \ldots, D_k\}$. Vom numi orice succesiune de derivări prin rezoluție tot *derivare prin rezoluție*. O succesiune de derivări prin rezoluție care începe cu o FNC/mulțime de clauze μ și se termină cu o FNC/mulțime de clauze ν se numește *derivare prin rezoluție a lui ν din μ*.

Notă

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității pentru mulțimi (finite) de enunțuri în formă clauzală.

Notă

Aplicarea regulii rezoluției simultan pentru două variabile diferite este **greșită**.

Remarcă

- Dacă într–o derivare prin rezoluție a unei mulțimi finite M de enunțuri în **formă clauzală** apare $\square$, atunci M nu e satisfiabilă.
- În schimb, o derivare prin rezoluție a lui M în care nu apare $\square$ **nu arată** că M ar fi satisfiabilă.
- Pentru a arăta că o mulțime finită M de enunțuri (în formă clauzală) este satisfiabilă, putem găsi un model pentru M sau putem aplica **algoritmul Davis–Putnam**, care este echivalent cu obținerea tuturor derivărilor posibile prin rezoluție ale formei clauzale a lui M.

Algoritmul Davis–Putnam (abreviat *DP*)

INPUT: mulțime finită și nevidă S de clauze netriviale;

$S_1 := S$; $i := 1$;

PASUL 1: luăm o $v_i \in V(S_i)$;
$T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg v_i \in C\}$;
$T_i^1 := \{C \in S_i \mid v_i \in C\}$;
$T_i := T_i^0 \cup T_i^1$;

PASUL 2: dacă $T_i^0 \neq \emptyset$ și $T_i^1 \neq \emptyset$,
atunci $U_i := \{(C_0 \setminus \{\neg v_i\}) \cup (C_1 \setminus \{v_i\}) \mid C_0 \in T_i^0, C_1 \in T_i^1\}$;
altfel $U_i := \emptyset$;

PASUL 3: $S_{i+1} := (S_i \setminus T_i) \cup U_i$;
$S_{i+1} := S_{i+1} \setminus \{C \in S_{i+1} \mid (\exists\, p \in V)(p, \neg p \in C)\}$
(eliminăm din S_{i+1} clauzele triviale);

PASUL 4: dacă $S_{i+1} = \emptyset$,
atunci OUTPUT: S *e satisfiabilă*;
altfel, dacă $\square \in S_{i+1}$,
atunci OUTPUT: S *nu e satisfiabilă*;
altfel $i := i + 1$ și mergi la PASUL 1.

Propoziție (terminarea algoritmului DP)

Algoritmul DP se termină după cel mult $|V(S)|$ execuții ale pașilor $1-4$, cu $S_{i+1}=\emptyset$ sau $\square\in S_{i+1}$.

Demonstrație: Cu notațiile din algoritmul DP, are loc, pentru fiecare i:

$$V(S_{i+1})\subsetneq V(S_i),$$

așadar algoritmul DP se termină după cel mult $|V(S)|$ iterații.

Propoziție

Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze.
Dacă S e satisfiabilă, atunci orice rezolvent al lui S e satisfiabil.

Demonstrație: Fie φ enunțul în FNC corespunzător lui S și $\rho\in E$ un rezolvent al lui φ. Atunci, pentru un enunț γ în FNC, o variabilă propozițională p și două clauze C și D cu $p\notin V(C)\cup V(D)$, avem:

$$\varphi=(C\vee p)\wedge(D\vee\neg p)\wedge\gamma \quad \text{și} \quad \rho=(C\vee D)\wedge\gamma,$$

