4 Lista 2 de subiecte

Exercițiul 4. Să se determine toate morfismele de latici mărginite $f : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$ de la cub la lanțul cu exact 3 și să se arate că niciuna dintre aceste funcții nu este surjectivă:

① matematic;

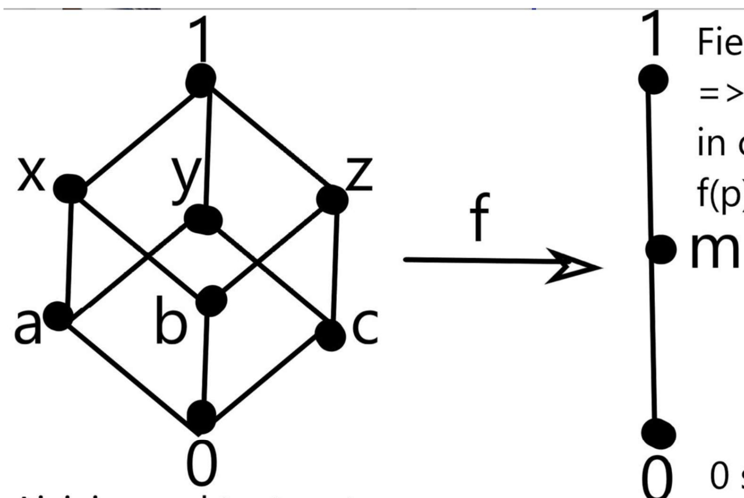
② prin predicate în Prolog (**indicație:** cu primul predicat veți colecta morfismele de latici mărginite $f : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$; pentru al doilea predicat cerut, aveți de demonstrat că fiecare element al listei de funcții returnate de primul predicat este nesurjectiv):

- un predicat unar $fctL2xL2xL2laL3(-ListaMorfLatMarg)$, care determină în argumentul său $ListaMorfLatMarg$ lista morfismelor de latici mărginite de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_3$;
- un predicat zeroar $niciunasurj$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcțiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ nu este surjectivă.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ să fie utilizabile pentru oricare două latici finite, iar $fctL2xL2xL2laL3$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru cub și lanțul cu 3 elemente.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $niciunasurj$ să fie utilizabile pentru orice listă de funcții cu același codomeniu, iar $niciunasurj$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lista de funcții returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerință**, puteți scrie doar predicatul unar $fctL2xL2xL2laL3$ definit ca mai sus.

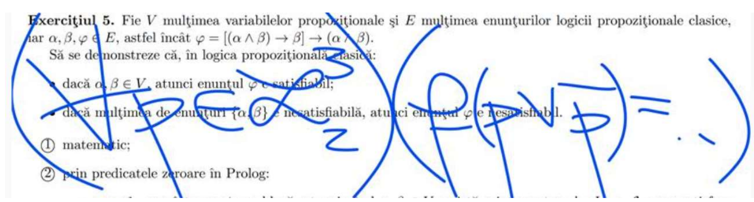


Fie f:cub->L3 un morf. de lat. marg.. => f(0)=0, f(1)=1 si (oricare ar fi p,q in cub)(f(pvq)=f(p)vf(q) si f(p^q)= f(p)^f(q)). => Oricare ar fi p in cub, f(p)vf(p~)=f(pvp~)=f(1)=1 si f(p)^f(p~)=f(p^p~)=f(0)=0. <=> f(p) si f(p~) sunt complemente unul altuia in L3.

Aici, in mod text, notez cu p~ complementul oricarui p din cub.

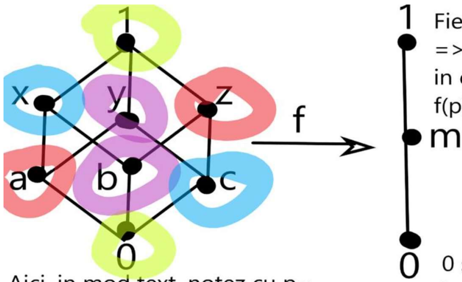
0 si 1 sunt complemente unul altuia in L3. Pp. abs. ca m are un complement k in L3. => Intrucat L3 este lant:

1=mvk=sup{m,k}=max{m,k} si 0=m^k=inf{m,k}=min{m,k}, care apartin multimii {m,k} => (m=1 si k=0) sau (m=0 si k=1).

Pe lucrarea de examen veti scrie de mana: 

,

nu in modul acesta simplificat in plain text: de exemplu cu simbolurile pentru cuantificatori, nu scriind in cuvinte “oricare ar fi”/”exista”.



