Logică Propoziţională Clasică – demonstraţii prin rezoluţie

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică, Semestrul I, 2022-2023

Exerc.: Fie $p, q, r \in V$ (2 câte 2 distincte). Folosind algoritmul Davis–Putnam, să se determine dacă enunțul

$\varphi = (\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg\neg q) \leftrightarrow (q \wedge \neg\neg r)$

e satisfiabil.

REZOLVARE:

Punem enunțul φ într-o FNC. (Amintesc că o FNC a lui φ nu este unică.) Apoi aplicăm algoritmul Davis–Putnam.

METODA I (folosind proprietăți booleene):

$$\varphi \sim \underbrace{(\neg p \leftrightarrow q)} \leftrightarrow (q \wedge r).$$

$$\sim (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$$
$$\sim (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$$
$$\sim (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \overset{not.}{=:} \alpha$$

$$\neg\alpha \sim \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q) \sim$$
$$\sim (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \sim$$
$$\sim (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q).$$

$$\varphi \sim (\alpha \rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow \alpha) \sim$$
$$\sim (\neg\alpha \vee (q \wedge r)) \wedge \underbrace{(\neg(q \wedge r) \vee \alpha)}_{\sim \neg q \vee \neg r \vee \alpha}. \quad (*)$$

În următorul enunț spargem

cele 3 paranteze simultan:

$$\neg\alpha \vee (q\wedge r) \sim (\neg p \wedge \neg q) \vee (p\wedge q) \vee (q \wedge r) \sim$$

$$\sim (\neg p \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee q) \wedge (\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \sim$$

$$\sim (p \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee q \vee r).$$

Să observăm că, $\forall\, \psi, \chi, \varepsilon \in E$, avem: $\tilde{h}((\psi \vee \neg\psi \vee \chi) \wedge \varepsilon) = \underbrace{(\underbrace{\tilde{h}(\psi) \vee \overline{\tilde{h}(\psi)}}_{=1} \vee \tilde{h}(\chi))}_{=1} \wedge \tilde{h}(\varepsilon) = \tilde{h}(\varepsilon)$, adică $\varepsilon \sim (\psi \vee \neg\psi \vee \chi) \wedge \varepsilon$. Cu această proprietate să eliminăm clauzele triviale din FNC de mai sus:

$\neg\alpha \vee (p \wedge r) \sim (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$ (absorbție) $\sim \neg p \vee q$. (**)

Avem și:

$\neg q \vee \neg r \vee \alpha \sim \neg q \vee \neg r \vee$

$\vee \underbrace{((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p))}$

$\sim (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg p) \vee$

$\vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \sim$

$\sim (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$, conform dualei proprietăți de mai sus:

$\forall \psi, \chi, \varepsilon \in E$, avem:

$\tilde{h}((\psi \wedge \neg\psi \wedge \chi) \vee \varepsilon) =$

$= (\underbrace{\tilde{h}(\psi) \wedge \overline{\tilde{h}(\psi)}}_{=0} \wedge \tilde{h}(\chi)) \vee \tilde{h}(\varepsilon) =$

$= \tilde{h}(\varepsilon)$, adică $\varepsilon \sim (\psi \wedge \neg\psi \wedge \chi) \vee \varepsilon$.

Prin urmare: $\neg q \vee \neg r \vee \alpha \sim$

$\sim \neg q \vee \neg r \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

(absorbție)

$\sim \neg q \vee \neg r \vee (q \wedge \neg p) \sim$

$\sim (\neg q \vee \neg r \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p) \sim$

(propr. de mai sus) $\sim \neg p \vee \neg q \vee \neg r$. (***)

(*), (**), (***) $\Rightarrow \varphi \sim (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Acum aplicăm algoritmul Davis–Putnam: avem această unică derivare prin rezoluție a FNC de mai sus, căreia îi corespunde mulțimea următoarelor clauze:

$\{\neg p, \cancel{q}\}, \{\neg p, \cancel{\neg q}, \neg r\}$

$\{\neg p, \neg r\}$

$\emptyset$

Așadar φ este satisfiabilă.

