Despre Puterile unei Relaţii Binare pe o Mulţime şi Închiderea Tranzitivă a unei Relaţii Binare pe o Mulţime

Seminar de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

2023–2024, Semestrul I

- Fie R o relaţie binară pe o mulţime A, adică $R \subseteq A \times A = A^2$.

Vom folosi convenţia stabilită la curs: prin $(a, b) \in A^2$ subînţelegem: $a, b \in A$.

Pentru fiecare relaţie binară pe A $Q \subseteq A^2$, considerăm *graful orientat* (A, Q), cu *mulţimea de vârfuri* A şi *mulţimea de arce* Q. Desigur, (A, Q) este *subgraf* al lui (A, A^2): graful orientat cu mulţimea de vârfuri A şi mulţimea de arce dată de întregul $A^2 = A \times A$. Amintesc că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, n–uplul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ determină un *drum* din (A, A^2) notat $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, format din arcele $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$, a cărui *lungime* este, prin definiţie, $n-1$: numărul acestor arce, numărând un arc $(a, b) \in A^2$ de oricâte ori apare în acest drum, i.e. de $|\{i \in \overline{1, n-1} \mid (a, b) = (a_i, a_{i+1})\}|$ ori. Drumurile de lungime 0 sunt: $[a]$, pentru fiecare $a \in A$, iar *drumurile nevide* sunt cele formate din cel puţin un arc.

Să observăm că: pentru orice relaţii binare pe A $S, T \in \mathcal{P}(A^2)$, conform definiţiei *compunerii de relaţii binare*:

Remarca 1. $T \circ S = \{(a_1, a_3) \in A^2 \mid (\exists\, a_2 \in A)\,((a_1, a_2) \in S \text{ şi } (a_2, a_3) \in T)\}$, aşadar compunerea lui T cu S este formată din perechile (a_1, a_3) de capete de drumuri $[a_1, a_2, a_3]$ de lungime 2 (i.e. formate din 2 arce) din (A, A^2) cu primul arc (a_1, a_2) din S şi al doilea arc (a_2, a_3) din T.

Amintesc din curs că $R^0 = \Delta_A$ şi, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$.

Lema 2. *Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, R^n este formată din perechile de capete de drumuri de lungime n din (A, A^2) cu toate cele n arce din R.*

Demonstraţie: Putem demonstra acest lucru prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$.

$\underline{n \in \{0, 1\}}$: $R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ este formată din capetele de drumuri fără arce $[a]$ din (A, A^2), iar $R^1 = R \circ \Delta_A = R = \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid (a_1, a_2) \in R\}$ este mulţimea perechilor de capete de drumuri $[a_1, a_2]$ din (A, A^2) formate dintr–un singur arc (a_1, a_2), arc aparţinând lui R.

$\underline{n \in \mathbb{N}^* \longrightarrow n+1}$: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că R^n este mulţimea perechilor de capete de drumuri de lungime n formate din arce din R; adică:

$$R^n = \{(a_1, a_{n+1}) \in A^2 \mid (\exists\, a_2, \ldots, a_n \in A)\,((a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1}) \in R)\};$$

scris desfăşurat, i.e. fără prescurtarea pentru această succesiune de $n-1$ cuantificatori existenţiali şi prescurtarea pentru această succesiune de conjuncţii: $R^n = \{(a_1, a_{n+1}) \in A^2 \mid (\exists\, a_2 \in A)\,(\exists\, a_3 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R)\}$.

Conform Remarcii 1, rezultă că $R^{n+1} = R \circ R^n = \{(a_1, a_{n+2}) \in A^2 \mid (\exists\, a_{n+1} \in A)\,((a_1, a_{n+1}) \in R^n \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R)\} = \{(a_1, a_{n+2}) \in A^2 \mid (\exists\, a_{n+1} \in A)\,[(\exists\, a_2 \in A)\,(\exists\, a_3 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R) \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R]\}$.

Enunţul $(a_{n+1}, a_{n+2}) \in R$ nu depinde de niciuna dintre variabilele $a_1, a_3, \ldots, a_n$, aşadar, pe rând, domeniul fiecăruia dintre cuantificatorii: $\exists\, a_2 \in A$, $\exists\, a_3 \in A$, $\ldots$, $\exists\, a_n \in A$ poate fi extins peste conjuncţia cu acest enunţ:

$$(\exists\, a_2 \in A)\,(\exists\, a_3 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R) \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R \Longleftrightarrow$$

$$(\exists\, a_2 \in A)\,[(\exists\, a_3 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R) \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R] \Longleftrightarrow$$

$$(\exists\, a_2 \in A)\,(\exists\, a_3 \in A)\,[(\exists\, a_4 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R) \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R]$$

$$\Longleftrightarrow (\exists\, a_2 \in A)\,(\exists\, a_3 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R),$$

aşadar: $R^{n+1} = \{(a_1, a_{n+2}) \in A^2 \mid (\exists\, a_{n+1} \in A)\,(\exists\, a_2 \in A)\,(\exists\, a_3 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R)\}$.

