SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

~ PARTEA A III-A ~

ALGEBRE BOOLE

ALT ENUNŢ ŞI ALTĂ REZOLVARE PENTRU EXERCIŢIUL DE LA PAGINA 43 DIN SEMINARUL CU ALGEBRE BOOLE PARTEA I:

<u>Exercițiu:</u> Fie T o mulțime. Pt. fiecare $X \in T$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$. Să se determine cardinalele filtrelor principale ale algebrei Boole $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \subseteq, \emptyset, T)$.

REZOLVARE: Fie $M \in \mathcal{P}(T)$. Filtrul principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(T)$ generat de M: $[M) = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid M \subseteq X\}$.

$$|[M)| \underset{\#}{=} |\mathcal{P}(\overline{M})| = 2^{|\overline{M}|}.$$

Fie $f : \mathcal{P}(\overline{M}) \to [M)$ și $g : [M) \to \mathcal{P}(\overline{M})$, $\begin{cases} (\forall X \in \mathcal{P}(\overline{M}))\,(f(X) \stackrel{\text{def}}{=} X \cup M) \\ \text{și} \\ (\forall Y \in [M))\,(g(Y) = Y \setminus M). \end{cases}$

Pt. orice $X \in \mathcal{P}(\overline{M})$ și $Y \in [M)$:

$$f(X) = \underbrace{\overbrace{\underbrace{X}_{\subseteq \overline{M}} \cup M}^{\supseteq M}}_{\subseteq \overline{M} \cup M = T} \Rightarrow f(X) \in [M) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este corect definită;

$$g(Y) = Y \setminus M = Y \cap \overline{M} \subseteq \overline{M} \Rightarrow g$$ e corect definită;

$$g(f(X)) = g(X \cup M) = (X \cup M) \setminus M =$$

$$= (X \cup M) \cap \overline{M} = \underbrace{(\underbrace{X}_{\subseteq \overline{M}} \cap \overline{M})}_{= X} \cup \underbrace{(M \cap \overline{M})}_{= \emptyset} = X; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \circ f = id_{\mathcal{P}(\overline{M})}; \quad (*)$$

$$f(g(Y)) = f(Y \setminus M) = (Y \setminus M) \cup M =$$

$$= (Y \cap \overline{M}) \cup M = \underbrace{(\underbrace{Y}_{\supseteq M} \cup M)}_{= Y} \cap \underbrace{(\overline{M} \cup M)}_{= T} = Y; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \circ g = id_{[M)}. \quad (**)$$

$(*), (**) \Rightarrow g = f^{-1} \Rightarrow f$ e inversabilă

$\Leftrightarrow f$ e bijectivă. $\Rightarrow \mathcal{P}(\overline{M}) \underset{\text{în bijecție}}{\cong} [M). \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|\mathcal{P}(\overline{M})|}_{= 2^{|\overline{M}|}} = |[M)|.$$

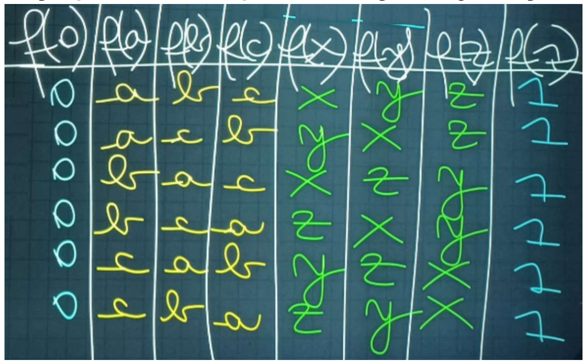
Exemplu: În cazul în care T este finită: $|T| = n \in \mathbb{N}$, avem: dacă $M \in \mathcal{P}(T) \Rightarrow |M| = k \in \overline{0,n}, \Rightarrow |\overline{M}| = n-k \, (\in \overline{0,n}) \Rightarrow |[M)| = 2^{n-k}$ în algebra Boole $\mathcal{P}(T)$.