Metoda II (folosind tabelul semantic al lui φ):

Dacă $h: V \to \mathcal{L}_2$, atunci, pentru următoarele valori ale lui h în variabilele propoziționale p, q, r, $\tilde{h}(\varphi)$ ia următoarele valori:

$h(p)$	$h(q)$	$h(r)$	$\tilde{h}(\varphi)$
0	0	0	$0 \Leftrightarrow 0 = 1$
0	0	1	$0 \Leftrightarrow 0 = 1$
0	1	0	$1 \Leftrightarrow 0 = 0$
0	1	1	$1 \Leftrightarrow 1 = 1$
1	0	0	$1 \Leftrightarrow 0 = 0$
1	0	1	$1 \Leftrightarrow 0 = 0$
1	1	0	$0 \Leftrightarrow 0 = 1$
1	1	1	$0 \Leftrightarrow 1 = 0$

Considerăm următorul enunț în FNC: $\chi := (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \sim \neg p \vee q \vee (r \wedge \neg r) \sim \neg p \vee q$ (o propr. de mai sus)

Conform tabelului de mai sus, $[\tilde{h}(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \tilde{h}(\chi) = 0]$, adică $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\chi)$ oricare ar fi interpretarea h, prin urmare $\varphi \sim \chi \sim (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

Acum aplicăm algoritmul Davis–Putnam:

determinăm toate derivările prin rezoluție de FNC anterioare:

$\{\neg p, q\}, \{p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\{q, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\emptyset$

(clauză trivială de fel mai jos)

$\{\neg p, q\}, \{p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}$

$\{\neg p, q\}$

$\emptyset$

$\{\neg p, q\}, \{p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\{p, \neg p, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\emptyset$

$\{\neg p, q\}, \{p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}$

$\{p, \neg q, r\}, \{\neg p, r\}$

$\{\neg q, \neg r\}$ | $\{p, \neg p, q\}$ (aici avem 2 posibilități)

$\emptyset$ | $\emptyset$

Așadar φ e satisfiabilă,

<u>Obs.:</u> Tabelul semantic de

mai sus arată, în mod direct, că enunțul φ e satisfiabil, mai precis φ e satisfăcut de orice interpretare h cu $(h(p), h(q), h(r)) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ (și putând lua orice valoare din $\mathcal{L}_2$ în orice $v \in V \setminus \{p,q,r\}$), așadar φ e satisfăcut de o infinitate de interpretări.

<u>Obs.:</u> Tabelul semantic de mai sus arată că și enunțul $\neg\varphi$ e satisfiabil, fiind satisfăcut exact de interpretările care nu satisfac pe φ.

<u>Obs.:</u> Orice enunț satisfiabil ε e satisfăcut de o infinitate de interpretări, pt. că, dacă $h : V \to \mathcal{L}_2$ a.î. $h \vDash \varepsilon$, atunci $(\forall g : V \to \mathcal{L}_2)$ $\left(g|_{V(\varepsilon)} = h|_{V(\varepsilon)} \Rightarrow g \vDash \varepsilon\right)$

și, cum $\mathcal{E}$ este un cuvânt finit peste $V \cup \{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge\} \cup \{(,)\}$, avem că $|\underbrace{V(\mathcal{E})}_{\text{mulțimea variabilelor propoziționale care apar în } \mathcal{E}}| < \aleph_0$

rezultă că $|V \setminus V(\mathcal{E})| \geq \aleph_0$,

prin urmare $|\{\mathcal{E}_g \mid g : V \rightarrow \mathcal{L}_2$

$g|_{V(\mathcal{E})} = h|_{V(\mathcal{E})}\}| \geq \aleph_0$.

Exerc.: Fie $p, q, r \in V$, (2×2 distincte) și

$\varphi = p \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee$

$\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee r \in E$.

Să se demonstreze că $\vdash \varphi$, folosind algoritmul Davis–Putnam.