Aici, in mod text, notez cu p~ complementul oricarui p din cub.

Fie f:cub->L3 un morf. de lat. marg.. => f(0)=0, f(1)=1 si (oricare ar fi p,q in cub)(f(pvq)=f(p)vf(q) si f(p^q)= f(p)^f(q)). => Oricare ar fi p in cub,

f(p)vf(p~)=f(pvp~)=f(1)=1 si f(p)^f(p~)=f(p^p~)=f(0)=0. <=> f(p) si f(p~) sunt complemente unul altuia in L3.

f(0)=0 si f(1)=1 =>
=> 0,1 apartin lui f(cub).
= Im f.
<=> {0,1} e inclusa in Im f.

0 si 1 sunt complemente unul altuia in L3. Pp. abs. ca m are un complement k in L3. => Intrucat L3 este lant:

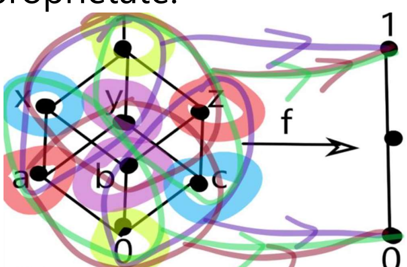
1=mvk=sup{m,k}=max{m,k} si 0=m^k=inf{m,k}=min{m,k}, care apartin multimii {m,k} => (m=1 si k=0) sau (m=0 si k=1). => cu m=/=0 si m=/=1. =>

=> Multimea elem. complementate ale L3 este {0,1}.

=> Oricare ar fi p in cub, f(p) apartine lui {0,1}. => Im f e inclusa in {0,1}.

=> Im f = {0,1}, care e inclusa strict in L3, asadar f nu e surjectiv.

Oricare ar fi f:A->B, Ker(f) = {(u,v) din AxA | f(u)=f(v)}, care apartine lui Eq(A). Rezultat care cred ca nu se afla in curs, cel putin nu in general pentru morfisme de latici (marginite), ci cel mult pentru morfisme boolene: daca A si B sunt latici (marginite), iar f e morfism de latici (marginite), atunci Ker(f) e congruenta a laticii A, adica echivalenta Ker(f) e compatibila cu v si ^. Nu e obligatoriu sa observati direct urmatoarele 3 morfisme, din aceasta proprietate.



Aici, in mod text, notez cu p~ complementul oricarui p din cub.

Fie f:cub->L3 un morf. de lat. marg.. => f(0)=0, f(1)=1 si (oricare ar fi p,q in cub)(f(pvq)=f(p)vf(q) si f(p^q)= f(p)^f(q)). => Oricare ar fi p in cub,

f(p)vf(p~)=f(pvp~)=f(1)=1 si f(p)^f(p~)=f(p^p~)=f(0)=0. <=> f(p) si f(p~) sunt complemente unul altuia in L3.

f(0)=0 si f(1)=1 =>
=> 0,1 apartin lui f(cub).
= Im f.
<=> {0,1} e inclusa in Im f.

0 si 1 sunt complemente unul altuia in L3. Pp. abs. ca m are un complement k in L3. => Intrucat L3 este lant:

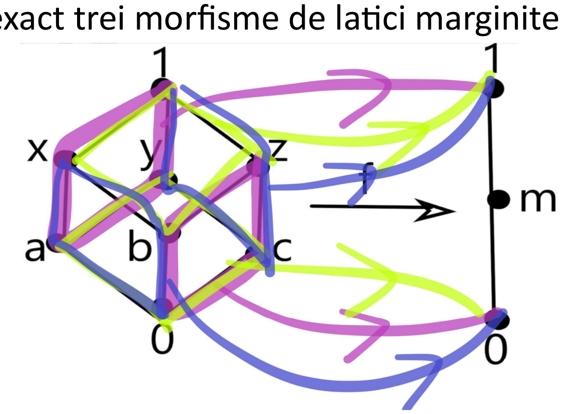
1=mvk=sup{m,k}=max{m,k} si 0=m^k=inf{m,k}=min{m,k}, care apartin multimii {m,k} => (m=1 si k=0) sau (m=0 si k=1). => cu m=/=0 si m=/=1. =>

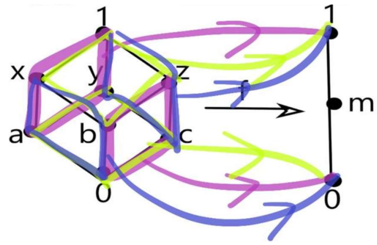
=> Multimea elem. complementate ale L3 este {0,1}.

