Breviar pentru Secţiunea despre Mulţimi Ordonate, Latici şi Algebre Boole a Cursului de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2023–2024, Semestrul I

1 Relaţii de ordine

Remarca 1.1. Pentru orice mulţime A, Δ_A este singura relaţie binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică şi antisimetrică. Într–adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică şi antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică şi antisimetrică;
- aşadar: R e simetrică şi antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică şi antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ şi $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarca 1.2. Pentru orice mulţime A, Δ_A este singura relaţie binară pe A care este simultan relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară şi faptul că Δ_A este tranzitivă.

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relaţie reflexivă pe A, în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă şi este inclusă în orice relaţie binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A şi cea mai mică relaţie de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Remarca 1.3 (obţinerea unei relaţii de ordine dintr–o relaţie de preordine; aplicaţie: ordinele de complexitate ale algoritmilor)**.** Fie A o mulţime nevidă şi $R \subseteq A^2$ o relaţie de preordine pe A.

Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă [xRy şi yRx]). Se demonstrează că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

Considerăm mulţimea factor $A/_\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe $A/_\sim$ definim relaţia binară $\leq$, astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy.

Se demonstrează că $\leq$ este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanţi**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) şi $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalenţa: xRy ddacă zRt. Şi se demonstrează că $\leq$ este o relaţie de ordine pe $A/_\sim$.

Remarca 1.4. Dacă A e o mulţime nevidă, atunci nu există nicio relaţie binară pe A care să fie şi reflexivă, şi ireflexivă, prin urmare nu există nicio relaţie binară pe A care să fie şi relaţie de ordine, şi relaţie de ordine strictă

Exerciţiul 1.1 (ordine versus ordine strictă)**.** Fie A o mulţime, O mulţimea relaţiilor de ordine pe A şi S mulţimea relaţiilor de ordine strictă pe A.

Să se demonstreze că aplicaţiile $\varphi : O \to S$ şi $\psi : S \to O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ şi } x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ şi $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
  - scăzând din orice relaţie de ordine pe A diagonala lui A, se obţine o relaţie de ordine strictă pe A;
  - reunind orice relaţie de ordine strictă pe A cu diagonala lui A, se obţine o relaţie de ordine pe A;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ şi $\varphi \circ \psi = id_S$, ceea ce înseamnă că φ şi ψ sunt bijecţii între O şi S.

Definiţia 1.1. Fie A o mulţime, $\leq$ o relaţie de ordine pe A şi $<$ o relaţie de ordine strictă pe A.

Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ şi } x \neq y\}$ se numeşte *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numeşte *relaţia de ordine asociată lui* $<$.

(A se vedea exerciţiul anterior.)

Remarca 1.5. Relaţia de ordine strictă asociată unei relaţii de ordine totale este o relaţie totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulţimea pe care este definită este $\emptyset$).

Notaţia 1.1. Pentru orice mulţime A, orice $R \subseteq A^2$ şi orice $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$, vom nota faptul că $a_1 R a_2,\ a_2 R a_3, \ldots$ şi prin: $a_1 R a_2 R a_3 \ldots$.

Definiţia 1.2.
- O mulţime A înzestrată cu o relaţie de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează $(A, \leq)$ şi se numeşte *mulţime (parţial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set").
- Dacă, în plus, $\leq$ este o relaţie de ordine totală, atunci $(A, \leq)$ se numeşte *mulţime total ordonată* sau *mulţime liniar ordonată* sau *lanţ*.

Observaţia 1.1. **Poseturile** sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operaţii**, ci cu o **relaţie binară.**

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notaţiile din definiţia anterioară, A se numeşte *mulţimea elementelor*, sau *mulţimea suport*, sau *mulţimea subiacentă* posetului $(A, \leq)$; vom vedea şi noţiunile de **substructură** a unui poset şi **morfism** de poseturi.

Definiţia 1.3. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $<:=\leq \setminus \Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ şi } a \neq b\}$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq$.

Relaţiei de ordine $\leq$ pe A i se asociază *relaţia de succesiune* (numită şi *relaţia de acoperire*), notată $\prec$ şi definită astfel: $\prec := \{(a, b) \in A^2 \mid a < b \text{ şi nu există } x \in A \text{ a. î. } a < x < b\} \subseteq A^2$.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numeşte *succesor al lui* a (se mai spune că b *acoperă pe* a)
- a se numeşte *predecesor al lui* b (sau se spune că a *este acoperit de* b)

Remarca 1.6 (temă)**.** Cu notaţiile din definiţia anterioară, $\prec$ e asimetrică (deci şi ireflexivă) şi nu e tranzitivă.

Notaţia 1.2 (notaţii uzuale într–un poset)**.** Cu notaţiile din definiţia anterioară: $\geq :=\leq^{-1}$, $> :=<^{-1}=\geq \setminus \Delta_A$ şi $\succ :=\prec^{-1}$.

Definiţia 1.4. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $<$ ordinea strictă asociată lui $\leq$. Spunem că mulţimea A este *densă raportat la ordinea* $\leq$, sau că $\leq$ este o *ordine densă pe* A ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$, i. e. ddacă $\prec = \emptyset$ în posetul $(A, \leq)$.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse:

- Amintim că relaţiile binare (pe mulţimi finite şi nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relaţiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ţine seama de proprietăţile de reflexivitate, tranzitivitate şi antisimetrie ale unei relaţii de ordine pentru a elimina redundanţele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăţi. Această reprezentare grafică a unei relaţii de ordine se numeşte *diagramă Hasse*.
- Şi această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relaţii (de ordine) pe mulţimi finite şi nevide.
- Dacă $(A, \leq)$ este un poset finit şi nevid (i. e. cu A finită şi nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ este graful neorientat având mulţimea nodurilor egală cu A şi mulţimea muchiilor egală cu relaţia de succesiune $\prec$ asociată lui $\leq$ şi a cărui reprezentare grafică respectă regula:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găseşte în relaţia de ordine strictă $<$ asociată lui $\leq$, i. e. nodurile "strict mai mari" decât el**.

Observaţia 1.2. Faptul că, într–un poset finit şi nevid $(A, \leq)$, două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $<:=\leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y şi
- x şi y sunt conectate printr–un lanţ (mai precis, prin cel puţin un lanţ; aici, **lanţ** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulţimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulţime total ordonată a posetului $(A, \leq)$, adică este un lanţ cu ordinea indusă).

Observaţia 1.3. **În diagramele Hasse nu există muchii orizontale,** ci numai muchii verticale sau oblice.

Observaţia 1.4. Diagrama Hasse a unei **mulţimi liniar ordonate** este "liniară".

Amintim că o **mulţime liniar ordonată** se mai numeşte **mulţime total ordonată** sau **lanţ**.

Notaţia 1.3. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanţul cu** k **elemente** prin $\mathcal{L}_k$ (articolul hotărât va fi explicat în remarca următoare). De obicei, mulţimea suport a lanţului $\mathcal{L}_k$ se notează cu L_k. Evident, orice mulţime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanţul cu k elemente.

Remarca 1.7. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanţul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulţime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

Mai precis, dacă L_k este o mulţime cu exact k elemente, iar $\leq$ şi $\sqsubseteq$ sunt două ordini totale pe L_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ şi $(L_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k şi M_k sunt mulţimi cu exact k elemente, iar $\leq$ este o ordine totală pe L_k şi $\sqsubseteq$ este o ordine totală pe M_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ şi $(M_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulţumim cu explicaţia intuitivă: două poseturi finite şi nevide sunt **izomorfe** ddacă **au aceeaşi diagramă Hasse.**

Elemente distinse într–un poset:

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie $(A, \leq)$ un poset şi $X \subseteq A$.

Remarca 1.8. Este imediat faptul că relaţia binară pe X dată de mulţimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X, şi că, dacă ordinea $\leq$ pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiţia 1.5. Ordinea pe X din remarca anterioară se numeşte *ordinea indusă de* $\leq$ *pe* X şi se notează tot cu $\leq$.

Posetul $(X, \leq)$ se numeşte *subposet* sau *submulţime (parţial) ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Dacă $(X, \leq)$ este un lanţ (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci $(X, \leq)$ se numeşte *submulţime total ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Definiţia 1.6. Un element $a \in A$ se numeşte:

- *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarca 1.9. X poate avea mai mulţi minoranţi (majoranţi), şi poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Definiţia 1.7.
- Un minorant al lui X care aparţine lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numeşte *minim al lui* X sau *prim element al lui* X sau *cel mai mic element al lui* X şi se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparţine lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numeşte *maxim al lui* X sau *ultim element al lui* X sau *cel mai mare element al lui* X şi se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarca 1.10. Minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui $\leq$ implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notaţia de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (şi $\leq$)). La fel pentru maxim.

