Seminar de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@g.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

2022–2023, Semestrul I

Exerciţiul 1. Fie signatura $\tau = (2, 1; 2, 1; 0)$. Considerăm un simbol de operaţie binară f, unul de operaţie unară g, unul de relaţie binară R, unul de relaţie unară S şi unul de constantă o, precum şi trei variabile $x, y, z \in Var$, două câte două distincte.

Fie structura de ordinul I de signatură τ $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, o^{\mathcal{A}})$, unde $A = \{a, b, c\}$, având $|A| = 3$, iar $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$, $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$, $S^{\mathcal{A}} \subseteq A$ şi $o^{\mathcal{A}} \in A$, definite astfel:

$f^{\mathcal{A}}$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	a	b	b

u	a	b	c
$g^{\mathcal{A}}(u)$	b	c	a

$R^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$, $S^{\mathcal{A}} = \{a, b\}$, iar $o^{\mathcal{A}} = c$.

① Să se demonstreze că structura algebrică $\mathcal{A}$ satisface fiecare dintre următoarele enunţuri:

$\forall x\, R(x, x)$ (adică relaţia binară $R^{\mathcal{A}}$ e reflexivă);

$\forall x\, \forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, x)) \to x{=}y]$ (adică $R^{\mathcal{A}}$ e antisimetrică);

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)]$ (adică $R^{\mathcal{A}}$ e tranzitivă);

aşadar $R^{\mathcal{A}}$ e relaţie de ordine pe A;

$\forall x\, \forall y\, (R(x, y) \vee R(y, x))$, aşadar relaţia de ordine $R^{\mathcal{A}}$ pe A este totală.

② Să se calculeze valorile de adevăr ale următoarelor enunţuri în algebra $\mathcal{A}$:

$\forall x\, [f(x, g(x)){=}o \to \exists y\, (S(y) \vee R(x, y))]$ şi $\exists x\, \exists y\, [S(f(x, y)) \wedge R(g(x), g(g(y)))]$.

Rezolvare: Fie $s : Var \to A$. Amintesc că valoarea de adevăr a unui enunţ într–o interpretare cu valori în algebra $\mathcal{A}$ nu depinde de acea interpretare; am fixat interpretarea s doar pentru a putea scrie desfăşurat în ce urmează.

Cu privire la simbolurile de constante a^{ct}, b^{ct}, c^{ct} adăugate la signatura τ pentru a efectua calculele de mai jos, amintesc că, în algebra $\mathcal{A}$, acestora le corespund constantele: $(a^{ct})^{\mathcal{A}} = a$, $(b^{ct})^{\mathcal{A}} = b$, $(c^{ct})^{\mathcal{A}} = c$.

① $||\forall x\, R(x, x)||_{\mathcal{A}} = s(\forall x\, R(x, x)) = \bigwedge\limits_{u\in A} s[{}^x_u](R(x, x)) = \bigwedge\limits_{u\in A} s(R(x, x)[{}^x_u]) = \bigwedge\limits_{u\in A} s(R(u^{ct}, u^{ct})) = s(R(a^{ct}, a^{ct})) \wedge s(R(b^{ct}, b^{ct})) \wedge s(R(c^{ct}, c^{ct})) = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$, întrucât $(a, a), (b, b), (c, c) \in R^{\mathcal{A}}$, aşadar $\mathcal{A} \vDash \forall x\, R(x, x)$;

$$||\forall x\, \forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, x)) \to x{=}y]||_{\mathcal{A}} = s(\forall x\, \forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, x)) \to x{=}y]) =$$

$$\bigwedge_{u\in A}\bigwedge_{v\in A} s[{}^x_u][{}^y_v]((R(x, y) \wedge R(y, x)) \to x{=}y) = \bigwedge_{u\in A}\bigwedge_{v\in A} \Big[(s[{}^x_u][{}^y_v](R(x, y)) \wedge s[{}^x_u][{}^y_v](R(y, x)) \to s[{}^x_u][{}^y_v](x{=}y)\Big] =$$

$$\bigwedge_{u\in A}\bigwedge_{v\in A} \Big[(s(R(x, y)[{}^x_u][{}^y_v]) \wedge s(R(y, x)[{}^x_u][{}^y_v]) \to s((x{=}y)[{}^x_u][{}^y_v])\Big] = \bigwedge_{u\in A}\bigwedge_{v\in A} \left[(s(R(u^{ct}, v^{ct})) \wedge s(R(v^{ct}, u^{ct})) \to s(u^{ct}{=}v^{ct})\right].$$