așadar, pentru orice interpretare h, avem:
$\tilde{h}(\varphi)=(\tilde{h}(C)\vee h(p))\wedge(\tilde{h}(D)\vee\overline{h(p)})\wedge\tilde{h}(\gamma)=$
$((\tilde{h}(C)\wedge\tilde{h}(D))\vee(\tilde{h}(C)\wedge\overline{h(p)})\vee(\tilde{h}(D)\wedge h(p))\vee(h(p)\wedge\overline{h(p)}))\wedge\tilde{h}(\gamma)=$
$((\tilde{h}(C)\wedge\tilde{h}(D))\vee(\tilde{h}(C)\wedge\overline{h(p)})\vee(\tilde{h}(D)\wedge h(p)))\wedge\tilde{h}(\gamma)\leq((\tilde{h}(C)\vee\tilde{h}(D))\wedge\tilde{h}(\gamma)=\tilde{\rho},$

prin urmare orice interpretare care satisface pe φ satisface și pe ρ; în particular, dacă φ e satisfiabil, atunci ρ e satisfiabil.

Corolar

Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze.
Dacă S e satisfiabilă, atunci algoritmul DP, aplicat lui S, se termină cu $S_{i+1} = \emptyset$.

Teoremă

Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *S nu e satisfiabilă;*
2. *există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ (sau a unei mulțimi de clauze conținând pe $\square$) din S.*

Demonstrație: ②⇒①: A se observa că $\square$ se poate obține prin rezoluție numai din două clauze de forma $\{p\}, \{\neg p\}$, cu $p \in V$, și orice mulțime formată din două astfel de clauze e nesatisfiabilă.
$\square$ nu e satisfiabilă, așadar, conform propoziției anterioare, dacă există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din S, atunci S e nesatisfiabilă.
①⇒②: **Schița demonstrației,** după articolul:

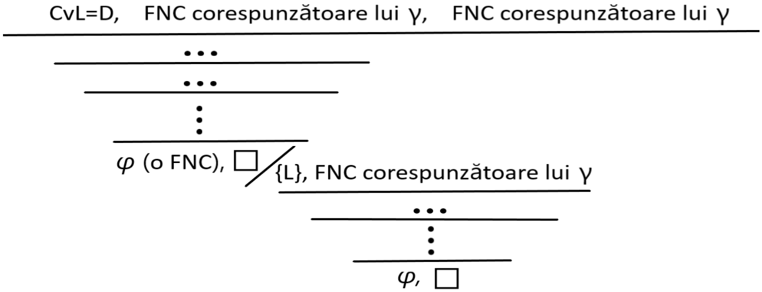
J. Gallier, The Completeness of Propositional Resolution: a Simple and Constructive Proof, *Logical Methods in Computer Science* **2**(5:3) (2006), 1–7.

Presupunem că S e nesatisfiabilă.
Pentru orice clauză D, notăm $c(D) := |D| - 1$ (numărul de literali din compoziția lui D minus o unitate, adică numărul de disjuncții din D, i.e. dintre literalii lui D).
Pentru orice mulțime finită și nevidă de clauze $M = \{D_1, \ldots, D_k\}$, notăm $c(M) := c(D_1) + \ldots + c(D_k)$, adică numărul de disjuncții din M.
Procedăm prin inducție după $c(S)$.
Pasul de verificare: Dacă $c(S) = 0$, atunci $c(D) = 0$ pentru fiecare clauză D a lui S, așadar fiecare clauză a lui S este un literal. Cum S e nesatisfiabilă, există $p \in V$ a. î. p și $\neg p$ sunt clauze ale lui S, prin urmare din S se poate deriva prin rezoluție o mulțime de clauze care conține pe $\square$.
Pasul de inducție: Presupunem că $c(S) > 0$ și că orice mulțime nesatisfiabilă M de clauze cu $c(M) < c(S)$ are o derivare prin rezoluție care se termină cu o mulțime conținând pe $\square$.
Cum $c(S) > 0$, există o clauză D a lui S cu $c(D) > 0$, prin urmare $D = C \vee L$ pentru un literal L și o clauză nevidă C în care nu apare variabila propozițională din L, așa că avem $c(C) < c(D)$.
Fie φ enunțul în FNC corespunzător lui S, care e nesatisfiabil conform ipotezei acestei implicații. Atunci, pentru un enunț γ în FNC, avem:

$$\varphi \sim (C \vee L) \wedge \gamma \sim (C \wedge \gamma) \vee (L \wedge \gamma),$$

prin urmare enunțurile $C \wedge \gamma$ și $L \wedge \gamma$ sunt nesatisfiabile. Observăm că au loc: $c(C \wedge \gamma) < c(\varphi)$ și $c(L \wedge \gamma) < c(\varphi)$, așadar, conform ipotezei de inducție, fiecare dintre enunțurile $C \wedge \gamma$ și $L \wedge \gamma$ admite o derivare prin rezoluție în care apare $\Box$. Să considerăm o astfel de derivare pentru $C \wedge \gamma$ și să înlocuim pe C cu $C \vee L = D$, transformând enunțul $C \wedge \gamma$ în $(C \vee L) \wedge \gamma \sim \varphi$, și modificând corespunzător această derivare, astfel că, la finalul ei:

- fie apare tot $\Box$, caz în care am obținut deja o derivare a lui φ care conduce la $\Box$,
- fie apare clauza L în locul lui $\Box$, caz în care procedăm astfel:



ținând seama de faptul că $\varphi \sim D \wedge \gamma \sim D \wedge \gamma \wedge \gamma$, la fiecare pas al derivării prin rezoluție a lui φ obținute prin modificarea de mai sus, la mulțimea curentă de clauze adăugăm o mulțime de clauze corespunzând lui γ, astfel că la finalul acestei noi derivări vom avea o mulțime de clauze corespunzătoare enunțului $L \wedge \gamma$, din care, conform celor de mai sus, se poate deriva prin rezoluție o mulțime de clauze

conținând pe $\square$. Punând "cap la cap" aceste derivări, obținem o derivare prin rezoluție din φ (echivalent, din S) a unei mulțimi de clauze conținând pe $\square$. Desigur, derivările prin rezoluție se aplică unor mulțimi de clauze, care, așadar, trebuie să conțină câte o singură copie a fiecărei clauze. Dar lista clauzelor corespunzătoare lui $(C \vee L) \wedge \gamma$ are o derivare prin rezoluție care ajunge la $\square$ ddacă lista clauzelor corespunzătoare lui $(C \vee L) \wedge \gamma \wedge \gamma$ (în care duplicăm clauzele corespunzătoare lui γ) are o derivare prin rezoluție care ajunge la $\square$; se poate demonstra că acest fapt are loc pentru orice mulțime finită $\Delta = \{D_1, \ldots, D_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ de clauze în locul clauzei $C \vee L$ și orice mulțime finită de clauze $\{C_1, \ldots, C_k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ în locul unei forme clauzale pentru γ, prin inducție după k, așadar ar fi suficient de demonstrat pentru $k = 1$ (afirmația e trivială pentru $k = 0$).
Desigur, implicația directă este trivială: la o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din Γ se poate adăuga clauza C_1 la lista de clauze de la fiecare pas, astfel obținând o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din lista de clauze $D_1, \ldots, D_n, C_1, C_1$.
Reciproc, dacă există o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din lista de clauze $D_1, \ldots, D_n, C_1, C_1$, atunci, dacă în această derivare e folosită o singură copie a lui C_1, astfel că, cealaltă copie a lui C_1 rămâne ca atare în lista de clauze până la sfârșitul acestei derivări, atunci, eliminând această copie a lui C_1 din lista de clauze de la fiecare pas, obținem o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din lista de clauze $D_1, \ldots, D_n, C_1$.
Intuitiv, dacă, într–o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din lista de clauze

$D_1, \ldots, D_n, C_1, C_1$ sunt folosite ambele copii ale lui C_1, atunci avem o situație de tipul următor, unde $p, q, r \in V$:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{\cancel{p}, q, r\}, \ \{p, \neg q, r\}, \ \{\neg r\}, \ \{\cancel{\neg p}\}, \ \{\neg p\}}{\{q, r\}, \ \{\cancel{p}, \neg q, r\}, \ \{\neg r\}, \{\cancel{\neg p}\}}}{\{\cancel{q}, r\}, \ \{\cancel{\neg q}, r\}, \ \{\neg r\}\} \quad \text{(d)}}}{\{\cancel{r}\}, \ \{\cancel{\neg r}\}\}}}{\square}$$