Definiţia 1.8. Un poset cu minim şi maxim se numeşte *poset mărginit.* (Minimul şi maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiţia anterioară.)

Remarca 1.11. O mulţime care are minim sau maxim are cel puţin un element (pentru că minimul unei mulţimi aparţine acelei mulţimi şi la fel şi maximul), deci nu poate fi vidă.

Definiţia 1.9. Un element $x \in X$ se numeşte:

- *element minimal al lui* X ddacă este minimul submulţimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui* X ddacă este maximul submulţimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarca 1.12. Din definiţia anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X şi minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X şi element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X şi majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X şi element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Remarca 1.13. Orice poset finit şi nevid are elemente maximale şi elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit şi nevid $(A, \leq)$, există un element minimal e şi un element maximal E în posetul $(A, \leq)$, cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

În orice poset finit şi nevid, orice element care nu este element maximal are cel puţin un succesor, şi orice element care nu este element minimal are cel puţin un predecesor.

În orice poset finit şi nevid, închiderea tranzitivă a relaţiei de succesiune este relaţia de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relaţiei de succesiune (i. e. preordinea generată de relaţia de succesiune) este relaţia de ordine.

Definiţia 1.10. *Infimumul lui* X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulţimii minoranţilor lui X, şi se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.

Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulţimii majoranţilor lui X, şi se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarca 1.14. Infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulţimea minoranţilor este nevidă.

Dar, fiind maximul unei mulţimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât şi notaţia, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (şi $\leq$)).

La fel pentru supremum.

Remarca 1.15. Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparţine mulţimii ddacă este minimul mulţimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, şi atunci $\min(X) = \inf(X)$.

Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparţine mulţimii ddacă este maximul mulţimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, şi atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarca 1.16. Din definiţia infimumului şi a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ şi
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ şi
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lema 1.1. *Fie* $(L, \leq)$ *un poset. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $x \leq y$

(ii) există în L $\inf\{x, y\} = x$

(iii) există în L $\sup\{x, y\} = y$

Principiul dualităţii pentru poseturi:

- **Principiul dualităţii pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset* **arbitrar (fapt esenţial)** $(A, \leq)$ *rămâne valabil dacă înlocuim* $\leq$ *cu* $\leq^{-1}$ *(notată* $\geq$*;* conform definiţiei inversei unei relaţii binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare*),* $<$ *cu* $<^{-1}$ *(notată* $>$*),* $\prec$ *cu* $\prec^{-1}$ *(notată* $\succ$*), toţi minoranţii cu majoranţi (ca noţiuni) şi vice–versa, toate elementele minimale cu elemente maximale şi vice -versa, toate minimurile cu maximuri şi vice -versa şi toate infimumurile cu supremumuri şi vice–versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este uşor de observat din faptul că: pentru orice ordine $\leq$, $\geq$ este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relaţia de succesiune $\succ$, $\leq$ este totală ddacă $\geq$ este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranţii lui $(X, \leq)$ sunt exact majoranţii lui $(X, \geq)$ şi vice–versa, elementele minimale ale lui $(X, \leq)$ sunt exact elementele maximale ale lui $(X, \geq)$ şi vice–versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ şi vice–versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, şi, atunci când există, sunt egale; la fel vice–versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ şi vice–versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noţiunile de minorant şi majorant sunt *duale una alteia*, şi la fel pentru noţiunile de element minimal şi element maximal, minim şi maxim, infimum şi supremum, respectiv.
- Posetul $(A, \geq)$ se numeşte *posetul dual* al posetului $(A, \leq)$.
- Este evident că dualul dualului unui poset $(A, \leq)$ este chiar $(A, \leq)$.
- Ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualităţii pentru poseturi**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".
- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obţine prin "răsturnarea diagramei Hasse" a acelui poset "cu susul în jos".
- Lanţurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarca 1.17. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \nleq b$;
- dacă $(A, \leq)$ este lanţ, atunci: $b < a$ ddacă $a \nleq b$.

Remarca 1.18. Fie $(L, \leq)$ un poset şi $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ şi $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Remarca 1.19. Pentru orice mulţime T, în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup\limits_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap\limits_{A \in X} A$

Remarca 1.20 (temă: scrieţi această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$)**.** Fie $(L, \leq)$ un poset şi $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(X)$ şi $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ şi $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare.
Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Remarca 1.21. Într–un poset $(L, \leq)$, $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, şi, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ şi $\max(L)$.

Propoziţia 1.1. *Fie* $(L, \leq)$ *un poset. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ *există în* L*;*

(ii) pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ *există în* L.

2 Funcţii izotone

Definiţia 2.1. Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcţie.

f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Funcţiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observaţia 2.1. Se consideră că denumirea de **funcţie crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulţimile de numere, şi, de aceea, se preferă denumirea de **funcţie izotonă** în cazul funcţiilor între poseturi arbitrare.

Remarca 2.1. Cu notaţiile din definiţia de mai sus, f este funcţie antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ şi posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Remarca 2.2. Compunerea a două funcţii izotone este o funcţie izotonă.

Exerciţiul 2.1 (temă)**.** Orice funcţie izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.

I. e., dacă:

- $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ sunt două poseturi,
- $< := \leq \setminus \Delta_A$ şi $\sqsubset := \sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinile stricte asociate lui $\leq$ şi, respectiv, $\sqsubseteq$,
- iar $f : A \to B$ este o funcţie izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

Definiţia 2.2. O funcţie între două poseturi se numeşte *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă şi cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exerciţiul 2.2 (temă)**.** Fie $f : L \to M$ o funcţie bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ şi $(M, \sqsubseteq)$. Arătaţi că, dacă $(L, \leq)$ este lanţ, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Exerciţiul 2.3 (temă)**.** Fie $f : L \to M$ o funcţie surjectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ şi $(M, \sqsubseteq)$. Arătaţi că, dacă $(L, \leq)$ este lanţ, atunci $(M, \sqsubseteq)$ este lanţ.

Remarca 2.3. Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile şi supremumurile arbitrare.

Exerciţiul 2.4 (Teorema Knaster–Tarski (temă))**.** Fie $(L, \leq)$ un poset, iar $f : L \to L$ o funcţie izotonă.

Dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

(i) $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui* f) şi $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;

(ii) dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Şi **dual:** dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

(i) $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui* f) şi $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;

(ii) dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulţimi parţial ordonate (poseturi):

Definiţia 2.3. Se numeşte *mulţime (parţial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set") o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulţime A şi o **relaţie de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relaţie binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ şi $y \leq z$ implică $x \leq z$

- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ şi $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relaţia de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numeşte *mulţime total ordonată* sau *mulţime liniar ordonată* sau *lanţ*.

Relaţia de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este $< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.

Relaţia de succesiune asociată ordinii $\leq$ este $\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\,(x < a < y)\}$.
Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ şi $\succ := \prec^{-1}$.

Remarca 2.4. Cu notaţiile din definiţia anterioară, avem:

- $\geq$ este o relaţie de ordine pe A
- $>$ este relaţia de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relaţia de succesiune asociată lui $\geq$

3 Operatori de închidere şi sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Pe tot parcursul acestei secţiuni, $(A, \leq)$ va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.

Următoarea definiţie o generalizează pe cea din Cursul III în care posetul de referinţă era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulţime arbitrară.

Definiţia 3.1.
- Se numeşte *sistem de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o submulţime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulţime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în $(A, \leq)$ $\inf(S) \in M$.
- Se numeşte *operator de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o funcţie $C : A \to A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietăţile:
  (i) $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
  (ii) $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
  (iii) dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Remarca 3.1. Orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ conţine $\inf(\emptyset) = \max(A)$, aşadar orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ este nevid.

Exemplul 3.1.
- id_A este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- Funcţia constantă $C : A \to A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- A este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\emptyset$ nu este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziţia 3.1. *Dacă M este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, atunci, pentru orice $x \in A$, există în $(A, \leq)$ $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.*

Iar, dacă definim $C_M : A \to A$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziţia 3.2. *Fie $C : A \to A$ un operator de închidere pe $(A, \leq)$. Atunci imaginea lui C este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, având ca elemente exact punctele fixe ale lui C: $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. Vom nota cu $M_C = C(A)$.*

Propoziţia 3.3. *Aplicaţiile din cele două propoziţii precedente sunt inverse una alteia, adică:*

(i) pentru orice operator de închidere $C : A \to A$ pe $(A, \leq)$, $C_{M_C} = C$;

(ii) pentru orice sistem de închidere M pe $(A, \leq)$, $M_{C_M} = M$.