=> Oricare ar fi p in cub, f(p) apartine lui {0,1}. => Im f e inclusa in {0,1}.

=> Im f = {0,1}, care e inclusa strict in L3, asadar f nu e surjectiv.

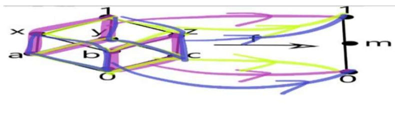
Vom vedea ca exista exact trei morfisme de latici marginite de la cub la L3, anume:





0~=1, a~=z, b~=y, c~=x.

Oricare ar fi p in cub, f(p),f(p~) apartin lui {0,1} si multimea {f(p),f(p~)} contine elementele: max{f(p),f(p~)}=sup{f(p),f(p~)}=f(p)vf(p~)=1 si min{f(p),f(p~)}=inf{f(p),f(p~)}=f(p)^f(p~)=0, asadar (f(p),f(p~)) apartine lui {(0,1),(1,0)}.



0~=1, a~=z, b~=y, c~=x.
Oricare ar fi p in cub, f(p),f(p~) apartin lui {0,1} si multimea {f(p),f(p~)} contine elementele: max{f(p),f(p~)}=sup{f(p),f(p~)}=f(p)vf(p~)=1 si min{f(p),f(p~)}=inf{f(p),f(p~)}=f(p)^f(p~)=0, asadar (f(p),f(p~)) apartine lui {(0,1),(1,0)}.

Asadar: f(0)=0, f(1)=1, iar (f(a),f(z)), (f(b),f(y)), (f(c),f(x)) apartin lui {(0,1),(1,0)}.
In plus, f(x)=f(avb)=f(a)vf(b), f(y)=f(avc)=f(a)vf(c), f(z)=f(bvc)=f(b)vf(c) si f(a)=f(x^y)=f(x)^f(y), f(b)=f(x^z)=f(x)^f(z), f(c)=f(y^z)=f(y)^f(z).

Obtinem urmatoarele functii f:

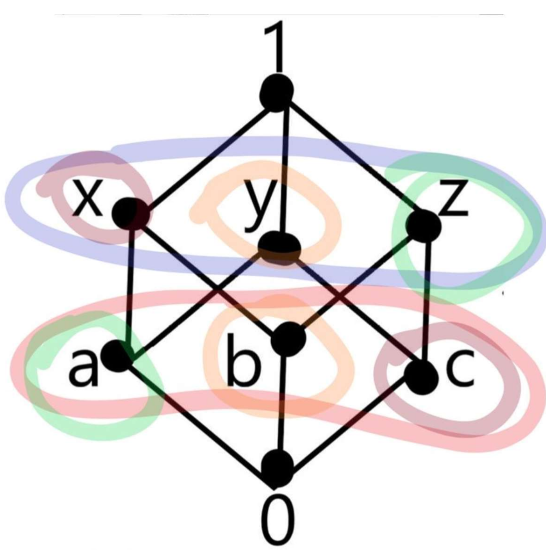
u | 0 a b c x y z 1
----
f(u) | 0 0 0 1 0 1 1 1 ✓
~~f(u) | 0 1 1 0 1 0 0 1~~
f(u) | 0 0 1 0 1 0 1 1 ✓
~~f(u) | 0 1 0 1 0 1 0 1~~
f(u) | 0 1 0 0 1 0 0 1 ✓
~~f(u) | 0 0 1 1 0 0 1 1~~

f e morfism de latici => f e crescatoare, asadar:
a <= y => f(a) <= f(y)
c <= z => f(c) <= f(z)
b <= x => f(b) <= f(x)

f e morfism de latici <=> f e crescatoare si pastreaza v si ^ pentru perechile de elemente incomparabile ale cubului, anume:
{a,b}, {a,c}, {b,c},
{x,y}, {x,z}, {y,z},
{a,z}, {b,y}, {c,x}.

Dintre cele 6 functii de mai sus, am observat ca a doua, a patra si a sasea nu sunt crescatoare, deci nu sunt morfisme de latici. Sa demonstram ca, celelalte trei sunt morfisme de latici marginite de la cub la L3.

