# Funcţii: Tipuri, Imagini şi Preimagini, Inverse la Stânga şi la Dreapta

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN

cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

Semestrul II, 2024-2025

## Caracterizarea tipurilor de funcţii prin intermediul imaginii şi preimaginii

Exerc.: $A, B \to$ mulțimi, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $f : A \to B$. Dem. că:

(1) $(\forall X \subseteq A)\left(f^{-1}(f(X)) \supseteq X\right)$,

(2) $(\forall Y \subseteq B)\left(f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y\right)$

(3) $f \to$ injectivă $\Leftrightarrow (\forall X \subseteq A)\left(f^{-1}(f(X)) = X\right)$.

(4) $f \to$ surjectivă $\Leftrightarrow (\forall Y \subseteq B)\left(f(f^{-1}(Y)) = Y\right)$

REZOLVARE:

Pt. orice $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$:

$f(X) \overset{(def)}{=} \{f(a) \mid a \in X\} \subseteq B$ și

$f^{-1}(Y) \overset{(def)}{=} \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A$,

prin urmare, pt. orice $a \in A$ și $b \in B$, au loc echivalențele:

$(*)$ $a \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(a) \in Y$, și:

$(**)$ $b \in f(X) \Leftrightarrow (\exists\, x \in X)(f(x) = b)$.

(1) Fie $X \subseteq A$, și $a \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \in f(X) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} a \in f^{-1}(f(X)) \Rightarrow$

$\Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

(2) Fie $Y \subseteq B$, și $b \in f(f^{-1}(Y))$

$\overset{(**)}{\Leftrightarrow} (\exists\, a \in f^{-1}(Y))(b = f(a))$.

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $a \in A$ și $f(a) \in Y$.

$\Rightarrow b = f(a) \in Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

(3) "$\Rightarrow$": Fie $X \subseteq A$. $\overset{(2)}{\Rightarrow} X \subseteq f^{-1}(f(X))$

Fie $a \in f^{-1}(f(X)) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} [a \in A$ şi $f(a) \in f(X) = \{f(u) \mid u \in X\}] \Rightarrow (\exists\, t \in X)(f(a) = f(t)) \xRightarrow{f-\text{inj.}} a = t \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

$\Rightarrow f^{-1}(f(X)) = X$.

"$\Leftarrow$": Fie $a, t \in A$ a.î. $f(a) = f(t) \Leftrightarrow \underbrace{\{f(a)\}}_{=f(\{a\})} = \underbrace{\{f(t)\}}_{=f(\{t\})} \Leftrightarrow$

2 mulţ. sunt $=$ $\Leftrightarrow$ au aceleaşi elem.

propr. f(el.) mai sus

$\Leftrightarrow f(\{a\}) = f(\{t\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(\{a\}))}_{=\{a\}} = \underbrace{f^{-1}(f(\{t\}))}_{=\{t\}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{a\} = \{t\} \Leftrightarrow a = t \Rightarrow f$ e injectivă.

(4) "$\Rightarrow$": Fie $Y \subseteq B$. $\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y.$

Fie $b \in Y \subseteq B. \xrightarrow{(f \to \text{surj.})} (\exists\, a \in A)$

$\underbrace{(f(a) = b \in Y).}$

$\Downarrow (*)$

$a \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(Y)).$

$\Rightarrow b = f(a) \in f(f^{-1}(Y)). \Rightarrow Y \subseteq$

$\subseteq f(f^{-1}(Y)).$

$\Longrightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y.$

"$\Leftarrow$": Fie $b \in B. \Leftrightarrow \{b\} \subseteq B. \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\} \ni b \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in f(f^{-1}(\{b\})). \overset{(**)}{\Longrightarrow} (\exists\, a \in$

$\in \underbrace{f^{-1}(\{b\})}_{\subseteq A})(b = f(a)).$

$\Rightarrow (\exists\, a \in A)(f(a) = b). \Rightarrow f$ este surjectivă.