La sugestia unei studente, aici voi folosi faptul că, pentru orice $u, v \in A$, $s(R(u^{ct}, v^{ct})) \wedge s(R(v^{ct}, u^{ct}) = s(R(v^{ct}, u^{ct})) \wedge s(R(u^{ct}, v^{ct})$ şi $s(u^{ct}{=}v^{ct}) = s(v^{ct}{=}u^{ct})$, aşadar:

$$(s(R(u^{ct}, v^{ct})) \wedge s(R(v^{ct}, u^{ct})) \to s(u^{ct}{=}v^{ct}) = (s(R(v^{ct}, u^{ct})) \wedge s(R(u^{ct}, v^{ct})) \to s(v^{ct}{=}u^{ct}) =$$

$$\left[(s(R(u^{ct}, v^{ct})) \wedge s(R(v^{ct}, u^{ct})) \to s(u^{ct}{=}v^{ct})\right] \wedge \left[(s(R(v^{ct}, u^{ct})) \wedge s(R(u^{ct}, v^{ct})) \to s(v^{ct}{=}u^{ct})\right],$$

prin urmare:

$$||\forall x\, \forall y\, [(R(x, y) \wedge R(y, x)) \to x{=}y]||_{\mathcal{A}} = \left[(s(R(a^{ct}, a^{ct})) \wedge s(R(a^{ct}, a^{ct})) \to s(a^{ct}{=}a^{ct})\right] \wedge$$

$$\left[(s(R(a^{ct},b^{ct}))\wedge s(R(b^{ct},a^{ct}))\rightarrow s(a^{ct}{=}b^{ct})\right]\wedge\left[(s(R(a^{ct},c^{ct}))\wedge s(R(c^{ct},a^{ct}))\rightarrow s(a^{ct}{=}c^{ct})\right]\wedge$$
$$\left[(s(R(b^{ct},b^{ct}))\wedge s(R(b^{ct},b^{ct}))\rightarrow s(b^{ct}{=}b^{ct})\right]\wedge\left[(s(R(b^{ct},c^{ct}))\wedge s(R(c^{ct},b^{ct}))\rightarrow s(b^{ct}{=}c^{ct})\right]\wedge$$
$$\left[(s(R(c^{ct},c^{ct}))\wedge s(R(c^{ct},c^{ct}))\rightarrow s(c^{ct}{=}c^{ct})\right]=[(1\wedge 1)\rightarrow 1]\wedge[(1\wedge 0)\rightarrow 0]\wedge[(1\wedge 0)\rightarrow 0]\wedge[(1\wedge 1)\rightarrow 1]\wedge[(1\wedge 0)\rightarrow 0]\wedge$$
$$[(1\wedge 1)\rightarrow 1]=[1\rightarrow 1]\wedge[0\rightarrow 0]\wedge[0\rightarrow 0]\wedge[1\rightarrow 1]\wedge[0\rightarrow 0]\wedge[1\rightarrow 1]=1\wedge 1\wedge 1\wedge 1\wedge 1\wedge 1=1,$$

pentru că $(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\in R^{\mathcal{A}}$, în timp ce $(b,a),(c,a),(c,b)\notin R^{\mathcal{A}}$, aşadar $\mathcal{A}\vDash\forall\,x\,\forall\,y\,[(R(x,y)\wedge R(y,x))\rightarrow x{=}y]$.

Prin calcule similare se arată că $\mathcal{A}\vDash\forall\,x\,\forall\,y\,\forall\,z\,[(R(x,y)\wedge R(y,z))\rightarrow R(x,z)]$ şi $\mathcal{A}\vDash\forall\,x\,\forall\,y\,(R(x,y)\vee R(y,x))$ (**temă**).

②

$$||\forall\,x\,[f(x,g(x)){=}o\rightarrow\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y))]||_{\mathcal{A}}=s(\forall\,x\,[f(x,g(x)){=}o\rightarrow\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y))])=$$
$$\bigwedge_{u\in A}s[\substack{x\\u}](f(x,g(x)){=}o\rightarrow\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))=\bigwedge_{u\in A}[s[\substack{x\\u}](f(x,g(x)){=}o)\rightarrow s[\substack{x\\u}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]=$$
$$\bigwedge_{u\in A}[s((f(x,g(x)){=}o)[\substack{x\\u}])\rightarrow s[\substack{x\\u}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]=[s((f(x,g(x)){=}o)[\substack{x\\a}])\rightarrow s[\substack{x\\a}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]\wedge$$
$$[s((f(x,g(x)){=}o)[\substack{x\\b}])\rightarrow s[\substack{x\\b}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]\wedge[s((f(x,g(x)){=}o)[\substack{x\\c}])\rightarrow s[\substack{x\\c}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]=$$
$$[s(f(a^{ct},g(a^{ct})){=}o)\rightarrow s[\substack{x\\a}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]\wedge[s(f(b^{ct},g(b^{ct})){=}o)\rightarrow s[\substack{x\\b}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]\wedge$$
$$[s(f(c^{ct},g(c^{ct})){=}o)\rightarrow s[\substack{x\\c}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]=$$
$$[0\rightarrow s[\substack{x\\a}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]\wedge[0\rightarrow s[\substack{x\\b}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]\wedge[0\rightarrow s[\substack{x\\c}](\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y)))]=1\wedge 1\wedge 1=1,$$

pentru că $f^{\mathcal{A}}(a,g^{\mathcal{A}}(a))=f^{\mathcal{A}}(a,b)=b\neq c=o^{\mathcal{A}}$, $f^{\mathcal{A}}(b,g^{\mathcal{A}}(b))=f^{\mathcal{A}}(b,c)=a\neq c=o^{\mathcal{A}}$ şi $f^{\mathcal{A}}(c,g^{\mathcal{A}}(c))=f^{\mathcal{A}}(c,a)=a\neq c=o^{\mathcal{A}}$. Aşadar $\mathcal{A}\vDash\forall\,x\,[f(x,g(x)){=}o\rightarrow\exists\,y\,(S(y)\vee R(x,y))]$.