0~=1, a~=z, b~=y, c~=x.
Oricare ar fi p in cub, f(p),f(p~) apartin lui {0,1} si multimea {f(p),f(p~)} contine elementele: max{f(p),f(p~)}=sup{f(p),f(p~)}=f(p)vf(p~)=1 si min{f(p),f(p~)}=inf{f(p),f(p~)}=f(p)^f(p~)=0, asadar (f(p),f(p~)) apartine lui {(0,1),(1,0)}.
Asadar: f(0)=0, f(1)=1, iar (f(a),f(z)), (f(b),f(y)), (f(c),f(x)) apartin lui {(0,1),(1,0)}.
In plus, f(x)=f(avb)=f(a)vf(b), f(y)=f(avc)=f(a)vf(c), f(z)=f(bvc)=f(b)vf(c) si
Obtinem urmatoarele functii f: f(a)=f(x^y)=f(x)^f(y), f(b)=f(x^z)=f(x)^f(z), f(c)=f(y^z)=f(y)^f(z).
u | 0 a b c x y z 1
f(u) | 0 0 0 1 0 1 1 1
f(u) | 0 1 1 0 1 0 0 1
f(u) | 0 0 1 0 1 0 1 1
f(u) | 0 1 0 1 0 1 0 1
f(u) | 0 1 0 0 1 0 0 1
f(u) | 0 0 1 1 0 0 1 1
f e morfism de latici => f e crescatoare, asadar:
a <= y => f(a) <= f(y)
c <= z => f(c) <= f(z)
b <= x => f(b) <= f(x)
f e morfism de latici <=> f e crescatoare si pastreaza v si ^ pentru perechile de elemente incomparabile



f(avz)=f(1)=1=0v1=1v0=f(a)vf(z), f(a^z)=f(0)=0=0^1=1^0=f(a)^f(z) si la fel pentru {b,y}, {c,x}; ramane de verificat ca fiecare dintre cele 3 functii ramase pastreaza v si ^ pentru primele 6 perechi.

Daca le-ati determinat pe acestea 3 (si eliminat corect pe celelalte), nu mai e nevoie sa faceti si aceste verificari.

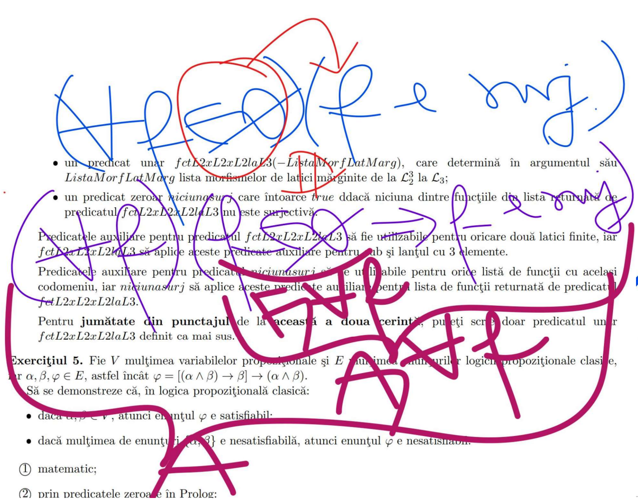
E suficient sa observati ca perechile de elemente {p,p~} care sunt complemente unul altuia in cub sunt duse in {f(p),f(p~)}={0,1} si ca f trebuie sa fie crescatoare.

Apoi puteti scrie deja cele 3 morfisme de latici marginite, fara alte verificari.

Dar, daca gresiti enumerarea morfismelor, atunci veti fi depunctati pentru faptul ca nu ati scris conditiile care invalideaza faptul ca una dintre functiile pe care le-ati enumerat ar fi morfism sau pentru aplicarea eronata a conditiilor pe care le-ati scris corect, inclusiv eventuala neobservare a unora dintre morfisme.

Sigur ca depunctarea nu va fi majora decat daca greselile sunt catastrofale, de genul: scrieti functii care sunt vizibil necrescatoare sau nu duc pe 0 in 0 si 1 in 1 sau care au pe m in imaginea lor dupa ce ati specificat ca m nu trebuie sa se gaseasca acolo.