**MATERIAL FACULTATIV: caracterizarea tipurilor de funcţii prin existenţa inverselor la stânga sau la dreapta**

Exerc.: $A, B \to$ mulţimi; $A \neq \emptyset$; $B \neq \emptyset$;

$f: A \to B$.

Să se dem. că:

(1) (1.1) $f \to$ surjectivă $\Leftrightarrow (\exists\, g: B \to A)(f \circ g = id_B)$;

există şi este unică

(1.2) $f \to$ bijectivă $\Leftrightarrow (\exists!\, g: B \to A)(f \circ g = id_B)$;

(fiind evident unică la "$\Rightarrow$" $g = f^{-1}$);

(2) (2.1) $f \to$ injectivă $\Leftrightarrow (\exists\, h: B \to A)(h \circ f = id_A)$;

(2.2) dacă $|A| \geq 2$, atunci:

$f \to$ bijectivă $\Leftrightarrow (\exists!\, h: B \to A)(h \circ f = id_A)$;

De fapt, "$\Rightarrow$" e valabilă $\forall\, |A|$, (cu $A \neq \emptyset$)

(fiind unică la "$\Rightarrow$" evident $h = f^{-1}$ evem.);

(3) $f \to$ bijectivă $\Leftrightarrow \left(\exists\, B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A\right)(f \circ g = id_B$ şi $h \circ f = id_A)$.

REZOLVARE:

① (1.1) "$\Leftarrow$": p: $(\exists g: B \to A)(f \circ g = id_B)$.

~~$f \to$ surjectivă.~~ ($a_b \in A$ not.)

$(\forall b \in B)\left(f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \right.$

$\left. = id_B(b) = b\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall b \in B)(\exists \underset{g(b)}{\overset{\shortparallel}{a_b}} \in A)(f(a_b) = b) \Rightarrow$

$\overset{def}{\Rightarrow} f \to$ surjectivă.

"$\Rightarrow$": $\neg p$: $f \to$ surjectivă.

$(\exists g: B \to A)(f \circ g = id_B)$ //

$f \to$ surj. $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall b \in B)(\exists$ cel puțin un elem. $a \in A)$ (a.î. $f(a) = b) \Rightarrow$

$f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$

adică mulț. acestor elem. a este nevidă (deci și putem aplica axioma alegerii).

$\Rightarrow (\forall b \in B)$(putem alege un elem $a_b \in A$, a.î. $f(a_b) = b$).

este unic det. de b, pt. că am ales unul singur

Def: $g: B \to A$, $(\forall b \in B)(g(b) := a_b)$

unic det. de $b$, așadar $g$ este bine definită, i.e. este funcție.

$(\forall b \in B)\left((f \circ g)(b) = f(g(b)) \overset{\text{def. } g}{=\!=} f(a_b) \overset{\text{def. } a_b}{=\!=} b = id_B(b)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \circ g = id_B$.

(1.2) Dc. $f \to$ bij. $\Rightarrow f \to$ surj. $\overset{(1.1)}{\Rightarrow} (\exists g: B \to A)(f \circ g = id_B) \Rightarrow$

„$\Leftarrow$", e clar pt. că $f^{-1}$ e bijectivă

$\Rightarrow f^{-1} = f^{-1} \circ id_B = f^{-1} \circ (f \circ g) \overset{\text{asoc. } \circ}{=\!=} \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{id_A} \circ g = id_A \circ g = g \Rightarrow$

$\Rightarrow g = f^{-1} \Rightarrow g \to$ unică (cu propr. din enunț) (i.e. unica inversă la dreapta a lui $f$ față de $\circ$).

(2) (2.1) „$\Rightarrow$": Ip: $(\exists h: B \to A)(h \circ f = id_A)$

$f \to$ injectivă.

Fie $a_1, a_2 \in A$, a.î. $f(a_1) =$
$= f(a_2) \Rightarrow h(f(a_1)) = h(f(a_2)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (h\circ f)(a_1) = (h\circ f)(a_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow id_A(a_1) = id_A(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow$
$\overset{def}{\Rightarrow} f \to$ injectivă.