$$||\exists\,x\,\exists\,y\,[S(f(x,y))\wedge R(g(x),g(g(y)))]||_{\mathcal{A}}=s(\exists\,x\,\exists\,y\,[S(f(x,y))\wedge R(g(x),g(g(y)))])=$$
$$\bigvee_{u\in A}\bigvee_{v\in A}s[\substack{x\\u}][\substack{y\\v}](S(f(x,y))\wedge R(g(x),g(g(y))))=\bigvee_{u\in A}\bigvee_{v\in A}\left[s[\substack{x\\u}][\substack{y\\v}](S(f(x,y)))\wedge s[\substack{x\\u}][\substack{y\\v}](R(g(x),g(g(y))))\right]=$$
$$\bigvee_{u\in A}\bigvee_{v\in A}\left[s(S(f(x,y))[\substack{x\\u}][\substack{y\\v}])\wedge s(R(g(x),g(g(y)))[\substack{x\\u}][\substack{y\\v}])\right]=\bigvee_{u\in A}\bigvee_{v\in A}\left[s(S(f(u^{ct},v^{ct})))\wedge s(R(g(u^{ct}),g(g(v^{ct}))))]\right]=1,$$

pentru că $s(S(f(a^{ct},a^{ct})))\wedge s(R(g(a^{ct}),g(g(a^{ct}))))])=1\wedge 1=1$, întrucât $f^{\mathcal{A}}(a,a)=a\in S^{\mathcal{A}}$, iar $(g^{\mathcal{A}}(a),g^{\mathcal{A}}(g^{\mathcal{A}}(a)))=(b,c)\in R^{\mathcal{A}}$. Aşadar $\mathcal{A}\vDash\exists\,x\,\exists\,y\,[S(f(x,y))\wedge R(g(x),g(g(y)))]$.

Exerciţiul 2. Considerăm signatura algebrelor booleene: $\tau=(2,2,1;2;0,0)$, cu două simboluri de operaţii binare *join* şi *meet* (pe care le vom nota *infixat*, adică le vom scrie între argumentele lor, de exemplu: $x\ join\ y$ în loc de $join(x,y)$), un simbol de operaţie unară *cpl*, unul de relaţie binară *ord* şi două simboluri de constante *min* şi *max*.

Fie $x,y\in Var$, $x\neq y$, şi enunţul $\varphi=\forall\,x\,\forall\,y\,[(x\ join\ y{=}max)\rightarrow((x{=}max)\vee(y{=}max))]\in Form(\mathcal{L}_\tau)$.

Să se arate că algebra Boole standard $\mathcal{L}_2\vDash\varphi$, în timp ce rombul $\mathcal{L}_2^2\nvDash\varphi$.

Rezolvare: Algebra Boole standard $\mathcal{L}_2=(L_2,\vee,\wedge,\bar{\cdot},\leq,0,1)$ are: $L_2=\{0,1\}$, $\vee=join^{\mathcal{L}_2}$, $\wedge=meet^{\mathcal{L}_2}$, $\bar{\cdot}=cpl^{\mathcal{L}_2}$, $\leq=ord^{\mathcal{L}_2}$, $0=min^{\mathcal{L}_2}$ şi $1=max^{\mathcal{L}_2}$.

Rombul $\mathcal{L}_2^2=(L_2^2,\vee,\wedge,\bar{\cdot},\leq,0,1)$ are: $L_2^2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, $\vee=join^{\mathcal{L}_2^2}$, $\wedge=meet^{\mathcal{L}_2^2}$, $\bar{\cdot}=cpl^{\mathcal{L}_2^2}$, $\leq=ord^{\mathcal{L}_2^2}$, $0=min^{\mathcal{L}_2^2}$ şi $1=max^{\mathcal{L}_2^2}$.

