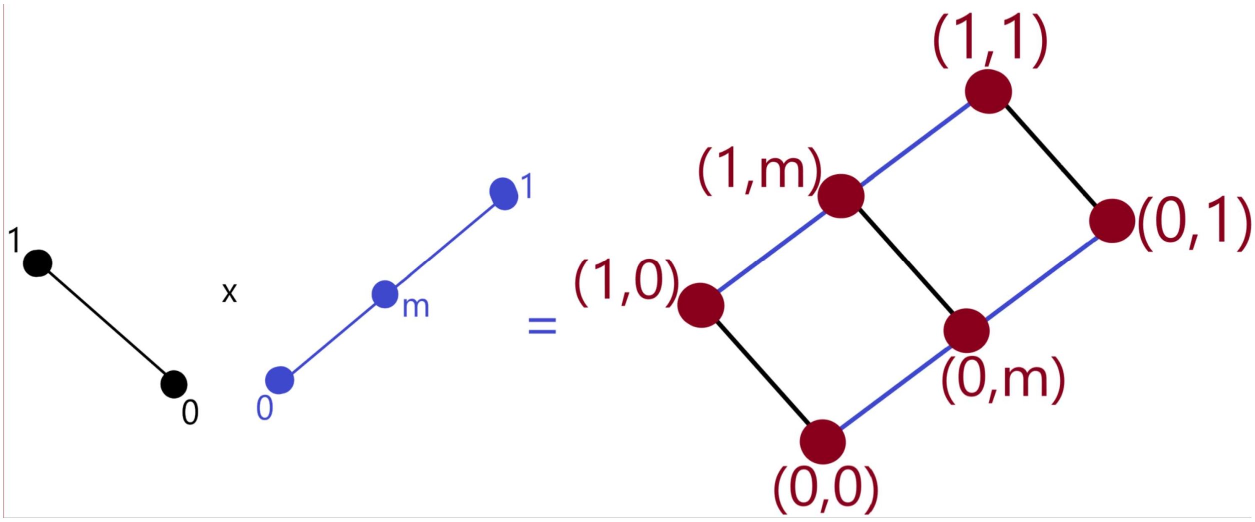
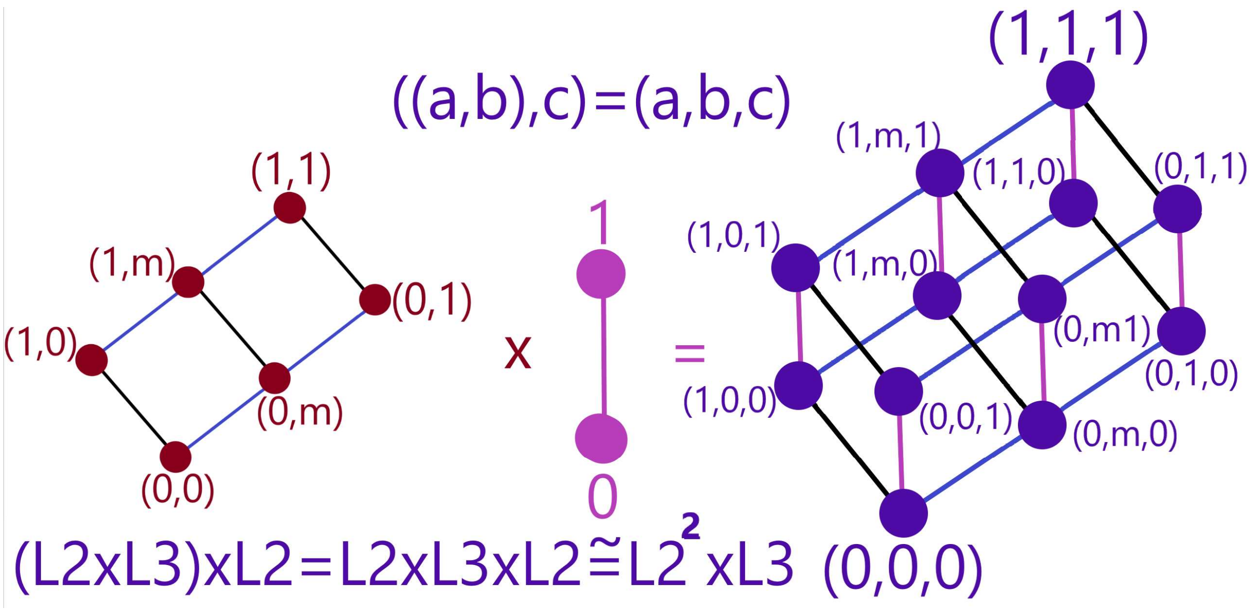


(1,0) v (0,m) = (1 v 0, 0 v m) = (1,m)

(1,m) v (0,1) = (1 v 0, m v 1) = (1,1)



Cvadruplet ordonat: (a,0,b,a), versus cvadruplet neordonat: {a,0,b,a}={0,a,b}: la fel ca pereche ordonata: (a,b), versus pereche neordonata: {a,b}.