"$\Rightarrow$": Ip.: $f \to$ injectivă,

$(\exists h: B \to A)(h\circ f = id_A)$.

$f \to$ inj. $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall b \in B)(\exists$ cel mult un elem. $a \in A)($a.î. $f(a) = b)$.

Not.: $\begin{cases} B_1 = f(A) \subseteq B; & \text{(imaginea lui } f) \\ B_2 = B \setminus B_1 = B \setminus f(A). \end{cases}$

$B_1, B_2 \to$ partiție a lui $B$, i.e. submulțimi complementare ale lui $B$, i.e.: $\begin{cases} B_1 \cup B_2 = B; \\ B_1 \cap B_2 = \emptyset. \end{cases}$

$(\forall b \in B_1 = f(A))(\exists!\, a_b \in A)(f(a_b) = b)$

i.e. unic det. de $b$

(şi $(\forall b \in B_2 = B \setminus f(A))(\nexists a \in A)(f(a) = b)$)

Def. $h : B \to A$, $\begin{cases} (\forall b \in B_1)(h(b) \overset{def}{=} a_b) \\ (\forall b \in B_2)(h(b) \in A) \text{ arbitrar,} \end{cases}$

dar unic, i.e. unic det. de $b$

$B_1 \cup B_2 = B \Rightarrow h \to$ complet definită, i.e. definită pe întregul său domeniu, $B$.

$B_1 \cap B_2 = \emptyset \Leftrightarrow (\nexists b)(b \in B_1$ şi $b \in B_2) \Rightarrow h \to$ corect definită, i.e. bine definită, i.e. este fct. (i.e. $b \in B \xrightarrow{h}$ unic elem. $\in A$).

$(\forall x \in A)((h \circ f)(x) = h(\underbrace{f(x)}_{\in f(A) = B_1}) \overset{def.\, h}{=}$

$= a_{f(x)} \in A)$.

$f(x) = f(x)$, $\Rightarrow a_{f(x)} = x$.

$a_{f(x)} \overset{def}{=}$ unic în $A$ cu propr. „$f(a_{f(x)}) = f(x)$"

$\Rightarrow (\forall x \in A)((h \circ f)(x) = x = id_A(x)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h \circ f = id_A$.

(2.2) Fie $f \to$ bij., at. $\Rightarrow f \to$ inj. $\Rightarrow$

$\overset{(2.1)}{\Longrightarrow} (\exists h : B \to A)(h \circ f = id_A) / \circ f^{-1} \Rightarrow$ chiar $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(h \circ f) \circ f^{-1}}_{h \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ id_B = h} = id_A \circ f^{-1} = f^{-1}$,

$\Rightarrow h = f^{-1} \Rightarrow h \to$ unică.

1) (1.1) Demonstrată mai sus.

(1.2) "$\Rightarrow$": Dem. mai sus.

"$\Leftarrow$":

Existența lui $g \overset{(1.1)}{\Longrightarrow} f$ → surj. Cf. ip. $g$ este unică cu propr. că $f \circ g = id_B$.

Pp. abs. $f$ → neinj. $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists\, a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2$ și $f(a_1) = f(a_2) = b \in B)$.

Def. $B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} A$, $(\forall\, c \in B)$ dc. $c \neq b$, at. $g_1(c) = g_2(c) \overset{def}{=}$
$\overset{def}{=} g(c)$;

$g_1(b) = a_1$ și $g_2(b) = a_2$.
$a_1 \neq a_2$. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1 \neq g_2$.

$(\forall\, c \in B \setminus \{b\})\big((f \circ g_1)(c) =$
$= f(g_1(c)) = f(g(c)) = (f \circ g)(c) =$

$= id_B(c) = c$, şi, analog,

$(f \circ g_2)(c) = c$,

$(f \circ g_1)(b) = f(g_1(b)) = f(a_1) = b$

$(f \circ g_2)(b) = f(g_2(b)) = f(a_2) = b$.