Aşadar aceste aplicaţii sunt bijecţii, deci mulţimea operatorilor de închidere pe $(A, \leq)$ şi mulţimea sistemelor de închidere pe $(A, \leq)$ sunt în bijecţie.

4 Latici

- O latice este simultan un poset şi o structură algebrică înzestrată cu două operaţii binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăţi specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

  laticile Ore şi **laticile Dedekind**.

  Orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, şi orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore.
- Aşadar, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore şi o latice Dedekind.

Definiţia 4.1. O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ şi $\sup\{x, y\} \in L$.

Remarca 4.1. Orice lanţ este latice Ore, pentru că, dacă $(L, \leq)$ este un lanţ nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ şi $\max\{x, y\}$, aşadar există în $(L, \leq)$ $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ şi $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Definiţia 4.2. O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulţime, iar $\vee$ şi $\wedge$ sunt două operaţii binare pe L (adică $\vee : L^2 \to L$ şi $\wedge : L^2 \to L$; aceste operaţii binare sunt notate infixat şi numite, respectiv, *sau* şi *şi*, sau *disjuncţie* şi *conjuncţie*, sau *reuniune* şi *intersecţie*) care satisfac următoarele proprietăţi:

- **idempotenţă:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ şi $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ şi $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ şi $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbţie:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ şi $x \wedge (x \vee y) = x$.

Lema 4.1. *Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $x \leq y$

(ii) există în L $\inf\{x, y\} = x$

(iii) există în L $\sup\{x, y\} = y$

Lema 4.2. *Fie $(L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $x \wedge y = x$

(ii) $x \vee y = y$

Teorema 4.1. *Cele două definiţii ale noţiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.*

(i) Fie $\mathcal{L} := (L, \leq)$ o latice Ore. Definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde $\vee$ şi $\wedge$ sunt operaţii binare pe mulţimea L, definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ şi $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore $\mathcal{L}$. Atunci $\Phi(\mathcal{L})$ este o latice Dedekind.

(ii) Fie $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde $\leq$ este o relaţie binară pe mulţimea L, definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ (ceea ce este echivalent cu $x \wedge y = x$, după cum ne asigură o lemă de mai sus). Atunci $\Psi(\mathcal{L})$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şi $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

(iii) Aplicaţiile Φ şi Ψ sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore $\mathcal{L}$, $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$, şi, pentru orice latice Dedekind $\mathcal{L}$, $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore şi orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore şi o latice Dedekind.

- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parţială (care o face latice Ore) şi cu operaţiile ei binare (disjuncţia şi conjuncţia, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiţii echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.

- Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notaţiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ şi $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcţie de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parţială $\leq$, operaţiile ei binare $\vee$ şi $\wedge$, sau toate acestea.

Exemplul 4.1. Cu ultima dintre notaţiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulţime T;

- orice lanţ $(L, \max, \min, \leq)$.

Propoziţia 4.1 (două inegalităţi nestricte şi de acelaşi sens într–o latice se pot compune cu $\vee$, precum şi cu $\wedge$, membru cu membru; altfel spus, relaţia de ordine într–o latice este compatibilă cu $\vee$ şi cu $\wedge$)**.** *Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$, dacă $x \leq a$ şi $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ şi $x \vee y \leq a \vee b$.*

Principiul dualităţii pentru latici:

În concordanţă cu **Principiul dualităţii pentru poseturi**, următoarele noţiuni legate de definiţia unei latici sunt duale unele faţă de celelalte: $\vee$ şi $\wedge$, $\leq$ şi $\geq$, respectiv, unde, ca şi la enunţarea **Principiului dualităţii pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.

Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice, atunci este imediat, din definiţia unei latici şi **principiul dualităţii pentru poseturi**, că $(L, \wedge, \vee, \geq)$ este, de asemenea, o latice, iar această latice se numeşte *duala* laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Este evident că duala dualei unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualităţii pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară $(L, \vee, \wedge, \leq)$ rămâne valabil dacă în el interschimbăm $\vee$ cu $\wedge$ şi $\leq$ cu $\geq$.*

Ca şi la **Principiul dualităţii pentru poseturi**, este esenţial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.

De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualităţii pentru latici**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".

5 Funcţii izotone versus morfisme de latici

Definiţia 5.1. Fie $(L, \vee, \wedge)$ şi $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici şi $f : L \to M$ o funcţie.

f se numeşte *morfism de latici* ddacă f comută cu operaţiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

(i) $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$

şi

(ii) $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăşi se numeşte *endomorfism* al acelei latici.

Remarca 5.1. Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici.

Remarca 5.2. Orice morfism de latici este funcţie izotonă, dar nu şi reciproc.

Exerciţiul 5.1 (util pentru alte exerciţii)**.** Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ şi $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ latici, iar $f : L \to M$ o funcţie.

Să se demonstreze că o f e morfism de latici ddacă f e izotonă şi păstrează infimumurile şi supremumurile perechilor de elemente incomparabile din L, i.e. ddacă, pentru orice $x, y \in L$:

- dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \sqsubseteq f(y)$;

- dacă $x || y$, atunci $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$ şi $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Definiţia 5.2. Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcţie inversabilă şi a cărei inversă este tot un morfism de latici.

Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice şi ea însăşi (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiţia 5.3. Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*.

În general, oricare două structuri algebrice de acelaşi tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziţia 5.1. *O funcţie între două latici este un izomorfism de latici ddacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcţie bijectivă.*

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Propoziţia 5.2. *O funcţie între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).*

6 Latici mărginite

Definiţia 6.1. Un poset mărginit care este latice se numeşte *latice mărginită*.

Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.

Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.

O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notaţiile prezentate mai sus.

O latice mărginită se mai numeşte *latice cu* 0 *şi* 1 sau *latice cu prim şi ultim element*.

Definiţia 6.2. Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numeşte *laticea mărginită trivială*.

Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numeşte *latice mărginită netrivială*.

Definiţia 6.3. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ două latici mărginite şi $f : L \to M$ o funcţie.

f se numeşte *morfism de latici mărginite* ddacă este morfism de latici şi $f(0) = \perp$ şi $f(1) = \top$.

Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăşi se numeşte *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarca 6.1. Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.

Definiţia 6.4. Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcţie inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.

Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latice mărginită şi ea însăşi (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiţia 6.5. Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe*.

Propoziţia 6.1. *O funcţie între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite ddacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcţie bijectivă.*

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Remarca 6.2. De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarca 6.3. Am văzut că orice funcţie izotonă păstrează minimele şi maximele arbitrare.

Prin urmare, orice funcţie izotonă surjectivă între două poseturi mărginite păstrează minimul şi maximul, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de–al doilea poset, şi duce maximul primului poset în maximul celui de–al doilea poset.

Remarca 6.4. Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulţime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulţimii (desigur, şi există o astfel de ordine totală).

Semnificaţia acestei afirmaţii este că oricare două lanţuri finite cu aceeaşi mulţime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este acelaşi lucru, pentru că ştim că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulţime finită A, dacă $\leq$ şi $\sqsubseteq$ sunt ordini totale pe A, atunci poseturile (laticile) $(A, \leq)$ şi $(A, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe.

Ca o consecinţă imediată, oricare două lanţuri finite de acelaşi cardinal (i. e. cu acelaşi număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este acelaşi lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanţul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanţuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este acelaşi lucru; deci şi ca latici mărginite, conform remarcii anterioare).

7 Sublatici şi sublatici mărginite

Definiţia 7.1. Dată o latice $(L, \vee, \wedge)$, o submulţime M a lui L se numeşte *sublatice a lui* L ddacă este închisă la operaţiile de latice ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulţime M a lui L se numeşte *sublatice mărginită a lui* L ddacă este închisă la operaţiile de latice mărginită ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Remarca 7.1. Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operaţiile *induse* pe M de operaţiile lui L, adică restricţiile operaţiilor lui L la M:

- restricţia lui $\vee$ la M este operaţia binară $\sqcup$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricţia lui $\wedge$ la M este operaţia binară $\sqcap$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite: restricţia lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operaţie zeroară*, adică o operaţie fără argumente); restricţia lui 0 la M la M este 0 (şi aceasta este o constantă, i. e. o *operaţie zeroară*, adică o operaţie fără argumente).

Operaţiile induse se notează, de obicei, la fel ca operaţiile laticii L:

- operaţia $\sqcup$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\vee$;
- operaţia $\sqcap$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\wedge$;
- în cazul laticilor mărginite, primul şi ultimul element al sublaticii mărginite M, ca prim şi, respectiv, ultim element al laticii mărginite M, se notează, de obicei tot cu 0 şi 1, respectiv.