Dacă eliminăm o copie a clauzei $\{\neg p\}$ din lista de clauze inițială, atunci putem obține o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din mulțimea de clauze rămasă aplicând derivarea prin rezoluție (d) la început:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\{p, \cancel{q}, r\}, \ \{p, \cancel{\neg q}, r\}, \ \{\neg r\}, \ \{\neg p\}}{\{p, \cancel{r}\}, \ \{\cancel{\neg r}\}, \ \{\neg p\}}}{\{\cancel{p}\}, \ \{\cancel{\neg p}\}}}{\square}$$

Corolar (Teorema Davis–Putnam)

Algoritmul DP este corect și complet.

Notație

Dacă $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, atunci notăm cu $\Gamma \vdash_R \varphi$ faptul că există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ dintr–o formă clauzală a lui $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$.

Rezoluția propozițională $\Longleftrightarrow$ sistemul Hilbert

Corolar

Pentru orice $\Gamma \subseteq E$ *și orice* $\varphi \in E$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\Gamma \vDash \varphi$;
2. $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Demonstrație: Conform unei propoziții de mai sus, teoremei precedente și notației anterioare, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ e nesatisfiabilă ddacă există o derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ ddacă $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Remarcă

Conform corolarului anterior și (TCT), **regula rezoluției** este corectă și completă pentru calculul propozițional clasic, adică deducția pe baza **regulii rezoluției** este echivalentă cu deducția pe baza axiomelor (A_1), (A_2), (A_3) și a regulii de deducție **MP**.

Așadar folosind **regula rezoluției** putem realiza o prezentare echivalentă pentru logica propozițională clasică.

Amintesc că deducția pe baza axiomelor (A_1), (A_2), (A_3) și a regulii de deducție **MP** (adică mulțimea regulilor (A_1), (A_2), (A_3) și **MP** – a se vedea mai jos **teoriile deductive Moisil**) se numește *sistemul Hilbert* pentru calculul propozițional clasic.

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice
4. Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice
5. Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice
6. Semantica Logicii Propoziționale Clasice
7. Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE *D*
8. Mulțimi consistente
9. Rezoluția în calculul propozițional clasic
10. **Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ**
11. Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

Deducția naturală este o altă prezentare echivalentă pentru logica propozițională clasică: următoarele reguli de deducție sunt echivalente cu axiomele (A_1), (A_2), (A_3) plus regula **MP**.

Notații

- $\perp$ va desemna un element arbitrar al mulțimii de enunțuri $\{\varphi \wedge \neg \varphi, \neg \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \in E\}$.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ orice enuțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$, $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}$ va avea semnificația: în prezența tuturor ipotezelor curente, din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se deduce ψ.
- Pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, orice enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \psi$ și orice mulțimi finite de enunțuri $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \dfrac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \ldots, \dfrac{\Gamma_k}{\gamma_k}}{\psi}$ va avea semnificația: în prezența tuturor ipotezelor curente, dacă $\dfrac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \ldots, \dfrac{\Gamma_k}{\gamma_k}$, atunci din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se deduce ψ.

A se vedea, într–un material facultativ de seminar, și notația folosind "cutii pentru deducții".

Regulile de deducție ale deducției naturale

Considerăm $\varphi, \psi, \chi \in E$, arbitrare.

- $\wedge$**–eliminarea**: $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$; $\wedge$**–introducerea**: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$;
- $\neg\neg$**–eliminarea**: $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$; $\neg\neg$**–introducerea**: $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$;
- $\rightarrow$**–introducerea**: $\dfrac{\frac{\varphi}{\psi}}{\varphi \rightarrow \psi}$; $\rightarrow$**–eliminarea** este **MP**: $\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$;
- $\vee$**–introducerea**: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$; $\vee$**–eliminarea**: $\dfrac{\varphi \vee \psi, \frac{\varphi}{\chi}, \frac{\psi}{\chi}}{\chi}$;
- $\perp$**–eliminarea**: $\dfrac{\perp}{\varphi}$;
- $\neg$**–introducerea**: $\dfrac{\frac{\varphi}{\perp}}{\neg\varphi}$; $\neg$**–eliminarea**: $\dfrac{\varphi, \neg\varphi}{\perp}$.