Latice (L,v,^,<=). Pentru orice x,y din L: x^y=inf{x,y}<=x,y<=sup{x,y}=xvy.

Laticea Dedekind subiacenta laticii de mai sus: (L,v,^), v:LxL->L, ^:LxL->L, idempotente, comutative, asociative si satisfacand absorbtia: pentru orice x,y din L: x^(xvy)=x=xv(x^y). Laticea Ore subiacenta laticii de mai sus: (L,<=), unde <= e relatie de ordine pe L astfel incat, pentru orice x,y din L, exista in posetul (L,<=) inf{x,y} si sup{x,y}.

Legatura intre cele doua operatii binare si relatia de ordine dintr-o latice (L,v,^,<=):

avand relatia de ordine <= (i.e. cunoscand laticea Ore (L,<=) subiacenta), v si ^ pe L se definesc astfel: pentru orice x,y din L, xvy=sup{x,y} si x^y=inf{x,y};

avand operatiile binare v,^, <= pe L se defineste astfel: pentru orice x,y din L, x<=y <=> xvy=y <=> x^y=x.

Fie (L,v,^,<=,0,1) o latice marginita si x,y elemente ale lui L astfel incat x si y sunt complemente unul altuia, adica sup{x,y}=xvy=1 si inf{x,y}=x^y=0. Daca x si y sunt comparabile, atunci xvy=sup{x,y}=max{x,y} si x^y=inf{x,y}=min{x,y}, iar max{x,y} si min{x,y} apartin lui {x,y}. Asadar x si y sunt comparabile si complemente unul altuia <=> max{x,y}=1 si min{x,y}=0, adica perechea (x,y)=(0,1) sau (x,y)=(1,0).

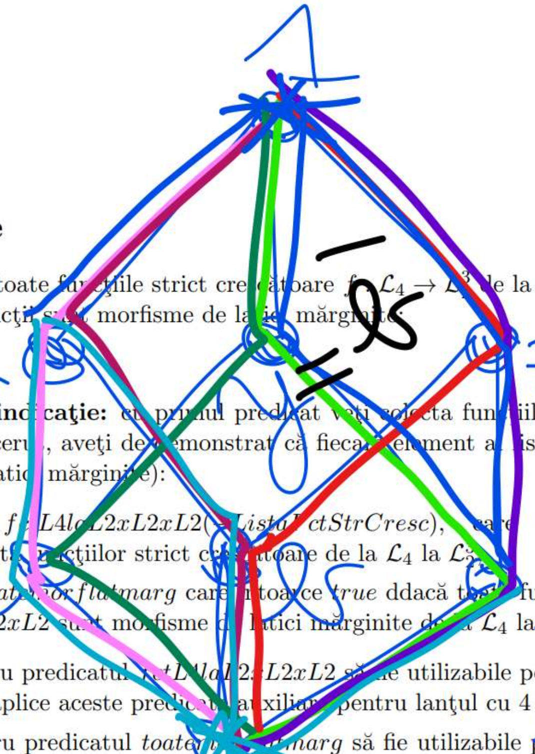
Asadar, intrucat c si x, respectiv b si y, respectiv a si z sunt complemente unul altuia in cub (cu etichetarea nodurilor cubului ca mai jos), putem conchide ca c||x, b||y si a||z:

3 Lista 1 de subiecte

Exercițiul 1. Să se determine toate funcțiile strict crescătoare $f : \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_2^3$ de la lanțul cu exact 4 elemente la cub și să se arate că toate aceste funcții sunt morfisme de latici mărginite:

① matematic;

② prin predicate în Prolog (**indicație:** cu primul predicat veți selecta funcțiile strict crescătoare $f : \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_2^3$; pentru al doilea predicat cerut, aveți de demonstrat că fiecare element al listei de funcții returnate de primul predicat este morfism de latici mărginite):