$\Rightarrow (\forall c \in B)((f \circ g_1)(c) = (f \circ g_2)(c) =$

$= c = id_B(c)) \Leftrightarrow f \circ g_1 = f \circ g_2 =$

$= id_B$, dar $g_1 \neq g_2$, şi, cf. ip.,

f are o unică inversă la dreapta faţă de $\circ$, anume $g$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cancel{X}$. $\Rightarrow$ $f \to$ injectivă,

$\Rightarrow$ $f \to$ bijectivă,

2 2,1 Dem. mai sus.

2,2 "$\Rightarrow$": Dem. mai sus.

"$\Leftarrow$":

Existenţa lui $h \xRightarrow{2,1} f \to$ injectivă.

Pp. prin absurd că $f \to$ nesurj.;

$\Leftrightarrow \underbrace{f(A)}_{\subseteq B} \neq B \Leftrightarrow f(A) \subsetneq B \Leftrightarrow B \setminus f(A) \neq$

$\neq \emptyset. \Leftrightarrow \exists\, b \in B \setminus f(A).$

$|A| \geq 2. \Leftrightarrow (\exists\, a_1, a_2 \in A)\ a_1 \neq a_2.$

Def. $B \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} A$, $(\forall\, c \in B \setminus \{b\})$

$(h_1(c) = h_2(c) = h(c))$;

$h_1(b) = a_1$ și $h_2(b) = a_2.$

$\left.\begin{matrix} \\ a_1 \neq a_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \neq h_2.$

$(\forall\, a \in A)(f(a) \in f(A) \not\ni b). \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall\, a \in A)(f(a) \in B \setminus \{b\}). \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall\, a \in A)((h_1 \circ f)(a) = h_1(f(a)) =$

$= h(f(a)) = (h \circ f)(a) = a = id_A(a) =$

$\underline{\text{analog}}$ $(h_2 \circ f)(a)). \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \circ f = h_2 \circ f = id_A.$

dar $h_1 \neq h_2$, și, cf. ip.,

$(\exists!\ h : B \to A)(h \circ f = id_A). \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ab. $\Rightarrow f \to$ surjectivă.

$\Rightarrow f \to$ bijectivă.

③ $\Leftarrow$ (1.1) și (2.1).

**MATERIAL FACULTATIV: caracterizarea tipurilor de funcţii prin proprietăţi ale funcţiilor imagine şi preimagine asociate acestor funcţii**

Exerc.: $A, B \to$ mulţimi; $A \neq \emptyset$; $B \neq \emptyset$;
$f : A \to B$.
Considerăm funcţiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), (\forall M \subseteq A)(f_*(M) := f(M)) \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), (\forall N \subseteq B)(f^*(N) := f^{-1}(N)) \end{cases}$$

(1) Să se dem. că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(1.a) $f \to$ injectivă;

(1.b) $f_* \to$ injectivă;

(1.c) $f^* \to$ surjectivă;

(1.d) $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$, i.e.: $(\forall M \subseteq A)(f^{-1}(f(M)) = M)$

(1.e) $(\forall M \subseteq A)(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$.

(2) Să se dem. că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

$$\begin{cases} (2.a) & f \to \text{surjectivă}; \\ (2.b) & f_* \to \text{surjectivă}; \\ (2.c) & f^* \to \text{injectivă}; \\ (2.d) & f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}, \text{ i.e.:} \\ & (\forall N \subseteq B)\left(f\left(f^{-1}(N)\right) = N\right); \\ (2.e) & (\forall M \subseteq A)\left(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M)\right). \end{cases}$$

(3) A se observa faptul că, din (1) și (2), rezultă că următoarele afirmații sunt echivalente:

$$\begin{cases} (3.a) & f \to \text{bijectivă}; \\ (3.b) & f_* \to \text{bijectivă}; \\ (3.c) & f^* \to \text{bijectivă}; \\ (3.d) & f_* \text{ și } f^* \text{ sunt inverse una alteia;} \\ (3.e) & (\forall M \subseteq A)\left(f(A \setminus M) = B \setminus f(M)\right). \end{cases}$$

(v. în (1.d) și (2.d) cele 2 condiții cu tot cu precizările echivalente)

REZOLVARE:

(1) $\underline{(1.a) \underset{11}{\Rightarrow} (1.b)}$:

Prin ipoteza acestei implicații, $f$ este injectivă.

Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(A)$, a.î.
$f_*(A_1) = f_*(A_2) \Leftrightarrow f(A_1) = f(A_2)$.

Fie $a \in A_1 \Rightarrow f(a) \in f(A_1) = f(A_2) \Rightarrow (\exists\, x \in A_2)(f(a) = f(x)) \Rightarrow$
$\xRightarrow{f \to \text{injectivă}} a = x \in A_2 \Rightarrow a \in A_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1 \subseteq A_2$.

Analog, $\Rightarrow A_2 \subseteq A_1$.

$\Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f_*$ este injectivă.

$(1.b) \Rightarrow (1.a)$:

Pp. $f_* \to$ injectivă.

Fie $a_1, a_2 \in A$, a.î. $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow f_*(\{a_1\}) = \{f(a_1)\} = \{f(a_2)\} = f_*(\{a_2\}) \xRightarrow{f_* \to \text{injectivă}}$
$\Rightarrow \{a_1\} = \{a_2\} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f \to$ injectivă.

$\underline{(1, a) \Rightarrow (1, c):}$

$\quad$ //

Pp. $f \rightarrow$ injectivă.

Fie $M \subseteq A$.

Not. $N := f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}$.

$$f^*(N) = f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\} =$$

$$= \{x \in A \mid f(x) \in f(M)\} = \{x \in A \mid (\exists\, a \in M)$$

$$f(x) = f(a)\} \xlongequal{f \rightarrow \text{inj.}} \{x \in A \mid (\exists\, a \in M)\, x = a\} =$$

$$= \{x \in A \mid x \in M\} = M. \Rightarrow f^* \rightarrow \text{surjectivă}.$$

$\underline{(1, c) \Rightarrow (1, a):}$

$\quad$ //

Pp. $f^* \rightarrow$ surjectivă.

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) =$
$= f(a_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \{a_1\}, \{a_2\} \in \mathcal{P}(A). \\ f^* \rightarrow \text{surjectivă}. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists\, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(B))$ a.î. $f^*(B_1) =$
$= \{a_1\}$ și $f^*(B_2) = \{a_2\}$. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(B_1) = \{a_1\} \Rightarrow a_1 \in f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow f(a_1) \in B_1. \ (*) \\ f^{-1}(B_2) = \{a_2\} \Rightarrow a_2 \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(a_2) \in B_2 \\ f(a_1) = f(a_2) \end{array}\right] \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a_1) \in B_2. \ (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow f(a_1) \in B_1 \cap B_2. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \underset{\cup, \cap \text{ de imagini, preimagini}}{\overset{\text{v. exerc. cu}}{=}} f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \{a_1\} \cap \{a_2\}.$$

$$\Leftrightarrow a_1 \in \{a_2\} \Leftrightarrow a_1 = a_2. \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este injectivă.

$(1.a) \Rightarrow (1.d)$:

Pp. $f \to$ injectivă.

Din dem. implicației "$(1.a) \Rightarrow (1.c)$", rezultă că: $(\forall M \subseteq A)(f^{-1}(f(M)) = M)$, ceea ce înseamnă că: $(\forall M \subseteq A)(f^*(f_*(M)) = M)$, adică exact: $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$.

$\underline{(1.d) \Rightarrow (1.a):}$

Pp. că $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$. (I)

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = f(a_2)$. $\Rightarrow \{a_1\} \overset{(I)}{=} f^*(f_*(\{a_1\})) = f^*(f(\{a_1\})) = f^*(\{f(a_1)\}) =$

$= f^*(\{f(a_2)\}) = f^*(f(\{a_2\})) =$

$= f^*(f_*(\{a_2\})) \overset{(I)}{=} \{a_2\}. \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_1\} = \{a_2\} \Leftrightarrow a_1 = a_2. \Rightarrow f$ → inj.