Fie $s:Var\rightarrow L_2$ şi $t:Var\rightarrow L_2^2$.

$$||\varphi||_{\mathcal{L}_2}=||\forall\,x\,\forall\,y\,[(x\ join\ y{=}max)\rightarrow((x{=}max)\vee(y{=}max))]||_{\mathcal{L}_2}=$$
$$s(\forall\,x\,\forall\,y\,[(x\ join\ y{=}max)\rightarrow((x{=}max)\vee(y{=}max))])=\bigwedge_{u\in L_2}\bigwedge_{v\in L_2}s[\substack{x\\u}][\substack{y\\v}]((x\ join\ y{=}max)\rightarrow((x{=}max)\vee(y{=}max)))$$

$$= \bigwedge_{u\in L_2} \bigwedge_{v\in L_2} \left[s[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}](x\ join\ y{=}max) \to \Big(s[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}](x{=}max) \vee s[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}](y{=}max) \Big) \right]$$

$$= \bigwedge_{u\in L_2} \bigwedge_{v\in L_2} \left[s((x\ join\ y{=}max)[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}]) \to \Big(s((x{=}max)[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}]) \vee s((y{=}max)[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}]) \Big) \right]$$

$$= \bigwedge_{u\in L_2} \bigwedge_{v\in L_2} \left[s(u^{ct}\ join\ v^{ct}{=}max) \to \big(s(u^{ct}{=}max) \vee s(v^{ct}{=}max) \big) \right]$$

$$= \left[s(0^{ct}\ join\ 0^{ct}{=}max) \to \big(s(0^{ct}{=}max) \vee s(0^{ct}{=}max) \big) \right] \wedge \left[s(0^{ct}\ join\ 1^{ct}{=}max) \to \big(s(0^{ct}{=}max) \vee s(1^{ct}{=}max) \big) \right]$$
$$\wedge \left[s(1^{ct}\ join\ 0^{ct}{=}max) \to \big(s(1^{ct}{=}max) \vee s(0^{ct}{=}max) \big) \right] \wedge \left[s(1^{ct}\ join\ 1^{ct}{=}max) \to \big(s(1^{ct}{=}max) \vee s(1^{ct}{=}max) \big) \right]$$
$$= [0 \to (0\vee 0)] \wedge [1 \to (0 \vee 1)] \wedge [1 \to (1 \vee 0)] \wedge [1 \to (1 \vee 1)] = (0 \to 0) \wedge (1 \to 1) \wedge (1 \to 1) \wedge (1 \to 1) = 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1,$$

pentru că $(0^{ct})^{\mathcal{L}_2}\ join^{\mathcal{L}_2}\ (0^{ct})^{\mathcal{L}_2} = 0 \vee 0 = 0 \neq 1 = max^{\mathcal{L}_2}$ ş.a.m.d.. Aşadar $\mathcal{L}_2 \vDash \varphi$.

$$||\varphi||_{\mathcal{L}_2^2} = ||\forall\, x\, \forall\, y\, [(x\ join\ y{=}max) \to ((x{=}max) \vee (y{=}max))]||_{\mathcal{L}_2^2} =$$

$$t(\forall\, x\, \forall\, y\, [(x\ join\ y{=}max) \to ((x{=}max) \vee (y{=}max))]) = \bigwedge_{u\in L_2^2} \bigwedge_{v\in L_2^2} t[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}]((x\ join\ y{=}max) \to ((x{=}max) \vee (y{=}max)))$$

$$= \bigwedge_{u\in L_2^2} \bigwedge_{v\in L_2^2} \left[s[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}](x\ join\ y{=}max) \to \Big(s[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}](x{=}max) \vee s[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}](y{=}max) \Big) \right]$$

$$= \bigwedge_{u\in L_2^2} \bigwedge_{v\in L_2^2} \left[s((x\ join\ y{=}max)[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}]) \to \Big(s((x{=}max)[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}]) \vee s((y{=}max)[\tfrac{x}{u}][\tfrac{y}{v}]) \Big) \right]$$

$$= \bigwedge_{u\in L_2^2} \bigwedge_{v\in L_2^2} \left[s(u^{ct}\ join\ v^{ct}{=}max) \to \big(s(u^{ct}{=}max) \vee s(v^{ct}{=}max) \big) \right] = 0,$$

pentru că: $s((0,1)^{ct}\ join\ (1,0)^{ct}{=}max) \to \big(s((0,1)^{ct}{=}max) \vee s((1,0)^{ct}{=}max) \big) = 1 \to (0 \vee 0) = 1 \to 0 = 0$, întrucât:
$((0,1)^{ct})^{\mathcal{L}_2^2}\ join^{\mathcal{L}_2^2}\ ((1,0)^{ct})^{\mathcal{L}_2^2} = (0,1) \vee (1,0) = (1,1) = max^{\mathcal{L}_2^2}$,
$((0,1)^{ct})^{\mathcal{L}_2^2} = (0,1) \neq (1,1) = max^{\mathcal{L}_2^2}$,
$((1,0)^{ct})^{\mathcal{L}_2^2} = (1,0) \neq (1,1) = max^{\mathcal{L}_2^2}$.
Aşadar $\mathcal{L}_2^2 \nvDash \varphi$.