Exercițiu

Folosind (în cadrul sistemului formal al) deducția(ei) naturală(e), arătați că:

- axiomele $(A_1), (A_2), (A_3)$ din sistemul Hilbert sunt adevăruri sintactice;
- are loc deducția sintactică: $\{\varphi \leftrightarrow (\psi \wedge \neg\chi), \chi\} \vdash \neg\varphi$.

1 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?

2 Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice

3 Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice

4 Mnemonic din Sintaxa Logicii Propoziționale Clasice

5 Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

6 Semantica Logicii Propoziționale Clasice

7 Sisteme deductive – VOI MODIFICA ACEASTĂ SECȚIUNE; AM DEFINIT DEJA OPERATORUL DE ÎNCHIDERE *D*

8 Mulțimi consistente

9 Rezoluția în calculul propozițional clasic

10 Deducția naturală – SECŢIUNE FACULTATIVĂ

11 **Teorii deductive Moisil – SECŢIUNE FACULTATIVĂ**

Fraze și reguli (de deducție)

Observație

- **Teoriile deductive, introduse de matematicianul român Grigore C. Moisil,** sunt o construcție matematică ce generalizează, cuprinde toate sistemele logice.
- Pentru studiul **teoriilor deductive**, recomand cursul tipărit de bazele informaticii al Profesorului Virgil–Emil Căzănescu, indicat în bibliografia din Cursul I.

Definiție

O *teorie deductivă* este o pereche $\mathcal{T} = (F, R)$, unde:

- F este o mulțime nevidă, ale cărei elemente se numesc *fraze (ale lui* $\mathcal{T}$*);*
- $F^+ := \{f_1 f_2 \dots f_n \mid n \in \mathbb{N}^*, f_1, f_2, \dots, f_n \in F\}$ este mulțimea succesiunilor finite și nevide de fraze; elementele lui F^+ se numesc *texte*; dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$, atunci n se numește *lungimea textului* $f_1 f_2 \dots f_n$*;*
- se consideră $F \subseteq F^+$: frazele coincid cu textele de lungime 1;
- $R \subseteq F^+$; elementele lui R se numesc *reguli (ale lui* $\mathcal{T}$*).*

Vom păstra notațiile din definiția anterioară până la sfârșitul acestui curs.

Axiomele sunt regulile de lungime 1

Notație

- O regulă de lungime mai mare sau egală cu 2, $f_1 f_2 \ldots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F$, se mai notează sub forma $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f$.
- O regulă de lungime 1, f, cu $f \in F$, se mai notează sub forma $\emptyset \longrightarrow f$.

Definiție

- Regulile de lungime mai mare sau egală cu 2 se numesc *reguli de deducție (ale lui $\mathcal{T}$).*
- Regulile de lungime 1 se numesc *axiome (ale lui $\mathcal{T}$).* Vom nota cu Axm mulțimea axiomelor lui $\mathcal{T}$.

Remarcă

Conform definiției de mai sus, are loc: $Axm = F \cap R$.

Observație

Exemplificăm mai jos pentru calculul propozițional clasic.
În mod similar, calculul cu predicate clasic, din cursul următor, poate fi descris ca teorie deductivă.