Cuantificatorii de acelaşi fel comută, aşadar putem aplica comutarea lui $\exists\, a_{n+1} \in A$, pe rând, cu fiecare dintre cuantificatorii: $\exists\, a_2 \in A$, $\exists\, a_3 \in A$, $\ldots$, $\exists\, a_n \in A$, şi obţinem: $R^{n+1} = \{(a_1, a_{n+2}) \in A^2 \mid (\exists\, a_2 \in A)\,(\exists\, a_3 \in A) \ldots (\exists\, a_n \in A)\,(\exists\, a_{n+1} \in A)\,((a_1, a_2) \in R \text{ şi } (a_2, a_3) \in R \text{ şi } \ldots \text{ şi } (a_n, a_{n+1}) \in R \text{ şi } (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R)\}$; scris prescurtat:

$$R^{n+1} = \{(a_1, a_{n+2}) \in A^2 \mid (\exists\, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1} \in A)\,((a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1}), (a_{n+1}, a_{n+2}) \in R)\}.$$

Am încheiat raţionamentul prin inducţie.

Amintesc că am notat cu $\mathcal{T}(R)$ **închiderea tranzitivă** a lui R şi am demonstrat în curs că: $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, cu semnificaţia uzuală pentru această notaţie: $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} R^n$. Prin urmare, conform Lemei 2:

Propoziţia 3. *Închiderea tranzitivă a lui R este mulţimea tuturor perechilor de capete de drumuri nevide din (A, A^2) formate din arce din R.*

Exerciţiul 4. *Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, considerăm relaţiile binare pe A $T_n \subseteq A^2$, definite recursiv astfel:*

$$\begin{cases} T_0 = \emptyset; \\ (\forall\, n \in \mathbb{N})\, (T_{n+1} = R \cup (R \circ T_n)). \end{cases}$$

Să se demonstreze că:

① *pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \bigcup_{j=1}^{n} R^j$ (cu semnificaţia uzuală pentru această notaţie: $T_n = \bigcup_{j\in\overline{1,n}} R^j$);*

② *dacă $|A| = k < \aleph_0$ (i.e. mulţimea A este finită, de cardinal k), atunci:*

- *şirul $R^0, R^1, R^2, \ldots, R^n, \ldots$ este periodic începând de la un anumit exponent;*
- $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{k} R^n = T_k$*;*
- $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{m} R^n = T_m$*, unde* $m = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid T_j \text{ e tranzitivă}\}$.

Rezolvare: ① $T_0 = \emptyset = \bigcup_{j\in\emptyset} R^j = \bigcup_{j=1}^{0} R^j$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ procedăm prin inducţie.

<u>$n = 1$</u>: $T_1 = R \cup (R \circ T_0) = R \cup (R \circ \emptyset) = R \cup \emptyset = R = R^1 = \bigcup_{j=1}^{1} R^j$.

<u>$n \in \mathbb{N}^* \longrightarrow n+1$</u>: Fie $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $T_n = \bigcup_{j=1}^{n} R^j = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$.

Atunci, întrucât compunerea de relaţii binare este distributivă faţă de reuniune, avem:

$$T_{n+1} = R \cup (R \circ T_n) = R \cup [R \circ (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n)] =$$

$$R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R^2) \cup (R \circ R^3) \cup \ldots \cup (R \circ R^n) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \ldots \cup R^{n+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} R^j.$$

Am încheiat raţionamentul prin inducţie.

② $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(A^2)$, iar numărul de relaţii binare pe A este $|\mathcal{P}(A^2)| = 2^{|A^2|} = 2^{|A|^2} = 2^{k^2}$, aşadar $|\{R^0, R^1, \ldots, R^{2^{k^2}}\}| \leq |\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\}| \leq 2^{k^2}$, în timp ce $|\overline{0, 2^{k^2}}| = 2^{k^2} + 1$, prin urmare există $i, j \in \overline{0, 2^{k^2}}$ astfel încât $i < j$ şi $R^i = R^j$, aşadar, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $R^{i+p} = R^i \circ R^p = R^j \circ R^p = R^{j+p}$, deci şirul $R^0, R^1, \ldots, R^n, \ldots$ este periodic cel puţin de la termenul R^i, cu perioada de lungime cel mult $j - i$.

