Memo: Intr-o algebra Boole B, pentru orice x,y in B:

x -> y = x¯ v y, unde am notat cu x¯ complementul lui x;

x <-> y = (x -> y) ^ (y -> x);

x -> y = 1 <=> x <= y;

x <-> y = 1 <=> x = y.

Notez cu |- deductia sintactica si faptul de a fi adevar sintactic (i.e. teorema formala).

Notez cu |= satisfacerea, deductia semantica si faptul de a fi adevar semantic (i.e. tautologie, enunt universal adevarat).

Notez cu |/= negatia lui |=, cu |/- negatia lui |-, cu </= negatia lui <=, iar cu =/= negatia lui = (i.e. nonegalitatea).

Exerciţiul 5. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \varphi \in E$, astfel încât $\varphi = [(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$.

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- dacă $\alpha, \beta \in V$, atunci enunţul φ e satisfiabil;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă, atunci enunţul φ e nesatisfiabil.

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- *propr*1, care întoarce *true* ddacă, atunci când $\alpha, \beta \in V$, există o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ care satisface enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie;
- *propr*2, care întoarce *true* ddacă, atunci când nicio interpretare nu satisface mulţimea $\{\alpha, \beta\}$, nu există interpretări care să satisfacă enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare *propr*1 şi *propr*2, la alegere.

Rezolvarea 1: fi = [(alfa ^ beta) -> beta] -> (alfa ^ beta).

Fie h:V->L2={0,1}. ---> h~:E->L2

h~(fi) = h~([(alfa ^ beta) -> beta] -> (alfa ^ beta))=

[(h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta)] -> (h~(alfa) ^ h~(beta)).

h|=fi <=> h~(fi)=1 <=>

[(h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta)] -> (h~(alfa) ^ h~(beta)) = 1 <=> (h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta) <= h~(alfa) ^ h~(beta).

Caz 1: h~(alfa) ^ h~(beta) = 0 => (h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta) = 0 -> h~(beta) = 1.

1 </= 0, asadar (h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta) </= h~(alfa) ^ h~(beta), deci h|/=fi.

Caz 2: h~(alfa) ^ h~(beta) = 1 <=> h~(alfa) = h~(beta) = 1.

Atunci (h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta) = 1 -> 1 = 1 <= 1 = h~(alfa) ^ h~(beta), asadar h|=fi.

Prin urmare, h|=fi <=> h~(alfa) = h~(beta) = 1 <=> h|=alfa si h|=beta <=> h |= {alfa,beta}. (*)

Daca alfa, beta apartin lui V (nu neaparat cu alfa=/=beta), atunci exista (o infinitate de interpretari, pentru ca, in orice element din multimea infinita V\{alfa,beta}, o astfel de interpretare poate lua orice valoare din L2, asadar numarul acestor interpretari este |{g | g:V\{alfa,beta}->L2}|=$|L2|^{|V\setminus\{alfa,beta\}|}=|L2|^{|V|}=2^{|V|}$=|P(V)|) h:V->L2={0,1} cu h(alfa) = h(beta) = 1, <=> h~(alfa) = h~(beta) = 1 <=>(*) h|=fi => fi e satisfiabila.

Daca {alfa,beta} e nesatisfiabila, i.e.:

(nu exista h:V->L2)(h |= {alfa,beta}) <=>(*)

(nu exista h:V->L2)(h |= fi) <=> fi e nesatisfiabil.

Rezolvarea 2: fi = [(alfa ^ beta) -> beta] -> (alfa ^ beta).

Fie h:V->L2={0,1}. ---> h~:E->L2

h~(fi) = h~([(alfa ^ beta) -> beta] -> (alfa ^ beta))=

[(h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta)] -> (h~(alfa) ^ h~(beta)).

h~(alfa)	h~(beta)	h~(alfa) ^ h~(beta)	(h~(alfa) ^ h~(beta)) -> h~(beta)	h~(fi)
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Asadar: h|=fi <=> h~(fi) = 1 <=> h~(alfa) = h~(beta) =1 <=> h|=alfa si h|=beta <=> h|={alfa,beta}. (*)

Prin urmare:

daca alfa, beta apartin lui V (nu neaparat cu alfa=/=beta), atunci exista (o infinitate de interpretari) h:V->L2 cu h(alfa)=h(beta)=1 <=>

h~(alfa) = h~(beta) =1 <=>(*) h|=fi, asadar fi e satisfiabila;

daca multimea {alfa,beta} e nesatisfiabila, adica:

(nu exista h:V->L2)(h|={alfa,beta}) <=> (*)

(nu exista h:V->L2)(h|=fi) <=> fi e nesatisfiabila.