Material facultativ

Exerciţiul 3. Considerăm un limbaj de ordinul I conţinând un simbol de operaţie ternară f, unul de operaţie binară g, unul de operaţie unară h şi un simbol de constantă c. Considerăm şi trei variabile distincte X, Y şi Z. Să se unifice termenii:

① $f(X, Y, Z)$ şi $f(h(Z), h(c), Z)$;

② $f(X, Y, Z)$ şi $f(h(Z), h(c), X)$;

③ $f(X, g(X, Y), Z)$ şi $f(h(Z), h(c), Z)$;

④ $f(X, h(h(Y)), Z)$ şi $f(h(Z), h(c), Z)$;

⑤ $f(X, g(Y, Y), h(Z))$ şi $f(g(Y, h(Z)), g(h(Z), h(Z)), Y)$;

⑥ $f(X, Y, Z)$, $f(g(Y, Z), Y, h(c))$ şi $f(X, h(Z), Z)$.

Rezolvare: Vom numi simbolurile de operaţii, simplu, *operaţii*; în particular, simbolul de constantă, i.e. operaţie zeroară, operaţie fără argumente, va fi numit, simplu, *constantă*.

Aplicăm ALGORITMUL DE UNIFICARE.

(①) Avem de rezolvat **problema de unificare** $f(X,Y,Z) = f(h(Z),h(c),Z)$.
INIŢIALIZARE: lista soluţie $S = \emptyset$, lista de rezolvat $R = \{f(X,Y,Z) = f(h(Z),h(c),Z)\}$.
DESCOMPUNERE (în operanzii lui f: operator ternar): $S = \emptyset$, $R = \{X = h(Z), Y = h(c), Z = Z\}$.
SCOATERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = h(Z), Y = h(c)\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(Z)\}$, $R = \{Y = h(c)\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(Z), Y = h(c)\}$, $R = \emptyset$.

Cum $R = \emptyset$, se IESE CU SUCCES: **un (cel mai general) unificator** pentru $f(X,Y,Z)$ şi $f(h(Z),h(c),Z)$ este substituţia $\{X/h(Z), Y/h(c)\}$.

(②) Rezolvăm **problema de unificare** $f(X,Y,Z) = f(h(Z),h(c),X)$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(X,Y,Z) = f(h(Z),h(c),X)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = h(Z), Y = h(c), Z = X\}$.
REZOLVARE: $S = \{Z = X\}$, $R = \{X = h(X), Y = h(c)\}$.

Cum $X \in V(h(X))$ (variabila X apare în termenul $h(X)$), se IESE CU EŞEC: **problema de unificare** $f(X,Y,Z) = f(h(Z),h(c),X)$ **nu are soluţie**, adică termenii $f(X,Y,Z)$ şi $f(h(Z),h(c),X)$ **nu au unificator**, i.e. aceşti termeni **nu unifică**.

(③) Rezolvăm **problema de unificare** $f(X,g(X,Y),Z) = f(h(Z),h(c),Z)$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(X,g(X,Y),Z) = f(h(Z),h(c),Z)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = h(Z), g(X,Y) = h(c), Z = Z\}$.

Cum $g \neq h$ (operaţiile g şi h nu coincid), se IESE CU EŞEC: termenii $f(X,g(X,Y),Z)$ şi $f(h(Z),h(c),Z)$ **nu unifică**.

(④) Rezolvăm **problema de unificare** $f(X,h(h(Y)),Z) = f(h(Z),h(c),Z)$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(X,h(h(Y)),Z) = f(h(Z),h(c),Z)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = h(Z), h(h(Y)) = h(c), Z = Z\}$.
DESCOMPUNERE (în operandul lui h: operator unar): $S = \emptyset$, $R = \{X = h(Z), h(Y) = c, Z = Z\}$.

Cum $h \neq c$ (operaţia h nu coincide cu operaţia zeroară, constanta c), se IESE CU EŞEC: termenii $f(X,h(h(Y)),Z)$ şi $f(h(Z),h(c),Z)$ **nu unifică**.

(⑤) Rezolvăm **problema de unificare** $f(X,g(Y,Y),h(Z)) = f(g(Y,h(Z)),g(h(Z),h(Z)),Y)$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(X,g(Y,Y),h(Z)) = f(g(Y,h(Z)),g(h(Z),h(Z)),Y)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = g(Y,h(Z)), g(Y,Y) = g(h(Z),h(Z)), h(Z) = Y\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = g(Y,h(Z))\}$, $R = \{g(Y,Y) = g(h(Z),h(Z)), h(Z) = Y\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = g(h(Z),h(Z)), Y = h(Z)\}$, $R = \{g(h(Z),h(Z)) = g(h(Z),h(Z))\}$.
SCOATERE: $S = \{X = g(h(Z),h(Z)), Y = h(Z)\}$, $R = \emptyset$.

Cum $R = \emptyset$, se IESE CU SUCCES: **un (cel mai general) unificator** pentru $f(X,g(Y,Y),h(Z))$ şi $f(g(Y,h(Z)),g(h(Z),h(Z)),Y)$ este substituţia: $\{\{X = g(h(Z),h(Z)), Y = h(Z)\}\}$.