Remarca 7.2. Cu notaţiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parţială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operaţiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parţială a lui L restricţionată la M, care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parţială a lui L:

- notând cu $\sqsubseteq$ ordinea laticii M, pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea $\sqsubseteq$ a laticii M este, într–adevăr, restricţia lui $\leq$ la M, şi $\sqsubseteq$ se notează, de obicei, tot cu $\leq$.

Remarca 7.3. Orice submulţime a unei latici $\mathcal{L}$ este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat şi sublatice, pentru că poate să nu conţină infimumurile şi supremumurile din $\mathcal{L}$ ale perechilor de elemente ale sale.

Exerciţiul 7.1 (temă)**.** Orice submulţime total ordonată a unei latici $\mathcal{L}$ este sublatice a lui $\mathcal{L}$.

Exerciţiul 7.2 (temă)**.** Să se demonstreze că:

(i) imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;

(ii) mai general: imaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a domeniului său este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;

(iii) preimaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a codomeniului său este o sublatice (mărginită) a domeniului acelui morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcţie), deci acest caz particular la punctul (iii) este trivial.)

8 Latici distributive

Propoziţia 8.1. *În orice latice $(L, \vee, \wedge)$, următoarele două afirmaţii, numite* legile de distributivitate*, sunt echivalente:*

(d_1) *pentru orice $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;*

(d_2) *pentru orice $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.*

Definiţia 8.1. O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (şi deci pe amândouă) dintre condiţiile (d_1) şi (d_2) din propoziţia precedentă.

Remarca 8.1. A se observa că egalităţile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalităţi să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că şi cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

Remarca 8.2. Pentru orice mulţime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă.

Remarca 8.3. Orice lanţ este o latice distributivă.

Remarca 8.4. Orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarca 8.5. Imaginea oricărei latici distributive printr–un morfism de latici este o latice distributivă.

A se vedea în curs diagramele Hasse ale *diamantului* şi *pentagonului* – cele mai mici latici nedistributive, întrucât:

Propoziţia 8.2 (caracterizare a laticilor distributive)**.** *O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.*

9 Elemente complementate în latici mărginite

Definiţia 9.1. Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.

Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ şi $x \wedge y = 0$.

Un astfel de element y se numeşte *complement al lui x*.

O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarca 9.1. În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită şi $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x, atunci x este un complement al lui y, după cum arată comutativitatea lui $\vee$ şi $\wedge$.

Remarca 9.2. În orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi niciunul dintre ele nu are alte complemente.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite:

Remarca 9.3. În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

10 Latici complete

Definiţia 10.1. O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ şi $\sup(A)$ în posetul $(L, \leq)$.

Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\bigwedge\limits_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\bigvee\limits_{x \in A} x$.

Exemplul 10.1. Pentru orice mulţime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă şi completă.

Remarca 10.1.

- Orice latice completă $(L, \leq)$ este nevidă şi mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ şi $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ şi $\max(L) = 1$, cu notaţia clasică pentru primul şi ultimul element al unei latici.
- Orice latice finită şi nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat mai sus, orice latice nevidă conţine infimumurile şi supremumurile tuturor submulţimilor sale finite şi nevide şi, în plus, orice latice finită şi nevidă are prim şi ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul şi infimumul mulţimii vide.
- O latice $(L, \leq)$ este completă ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$, ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$.

11 Suma directă, produsul direct şi suma ordinală de poseturi

Definiţia 11.1. Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \dotplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \dotplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \dotplus \sqsubseteq$ este următoarea relaţie binară pe $A \coprod B$: $\leq \dotplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ şi elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$, notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relaţie binară pe mulţimea produs direct $A \times B$: $\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care $(A, \leq)$ are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar $(B, \sqsubseteq)$ are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relaţie binară pe $A \coprod (B \setminus \{0\})$, cu aceleaşi identificări ca mai sus: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Observaţia 11.1. Definiţia de mai sus a relaţiei binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiţiei unui produs direct arbitrar de relaţii binare, prezentate într–un curs anterior.

În unele cărţi şi articole se folosesc următoarele denumiri:

- *suma ordinală* definită ca mai sus e numită *sumă alipită*;
- *suma directă* definită ca mai sus e numită *sumă ordinală*.

În cursurile mele mai vechi puteţi găsi notaţiile $\dotplus$ şi $\oplus$ pentru sumele directe, respectiv ordinale inversate. La **examen** este necesar să le folosiţi pe cele din cursul de anul acesta.

Remarca 11.1 (temă)**.** Cu notaţiile din definiţia anterioară, relaţiile binare sumă directă, $\leq \dotplus \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, şi sumă ordinală, $\leq \oplus \sqsubseteq$, sunt **relaţii de ordine** pe $A \coprod B$, $A \times B$ şi $(A \coprod (B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică:$(A \coprod B, \leq \dotplus \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ şi $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.

Remarca 11.2 (temă)**.** Se observă că:

- **suma directă** şi **suma ordinală** de poseturi **sunt asociative**, dar **nu sunt comutative**;
- **produsul direct** de poseturi **este asociativ şi comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ şi $(C, \leq_C)$, există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ şi $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ şi $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) şi există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ şi $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ şi $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că şi **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ şi comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiţia unui produs direct de algebre).

Remarca 11.3 (temă)**.** Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi.

(i) Dacă $|A| \geq 2$ şi $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanţ.

(ii) Dacă A este un singleton (i. e. o mulţime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).

(iii) Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ şi $(A, \leq)$ sunt izomorfe.

(iv) Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.

(v) Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarca 11.4. Remarca anterioară arată că lanţurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanţurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanţ nevid $(L, \leq)$ este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu $(L, \leq)$ şi fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

A se vedea în curs cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct şi sumă ordinală între două poseturi finite**.

Definiţia 11.2. **Produsul direct** poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se defineşte *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i \in I} \leq_i$ este următoarea relaţie binară pe produsul direct de mulţimi $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\, (f(i) \in A_i)\}$: pentru orice $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } (\forall\, i \in I)\, (f(i) \leq_i g(i))$$

După cum ştim din rezultatul privind proprietăţile unui produs direct arbitrar de relaţii binare, relaţia $\leq$ definită mai sus este o **relaţie de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

Notaţia 11.1. Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiţia anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine $(A^I, \leq)$ (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \to A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă şi succesiunea asociate ordinii produs:

Remarca 11.5. Cu notaţiile din definiţia anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ şi, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq_i$, iar cu $\prec_i$ relaţia de succesiune asociată lui $\leq_i$, şi cu $<$ notăm relaţia de ordine strictă asociată ordinii produs $\leq$, iar cu $\prec$ notăm relaţia de succesiune asociată lui $\leq$, atunci:

- $<= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I}$ şi $(\exists\, k \in I)\, (a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists\, k \in I)\, [a_k \prec_k b_k$ şi $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\, (a_i = b_i)]\}$.

Remarca 11.6. Din remarca anterioară deducem că, dacă $(A, \leq_A)$ şi $(B, \leq_B)$ sunt poseturi, iar relaţia de succesiune asociată lui $\leq_A$, respectiv $\leq_B$, este $\prec_A$, respectiv $\prec_B$, atunci relaţia de succesiune asociată ordinii produs, $\leq=\leq_A \times \leq_B$, este:

$$\prec= \{((a, b), (a', b')) \in (A \times B)^2 \mid (a = a' \text{ şi } b \prec_B b') \text{ sau } (a \prec_A a' \text{ şi } b = b')\}$$

A se observa, din această expresie a lui $\prec$, corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr–o diagramă Hasse.

Remarca 11.7. **Produsul direct al familiei vide** de mulţimi este **un singleton**, adică o mulţime cu un singur element. Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relaţie de ordine pe un singleton, anume $\{(*, *)\}$.

12 Algebre produs direct

A se revedea, de mai sus, definiţia **produsului direct al unei familii de poseturi**.

În această definiţie se pot înlocui poseturile cu mulţimi înzestrate cu **relaţii binare** arbitrare, şi se obţine produsul direct al respectivelor mulţimi înzestrat cu relaţia produs direct al respectivelor relaţii binare.

Această construcţie poate fi generalizată la mulţimi înzestrate cu **relaţii** n**–are**.

Dar **produsul direct** se poate defini şi pentru structuri algebrice de acelaşi tip înzestrate cu anumite **operaţii**, pe baza cărora se definesc, punctual, operaţiile produsului direct.

Produsul direct al unor latici este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) şi **o algebră produs direct cu două operaţii binare** (latice Dedekind).

Vom exemplifica mai jos noţiunea de **produs direct al unor mulţimi înzestrate şi cu operaţii, şi cu relaţii**.