$\underline{(1.a) \Rightarrow (1.e):}$

Pp. $f$ → injectivă.

Fie $M \subseteq A$.

$f(A \setminus M) \cap f(M) \xrightarrow[\cap \text{ de imagini, preimagini}]{f \to \text{inj.; v. exerc. cu } \cup,}$

$= f(\underbrace{(A \setminus M) \cap M}_{\text{nu au elem. comune}}) = f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M)$.

($f(A \setminus M) \subseteq B$ și $f(A \setminus M)$ nu are elemente comune cu $f(M)$.)

$(1.e) \Rightarrow (1.a)$:

Pp. că $(\forall M \subseteq A)\left(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M)\right)$. $(\blacktriangle)$

Fie $a_1, a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = f(a_2)$. $\Rightarrow \{f(a_1)\} = \{f(a_2)\}$. $(\square)$

Pp. prin absurd că $a_1 \neq a_2 \Leftrightarrow a_1 \in A \setminus \{a_2\}$. $\Rightarrow f(a_1) \in f(A \setminus \{a_2\}) \overset{(\blacktriangle)}{\subseteq} B \setminus \{f(a_2)\} \overset{(\square)}{=} B \setminus \{f(a_1)\}$. $\Rightarrow f(a_1) \neq f(a_1)$. $\Rightarrow$ X. $\Rightarrow a_1 = a_2$. $\Rightarrow f$ este injectivă.

Obs.: Există multe metode de a dem. echivalențele de la (1), unele mult mai scurte decât cea de sus, în care se observă unele „scurtături", ca de exemplu:

$(1.d) \xrightarrow[\exists \text{ inversei la stg.}]{\text{caract. inj. prin}} (1.b)$

$(1.d) \xrightarrow[\text{prin } \exists \text{ inversei la dreapta}]{\text{caract. surj.}} (1.c)$ etc..

Dar am preferat să dem. aceste echivalențe în modul acesta:

$$\begin{tikzcd}
(1.b) \arrow[dr, Leftrightarrow] & & (1.c) \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
& (1.a) \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
(1.d) & & (1.e)
\end{tikzcd}$$

pentru a pune în evidență legătura directă dintre injectivitatea lui $f$ (condiția $(1.a)$) și celelalte proprietăți.

Un comentariu similar este valabil pt. dem. de mai jos a echivalențelor de la $(2)$.

$(2)$ $\underline{(2.a) \Rightarrow (2.b)}$:

Pp. că $f$ este surjectivă.

Fie $N \subseteq B$ și $M := f^{-1}(N) \subseteq A$.

$$f_*(M) = f_*(f^{-1}(N)) = f(f^{-1}(N))$$

$\underline{N = f(f^{-1}(N))}$.

Fie $b \in N$. $\xRightarrow{f \text{ surj.}} (\exists\, a \in A)(b = f(a)) \Rightarrow f(a) \in N \Leftrightarrow a \in f^{-1}(N) \Rightarrow$

$\Rightarrow b = f(a) \in f(f^{-1}(N)) \Rightarrow$

$\Rightarrow N \subseteq f(f^{-1}(N))$ $(\ast\ast\ast)$

Acum fie $b \in f(f^{-1}(N)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, a \in f^{-1}(N))(b = f(a))$ $\Rightarrow$

$\Downarrow$

$f(a) \in N$

$\Rightarrow b \in N \Rightarrow f(f^{-1}(N)) \subseteq N$ $(\ast\ast\ast\ast)$

$(\ast\ast\ast), (\ast\ast\ast\ast) \Rightarrow f(f^{-1}(N)) = N \Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{începutul acestei părți a rezolvării}]{\text{egalitățile de la}} f_\ast(M) = N \Rightarrow f_\ast$ e surjectivă.