REZOLVARE:

$\varphi = p \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$

$\wedge$ ~. $\Rightarrow$ ¬φ ~ ¬p ∧ ¬r ∧ (¬p ∨ ¬r)

∧ ¬(¬p ∧ ¬r) ∧ (¬r ∧ ¬p) ∧ ¬r ∧ ~

~ ¬p ∧ (¬r ∨ p ∨ ¬r) ∧

∧ (¬p ∨ ¬r ∨ ¬r) ∧ ¬r ∧ ~

~ ¬p ∧ (p ∨ ¬r) ∧

∧ (p ∨ ¬r ∨ ~) ∧ ¬r ∧ ~.

{¬~~p~~}, {~~p~~ ¬r}, {p ¬r ¬r}, {~}, {¬r ~}

{~~¬r~~}, {p, ~~¬r~~}, {~}, {¬r ~}

{p}, {~~~~}, {¬~~r~~}

{p}

~~∅~~

{¬~~p~~}, {p}, {¬r}, {~~p~~ ¬r}, {~}, {¬r ~}

{¬~~r~~, ~}, {p, ~~¬r~~}, {¬r ~}

{p}, {~~~~}, {¬~~r~~}

{p}

~~∅~~

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\{\neg p\}, \{p, \cancel{q}\}, \{p, \cancel{\neg q}, r\}, \{\neg r\}}{\{\cancel{\neg p}\}, \{\cancel{p}, r\}, \{\neg r\}}}{\{\cancel{r}\}, \{\cancel{\neg r}\}}}{\square}$$

Am găsit o derivare prin rezoluție a FNC anterioare ($\sim \neg\varphi$) care se termină cu $\square$ (clauza vidă). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \neg\varphi$ e nesatisfiabilă, $\overset{\text{(teor.)}}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi$.

Exerc.: Fie $p, q, r \in V$, (2×2 distincte). Folosind rezoluția, să se determine dacă enunțul $\varphi = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \in E$ este (sau nu) satisfiabil.

REZOLVARE:

O formă clauzală pentru φ este: $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, r\}, \{p, q, \neg r\}\}$.

METODA 1: Efectuăm derivări prin rezoluție până ajungem la $\square$ sau până enumerăm toate derivările prin rezoluție posibile.

$\{\cancel{p},\neg e\}, \{\neg \cancel{p}, r\}, \{p, e, \neg r\}$

$\{\neg \cancel{e}, r\}, \{p, \cancel{e}, \neg r\}$

$\{p, r, \neg r\}$ (clauză trivială)

$\emptyset$

$\{\cancel{p},\neg e\}, \{\neg \cancel{p}, r\}, \{p, e, \neg r\}$

$\{\neg e, \cancel{r}\}, \{p, e, \neg \cancel{r}\}$

$\{p, e, \neg e\}$

$\emptyset$

$\{p, \neg \cancel{e}\}, \{\neg p, r\}, \{p, \cancel{e}, \neg r\}$

$\{\cancel{p}, \neg r\}, \{\neg \cancel{p}, r\}$

$\{r, \neg r\}$

$\emptyset$

$\{p, \neg \cancel{e}\}, \{\neg p, r\}, \{p, \cancel{e}, \neg r\}$

$\{p, \neg \cancel{r}\}, \{\neg p, \cancel{r}\}$

$\{p, \neg p\}$

$\emptyset$

$\{p, \neg e\}, \{\neg p, \cancel{r}\}, \{p, e, \neg \cancel{r}\}$

$\{p, \neg e\}, \{\neg p, p, e\}$

$\{p, \neg e\}$

Nici una dintre derivările prin

rezoluție posibile pentru forma clauzală pentru φ de mai sus nu e egală la $\square$, așadar enunțul φ e satisfiabil.

<u>METODA 2:</u> Aplicăm algoritmul Davis–Putnam (DP).

La fiecare pas voi alege o variabilă propozițională astfel încât numărul de perechi de clauze pentru care se poate aplica regula rezoluției.

$$\frac{\{p, \neg q\}, \{\neg p, r\}, \{p, q, \neg r\}}{\dfrac{\{p, \neg q\}, \{\neg p, p, q\}}{\{p, \neg q\}}}$$

O aplicare a algoritmului DP cu primul pas aplicat pentru variabila propozițională r este echivalentă cu ultima dintre derivările prin rezoluție de mai sus. Nu am ajuns la $\square$. $\Rightarrow \varphi$ e satisfiabil.