Exerciţiul 12.1 (temă)**.** Pe baza celor de mai jos, să se scrie produsul de algebre şi pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operaţie** p**–ară (de aritate** p**, cu** p **argumente)** şi o **relaţie** k**–ară**, unde $p, k \in \mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}^*$).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr–o mulţime înzestrată cu o relaţie binară şi trei operaţii, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) şi una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă: vom vedea).

Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi n structuri algebrice de acelaşi tip $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1,n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operaţie binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operaţie unară,
- $c_i \in A_i$ este o operaţie zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relaţie binară,

fiecare dintre acestea pe mulţimea A_i.

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} A_i,$

  cu *operaţiile produs direct*:

- $\odot \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} \odot_i \overset{\text{notaţie}}{=} (\odot_1, \ldots, \odot_n),$
- $f \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_i \overset{\text{notaţie}}{=} (f_1, \ldots, f_n),$
- $c \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} c_i \overset{\text{notaţie}}{=} (c_1, \ldots, c_n)$

  şi *relaţia binară produs direct*:

- $\rho \overset{\text{definiţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} \rho_i = \rho_1 \times \ldots \times \rho_n,$

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notaţia pentru un element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$:

- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, $x \odot y \overset{\text{definiţie}}{=} (x_1 \odot_1 y_1, \ldots, x_n \odot_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $f(x) \overset{\text{definiţie}}{=} (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \overset{\text{definiţie}}{=} (c_1, \ldots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, prin definiţie, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \ldots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \odot_1, f_1, c_1, \rho_1) = \ldots = (A_n, \odot_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_1, \ldots, b_n \in B\}$, şi operaţiile şi relaţia binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Şi acum **cazul general**: fie $((A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operaţie binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operaţie unară,
- $c_i \in A_i$ este o operaţie zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relaţie binară,

fiecare dintre acestea pe mulţimea A_i.

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \stackrel{\text{definiţie}}{=} \prod_{i\in I} A_i = \{h \mid h : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(h(i) \in A_i)\}$,

cu *operaţiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) şi *relaţia binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \odot h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \odot h)(i) = g(i) \odot_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiţie, $g\rho h$ ddacă $g(i)\rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \to B\}$, şi operaţiile şi relaţia binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Scriere alternativă pentru *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$:

- $A \stackrel{\text{definiţie}}{=} \prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\}$,

cu *operaţiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) şi *relaţia binară produs direct* ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A$, $(a_i)_{i\in I} \odot (b_i)_{i\in I} := (a_i \odot_i b_i)_{i\in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i\in I} \in A$, $f((a_i)_{i\in I}) := (f_i(a_i))_{i\in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i\in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A$, prin definiţie, $(a_i)_{i\in I}\rho(b_i)_{i\in I}$ ddacă $a_i\rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i\in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in B)\}$, şi operaţiile şi relaţia binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de acelaşi tip:

În cazul în care $I = \emptyset$, obţinem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume $(A, \odot, f, c, \rho)$, unde:

- A este un *singleton*, adică o mulţime cu un singur element: $A = \{a\}$;
- operaţiile $\odot$, f şi c au singurele definiţii posibile pe un singleton, anume: $a \odot a := a$, $f(a) := a$ şi $c := a$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(a, a)\}$, deci ρ nu poate fi decât $\emptyset$ sau $\{(a, a)\}$; dar ρ este produsul familiei vide de relaţii binare, care este tot un produs direct al familiei vide de mulţimi, deci este tot un singleton, aşadar $\rho = \{(a, a)\}$.

Exerciţiul 12.2 (temă)**.** Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Produsul direct al familiei vide de mulţimi şi operaţiile zeroare. Operaţii zeroare $\equiv$ constante:

Definiţia 12.1. Dacă $\mathcal{A}$ este o structură algebrică, având mulţimea suport A, iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operaţie n–ară* (*operaţie de aritate n*, *operaţie cu n argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcţie $f : A^n \to A$.

- Pentru orice mulţime A, $A^0 = A^\emptyset = \prod_{i\in\emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide de mulţimi: un singleton).
- Aşadar, cu notaţiile din definiţia de mai sus: o *operaţie* 0*–ară* (*operaţie de aritate* 0, *operaţie fără argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcţie $f : A^0 \to A$, deci o funcţie $f : \{a\} \to A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: **o constantă din** A.
- Constantele 0 şi 1 dintr–o latice mărginită sunt operaţii zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 şi 1 dintr–un inel unitar etc..

13 Algebre Boole – definiţie, exemple, operaţii derivate

Definiţia 13.1. O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarca 13.1. În orice algebră Boole, datorită distributivităţii, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg x$).

Existenţa complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulţime suport B (existenţă impusă în definiţia anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operaţie unară $\bar{} : B \to B$ (sau $\neg : B \to B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.

Această operaţie se va numi *complementare* şi se va citi *not*.

Notaţie şi terminologie 13.1. O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar $\bar{}$ este operaţia ei de complementare.

Adesea, $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este numită *latice Boole*, iar $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ este numită *algebră Boole*.

Exemple de algebre Boole:

- Orice structură algebrică poate fi desemnată de mulţimea elementelor sale, dar poate fi notată şi altfel decât această mulţime.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu L_n mulţimea elementelor lanţului cu n elemente, iar cu $\mathcal{L}_n$ întreaga structură algebrică a lanţului cu n elemente, fie ea de poset, poset mărginit, latice, latice mărginită (desigur, distributivă) sau algebră Boole (în cazul lui $\mathcal{L}_1$ sau $\mathcal{L}_2$: vom vedea). Aşa cum am menţionat mai sus, nu este obligatoriu să se facă această distincţie.

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarca 13.2. O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim şi maxim.

Definiţia 13.2.
- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanţul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numeşte *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puţin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numeşte *algebră Boole netrivială*.

Exemplul 13.1. Lanţul cu două elemente, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole.

Această algebră Boole se numeşte *algebra Boole standard*.

Remarca 13.3. Se arată imediat, direct cu definiţia unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operaţiile şi ordinea parţială definite punctual.

Remarca 13.4. În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ şi o mulţime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I = \{f | f : I \to L_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operaţiile şi ordinea parţială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{}, 0, 1)$: pentru orice $f, g \in L_2^I$:

- $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in L_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:

(i) $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$

(ii) $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$

(dacă $|I| \geq 2$, atunci $\mathcal{L}_2^I$ nu e lanţ, deci $\vee \neq \max$ şi $\wedge \neq \min$ în $\mathcal{L}_2^I$)

(i) $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$

(ii) $0(i) := 0$ şi $1(i) := 1$

- $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Remarca 13.5. Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obţinem că $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operaţiile şi relaţia de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in L_2$:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ şi $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, ..., $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemplul 13.2. Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numeşte *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse.
Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numeşte *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse.

Exemplul 13.3. Pentru orice mulţime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{}, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.

Exerciţiul 13.1 (temă)**.** Demonstraţi că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială şi algebra Boole standard.

Propoziţia 13.1 (temă)**.** *Mulţimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operaţiile induse, la care se adaugă operaţia de complementare).*

Uneori se face distincţia între:

- *latice booleană:* latice distributivă mărginită complementată;

  şi

- *algebră booleană (algebră Boole):* latice booleană înzestrată cu operaţia de complementare.

Definiţia 13.3. Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, se definesc următoarele *operaţii binare derivate*:

- *implicaţia (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \overline{a} \vee b$;
- *echivalenţa (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarca 13.6 (complementarea este autoduală (autoinversă))**.** Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$.

14 Principiul dualităţii, legile lui de Morgan, alte proprietăţi aritmetice ale algebrelor Boole

Remarca 14.1. Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, se arată uşor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{}, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole* $\mathcal{B}$.
Se ştie, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ şi $\wedge$,
- $\leq$ şi $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 şi 1

sunt duale una alteia, respectiv.
Este imediat că operaţia unară $\bar{}$ este duală ei însăşi. Spunem că operaţia $\bar{}$ este *autoduală*.
Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualităţii pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm:* $\vee$ *cu* $\wedge$*,* $\leq$ *cu* $\geq$*,* 0 *cu* 1 *(iar operaţia* $^-$ *rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximale cu elementele minimale.*

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menţiona altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.

Propoziţia 14.1 (legile lui de Morgan)**.** *Pentru orice* $x, y \in B$*:*

(i) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$

(ii) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Propoziţia 14.2. *Pentru orice* $x, y \in B$*, au loc următoarele echivalenţe:*

(i) $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$

(ii) $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$

(iii) $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$

(iv) $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$

(v) $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Propoziţia 14.3 (legea de reziduaţie)**.** *Pentru orice elemente* $\alpha, \beta, \gamma \in B$*, are loc echivalenţa:*

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

15 Echivalenţa algebre Boole – inele Boole – secţiune facultativă

În definiţia şi rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ şi $x \cdot y := xy$.