$(\exists h: V \to \mathcal{L}_2)(h \not\models \{\alpha, \beta\}, h \models \varphi)$

- un predicat unar $detf(-Fctf)$, care întoarce în argumentul său $Fctf$ funcţia de la A la A care ca relaţie binară pe A este egală cu închiderea simetrică a relaţiei de succesiune a posetului $(A, \leq)$ având $\mathrm{Min}(A, \leq) = \{a, b\}$, $\mathrm{Max}(A, \leq) = \{c, d\}$, $a \| d$ şi $b \| c$;
- un predicat unar $detR(-RelR)$, care întoarce în argumentul său $RelR$ cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include relaţia funcţională totală $Fctf$ returnată de predicatul $detf$;
- un predicat unar $detk(-Ck)$, care întoarce în argumentul său Ck elementul diferit de a din clasa de echivalenţă a lui a în relaţia de echivalenţă $RelR$ returnată de predicatul $detR$;
- un predicat zeroar $verifAsatepsilon$, care întoarce $true$ dacă $\mathcal{A} \models \varepsilon$ şi $false$ dacă $\mathcal{A} \not\models \varepsilon$, efectuând o demonstraţie semantică, prin testarea perechilor de valori din mulţimea A pentru variabilele x, y într–

||

V

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctL2xL2xL2laL3$ definit mai sus.

$(\exists h: V \to \mathcal{L}_2)(h \models \{\alpha, \beta\})$

Exerciţiul 5. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \varphi \in E$, astfel încât $\varphi = [(\alpha \wedge \beta) \to \beta] \to (\alpha \wedge \beta)$.

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- dacă $\alpha, \beta \in V$, atunci enunţul φ e satisfiabil;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă, atunci enunţul φ e nesatisfiabil.

$\Downarrow$

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

$(\exists g: V \to \mathcal{L}_2)(g \models \varphi)$

- $propr1$, care întoarce $true$ ddacă, atunci când $\alpha, \beta \in V$, există o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ care satisface enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie;
- $propr2$, care întoarce $true$ ddacă, atunci când nicio interpretare nu satisface mulţimea $\{\alpha, \beta\}$, nu există interpretări care să satisfacă enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare $propr1$ şi $propr2$, la alegere.

Exerciţiul 6. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2; 0)$, simbolul de operaţie unară f, simbolul de relaţie

Mnemonic: Pentru orice multime Sigma de enunturi, orice enunt epsilon si orice

g:V->L2:

g|=epsilon <=> g~(epsilon);

g|=Sigma <=> (oricare ar fi sigma din Sigma)(g|=sigma)

<=> (oricare ar fi sigma din Sigma)(g~(sigma)=1);

|- epsilon <=>$^{(TC)}$ |= epsilon <=> (oricare ar fi h:V->L2)(h|=epsilon);

Sigma |- epsilon <=>$^{(TCT)}$ Sigma |= epsilon <=>

(oricare ar fi h:V->L2)(h|=Sigma => h|=epsilon).

Exerciţiul 8. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi \in E$, astfel încât:

5

$$\varphi = (\alpha \to \beta) \leftrightarrow \gamma \quad \text{şi} \quad \psi = \gamma \to (\alpha \wedge \neg \beta).$$

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- nicio interpretare care satisface mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ nu satisface enunţul γ;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ e satisfiabilă, atunci enunţul γ nu e teoremă formală.

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- *propr*1, care întoarce *true* ddacă orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface implicaţia $h \vDash \{\varphi, \psi\} \Rightarrow h \nvDash \gamma$, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie pentru orice interpretare h, mai precis pentru fiecare triplet de valori de adevăr pentru enunţurile α, β, γ într–o interpretare h;
- *propr*2, care întoarce *true* ddacă satisfiabilitatea mulţimii de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ implică $\nvdash \gamma$, folosind predicate auxiliare care testează satisfiabiliatea mulţimii de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ şi dacă enunţul γ e teoremă formală, prin testarea tuturor tripletelor de valori de adevăr pentru enunţurile α, β, γ într–o interpretare.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare *propr*1 şi *propr*2, la alegere.

fi = (alfa->beta)<->gama si psi = gama->(alfa^-|beta).

