LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
TEMELE COLECTIVE **4–7**

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2023–2024, Semestrul I

Toate temele colective se adresează AMBELOR SERII.
Rezolvarea fiecărei teme colective trebuie trimisă *într–un singur exemplar* de *fiecare grupă a seriei IF* și *fiecare grupă a seriei ID* ca răspuns la aceste assignments MS Teams.

Temă colectivă (din Cursurile I–III)

Fie I o mulțime nevidă, A o mulțime, $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi și $k \in I$. Să se demonstreze că:

- $A_k \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ și $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq A_k$
- $A \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ ddacă $(\forall\, i \in I)\,(A \subseteq A_i)$
- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq A$ ddacă $(\forall\, i \in I)\,(A_i \subseteq A)$

Observație: Pentru $I = \emptyset$ proprietățile din tema de mai sus nu sunt satisfăcute.

Temă colectivă (din Cursurile I–III)

Fie A și I mulțimi, iar $(B_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup\limits_{i \in I} B_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcup\limits_{i \in I} B_i) \times A = \bigcup\limits_{i \in I} (B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap\limits_{i \in I} B_i) = \bigcap\limits_{i \in I} (A \times B_i)$ și $(\bigcap\limits_{i \in I} B_i) \times A = \bigcap\limits_{i \in I} (B_i \times A)$, considerând, pentru cazul $I = \emptyset$, o mulțime T astfel încât $(B_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, iar $(A \times B_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A \times T)$ și $(B_i \times A)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T \times A)$

Indicație: Tratați separat, folosind o temă anterioară, respectiv cursul, cazul $I = \emptyset$.

Temă colectivă (din CURSURILE I–III)

Demonstrați, folosind funcții caracteristice, că, pentru orice mulțimi A, B, C:

1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
2. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (diferența simetrică este asociativă);
3. dacă A și B sunt finite, atunci: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Indicație: Considerați o mulțime nevidă T care include mulțimile A, B, C, de exemplu $T := A \cup B \cup C \cup \{0\}$, astfel că $A \Delta B$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $(A \Delta B) \Delta C$ și $A \Delta (B \Delta C)$ vor fi, de asemenea, submulțimi ale lui T. Notați, pentru fiecare $S \in \mathcal{P}(T)$, cu χ_S funcția caracteristică a lui S raportat la T, apoi folosiți proprietățile funcțiilor caracteristice din curs, inclusiv faptul că două submulțimi ale lui T sunt egale ddacă funcțiile lor caracteristice sunt egale.
Pentru punctele 1 și 3 se poate considera mulțimea T ca incluzând doar mulțimile A și B, iar, pentru punctul 3, T poate fi considerată chiar finită, de exemplu $T := A \cup B \cup \{0\}$. Apoi, pentru punctul 3, folosiți faptul că, dacă $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, unde $n = |T| \in \mathbb{N}^*$, atunci, pentru orice $S \in \mathcal{P}(T)$,

$$|S| = \sum_{i=1}^{n} \chi_S(x_i).$$

Temă colectivă (din CURSURILE I–III)

Demonstrați că imaginea și preimaginea printr–o funcție comută cu mulțimea vidă și păstrează incluziunile, iar imaginea duce mulțimi nevide în mulțimi nevide, în timp ce preimaginea duce în mulțimi nevide doar mulțimile care nu sunt disjuncte de imaginea funcției, i.e., dacă A și B sunt mulțimi nevide (se pot trata și cazurile degenerate, dar le excludem de aici), $f : A \to B$, $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, iar $V, W \in \mathcal{P}(B)$, atunci:

1. $f(\emptyset) = \emptyset$ și $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
2. dacă $X \subseteq Y$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
3. dacă $V \subseteq W$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
4. $X \neq \emptyset$ ddacă $f(X) \neq \emptyset$;
5. $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ ddacă $V \cap f(A) \neq \emptyset$.

Indicație: La punctul 2, respectiv 3 puteți trata mai întâi cazul $X = \emptyset$, respectiv $V = \emptyset$, folosind punctul 1, apoi cazul $X \neq \emptyset$, respectiv $V \neq \emptyset$, aplicând axioma alegerii, sau direct ambele cazuri, procedând cu implicație, i.e. cu definiția incluziunii scrisă direct cu o implicație cuantificată universal și cu definiția imaginii, respectiv a preimaginii, folosind, pentru scrierea incluziunilor între imagini, respectiv preimagini, faptul că, pentru orice mulțime T și orice

$R, S \in \mathcal{P}(T)$, au loc: $R \subseteq S$ ddacă $R \cap T \subseteq S \cap T$ ddacă $(\forall x)\,(x \in R \cap T \Rightarrow x \in S \cap T)$ ddacă $(\forall x \in T)\,(x \in R \Rightarrow x \in S)$.
La punctul (4) demonstrați implicația directă ("$\Rightarrow$") folosind definiția unei funcții, apoi folosiți punctul (1) pentru implicația reciprocă. La punctul (5) folosiți definiția imaginii unei funcții.