Definiţia 15.1. Se numeşte *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lema 15.1. *În orice inel Boole* B*, au loc: pentru orice elemente* $x, y \in B$*,* $xy = yx$ *şi* $x + x = 0$ *(cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ şi orice element nenul al unui inel Boole are ordinul* 2 *în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui* 0 *este* 1*,* 0 *fiind elementul neutru al acestui grup aditiv:* $0 = 0$*).*

Teorema 15.1 (echivalenţa algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole)**.** *Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, şi invers. Mai precis:*

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *un inel Boole. Definim operaţiile* $\vee$*,* $\wedge$ *şi* $^-$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ *este o algebră Boole, pe care o vom nota cu* $\mathcal{A}(\mathcal{B})$*.*

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ *o algebră Boole. Definim operaţiile* $+$ *şi* $\cdot$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *este un inel Boole, pe care îl vom nota cu* $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ *(unde am notat cu* $-$ *operaţia de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).*

- *Aplicaţiile* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{I}$ *sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*, şi, pentru orice algebră Boole* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*.*

16 Subalgebre Boole şi morfisme booleene

Definiţia 16.1. O submulţime S a lui B se numeşte *subalgebră Boole a lui* $\mathcal{B}$ ddacă este **închisă la operaţiile de algebră Boole ale lui** $\mathcal{B}$, i. e.:

(i) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;

(ii) pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;

(iii) pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;

(iv) $0, 1 \in S$.

Propoziţia 16.1. *Au loc următoarele implicaţii între cele 4 proprietăţi din definiţia unei subalgebre Boole, aplicate unei submulţimi nevide S a lui B:*

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$
- $(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4)$

Remarca 16.1. O subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este o algebră Boole cu operaţiile induse pe S de operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$ şi cu ordinea parţială indusă pe S de ordinea parţială a lui $\mathcal{B}$.

Notaţia 16.1. Operaţiile induse (adică restricţiile la S ale operaţiilor lui $\mathcal{B}$) se notează, de obicei, la fel ca operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, iar ordinea parţială indusă (adică ordinea parţială a lui $\mathcal{B}$ restricţionată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parţială a lui $\mathcal{B}$.

Remarca 16.2. Orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este închisă la operaţiile derivate $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$ ale lui $\mathcal{B}$ (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), şi că operaţiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicaţia şi, respectiv, echivalenţa algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicaţia şi, respectiv, echivalenţa lui $\mathcal{B}$).

În cele ce urmează, renunţăm la fixarea algebrei Boole notate $\mathcal{B}$

Definiţia 16.2. Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ şi $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \perp, \top)$, o funcţie $f : A \rightarrow B$ se numeşte *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operaţiile de algebre Boole ale lui** A **şi** B, i. e. ddacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $(B, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ şi, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg\,(f(x))$.

Scris desfăşurat, o funcţie $f : A \rightarrow B$ este *morfism boolean* ddacă:

(i) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$

(ii) pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$

(iii) pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg\,(f(x))$

(iv) $f(0) = \perp$ şi $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole şi ea însăşi.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este acelaşi lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole şi ea însăşi, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Propoziţia 16.2. *Cu notaţiile din definiţia anterioară, au loc următoarele implicaţii între cele 4 proprietăţi ale unui morfism boolean, aplicate unei funcţii $f : A \rightarrow B$:*

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$

- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$

Remarca 16.3 (temă)**.** Orice morfism boolean comută cu implicaţia şi echivalenţa booleană.
Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.
Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

Propoziţia 16.3. *Pentru orice mulţime I, algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, I)$ şi $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).*

Definiţia unei algebre Boole – mnemonic:

O **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, ^{-}, 0, 1)$ compusă din:

- o mulţime B,
- o relaţie de ordine parţială $\leq$ pe B,
- două operaţii binare $\vee$ şi $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operaţie unară $^{-}$ pe B,

iar aceste componente au proprietăţile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ şi $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ şi $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** şi **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, şi la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ şi $\wedge$ verifică **absorbţia**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ şi $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;
- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** faţă de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** faţă de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** şi satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivităţii**, iar $^{-}$ este operaţia de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{şi} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, ^{-}, 0, 1)$, se definesc următoarele **operaţii binare derivate**:

- **implicaţia (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalenţa (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

17 Filtre ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, arbitrară.
- Vom nota $\geq := \leq^{-1}$.

Definiţia 17.1. O submulţime nevidă F a lui B se numeşte *filtru* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in B$, următoarele condiţii sunt satisfăcute:
(F_1) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;
(F_2) dacă $x \in F$ şi $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Notaţia 17.1. Mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$.

Remarca 17.1. Orice filtru al lui $\mathcal{B}$ îl conţine pe 1. Într–adevăr, dacă F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, atunci F este nevid prin definiţie, deci există un element $x \in F$; dar, ca orice element al lui B, x satisface $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform condiţiei (F_2) din definiţia unui filtru.

Remarca 17.2. Este imediat că $\{1\}$ şi B sunt filtre ale lui $\mathcal{B}$, iar aceste filtre sunt respectiv minimul (a se vedea remarca anterioară) şi maximul posetului $(\mathrm{Filt}(\mathcal{B}), \subseteq)$.

Definiţia 17.2. $\{1\}$ se numeşte *filtrul trivial* al lui $\mathcal{B}$, iar B se numeşte *filtrul impropriu* al lui $\mathcal{B}$. Orice filtru $F \neq \{1\}$ se numeşte *filtru netrivial*, şi orice filtru $F \neq B$ se numeşte *filtru propriu* al lui $\mathcal{B}$.

Remarca 17.3. Intersecţia tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ este $\{1\}$ (filtrul trivial). Acest lucru rezultă imediat din faptul că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ în sensul incluziunii.

Remarca 17.4. Un filtru al lui $\mathcal{B}$ este propriu ddacă nu îl conţine pe 0.
Într–adevăr, un filtru este egal cu B ddacă îl conţine pe 0, pentru că B conţine pe 0, iar, dacă un filtru F îl conţine pe 0, atunci F conţine toate elementele lui B, conform condiţiei (F_2).

Lema 17.1. *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci: $F = B$ ddacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ şi $\overline{a} \in F$.*

Lema 17.2 (filtrele sunt închise la conjuncţii finite)**.** *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x_1, \ldots, x_n \in F$, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$.*

18 Filtre generate de o mulţime

Propoziţia 18.1. *Intersecţia oricărei familii de filtre ale lui $\mathcal{B}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.*

Corolarul 18.1. *Pentru orice submulţime X a lui B, există un cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X, anume intersecţia tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X.*

Definiţia 18.1. Pentru orice submulţime X a lui B, cel mai mic filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ care include pe X se notează cu $[X)$ sau $\langle X \rangle$ şi se numeşte *filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X*.
Pentru orice element $x \in B$, filtrul generat de singletonul $\{x\}$ se notează cu $[x)$ sau $\langle x \rangle$ şi se numeşte *filtrul principal al lui $\mathcal{B}$ generat de x*. (Deci filtrele principale sunt filtrele generate de singletonuri; altfel spus, filtrele principale sunt filtrele generate de câte un singur element.)

Remarca 18.1 (caracterizarea filtrelor generate de o mulţime)**.** Definiţia unui filtru generat arată că, pentru orice $X \subseteq B$, $F = [X)$ ddacă mulţimea F satisface următoarele trei condiţii:

(i) F este un filtru al lui $\mathcal{B}$;

(ii) $X \subseteq F$;

(iii) pentru orice filtru G al lui $\mathcal{B}$, dacă $X \subseteq G$, atunci $F \subseteq G$.

Ultima dintre aceste trei condiţii afirmă că, dacă un filtru G al lui $\mathcal{B}$ include o submulţime X a lui B, atunci G include filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X.

Remarca 18.2. Conform remarcii care arată că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$, urmează că $[\emptyset) = \{1\}$.

Remarca 18.3. Este imediat, atât direct din definiţia unui filtru generat de o mulţime, cât şi din caracterizarea anterioară, că, oricare ar fi un filtru F al lui $\mathcal{B}$, are loc egalitatea: $[F) = F$.

Propoziţia 18.2. *Pentru orice submulţime nevidă X a lui B, $[X) = \{a \in B \mid (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)\,(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a)\}$.*

Corolarul 18.2. *Pentru orice $x \in B$, $[x) = \{a \in B \mid x \leq a\}$.*

Exemplul 18.1 (temă)**.** Iată un exemplu de filtru care nu este principal, ceea ce înseamnă că nu este finit generat (vom vedea); astfel, acest exemplu arată şi faptul că, în general, filtrele nu sunt închise la conjuncţii arbitrare (vom vedea).