Prima cerinta:

Fie h:V->L2 a.i. h|={fi,psi}. <=> h~(fi) = h~(psi) = 1, asadar:

1 = h~(fi) = h~((alfa->beta)<->gama) = (h~(alfa)-> h~(beta))<->h~(gama);

1 = h~(psi) = h~(gama->(alfa^-|beta)) = h~(gama)->(h~(alfa)^h~(beta)¯).

Pp. abs. ca h|=gama. <=> h~(gama)=1. Atunci:

(h~(alfa)-> h~(beta))<->1 = 1 <=> h~(alfa)-> h~(beta) = 1 <=> h~(alfa)¯v h~(beta) = 1 <=> (h~(alfa)¯v h~(beta))¯ = 1¯ <=> h~(alfa) ^ h~(beta)¯ = 0;

1->(h~(alfa)^h~(beta)¯) = 1 <=> 1 <= h~(alfa)^h~(beta)¯ <=> h~(alfa)^h~(beta)¯= 1.

=> 0=1 in L2; contradictie. => h|/=gama.

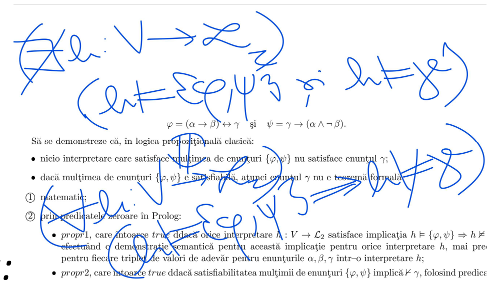
A doua cerinta:

Pp. ca {fi,psi} e satisfiabila, adica exista h:V->L2 a.i. h|={fi,psi}.

Fie h:V->L2 a.i. h|={fi,psi}. Conform primei proprietati cerute, demonstrate mai sus, => h|/=gama.

Asadar exista h:V->L2 a.i. h|/=gama, i.e. gama nu e teorema formala: |/- gama.

Pentru Prolog, sa retinem ca: *Prima proprietate ceruta:*



$\varphi = (\alpha \to \beta) \leftrightarrow \gamma$ şi $\psi = \gamma \to (\alpha \wedge \neg \beta)$.

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

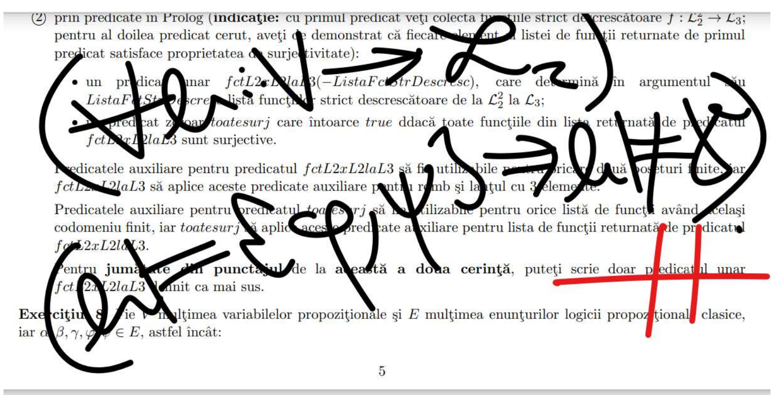
- nicio interpretare care satisface mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ nu satisface enunţul γ;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ e satisfiabilă, atunci enunţul γ nu e teoremă formală.