Exercițiu temă: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind exemplul de mai sus și faptul că funcția $f : \mathcal{P}(\overline{1,n}) \longrightarrow L_2^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in L_2 = \{0,1\}\}$, definită prin:

$$(\forall M \in \mathcal{P}(\overline{1,n}))\,(f(M) = \underbrace{(\chi_M(1), \ldots, \chi_M(n))}_{\text{vectorul caracteristic al lui } M}),$$

este izomorfism boolean de la $\mathcal{P}(\overline{1,n})$ la $\mathcal{L}_2^n$, să se deducă faptul că, pt. orice $x_1, \ldots, x_n \in L_2 = \{0,1\}$, în algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$, $|[(x_1, \ldots, x_n))| = 2^{n-(x_1+\ldots+x_n)}$. Se va folosi observația următoare: pt. orice $x_1, \ldots, x_n \in L_2 = \{0,1\}$, dacă notăm cu $M = \{i \in \overline{1,n} \mid x_i = 1\}$, atunci $x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_M(i) = |M|$, unde, ca și mai sus, χ_M e funcția caracteristică a lui M raportată la $\overline{1,n}$.

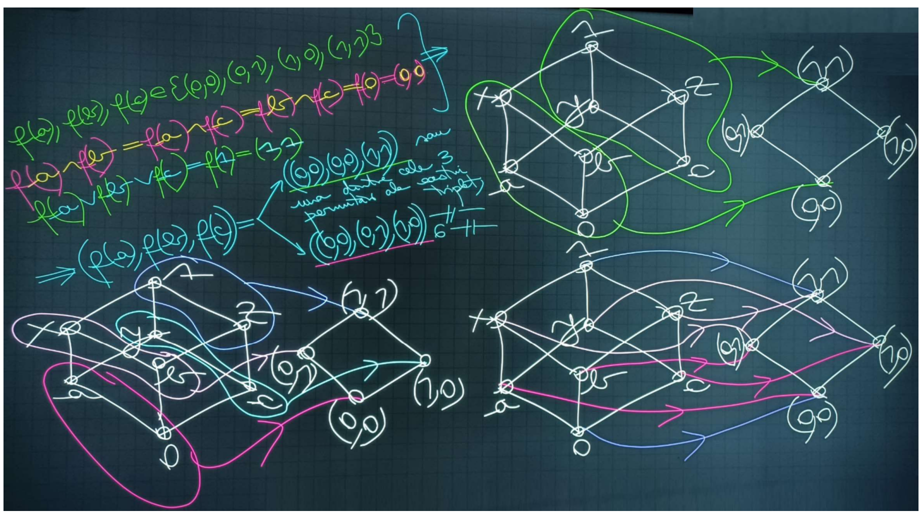
COMPLETARE pentru **Exerciţiul 3**/pg.5/SEMINARUL cu ALGEBRE BOOLE, Partea I:

Din faptul că aceste funcţii $f : \mathcal{L}_2^3 \rightarrow \mathcal{L}_2^3$ se restrâng la permutări ale mulţimii {a,b,c} a atomilor cubului şi păstrează pe 0, 1 şi disjuncţia, rezultă următoarele 6 definiţii posibile pentru *f*: 

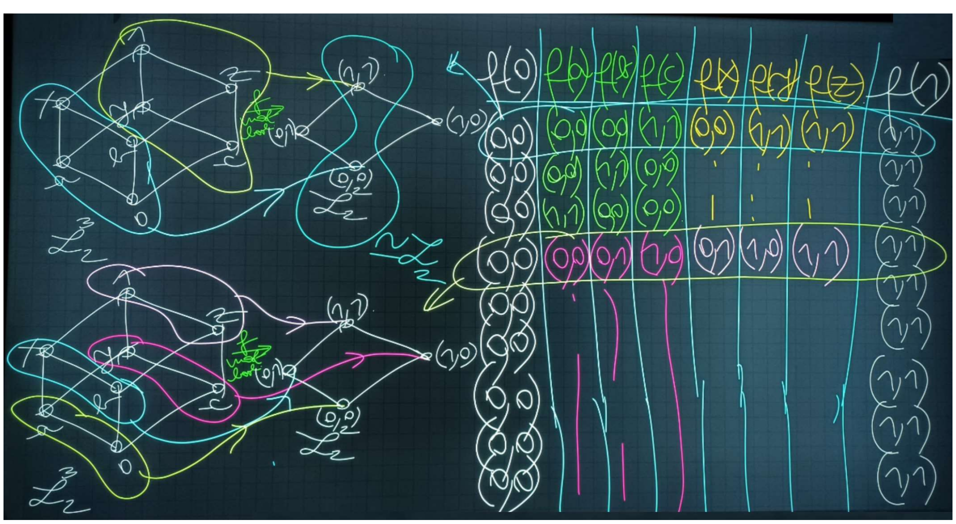
f(0)	f(a)	f(b)	f(c)	f(x)	f(y)	f(z)	f(1)
0	a	b	c	x	y	z	1
0	a	c	b	y	x	z	1
0	b	a	c	x	z	y	1
0	b	c	a	z	x	y	1
0	c	a	b	y	z	x	1
0	c	b	a	z	y	x	1