$(2, b) \Rightarrow (2, a)$:

Pp. $f_\ast \rightarrow$ surjectivă,
Fie $b \in B \Leftrightarrow \{b\} \subseteq B$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists\, M \subseteq A)(f_\ast(M) = \{b\})$
$\{b\} \neq \emptyset$ $\Rightarrow M \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, a \in M \Rightarrow f(a) \in f(M) = f_\ast(M) = \{b\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) = b. \Rightarrow f$ e surjectivă.

$(2.a) \Rightarrow (2.c)$:

Pp. $f \to$ surjectivă.

Fie $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(B)$, a.î. $f^*(B_1) = f^*(B_2). \Leftrightarrow f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2). \Rightarrow$

$\Rightarrow f(f^{-1}(B_1)) = f(f^{-1}(B_2)).$

Din dem. implicației "$(2.a) \Rightarrow (2.b)$", cum $f$ e surjectivă, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \text{ și} \\ f(f^{-1}(B_2)) = B_2. \end{cases}$$

$\Rightarrow B_1 = B_2. \Rightarrow f^*$ e injectivă.

$(2.c) \Rightarrow (2.a)$:

Pp. $f^* \to$ injectivă.

Fie $b \in B. \Rightarrow \{b\} \neq \emptyset.$

$\Rightarrow f^{-1}(\{b\}) = f^*(\{b\}) \neq f^*(\emptyset) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \Rightarrow f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, a \in f^{-1}(\{b\}). \Rightarrow f(a) \in \{b\}. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(a) = b. \Rightarrow f \to$ surjectivă.

$\underline{(2.a) \Rightarrow (2.d)}$:

Pp. $f \to$ surjectivă. Din dem. implicației "$(2.a) \Rightarrow (2.b)$", $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\forall N \subseteq B)\left(f_*(f^*(N)) = f_*(f^{-1}(N)) = N\right). \Rightarrow f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}.$$

$\underline{(2.d) \Rightarrow (2.a)}$:

Pp. că $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$.
Fie $b \in B$. $\Leftrightarrow \{b\} \subseteq B$. $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{b\} = f_*(f^*(\{b\})) =$$
$$= f(f^{-1}(\{b\})). \Rightarrow b \in f(f^{-1}(\{b\})) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(\exists\, a \in \underbrace{f^{-1}(\{b\})}_{\subseteq A}\big)(f(a) = b). \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ e surjectivă.

$\underline{(2.a) \Rightarrow (2.e)}$:

Pp. $f \to$ surjectivă.
Fie $M \subseteq A$. Ac. $b \in B \setminus f(M) =$
$= \emptyset$, atr. $\Rightarrow B \setminus f(M) \subseteq f(A \setminus M)$. $(\bullet)$

Ac. $B \setminus f(M) \neq \emptyset$, atunci $\Rightarrow \exists\, b \in B \setminus f(M)$.

$\left.\begin{array}{l} f \to \text{surjectivă} \Rightarrow (\exists\, a \in A)(f(a) = b), \\ b \notin f(M) \end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow a \notin M. \Leftrightarrow a \in A \setminus M. \Rightarrow b = f(a) \in$

$\in f(A \setminus M). \Rightarrow B \setminus f(M) \subseteq f(A \setminus M).$ (••)

(•), (••) $\Rightarrow$ În oricare dintre cazuri, are loc: $B \setminus f(M) \subseteq f(A \setminus M)$.

$(2.\ a) \Rightarrow (2.\ a)$ ".

---

$\Leftarrow$ Pp. că $(\forall M \subseteq A)(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$.

Luăm $M = \emptyset. \Rightarrow \begin{cases} A \setminus M = A, \\ f(M) = f(\emptyset) = \emptyset \end{cases}$
$\Rightarrow B \setminus f(M) = B.$

$\Rightarrow f(A) \supseteq B \Leftrightarrow (\forall\, b \in B)(b \in f(A)) \Leftrightarrow$

(desigur, este "=", pt. că "$\subseteq$" are loc întotdeauna)

$\Leftrightarrow (\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A)(b = f(a)). \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este surjectivă.