In mod trivial, multimea vida satisface orice proprietate asupra elementelor unei multimi:



- un predicat unar $fctL2xL2xL2laL3(-ListaMorfLatMarg)$, care determină în argumentul său $ListaMorfLatMarg$ lista morfismelor de latici mărginite de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_3$;
- un predicat zeroar $niciunasurj$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ nu este surjectivă.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ să fie utilizabile pentru oricare două latici finite, iar $fctL2xL2xL2laL3$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru cub şi lanţul cu 3 elemente.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $niciunasurj$ să fie utilizabile pentru orice listă de funcţii cu acelaşi codomeniu, iar $niciunasurj$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lista de funcţii returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctL2xL2xL2laL3$ definit ca mai sus.

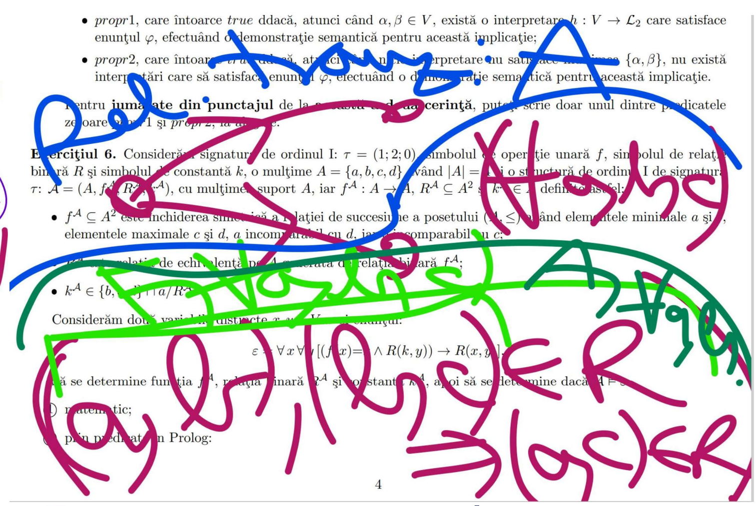
Exerciţiul 5. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \varphi \in E$, astfel încât $\varphi = [(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$.

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- dacă $\alpha, \beta \in V$, atunci enunţul φ e satisfiabil;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă, atunci enunţul φ e nesatisfiabil.

① matematic;

② prin predicatele zeroare în Prolog;



- $propr1$, care întoarce $true$ ddacă, atunci când $\alpha, \beta \in V$, există o interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ care satisface enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie;
- $propr2$, care întoarce $true$ ddacă, atunci când nicio interpretare nu satisface mulţimea $\{\alpha, \beta\}$, nu există interpretări care să satisfacă enunţul φ, efectuând o demonstraţie semantică pentru această implicaţie.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar unul dintre predicatele zeroare $propr1$ şi $propr2$, la alegere.

Exerciţiul 6. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1; 2; 0)$, simbolul de operaţie unară f, simbolul de relaţie binară R şi simbolul de constantă k, o mulţime $A = \{a, b, c, d\}$ având $|A| =$ [illegible] şi o structură de ordinul I de signatura τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, k^{\mathcal{A}})$, cu mulţimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$, $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ şi $k^{\mathcal{A}} \in A$ definite astfel:

- $f^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ este închiderea simetrică a relaţiei de succesiune a posetului $(A, \leq)$ având elementele minimale a şi [illegible], elementele maximale c şi d, a incomparabil cu d, iar [illegible] incomparabil cu c;
- [illegible] relaţia de echivalenţă pe A generată de relaţia binară $f^{\mathcal{A}}$;
- $k^{\mathcal{A}} \in \{b,$ [illegible] $a/R^{\mathcal{A}}$

Considerăm două variabile distincte [illegible] şi enunţul:

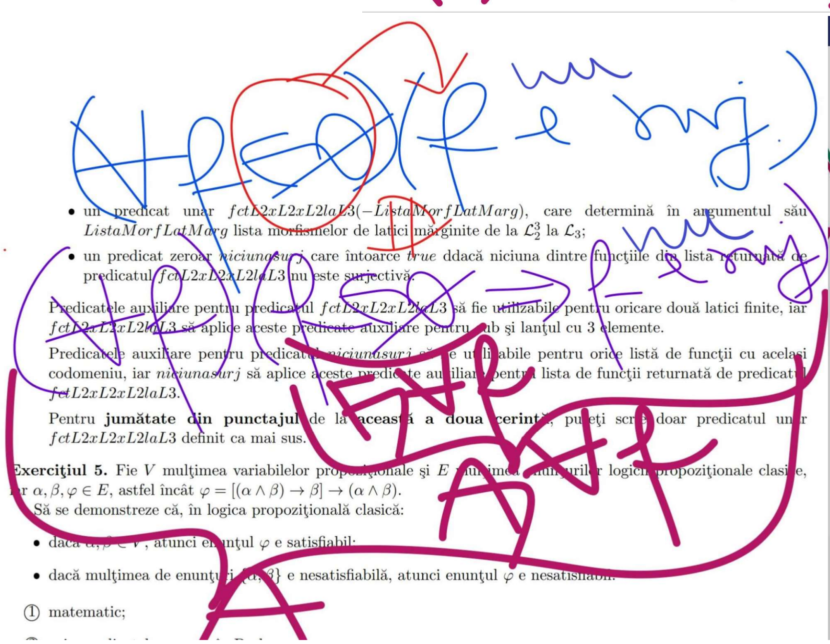
$$\varepsilon = \forall x \forall y [(f(x) = \text{[illegible]} \wedge R(k, y)) \rightarrow R(x, y)].$$