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- *propr*1, care întoarce *true* ddacă orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface implicaţia $h \vDash \{\varphi, \psi\} \Rightarrow h \nvDash$ efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie pentru orice interpretare h, mai pre pentru fiecare triplet de valori de adevăr pentru enunţurile α, β, γ într–o interpretare h;
- *propr*2, care întoarce *true* ddacă satisfiabilitatea mulţimii de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ implică $\nvdash \gamma$, folosind predica

A doua proprietate ceruta:



② prin predicate în Prolog (**indicaţie:** cu primul predicat veţi colecta funcţiile strict descrescătoare $f : \mathcal{L}_2^2 \to \mathcal{L}_3$; pentru al doilea predicat cerut, aveţi de demonstrat că fiecare element al listei de funcţii returnate de primul predicat satisface proprietatea de surjectivitate):

- un predicat unar $fctL2xL2laL3(-ListaFctStrDescresc)$, care determină în argumentul său $ListaFctStrDescresc$ lista funcţiilor strict descrescătoare de la $\mathcal{L}_2^2$ la $\mathcal{L}_3$;
- un predicat zeroar $toatesurj$ care întoarce *true* ddacă toate funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL2laL3$ sunt surjective.

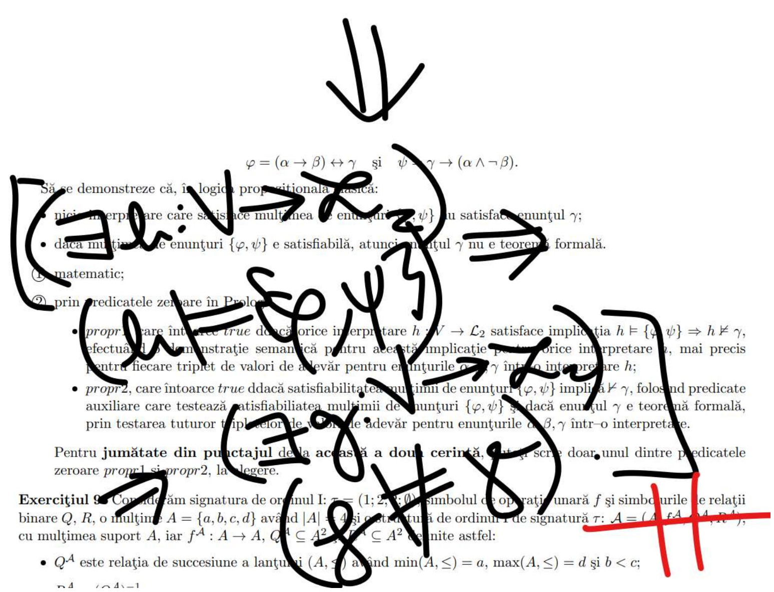
Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL2xL2laL3$ să fie utilizabile pentru oricare două poseturi finite, iar $fctL2xL2laL3$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru romb şi lanţul cu 3 elemente.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $toatesurj$ să fie utilizabile pentru orice listă de funcţii având acelaşi codomeniu finit, iar $toatesurj$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lista de funcţii returnată de predicatul $fctL2xL2laL3$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctL2xL2laL3$ definit ca mai sus.

Exerciţiul 8. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi \in E$, astfel încât:

5



$\varphi = (\alpha \to \beta) \leftrightarrow \gamma$ şi $\psi = \gamma \to (\alpha \wedge \neg \beta)$.

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- nicio interpretare care satisface mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ nu satisface enunţul γ;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ e satisfiabilă, atunci enunţul γ nu e teoremă formală.

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog:

- *propr*1, care întoarce *true* ddacă orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface implicaţia $h \vDash \{\varphi, \psi\} \Rightarrow h \nvDash \gamma$, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie pentru orice interpretare h, mai precis pentru fiecare triplet de valori de adevăr pentru enunţurile α, β, γ într–o interpretare h;
- *propr*2, care întoarce *true* ddacă satisfiabilitatea mulţimii de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ implică $\nvdash \gamma$, folosind predicate auxiliare care testează satisfiabiliatea mulţimii de enunţuri $\{\varphi, \psi\}$ şi dacă enunţul γ e teoremă formală, prin testarea tuturor tripletelor de valori de adevăr pentru enunţurile α, β, γ într–o interpretare.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare *propr*1 şi *propr*2, la alegere.

Exerciţiul 9. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2, 2; \emptyset)$, simbolul de operaţie unară f şi simbolurile de relaţii binare Q, R, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| = 4$ şi o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \to A$, $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ şi $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ definite astfel:

- $Q^{\mathcal{A}}$ este relaţia de succesiune a lanţului $(A, \leq)$ având $\min(A, \leq) = a$, $\max(A, \leq) = d$ şi $b < c$;