Exemplu, și demonstrații în $\mathcal{T}$

Exemplu

Calculul propozițional clasic este o teorie deductivă $\mathcal{T} = (F, R)$, unde $F = E$ este mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic, iar R este formată din:

- o mulțime infinită de axiome, anume mulțimea regulilor $\emptyset \longrightarrow \varphi$, cu $\varphi \in E$, φ enunț de una dintre formele (A_1), (A_2), (A_3) ($\longrightarrow$ este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive);
- o mulțime infinită de reguli de deducție (toate de lungime 3), corespunzătoare lui (MP), anume mulțimea $\{\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \longrightarrow \psi \mid \varphi, \psi \in E = F\}$ ($\rightarrow$ din interiorul acoladelor interioare este conectorul logic numit *implicație* al calculului propozițional clasic, în timp ce $\longrightarrow$ din exteriorul acoladelor interioare este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive).

Definiție

Se numește *demonstrație (în teoria deductivă $\mathcal{T}$)* un text $f_1 f_2 \ldots f_n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$, cu proprietatea că: pentru orice $i \in \overline{1, n}$, există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \overline{1, i-1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \longrightarrow f_i \in R$.

Ca și în calculul propozițional clasic și calculul cu predicate clasic – a se vedea cursul următor:

Remarcă

Orice demonstrație începe cu o axiomă, i. e.: dacă $f_1 f_2 \dots f_n$ este o demonstrație, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$, atunci $f_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \emptyset \longrightarrow f_1 \in R$ (desigur, axiomă).
Acest fapt rezultă din transcrierea definiției anterioare pentru cazul $i = 1$.

Notație

Dacă $\alpha = f_1 f_2 \dots f_n, \beta = g_1 g_2 \dots g_p \in F^+$, cu $n, p \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p \in F$, atunci notăm: $\alpha\beta := f_1 f_2 \dots f_n g_1 g_2 \dots g_p \in F^+$.

Remarcă

Fie $\alpha, \beta \in F^+$. Atunci:

- dacă α și β sunt demonstrații, atunci $\alpha\beta$ este o demonstrație (prin inducție matematică (obișnuită), acest rezultat poate fi generalizat de la concatenarea a două demonstrații la concatenarea unui număr finit și nevid de demonstrații);
- dacă $\alpha\beta$ este o demonstrație, atunci α este o demonstrație.

Acest fapt rezultă imediat din definiția unei demonstrații.

Teoreme și sisteme deductive

Definiție

Se numește *teoremă (a teoriei deductive $\mathcal{T}$)* o frază $f \in F$ cu proprietatea că există o demonstrație care se termină în f, i. e. o demonstrație de forma $f_1 f_2 \ldots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$.
Mulțimea teoremelor lui $\mathcal{T}$ se notează cu $Teor(\mathcal{T})$.

Remarcă

$Teor(\mathcal{T})$ este nevidă ddacă Axm este nevidă.
Într–adevăr, am observat că orice demonstrație începe cu o axiomă, și, evident, o axiomă constituie o demonstrație (de lungime 1), așadar există demonstrații ddacă există axiome, prin urmare există teoreme ddacă există axiome, în conformitate cu definiția de mai sus a teoremelor. În plus, se observă că $Axm \subseteq Teor(\mathcal{T})$.

Definiție (sisteme deductive: mulțimi de fraze închise la reguli)

O submulțime $X \subseteq F$ se zice *R–închisă* (sau *închisă la regulile din R*) ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F$, are loc:

$$\text{dacă } \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq X \text{ și } \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f \in R, \text{ atunci } f \in X.$$

Mulțimea teoremelor e cel mai mic sistem deductiv

Remarcă

Orice mulțime R–închisă include mulțimea axiomelor.
Într–adevăr, dacă X este o mulțime de fraze R–închisă, atunci $\emptyset \subseteq X$, prin urmare $Axm \subseteq X$, în conformitate cu definiția axiomelor și definiția mulțimilor R–închise.

Propoziție

$Teor(\mathcal{T})$ este cea mai mică mulțime R–închisă a lui $\mathcal{T}$ (desigur, în raport cu incluziunea).