(⑥) Rezolvăm **problema de unificare** $\{f(X,Y,Z) = f(g(Y,Z),Y,h(c)), f(g(Y,Z),Y,h(c)) = f(X,h(Z),Z)\}$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(X,Y,Z) = f(g(Y,Z),Y,h(c)), f(g(Y,Z),Y,h(c)) = f(X,h(Z),Z)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = g(Y,Z), Y = Y, Z = h(c), f(g(Y,Z),Y,h(c)) = f(X,h(Z),Z)\}$.
SCOATERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = g(Y,Z), Z = h(c), f(g(Y,Z),Y,h(c)) = f(X,h(Z),Z)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = g(Y,Z), Z = h(c), g(Y,Z) = X, Y = h(Z), h(c) = Z\}$.
REZOLVARE: $S = \{Z = h(c)\}$, $R = \{X = g(Y,h(c)), g(Y,h(c)) = X, Y = h(h(c)), h(c) = h(c)\}$.
SCOATERE: $S = \{Z = h(c)\}$, $R = \{X = g(Y,h(c)), g(Y,h(c)) = X, Y = h(h(c))\}$.
REZOLVARE: $S = \{Y = h(h(c)), Z = h(c)\}$, $R = \{X = g(h(h(c)),h(c)), g(h(h(c)),h(c)) = X\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = g(h(h(c)),h(c)), Y = h(h(c)), Z = h(c)\}$, $R = \{g(h(h(c)),h(c)) = g(h(h(c)),h(c))\}$.
SCOATERE: $S = \{X = g(h(h(c)),h(c)), Y = h(h(c)), Z = h(c)\}$, $R = \emptyset$.

Cum $R = \emptyset$, se IESE CU SUCCES: **un (cel mai general) unificator** pentru termenii $f(X,Y,Z)$, $f(g(Y,Z),Y,h(c))$ şi $f(X,h(Z),Z)$ este substituţia $\{X/g(h(h(c)),h(c)), Y/h(h(c)), Z/h(c)\}$.

Exerciţiul 4. Considerăm un limbaj de ordinul I conţinând două simboluri de operaţii binare diferite f şi g, unul de operaţie unară h şi două simboluri de constante diferite a şi b (pe care, în continuare le vom numi, simplu, operaţii binare, operaţie unară, respectiv constante), precum şi patru variabile $V,X,Y,Z \in Var$, două câte două distincte. Considerăm următorii termeni formaţi cu simbolurile de operaţii şi variabilele de mai sus:

$$r = f(h(h(a)), g(g(X,h(Y)),X)), \quad s = f(h(X), g(g(X,X),h(Y))), \quad t = f(h(V), g(Z,Z)),$$
$$u = f(h(h(Z)), g(g(X,h(b)),h(Z))), \quad w = f(h(b), g(g(Y,X), f(Y,X))).$$

A se vedea, în CURS, reprezentările grafice ale termenilor de mai sus, prin arborii asociaţi acestor expresii.

Să se unifice aceşti termeni doi câte doi, adică să se rezolve, pe rând, problemele de unificare: $r = s$, $r = t$, $r = u$, $r = w$, $s = t$, $s = u$, $s = w$, $t = u$, $t = w$, $u = w$.

Pentru perechile $\{p,q\}$ de termeni $p,q \in \{r,s,t,u,w\}$ care unifică, să se unifice şi reuniunea tuturor acestor perechi.

Rezolvare: La fel ca în Exerciţiul 3, în continuare, simbolurile de operaţii vor fi numite, simplu, *operaţii*, în particular simbolurile de constante vor fi numite, simplu, *constante*.

Aplicăm ALGORITMUL DE UNIFICARE.

① Rezolvăm **problema de unificare** $r = s$, adică $f(h(h(a)), g(g(X,h(Y)),X)) = f(h(X), g(g(X,X),h(Y)))$.
INIŢIALIZARE: lista soluţie $S = \emptyset$, lista de rezolvat $R = \{f(h(h(a)), g(g(X,h(Y)),X)) = f(h(X), g(g(X,X),h(Y)))\}$.
DESCOMPUNERE (în operanzii lui f: operator binar): $S = \emptyset$, $R = \{h(h(a)) = h(X), g(g(X,h(Y)),X) = g(g(X,X),h(Y))\}$.
DESCOMPUNERE (în operanzii lui h: operator unar): $S = \emptyset$, $R = \{h(a) = X, g(g(X,h(Y)),X) = g(g(X,X),h(Y))\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(a)\}$, $R = \{g(g(h(a),h(Y)),h(a)) = g(g(h(a),h(a)),h(Y))\}$.
DESCOMPUNERE (în operanzii lui g: operator binar): $S = \{X = h(a)\}$, $R = \{g(h(a),h(Y)) = g(h(a),h(a)), h(a) = h(Y)\}$.
DESCOMPUNERE (în operanzii lui h: operator unar): $S = \{X = h(a)\}$, $R = \{g(h(a),h(Y)) = g(h(a),h(a)), a = Y\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(a), Y = a\}$, $R = \{g(h(a),h(a)) = g(h(a),h(a))\}$.
SCOATERE: $S = \{X = h(a), Y = a\}$, $R = \emptyset$.