- un predicat unar $fctL4laL2xL2xL2(-ListaFctStrCresc)$, care determină în argumentul său $ListaFctStrCresc$ lista funcțiilor strict crescătoare de la $\mathcal{L}_4$ la $\mathcal{L}_2^3$;
- un predicat zeroar $toatemorflatmarg$ care întoarce $true$ ddacă toate funcțiile din lista returnată de predicatul $fctL4laL2xL2xL2$ sunt morfisme de latici mărginite de la $\mathcal{L}_4$ la $\mathcal{L}_2^3$.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL4laL2xL2xL2$ să fie utilizabile pentru oricare două poseturi finite, iar $fctL4laL2xL2xL2$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lanțul cu 4 elemente și cub.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $toatemorflatmarg$ să fie utilizabile pentru oricare două latici finite și orice listă de funcții între aceste două latici finite, iar $toatemorflatmarg$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{L}_2^3$ și lista de funcții returnată de predicatul $fctL4laL2xL2xL2$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerință**, puteți scrie doar predicatul unar $fctL4laL2xL2xL2$ definit ca mai sus.

Exercițiul 2. Fie V mulțimea variabilelor propoziționale și E mulțimea enunțurilor logicii propoziționale clasice, iar $\alpha, \beta, \varphi \in E$, astfel încât:

$$\varphi = (\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg \beta).$$

Să se demonstreze că, în logica propozițională clasică:

- dacă $\alpha, \beta \in V$, atunci enunțul φ e satisfiabil;
- dacă $\vdash \varphi$, atunci mulțimea $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă:

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- $propr1$, care întoarce $true$ ddacă, în cazul în care $\alpha, \beta \in V$, rezultă că enunțul φ e satisfiabil, efectuând o demonstrație semantică pentru faptul că există o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \varphi$ în ipoteza că $\alpha, \beta \in V$;
- $propr2$, care întoarce $true$ ddacă mulțimea $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă atunci când φ e teoremă formală, efectuând o demonstrație semantică pentru faptul că, dacă $\vdash \varphi$, atunci nu există nicio interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \{\alpha, \beta\}$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerință**, puteți scrie doar unul dintre predicatele

Rezolvare pentru primul exercitiu din lista de subiecte de examen de anul trecut:

Fie L4={0,u,v,1}, cu 0<u<v<1, iar cubul L2³ cu nodurile etichetate ca mai sus.

Daca $f:L4\to L2^3$ este strict crescatoare (adica pastreaza relatia $<$ de ordine stricta, adica satisface: $p<q \Rightarrow f(p)<f(q)$), atunci $f(0)<f(u)<f(v)<f(1)$ in cub, $L2^3$, adica subposetul $(\{f(0),f(u),f(v),f(1)\},\leq)$ al cubului este lant, desigur, izomorf cu L4. $\Rightarrow$ $(f(0),f(u),f(v),f(1))$ apartine multimii $\{(0,a,x,1), (0,a,y,1), (0,b,x,1), (0,b,z,1), (0,c,y,1), (0,c,z,1)\}$, asadar cele 6 functii strict crescatoare de la L4 la cub ($L2^3$) sunt:

p		0	u	v	1
f(p)		0	a	x	1
f(p)		0	a	y	1
f(p)		0	b	x	1
f(p)		0	b	z	1
f(p)		0	c	y	1
f(p)		0	c	z	1

Fiind strict crescatoare, aceste functii sunt crescatoare (adica pastreaza relatia $\leq$ de ordine, adica satisfac: $p\leq q \Rightarrow f(p)\leq f(q)$) si au domeniul un lant, prin urmare sunt morfisme de latici, intrucat avem in curs aceasta proprietate:

O functie $f:L\to M$ intre doua latici L si M este morfism de latici $\Leftrightarrow$ f este crescatoare si pastreaza inf (^) si sup (v) perechilor de elemente incomparabile ale domeniului sau L, adica f pastreaza relatia de ordine $\leq$ si, pentru orice pereche p,q de elemente ale lui L cu $p\|q$, au loc: $f(p\wedge q)=f(p)\wedge f(q)$ si $f(p\vee q)=f(p)\vee f(q)$. Prin urmare, daca domeniul L al lui f este lant, adica nu are perechi de elemente incomparabile, rezulta ca: $f:L\to M$ este morfism de latici $\Leftrightarrow$ f este crescatoare.

Conchidem ca toate cele 6 functii strict crescatoare f:L4->L2³ sunt morfisme de latici si, intrucat toate satisfac f(0)=0 si f(1)=1, rezulta ca toate aceste 6 functii sunt morfisme de latici marginite.

$(\forall f \in \Phi)(f$ e lat. morf. marg.$)$

$\Leftrightarrow$

A $\forall f$

$(\forall f)(f \in \Phi \Rightarrow f$ e lat. morf. marg.$)$

F $\forall f$

A