Să se determine funcţia $f^{\mathcal{A}}$, relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ şi constanta $k^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash$ [illegible]

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

4



- un predicat unar $fctL2xL2xL2laL3(-ListaMorfLatMarg)$, care determină în argumentul său $ListaMorfLatMarg$ lista morfismelor de latici mărginite de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_3$;
- un predicat zeroar $niciunasurj$ care întoarce $true$ ddacă niciuna dintre funcţiile din lista returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ nu este surjectivă.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $fctL2xL2xL2laL3$ să fie utilizabile pentru oricare două latici finite, iar $fctL2xL2xL2laL3$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru cub şi lanţul cu 3 elemente.

Predicatele auxiliare pentru predicatul $niciunasurj$ să fie utilizabile pentru orice listă de funcţii cu acelaşi codomeniu, iar $niciunasurj$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru lista de funcţii returnată de predicatul $fctL2xL2xL2laL3$.

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerinţă**, puteţi scrie doar predicatul unar $fctL2xL2xL2laL3$ definit ca mai sus.

Exerciţiul 5. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale şi E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \varphi \in E$, astfel încât $\varphi = [(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta] \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$.

Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică:

- dacă $\alpha, \beta \in V$, atunci enunţul φ e satisfiabil;
- dacă mulţimea de enunţuri $\{\alpha, \beta\}$ e nesatisfiabilă, atunci enunţul φ e nesatisfiabil.

① matematic;

Exercițiul 6. Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1;2;0)$, simbolul de operație unară f, simbolul de relație binară R și simbolul de constantă k, o mulțime $A = \{a,b,c,d\}$ având $|A| = 4$ și o structură de ordinul I de signatură τ: $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, k^{\mathcal{A}})$, cu mulțimea suport A, iar $f^{\mathcal{A}} : A \to A$, $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ și $k^{\mathcal{A}} \in A$ definite astfel:

- $f^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$ este închiderea simetrică a relației de succesiune a posetului $(A, \leq)$ având elementele minimale a și b, elementele maximale c și d, a incomparabil cu d, iar b incomparabil cu c;
- $R^{\mathcal{A}}$ este relația de echivalență pe A generată de relația binară $f^{\mathcal{A}}$;
- $k^{\mathcal{A}} \in \{b,c,d\} \cap a/R^{\mathcal{A}}$.

Considerăm două variabile distincte $x, y \in Var$ și enunțul:

$$\varepsilon = \forall x \forall y \, [(f(x)=k \wedge R(k,y)) \to R(x,y)].$$

Să se determine funcția $f^{\mathcal{A}}$, relația binară $R^{\mathcal{A}}$ și constanta $k^{\mathcal{A}}$, apoi să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$:

① matematic;

② prin predicate în Prolog:

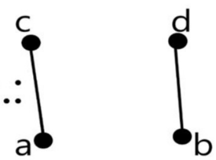
- un predicat unar $detf(-Fctf)$, care întoarce în argumentul său $Fctf$ funcția de la A la A care, ca relație binară pe A, este egală cu închiderea simetrică a relației de succesiune a posetului $(A, \leq)$ având $\mathrm{Min}(A, \leq) = \{a,b\}$, $\mathrm{Max}(A, \leq) = \{c,d\}$, $a||d$ și $b||c$;
- un predicat unar $detR(-RelR)$, care întoarce în argumentul său $RelR$ cea mai mică relație de echivalență pe A care include relația funcțională totală $Fctf$ returnată de predicatul $detf$;
- un predicat unar $detk(-Ctk)$, care întoarce în argumentul său Ctk elementul diferit de a din clasa de echivalență a lui a în relația de echivalență $RelR$ returnată de predicatul $detR$;
- un predicat zeroar $verifAsatepsilon$, care întoarce $true$ dacă $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ și $false$ dacă $\mathcal{A} \nvDash \varepsilon$, efectuând o demonstrație semantică, prin testarea perechilor de valori din mulțimea A pentru variabilele x, y într–o interpretare arbitrară (**indicație:** atenție la reprezentarea unei funcții ca relație binară (funcțională totală), deci ca listă de perechi, care poate fi furnizată unui predicat unar într–o singură clauză, versus reprezentarea ei prin atâtea clauze pentru un predicat binar câte elemente are domeniul acelei funcții; a doua reprezentare e suficientă pentru cerința redusă de mai jos, dar predicatele pentru generare și colectare de funcții scrise la laborator folosesc prima dintre aceste reprezentări).

Pentru **jumătate din punctajul** de la **această a doua cerință**, puteți scrie doar predicatul zeroar $verifAsatepsilon$, introducând direct operația unară $f^{\mathcal{A}}$, relația binară $R^{\mathcal{A}}$ și constanta $k^{\mathcal{A}}$ în baza de cunoștințe.

Pentru **punctajul complet**, predicatele auxiliare pentru predicatele $detf$, respectiv $detR$, respectiv $detk$ să fie utilizabile pentru orice poset finit, respectiv orice relație binară pe o mulțime finită, respectiv orice relație de echivalență pe o mulțime finită și orice element al acelei mulțimi finite, iar $detf$, $detR$, $detk$ să aplice aceste predicate auxiliare pentru posetul $(A, \leq)$ de mai sus, respectiv relația binară funcțională totală pe mulțimea A returnată de predicatul $detf$, respectiv relația de echivalență pe mulțimea A returnată de predicatul $detR$ și elementul $a \in A$.

$A=\{a,b,c,d\}$

Dem.:



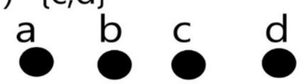
a||b, c||d

a||d, b||c

Min(A,<=)={a,b}

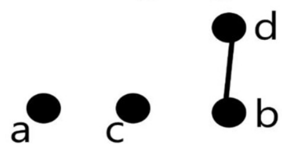
Max(A,<=)={c,d}

a||c => [a||b,c,d si c||a,b,d] =>



=>Min(A,<=)=Max(A,<=)=A ; contrad.

sau

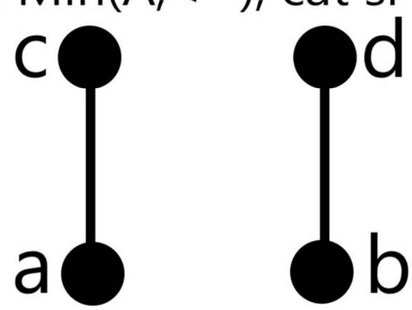


=>Min(A,<=)={a,b,c} si Max(A,<=)={a,c,d}; contrad.

=> a si c sunt comparabile, i.e. a<=c sau c<=a; cum a=/=c, rezulta ca a<c sau c<a, ultima dintre aceste variante contrazicand atat ip. ca a este in Min(A,<=), cat si ip. ca c este in Max(A,<=) => a<c.

Analog, => b<d.

=> Diagr. Hasse a posetului (A,<=) este:



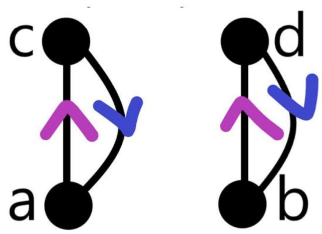
$\Rightarrow \prec = \{(a,c),(b,d)\} \Rightarrow f = S(\{(a,c),(b,d)\}) =$

$\{(a,c),(b,d)\} \cup \{(a,c),(b,d)\}^{-1}$

$= \{(a,c),(b,d)\} \cup \{(c,a),(d,b)\}$

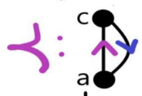
$= \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\}$

$\prec$:

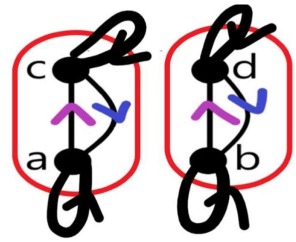


x	a	b	c	d
$f(x)$	c	d	a	b

$\Rightarrow \; = \{(a,c),(b,d)\} \Rightarrow f = S(\{(a,c),(b,d)\}) =$
$\{(a,c),(b,d)\} \cup \{(a,c),(b,d)\}^{-1}$
$= \{(a,c),(b,d)\} \cup \{(c,a),(d,b)\}$
$= \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\}$



x	a	b	c	d
f(x)	c	d	a	b



$\Rightarrow R = E(f) =$

$= T(R(S(f))) = T(R(S(S( )))) = T(R(S( ))) = T(R(f))$

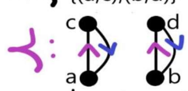
$= R(T(f)) = R(T(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\}))$

$= R(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\} \cup \Delta_A)$

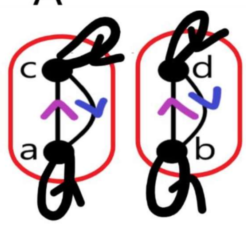
$= R(R(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\})) = R(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\})$

$= \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\} \cup \Delta_A = \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),(d,b),(d,d)\}$

$\Rightarrow \; = \{(a,c),(b,d)\} \Rightarrow f = S(\{(a,c),(b,d)\}) =$
$\{(a,c),(b,d)\} \cup \{(a,c),(b,d)\}^{-1}$
$= \{(a,c),(b,d)\} \cup \{(c,a),(d,b)\}$
$= \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\}$



x	a	b	c	d
f(x)	c	d	a	b



$\Rightarrow R = E(f) =$

$= T(R(S(f))) = T(R(S(S( )))) = T(R(S( ))) = T(R(f))$

$= R(T(f)) = R(T(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\}))$

$= R(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\} \cup \Delta_A)$

$= R(R(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\})) = R(\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\})$

$= \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)\} \cup \Delta_A = \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(c,a),(c,c),(d,b),(d,d)\}$

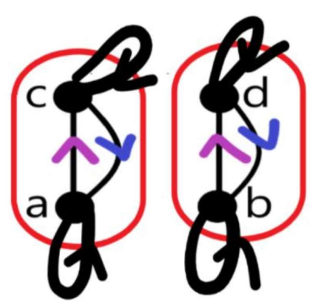
k apartine lui $\{b,c,d\} \cap a/R = \{b,c,d\} \cap \{a,c\} = \{c\}$, deci $k=c$

O permutare {x1,x2,x3,x4} a lui A corespunde ordinii totale x1<x2<x3<x4, deci relatiei de succesiune {(x1,x2),(x2,x3),(x3,x4)}.

Asadar, avem algebra (i.e. structura algebrica): A={a,b,c,d}, f:A->A, f(a)=c, f(b)=d, f(c)=a, f(d)=b, R={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(b,d),(c,a),(d,b)}: relatie binara pe A si k=c constanta din A.

x	a	b	c	d
f(x)	c	d	a	b

R:



$k=c$

Determinam daca pentru orice x,y in A={a,b,c,d} e satisfacuta implicatia:

[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R],

adica, daca, atunci cand (f(x)=k si (k,y) e in R), avem si (x,y) e in R.

Desigur, daca (f(x)=k si (k,y) e in R) e falsa, atunci

[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e adevarata.

Fie x in A={a,b,c,d}. Avem: f(x)=k <=> f(x)=c <=> x=a.

Fie y in A={a,b,c,d}. Avem: (k,y) e in R <=> (c,y) e in R <=> y=a sau y=c.

Asadar, pentru orice pereche (x,y) din (AxA)\{(a,a),(a,c)}, antecedentul

(f(x)=k si (k,y) e in R) al implicatiei [(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e fals,

deci implicatia [(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e adevarata.

Daca (x,y)=(a,a), atunci: (x,y)=(a,a) e in R, deci concluzia (x,y) e in R a implicatiei

[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e adevarata, asadar implicatia

[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e adevarata.

Daca (x,y)=(a,c), atunci: (x,y)=(a,c) e in R, deci concluzia (x,y) e in R a implicatiei

[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e adevarata, asadar implicatia

[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e adevarata.

Asadar, pentru orice pereche (x,y) din AxA, implicatia

[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R] e adevarata, deci are loc:

(oricare ar fi x in A)(oricare ar fi y in A)[(f(x)=k si (k,y) e in R) => (x,y) e in R],

adica aceasta algebra satisface enuntul:

epsilon = (oricare ar fi x)(oricare ar fi y)[(f(x)=k ^ R(k,y)) -> R(x,y)].