Cum $R = \emptyset$, se IESE CU SUCCES, cu **unificatorul** pentru termenii r şi s dat de lista S, anume substituţia $\{X/h(a), Y/a\}$.

② Rezolvăm **problema de unificare** $r = t$, adică $f(h(h(a)), g(g(X,h(Y)),X)) = f(h(V), g(Z,Z))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(h(a)), g(g(X,h(Y)),X)) = f(h(V), g(Z,Z))\}$.
DESCOMPUNERE (în operanzii lui f): $S = \emptyset$, $R = \{h(h(a)) = h(V), g(g(X,h(Y)),X) = g(Z,Z)\}$.
DESCOMPUNERE (în operanzii lui g: tot operator binar): $S = \emptyset$, $R = \{h(h(a)) = h(V), g(X,h(Y)) = Z, X = Z\}$.
REZOLVARE (ambii membri ai ecuaţiei introduse în S sunt variabile, aşa că o putem alege pe oricare ca membru stang): $S = \{X = Z\}$, $R = \{h(h(a)) = h(V), g(Z,h(Y)) = Z\}$.

Cum $Z \in V(g(Z,h(Y)))$ (variabila Z apare în termenul $g(Z,h(Y))$), se IESE CU EŞEC: termenii r şi t **nu unifică, nu au unificator**.

③ Rezolvăm **problema de unificare** $r = u$, adică $f(h(h(a)), g(g(X,h(Y)),X)) = f(h(h(Z)), g(g(X,h(b)),h(Z)))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(h(a)), g(g(X,h(Y)),X)) = f(h(h(Z)), g(g(X,h(b)),h(Z)))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(h(a)) = h(h(Z)), g(g(X,h(Y)),X) = g(g(X,h(b)),h(Z))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(a) = h(Z), g(g(X,h(Y)),X) = g(g(X,h(b)),h(Z))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{a = Z, g(g(X,h(Y)),X) = g(g(X,h(b)),h(Z))\}$.
REZOLVARE: $S = \{Z = a\}$, $R = \{g(g(X,h(Y)),X) = g(g(X,h(b)),h(a))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{Z = a\}$, $R = \{g(X,h(Y)) = g(X,h(b)), X = h(a)\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{g(h(a),h(Y)) = g(h(a),h(b))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{h(a) = h(a), h(Y) = h(b)\}$.

SCOATERE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{h(Y) = h(b)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{Y = b\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(a), Y = b, Z = a\}$, $R = \emptyset$.
Cum $R = \emptyset$, se IESE CU SUCCES: r şi u **au unificatorul** $\{X/h(a), Y/b, Z/a\}$.

④ Rezolvăm **problema de unificare** $r = w$, adică $f(h(h(a)), g(g(X, h(Y)), X)) = f(h(h(Z)), g(g(Y, X), f(Y, X)))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(h(a)), g(g(X, h(Y)), X)) = f(h(b), g(g(Y, X), f(Y, X)))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(h(a)) = h(b), g(g(X, h(Y)), X) = g(g(Y, X), f(Y, X))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(a) = b, g(g(X, h(Y)), X) = g(g(Y, X), f(Y, X))\}$.
Cum $h \neq b$ (operaţia unară h nu coincide cu operaţia zeroară, i.e. constanta b), se IESE CU EŞEC: r şi w **nu au unificator**.

⑤ Rezolvăm **problema de unificare** $s = t$, adică $f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(V), g(Z, Z))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(V), g(Z, Z))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(X) = h(V), g(g(X, X), h(Y)) = g(Z, Z)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(X) = h(V), g(X, X) = Z, h(Y) = Z\}$.
REZOLVARE: $S = \{Z = h(Y)\}$, $R = \{h(X) = h(V), g(X, X) = h(Y)\}$.
Cum $g \neq h$ (operaţiile g şi h nu coincid), se IESE CU EŞEC: s şi t **nu unifică**.

⑥ Rezolvăm **problema de unificare** $s = u$, adică $f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z)))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z)))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(X) = h(h(Z)), g(g(X, X), h(Y)) = g(g(X, h(b)), h(Z))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{X = h(Z), g(g(X, X), h(Y)) = g(g(X, h(b)), h(Z))\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(Z)\}$, $R = \{g(g(h(Z), h(Z)), h(Y)) = g(g(h(Z), h(b)), h(Z))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(Z)\}$, $R = \{g(h(Z), h(Z)) = g(h(Z), h(b)), h(Y) = h(Z)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(Z)\}$, $R = \{g(h(Z), h(Z)) = g(h(Z), h(b)), Y = Z\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(Z), Y = Z\}$, $R = \{g(h(Z), h(Z)) = g(h(Z), h(b))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(Z), Y = Z\}$, $R = \{h(Z) = h(Z), h(Z) = h(b)\}$.
SCOATERE: $S = \{X = h(Z), Y = Z\}$, $R = \{h(Z) = h(b)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(Z), Y = Z\}$, $R = \{Z = b\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(b), Y = b, Z = b\}$, $R = \emptyset$.
Cum $R = \emptyset$, se IESE CU SUCCES: s şi u **au unificatorul** $\{X/h(b), Y/b, Z/b\}$.