Dacă $A = \emptyset$, atunci R este singura relaţie binară pe $\emptyset$, adică unicul element al lui $\mathcal{P}(\emptyset^2) = \mathcal{P}(\emptyset \times \emptyset) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, aşadar: $R = \emptyset = T_0 = \bigcup_{j\in\emptyset} R^j = \bigcup_{j\in\overline{1,0}} R^j = \bigcup_{j=1}^{0} R^j$;

de asemenea, $R = R^1 = \bigcup_{j=1}^{1} R^j = T_1$, iar $\min\{j \in \mathbb{N}^* \mid T_j \text{ e tranzitivă}\} = 1$.

Acum să presupunem că A este nevidă, i.e. $k > 0$.

Conform formulei demonstrate la curs, $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \bigcup_{n=1}^{k} R^n \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} R^n \supseteq \bigcup_{n=1}^{k} R^n = T_k$.

Să demonstrăm prin inducţie că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} R^j = T_k$.

$\underline{n \in \overline{1,k}}$: Întrucât orice reuniune nevidă (i.e. a unei familii nevide de mulţimi) îşi include termenii, avem, pentru orice $n \in \overline{1,k}$: $R^n \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots \cup R^k = \bigcup_{j=1}^{k} R^j = T_k$.

$\underline{1, 2, \ldots, n-1 \longrightarrow n > k}$: Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n > k$ şi, pentru fiecare $j \in \overline{1, n-1}$, $R^j \subseteq T_k$, astfel că $\bigcup_{j=1}^{n-1} R^j \subseteq T_k$.

Potrivit Lemei 2, R^n este mulţimea capetelor de drumuri de lungime n din (A, A^2) formate din arce din R: $R^n = \{(a_1, a_{n+1}) \in A^2 \mid (\exists\, a_2, a_3, \ldots, a_n \in A)\,((a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1}) \in R)\}$.

Dar orice astfel de drum $[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}]$ conţine cel puţin un circuit nevid $[a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j = a_i]$, cu $1 \leq i < j \leq n$, care poate fi eliminat din acest drum, formând drumul strict mai scurt $[a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, a_i = a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}]$, de lungime $1 \leq n - j + i < n$, aşadar ale cărui capete formează o pereche din R^{n-j+i}, cu $n - j + i \in \overline{1, n-1}$.

Într–adevăr, fie perechea arbitrară, fixată, $(a_1, a_{n+1}) \in R^n$. Conform scrierii de mai sus pentru R^n, această pereche satisface: $(\exists\, a_2, a_3, \ldots, a_n \in A)\,((a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_{n+1}) \in R)$. Cum $n > k$, rezultă că elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu pot fi două câte două distincte, aşadar există $i, j \in \overline{1, n}$, cu $i < j$, astfel încât $a_i = a_j$. Aşadar perechea (a_1, a_{n+1}) satisface:

$$(\exists\, a_2, a_3, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n \in A)\,((a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{i-1}, a_i), (a_i, a_{j+1}), (a_{j+1}, a_{j+2}), \ldots, (a_n, a_{n+1}) \in R),$$

prin urmare, conform Lemei 2, $(a_1, a_{n+1}) \in R^{n-j+i}$. Cum $1 \leq i < j \leq n$, rezultă că $1 \leq n - j + i \leq n - 1$, aşadar $(a_1, a_{n+1}) \in \bigcup_{j=1}^{n-1} R^j$, deci $(a_1, a_{n+1}) \in T_k$ conform ipotezei de inducţie.

Prin urmare $R^n \subseteq T_k$. Raţionamentul prin inducţie este încheiat.

Aşadar, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n \subseteq T_k$, prin urmare $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq T_k$. Am văzut mai sus că are loc şi $T_k \subseteq \mathcal{T}(R)$. Aşadar $\mathcal{T}(R) = T_k$. În particular, T_k este tranzitivă.

Acum fie $m = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid T_j \text{ este tranzitivă}\}$. Cum $k \in \mathbb{N}^*$, iar T_k este tranzitivă, are loc $k \in \{j \in \mathbb{N}^* \mid T_j \text{ este tranzitivă}\}$, prin urmare $m \leq k$, aşadar $T_k = \bigcup_{n=1}^{k} R^n = \bigcup_{n=1}^{m} R^n \cup \bigcup_{n=m+1}^{k} R^n \supseteq \bigcup_{n=1}^{m} R^n = T_m \supseteq R^1 = R$.

Dar $m = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid T_j \text{ este tranzitivă}\} \in \{j \in \mathbb{N}^* \mid T_j \text{ este tranzitivă}\}$, aşadar T_m este tranzitivă, prin urmare $T_k = \mathcal{T}(R) \subseteq T_m$ conform definiţiei închiderii tranzitive.

Aşadar $T_m = T_k = \mathcal{T}(R)$.