Toate aceste 6 funcţii sunt izomorfisme de poseturi, deci izomorfisme de latici, deci izomorfisme de latici mărginite, aşadar sunt izomorfisme booleene de la cub la el însuşi. Prin urmare acestea sunt cele 6 automorfisme booleene ale cubului.

COMPLETARE pentru **Exerciţiul 4**/pg.8/SEMINARUL cu ALGEBRE BOOLE, Partea I:



Primele 3 dintre aceste funcţii au imaginea egală cu {(0,0),(1,1)}, deci izomorfă cu $\mathcal{L}_2$, iar celelalte 6 dintre aceste funcţii sunt surjective.



Toate aceste 9 funcţii $f : \mathcal{L}_2^3 \rightarrow \mathcal{L}_2^2$ sunt crescătoare şi păstrează disjuncţiile şi conjuncţiile perechilor de elemente incomparabile ale cubului, aşadar sunt morfisme de latici, deci, cum păstrează şi pe 0 şi 1, sunt morfisme de latici mărginite, aşadar morfisme booleene. Prin urmare acestea sunt cele 9 morfisme booleene de la cub la romb.

Observaţie privind EXERCIŢIUL 10/PG. 27/SEMINARUL CU ALGEBRE BOOLE, PARTEA I:

Dacă A şi B sunt algebre Boole, iar $f : A \rightarrow B$ este un morfism boolean, atunci congruenţa asociată filtrului $f^{-1}(\{1\})$ al lui A este:

$$\sim_{f^{-1}(\{1\})} = \{(x,y) \in A^2 \mid x \leftrightarrow y \in f^{-1}(\{1\})\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x \leftrightarrow y) \in \{1\}\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x \leftrightarrow y) = 1\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x) \leftrightarrow f(y) = 1\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\} = Ker(f)$$

: nucleul de săgeată dublă al lui f – a se vedea proprietatea de universalitate a mulţimii factor, în capitolul/secţiunea cursului privind relaţiile de echivalenţă şi partiţiile asociate lor.

Pt. orice funcţie $h : X \rightarrow Y$, $Ker(h) \in Eq(X)$. Pt. orice morfism boolean $f : A \rightarrow B$, $Ker(f) \in Con(A)$. (A se revedea notaţiile din curs.)

Existența izomorfismului boolean $\underbrace{A/_{f^{-1}(\{1\})}}_{=A/_{\sim_{f^{-1}(\{1\})}} = A/_{Ker(f)}} \cong f(A)$ este

teorema fundamentală de izomorfism pentru algebre Boole.

(A se vedea, de exemplu, teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri, în cursul de algebră.)

Observația privind EXERCIȚIUL 8/PG. 20/

SEMINARUL CU ALGEBRE BOOLE, PARTEA I:

Avem o mulțime T și filtrul F al algebrei Boole $\mathcal{P}(T)$ format din părțile cofinite ale lui T.