Fie X o mulţime. Considerăm algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ şi următoarea submulţime a ei: $F = \{A \mid A \subseteq X, |\overline{A}| < \infty\}$, unde $\overline{A} = X \setminus A$ pentru orice $A \subseteq X$; i. e. F este mulţimea părţilor cofinite ale lui X.

Atunci F este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ (evident, F este filtru propriu ddacă X este infinită). Şi, dacă mulţimea X este infinită, atunci F nu este filtru principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$.

Corolarul 18.3. *Pentru orice filtru F al lui $\mathcal{B}$ şi orice element $x \in B$, $[F \cup \{x\}) = \{a \in B \mid (\exists\, f \in F)\,(f \wedge x \leq a)\}$.*

Remarca 18.4 (temă)**.** Funcţia care duce fiecare $M \subseteq B$ în $[M)$ este un operator de închidere pe $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$.

Remarca 18.5. Propoziţia următoare arată că filtrele finit generate coincid cu filtrele principale, întrucât reciproca ei este trivială.

Propoziţia 18.3. *Orice filtru finit generat (i. e. generat de o mulţime finită) este principal.*

Corolarul 18.4. *Orice filtru finit este principal.*

Corolarul 18.5. *Orice filtru al unei algebre Boole finite este principal.*

Remarca 18.6. Demonstraţia propoziţiei anterioare arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$,

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n),$$

fapt valabil şi pentru $n = 0$, întrucât $\inf(\emptyset) = 1$ (a se vedea un curs anterior).

19 Ultrafiltre ale unei algebre Boole

Definiţia 19.1. Un filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ se numeşte *filtru prim* ddacă, pentru orice $a, b \in B$, $a \vee b \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$.

Definiţia 19.2. Un element maximal al mulţimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ (raportat la incluziune) se numeşte *filtru maximal* sau *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$.

Cu alte cuvinte, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U a. î., pentru orice filtru propriu F, $U \subseteq F$ implică $U = F$.

Altfel formulat, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U cu proprietatea că, pentru orice filtru F, $U \subseteq F$ implică $U = F$ sau $F = B$.

Notaţia 19.1. Mulţimea ultrafiltrelor (filtrelor maximale ale) lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Max}(\mathcal{B})$.

Lema 19.1. *Fie P un filtru al lui $\mathcal{B}$ şi $a, b \in B$. Atunci:*

(i) $a \wedge b \in P$ ddacă $a \in P$ şi $b \in P$;

(ii) dacă P este un filtru prim, atunci: $a \vee b \in P$ ddacă $a \in P$ sau $b \in P$.

Propoziţia 19.1 (caracterizare a ultrafiltrelor)**.** *Fie U un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;

(ii) U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$;

(iii) orice element $a \in B$ satisface: $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.

Corolarul 19.1 (caracterizare a ultrafiltrelor)**.** *Fie U un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;

(ii) oricare ar fi $a \in B$, **exact** *unul dintre elementele a şi $\overline{a}$ se află în U;*

(iii) oricare ar fi $a \in B$, are loc echivalenţa: $a \in U$ ddacă $\overline{a} \notin U$.

Mulţimi inductiv ordonate şi Lema lui Zorn:

Definiţia 19.3. O *mulţime inductiv ordonată* este un poset cu proprietatea că orice parte total ordonată a sa are (cel puţin) un majorant.

- În definiţia anterioară, **parte total ordonată** a unui poset $(P, \leq)$ înseamnă submulţime S a lui P care este lanţ cu ordinea indusă (**ordinea indusă** este $\leq \cap S^2$), i. e. submulţime $S \subseteq P$ cu proprietatea că oricare două elemente ale submulţimii S sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$.

Remarca 19.1. Orice mulţime inductiv ordonată este nevidă, pentru că ea conţine măcar un element, anume un majorant al submulţimii $\emptyset$ a ei.

Remarca 19.2. După cum am demonstrat într–un curs anterior, orice element al unui poset nevid este majorant pentru $\emptyset$.

Remarca 19.3. Cele două remarci anterioare arată că, pentru a demonstra că un poset este mulţime inductiv ordonată, este suficient să demonstrăm că:

- posetul este nevid;
- orice parte total ordonată **nevidă** a sa are (cel puţin) un majorant.

Lema 19.2 (Lema lui Zorn)**.** *Orice mulţime inductiv ordonată are (cel puţin) un element maximal.*

Remarca 19.4. Este evident, din faptul că filtrul trivial $\{1\}$ este inclus în orice filtru al lui $\mathcal{B}$, că au loc echivalenţele: $\mathcal{B}$ are filtre proprii ddacă $\{1\}$ este filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ ddacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole netrivială.

Teorema 19.1 (Teorema de existenţă a ultrafiltrului)**.** *Orice filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ este inclus într–un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$. Cu alte cuvinte, pentru orice filtru propriu F al lui $\mathcal{B}$, există un ultrafiltru U al lui $\mathcal{B}$, a. î. $F \subseteq U$.*

Corolarul 19.2. *Orice algebră Boole netrivială are (cel puţin) un ultrafiltru.*

20 Teorema de reprezentare a lui Stone

Caracterizare a injectivităţii morfismelor booleene:

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm două algebre Boole arbitrare $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$.

Remarca 20.1. Pentru orice morfism boolean $f : A \to B$, au loc:

- $f(0) = 0$, deci $0 \in f^{-1}(\{0\})$, adică $\{0\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$;
- $f(1) = 1$, deci $1 \in f^{-1}(\{1\})$, adică $\{1\} \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Propoziţia 20.1. *Fie $f : A \to B$ un morfism boolean. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este injectiv;*

(ii) $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$*;*

(iii) $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Remarca 20.2. Algebra Boole trivială este izomorfă cu $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ şi cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^{\emptyset} = \mathcal{L}_2^0$, care are drept mulţime suport pe $L_2^0 = L_2^{\emptyset} = \{f \mid f : \emptyset \to L_2\} = \{(\emptyset, \emptyset, L_2)\}$ (acest triplet este, după cum ştim, unica funcţie de la $\emptyset$ la L_2).

- Pentru o formulare clară a următoarelor două rezultate, vom renunţa, în cele ce urmează, la fixarea algebrei Boole $\mathcal{B}$.

Teorema 20.1 (Teorema de reprezentare a lui Stone)**.** *Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, X)$.*

Corolarul 20.1 (reformulare a Teoremei de reprezentare a lui Stone)**.** *Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X$.*

Remarca 20.3. Algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, se scufundă în orice algebră Boole netrivială, i. e., oricare ar fi o algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, de la $\mathcal{L}_2$ la $\mathcal{B}$ există un morfism injectiv de algebre Boole, anume morfismul care duce pe 0 în 0 şi pe 1 în 1. (Morfismele injective se numesc *scufundări.*)

21 Congruenţe ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole arbitrară, $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$.

Definiţia 21.1. Se numeşte *congruenţă a algebrei Boole* $\mathcal{B}$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B care este compatibilă cu operaţiile algebrei Boole $\mathcal{B}$, adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

(i) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$;

(ii) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$;

(iii) dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$.

Remarca 21.1. Dacă, în definiţia anterioară, veţi generaliza cele trei relaţii dând compatibilitatea lui $\sim$ cu operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi operaţia unară $\bar{\ }$, pentru a obţine relaţia care dă compatibilitatea unei relaţii de echivalenţă cu o operaţie de aritate oarecare, atunci veţi observa că: compatibilitatea cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$, i. e. constantele 0 şi 1, se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$. Deci compatibilitatea cu operaţiile zeroare este satisfăcută de orice relaţie binară reflexivă pe B, în particular de orice relaţie de echivalenţă pe B. De aceea, compatibilitatea cu 0 şi 1 nu a apărut ca o cerinţă în definiţia de mai sus.

Remarca 21.2. O congruenţă a lui $\mathcal{B}$ este o relaţie de echivalenţă pe B care este şi subalgebră Boole a algebrei Boole produs direct $B^2 = B \times B$.

Propoziţia 21.1. *În definiţia de mai sus, a unei congruenţe pe o algebră Boole, fiecare dintre condiţiile* (1) *şi* (2) *este implicată de celelalte două condiţii.*

Propoziţia 21.2. *Orice congruenţă a unei algebre Boole este compatibilă cu implicaţia şi echivalenţa booleană.*
I. e., pentru orice congruenţă $\sim$ a lui $\mathcal{B}$ şi orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

- *dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \to y \sim x' \to y'$;*
- *dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'$.*

Remarca 21.3. Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ şi $x, y \in B$. Atunci are loc echivalenţa: $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \to y \in F$ şi $y \to x \in F$.

22 Corespondenţa bijectivă filtre – congruenţe

Notaţia 22.1. Notăm prin $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$.