Demonstrație: Pentru început, să demonstrăm că $Teor(\mathcal{T})$ este R–închisă, folosind definiția mulțimilor R–închise, a teoremelor și a demonstrațiilor, precum și proprietatea care afirmă că o concatenare (finită și nevidă) de demonstrații este demonstrație.
Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(\mathcal{T})$, iar $f \in F$, astfel încât $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f \in R$.
Cum $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(\mathcal{T})$, rezultă că, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, există o demonstrație $\alpha_i \in F^+$ pentru f_i.
Atunci $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n f$ este o demonstrație pentru f, ceea ce arată că $f \in Teor(\mathcal{T})$, așadar $Teor(\mathcal{T})$ este R–închisă.

Și acum să demonstrăm că $Teor(\mathcal{T})$ este cea mai mică dintre mulțimile R–închise, adică să considerăm o mulțime R–închisă X, și să arătăm că $Teor(\mathcal{T}) \subseteq X$.
Fie $t \in Teor(\mathcal{T})$, arbitrară, fixată. Atunci există o demonstrație $f_1 f_2 \ldots f_n t$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$ (demonstrație de lungime $n+1$, care se termină în t). Avem de demonstrat că $t \in X$. Aplicăm inducție matematică după n.
Pasul de verificare: n=0: Dacă $n = 0$, atunci $t \in Axm$, prin urmare $t \in X$, conform remarcii precedente.
Pasul de inducție: 0,1,...,n-1,n→n+1: Fie $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că orice demonstrație de lungime cel mult $n+1$ se termină într–o frază din X, și astfel încât există o demonstrație $f_1 f_2 \ldots f_{n+1} t$, cu $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1} \in F$.
Rezultă, conform definiției unei demonstrații, că există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \overline{1, n+1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \longrightarrow t \in R$. Dar, pentru fiecare $s \in \overline{1, k}$, $f_1 f_2 \ldots f_{j_s}$ este o demonstrație pentru f_{j_s}, de lungime cel mult $n+1$, așadar, conform ipotezei de inducție, rezultă că $f_{j_s} \in X$.
Prin urmare, $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \subseteq X$, iar $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \longrightarrow t \in R$. Cum X este R–închisă, rezultă că $t \in X$.
Rezultă că $Teor(\mathcal{T}) \subseteq X$, ceea ce încheie a doua parte a demonstrației propoziției.
Așadar, $Teor(\mathcal{T})$ este cea mai mică mulțime R–închisă.

Pentru orice mulțime de reguli, mulțimea sistemelor deductive este sistem de închidere pe $\mathcal{P}(F)$: posetul părților mulțimii frazelor. Consecințele sunt operatorii de închidere asociați sistemelor de închidere ale sistemelor deductive pentru diferite mulțimi de reguli.

Definiție

Se numește *consecință (pe F)* un operator de închidere *finitar* pe $\mathcal{P}(F)$, adică un operator de închidere $C : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ cu proprietatea că, oricare ar fi $X \subseteq F$,

$$C(X) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X, \\ |Y| < \infty}} C(Y).$$

Propoziție

Mulțimea consecințelor (pe F) este în bijecție cu $\mathcal{P}(F^+)$ (mulțimea mulțimilor de reguli).

Schița demonstrației: Bijecția căutată duce orice $R \subseteq F^+$ în consecința $C_R : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F)$, definită prin: oricare ar fi $X \subseteq F$, $C_R(X) := Teor(F, X \cup R)$ (mulțimea teoremelor teoriei deductive cu mulțimea frazelor F și mulțimea regulilor dată de R, la care se adaugă elementele lui X ca axiome).
Inversa acestei bijecții duce orice consecință C în mulțimea $R_C :=$ $\{\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f \mid n \in \mathbb{N}, f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F, f \in C(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})\} \subseteq F^+$.
Se arată că prima dintre aceste funcții este corect definită, adică imaginea ei este o mulțime de consecințe. Este clar că a doua funcție este corect definită.
Apoi se arată ca aceste funcții sunt bijecții, demonstrând că sunt inverse una alteia, adică, pentru orice consecință C, $C_{R_C} = C$, și, pentru orice $R \subseteq F^+$, $R_{C_R} = R$.