Am demonstrat că, congruența lui $\mathcal{P}(T)$ asociată acestui filtru este:

$$\sim_F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid |A \Delta B| < \infty\}.$$

Au loc următoarele egalități, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \xrightarrow[((A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset)]{}$$

$$\Rightarrow |A \Delta B| = |A \setminus B| \cup |B \setminus A|.$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \subseteq A \subseteq T;$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \subseteq B \subseteq T.$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus (A \cap B)),$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Prin urmare: $\sim_F = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid |A \setminus B| < \infty$ și $|B \setminus A| < \infty\} =$
$= \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid |A \setminus (A \cap B)| < \infty$ și $|B \setminus (A \cap B)| < \infty\} \subseteq \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid (\exists M, N \in \mathcal{P}(T)) (|M| < \infty, |N| < \infty, A = (A \cap B) \cup M, B = (A \cap B) \cup N)\} \stackrel{\text{not.}}{=} S$

(am luat $M = A \setminus (A \cap B)$, $N = B \setminus (A \cap B)$). (*)

Dacă $A = (A \cap B) \cup M$, cu $M \in \mathcal{P}(T)$, având $|M| < \infty$, atunci $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap (\overline{A \cap B}) = ((A \cap B) \cup M) \cap (\overline{A \cap B}) =$
$= \underbrace{((A \cap B) \cap (\overline{A \cap B}))}_{=\emptyset} \cup (M \cap (\overline{A \cap B})) = M \cap (\overline{A \cap B}) \subseteq$
$\subseteq M$, așadar $|A \setminus B| \leq |M| < \infty$. Analog, dacă $B = (A \cap B) \cup N$, cu $N \in \mathcal{P}(T)$, având $|N| < \infty$, atunci $|B \setminus A| \leq |N| < \infty. \Rightarrow$

$\Rightarrow S \subseteq \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid |A \setminus B| < \infty$ și $|B \setminus A| < \infty\} = \sim_F$. $\binom{*}{*}$

$(*), \binom{*}{*} \Rightarrow \sim_F = S = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid (\exists M, N \in \mathcal{P}(T)) \, (|M| < \infty, |N| < \infty, A = (A \cap B) \cup M, B = (A \cap B) \cup N)\}$. (I)

Să mai observăm următorul fapt, pentru demonstrarea căruia se poate folosi oricare dintre exprimările lui $\sim_F$ de mai sus: pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$:

(a) dacă $|A| < \infty$, $\Rightarrow A/_F \subseteq \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |B| < \infty\}$;

(b) dacă $|A| \not< \infty$, $\Rightarrow A/_F \subseteq \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |B| \not< \infty\}$.

Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{P}(T)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A/_F = A/_{\sim_F} = \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |A \Delta B| < \infty\} \stackrel{(I)}{=} \{B \in \mathcal{P}(T) \mid (\exists M, N \in \mathcal{P}(T)) \, (|M| < \infty, |N| < \infty, A = (A \cap B) \cup M,$

$B=(A\cap B)\cup N\}$. (II)

(a) Presupunem că $|A|<\infty$. Fie $B\in A/_F$. $\xrightarrow{(II)} (\exists N\in \mathcal{P}(T))(|N|<\infty$ și $B=(A\cap B)\cup N)$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |B|\leq \underbrace{|\overbrace{A\cap B}^{\subseteq A}|}_{\leq |A|<\infty}+\underbrace{|N|}_{<\infty}<\infty.$$

(b) Presupunem că $|A|\not<\infty$. Fie $B\in A/_F$. $\xrightarrow{(II)} (\exists M\in \mathcal{P}(T))(|M|<\infty$ și $A=(A\cap B)\cup M.)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |A|\leq \underbrace{|\overbrace{A\cap B}^{\subseteq B}|}_{\leq |B|}+|M|\leq |B|+\underbrace{|M|}_{<\infty}. \Rightarrow$$

Presupunem prin absurd că $|B|<\infty$ $\Rightarrow |A|<\infty$, $\not\!\!\!\!\!\;$. $\Rightarrow |B|\not<\infty$.

Așadar, pentru orice $A,B\in \mathcal{P}(T)$ dacă $\underbrace{A\sim_F B}_{\overset{\mathrm{I}}{\Leftrightarrow}\ A/_F=B/_F}, \Rightarrow \begin{cases} |A|<\infty \text{ și } |B|<\infty \\ \text{sau} \\ |A|\not<\infty \text{ și } |B|\not<\infty.\end{cases}$