Propoziţia 22.1. *Mulţimea congruenţelor unei algebre Boole este în bijecţie cu mulţimea filtrelor sale.*

Existenţa unei bijecţii se demonstrează construind două funcţii între cele două mulţimi, în sensuri opuse, şi arătând că sunt inverse una celeilalte, aşadar sunt inversabile, deci sunt bijecţii.
Iată definiţiile celor două funcţii pentru o algebră Boole oarecare $\mathcal{B}$:

- funcţia de la mulţimea filtrelor la mulţimea congruenţelor: oricărui filtru F îi asociem congruenţa $\sim_F$, definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcţia de la mulţimea congruenţelor la mulţimea filtrelor: oricărei congruenţe $\sim$ îi asociem filtrul $F^{\sim}$, definit prin: $F^{\sim} := \{x \in B \mid x \sim 1\}$ ($F^{\sim}$ este clasa de echivalenţă a lui 1 raportat la $\sim$).

Propoziţia 22.2. *Fie $a, b, x \in B$ şi F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, cu notaţiile de mai sus, au loc:*

(i) $a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$;

(ii) $a \sim_F b$ ddacă există un element $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$.

23 Algebre Boole factor

Propoziţia 23.1. *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ şi $\sim_F$ congruenţa asociată lui F.*

Pentru fiecare $x \in B$, se notează cu $x/F := \{y \in B \mid x \sim_F y\}$ clasa de echivalenţă a lui x raportat la $\sim_F$.

Mulţimea factor $B/\sim_F = \{x/F \mid x \in B\}$ (i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale elementelor lui B raportat la $\sim_F$) se mai notează cu B/F.

Atunci: B/F se poate organiza ca algebră Boole cu următoarele operaţii, pe care le vom nota la fel ca pe acelea ale lui $\mathcal{B}$:

- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \vee y/F := (x \vee y)/F$*
- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F := (x \wedge y)/F$*
- *pentru orice $x \in B$, $\overline{x/F} := \overline{x}/F$*
- $0 := 0/F$ *şi* $1 := 1/F$

Definiţia 23.1. Algebra Boole $(B/F, \vee, \wedge, ^-, 0 = 0/F, 1 = 1/F)$ se numeşte *algebra Boole factor (*sau *algebra Boole cât) a lui $\mathcal{B}$ prin filtrul F.*

Propoziţia 23.2. *Pentru orice filtru F, surjecţia canonică $p_F : B \to B/F$, definită prin: pentru orice $x \in B$, $p_F(x) := x/F$, este un morfism boolean surjectiv.*

Lema 23.1. *Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci $F = 1/F$, aşadar, pentru orice element $a \in B$, au loc echivalenţele: $a \in F$ ddacă $a \sim_F 1$ ddacă $a/F = 1/F$.*

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole arbitrară $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$. A se vedea demonstraţiile acestor rezultate într–o versiune viitoare a cursului.

Propoziţia 23.3 (temă pentru seminar)**.** *Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean, iar F un filtru al algebrei Boole $\mathcal{A}$ şi G un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci:*

(i) $f^{-1}(G)$ este un filtru al lui $\mathcal{A}$;

(ii) dacă f e surjectiv, atunci $f(F)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Propoziţia 23.4 (temă pentru seminar)**.** *Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean. Atunci $f(A)$ este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$, izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$.*

Propoziţia 23.5 (temă pentru seminar)**.** *Fie U un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci: U este ultrafiltru ddacă algebra Boole factor B/U este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$.*

24 Structura algebrelor Boole finite

Definiţia 24.1. Un *atom* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este un succesor al lui 0 din $\mathcal{B}$ (i. e. din posetul $(B, \leq)$). Adică, un *atom* al lui $\mathcal{B}$ este un element $a \in B$ cu proprietăţile:

- $a \neq 0$ şi
- nu există niciun element $x \in B$ a. î. $0 < x < a$,

unde am notat cu $< := \leq \setminus \Delta_B$, i. e. $<$ este relaţia de ordine strictă pe B corespunzătoare relaţiei de ordine $\leq$ de pe B, adică, pentru orice $x, y \in B$,

$$x < y \text{ ddacă } \begin{cases} x \leq y \\ \text{şi} \\ x \neq y. \end{cases}$$

Remarca 24.1.

- Algebra Boole trivială nu are niciun atom (deci numărul atomilor săi coincide cu numărul ultrafiltrelor sale, anume 0).

- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$, cu mulţimea elementelor $L_2^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}$ are n atomi: atomii săi sunt elementele $e_1, \dots, e_n$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\substack{\text{vector de lungime } n, \\ \text{cu 1 pe poziţia } i \text{ şi} \\ \text{0 pe celelalte poziţii}}}$. La fel pentru algebra Boole $\mathcal{L}_2^X$, cu X mulţime arbitrară.

- Pentru orice mulţime nevidă X (nu neapărat finită), atomii algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ sunt submulţimile lui X cu câte un singur element: $\{a\}$, cu $a \in X$.

Remarca 24.2. Ultrafiltrele unei algebre Boole finite sunt filtrele generate de câte un atom al acelei algebre Boole.

Remarca 24.3. Remarca anterioară arată că, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este finită, atunci există o bijecţie între mulţimea atomilor lui $\mathcal{B}$ şi mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, care duce fiecare atom a al lui $\mathcal{B}$ în $[a)$ (filtrul principal generat de a).

Teorema 24.1 (Teorema de structură a algebrelor Boole finite)**.** *Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole finită, atunci $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui $\mathcal{B}$ (care este egal cu numărul ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, conform remarcii anterioare).*

Corolarul 24.1. *Orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui* 2 *(cu exponentul dat de numărul atomilor săi, care este egal cu numărul ultrafiltrelor sale).*

Corolarul 24.2. *Două algebre Boole finite de acelaşi cardinal sunt izomorfe.*

Remarca 24.4. Pentru orice mulţime finită X, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, au loc următoarele izomorfisme între algebre Boole: $\mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{L}_2^{\overline{1,n}} \cong \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\overline{1, n})$ $(\overline{1, 0} = \emptyset)$.

Remarca 24.5.
- **Teorema de reprezentare a lui Stone** spune că, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$. Cu alte cuvinte, orice algebră Boole $\mathcal{B}$ este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$.

- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că, în cazul particular al algebrelor Boole finite, are loc proprietatea că orice algebră Boole finită este chiar **izomorfă** cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulţimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (a se vedea remarca anterioară).

Exerciţiul 24.1 (temă)**.** Fie B o algebră Boole **completă**, i. e. o algebră Boole care e latice completă, $a, b \in B$, I şi J mulţimi arbitrare, iar $(a_i)_{i\in I} \subseteq B$, $(b_j)_{j\in J} \subseteq B$. Să se demonstreze că în B au loc:

- **legile de distributivitate generalizate:** dacă $I \neq \emptyset$ şi $J \neq \emptyset$, atunci:

  $a \wedge (\bigvee\limits_{j\in J} b_j) = \bigvee\limits_{j\in J} (a \wedge b_j)$ şi $(\bigvee\limits_{i\in I} a_i) \wedge (\bigvee\limits_{j\in J} b_j) = \bigvee\limits_{i\in I} \bigvee\limits_{j\in J} (a_i \wedge b_j)$;

  $a \vee (\bigwedge\limits_{j\in J} b_j) = \bigwedge\limits_{j\in J} (a \vee b_j)$ şi $(\bigwedge\limits_{i\in I} a_i) \vee (\bigwedge\limits_{j\in J} b_j) = \bigwedge\limits_{i\in I} \bigwedge\limits_{j\in J} (a_i \vee b_j)$;

- **legile lui de Morgan generalizate:**

  $\overline{\bigvee\limits_{i\in I} a_i} = \bigwedge\limits_{i\in I} \overline{a_i}$ şi $\overline{\bigwedge\limits_{i\in I} a_i} = \bigvee\limits_{i\in I} \overline{a_i}$;

- următoarele proprietăţi: dacă $I \neq \emptyset$ şi $J \neq \emptyset$, atunci:

  $(\bigvee\limits_{i\in I} a_i) \to b = \bigwedge\limits_{i\in I} (a_i \to b)$ şi $(\bigwedge\limits_{i\in I} a_i) \to b = \bigvee\limits_{i\in I} (a_i \to b)$;

  $a \to (\bigvee\limits_{j\in J} b_j) = \bigvee\limits_{j\in J} (a \to b_j)$ şi $a \to (\bigwedge\limits_{j\in J} b_j) = \bigwedge\limits_{j\in J} (a \to b_j)$.

  Care dintre egalităţile de la ultimul punct sunt valabile şi pentru $I = \emptyset$, $J = \emptyset$?