⑦ Rezolvăm **problema de unificare** $s = w$, adică $f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(b), g(g(Y, X), f(Y, X)))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(b), g(g(Y, X), f(Y, X)))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(X) = h(b), g(g(X, X), h(Y)) = g(g(Y, X), f(Y, X))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(X) = h(b), g(X, X) = g(Y, X), h(Y) = f(Y, X)\}$.
Cum $h \neq f$ (operaţiile h şi f nu coincid), se IESE CU EŞEC: s şi w **nu unifică**.

⑧ Rezolvăm **problema de unificare** $t = u$, adică $f(h(V), g(Z, Z)) = f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z)))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(V), g(Z, Z)) = f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z)))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(V) = h(h(Z)), g(Z, Z) = g(g(X, h(b)), h(Z))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(V) = h(h(Z)), Z = g(X, h(b)), Z = h(Z)\}$.
Cum $Z \in V(h(Z))$ (variabila Z apare în termenul $h(Z)$), se IESE CU EŞEC: t şi u **nu unifică**.

⑨ Rezolvăm **problema de unificare** $t = w$, adică $f(h(V), g(Z, Z)) = f(h(b), g(g(Y, X), f(Y, X)))$.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(V), g(Z, Z)) = f(h(b), g(g(Y, X), f(Y, X)))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(V) = h(b), g(Z, Z) = g(g(Y, X), f(Y, X))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(V) = h(b), Z = g(Y, X), Z = f(Y, X)\}$.
REZOLVARE: $S = \{Z = f(Y, X)\}$, $R = \{h(V) = h(b), f(Y, X) = g(Y, X)\}$.
Cum $f \neq g$ (operaţiile binare f şi g nu coincid), se IESE CU EŞEC: t şi w **nu unifică**.

⑩ Rezolvăm **problema de unificare** $u = w$, adică $f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z))) = f(h(b), g(g(Y, X), f(Y, X)))$.

INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z))) = f(h(b), g(g(Y, X), f(Y, X)))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(h(Z)) = h(b), g(g(X, h(b)), h(Z)) = g(g(Y, X), f(Y, X))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \emptyset$, $R = \{h(h(Z)) = h(b), g(X, h(b)) = g(Y, X), h(Z) = f(Y, X)\}$.

Cum $h \neq f$ (operaţiile h şi f nu coincid), se IESE CU EŞEC: u şi w **nu unifică**.

(11) Conform celor de mai sus, perechea r şi s, perechea r şi u şi perechea s şi u unifică, iar celelalte perechi de termeni nu unifică. Aşadar, pentru ultima cerinţă a exerciţiului, avem de unificat termenii r, s şi u.

• *Prima metodă:* Pentru a unifica termenii r, s şi u, putem aplica încă o dată ALGORITMUL DE UNIFICARE, pentru a rezolva **problema de unificare** $\{r = s, s = u\}$, i.e. $\{f(h(h(a)), g(g(X, h(Y)), X)) = f(h(X), g(g(X, X), h(Y)))$, $f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z)))\}$. Putem "refolosi" paşi celor două aplicări ale algoritmului de unificare pentru unificările $r = s$ şi $s = u$; putem aplica mai mulţi paşi de DESCOMPUNERE şi SCOATERE simultan, dar nu mai mulţi paşi de REZOLVARE simultan.
INIŢIALIZARE: $S = \emptyset$, $R = \{f(h(h(a)), g(g(X, h(Y)), X)) = f(h(X), g(g(X, X), h(Y))), f(h(X), g(g(X, X), h(Y))) = f(h(h(Z)), g(g(X, h(b)), h(Z)))\}$.

Conform primilor doi paşi de DESCOMPUNERE din fiecare dintre unificările $r = s$ şi $s = u$, obţinem: $S = \emptyset$, $R = \{h(a) = X, g(g(X, h(Y)), X) = g(g(X, X), h(Y))), X = h(Z), g(g(X, X), h(Y)) = g(g(X, h(b)), h(Z))\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(a)\}$, $R = \{g(g(h(a), h(Y)), h(a)) = g(g(h(a), h(a)), h(Y))), h(a) = h(Z), g(g(h(a), h(a)), h(Y)) = g(g(h(a), h(b)), h(Z))\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(a)\}$, $R = \{g(g(h(a), h(Y)), h(a)) = g(g(h(a), h(a)), h(Y))), a = Z, g(g(h(a), h(a)), h(Y)) = g(g(h(a), h(b)), h(Z))\}$.
REZOLVARE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{g(g(h(a), h(Y)), h(a)) = g(g(h(a), h(a)), h(Y))), g(g(h(a), h(a)), h(Y)) = g(g(h(a), h(b)), h(a))\}$.

Doi paşi de DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{g(h(a), h(Y)) = g(h(a), h(a)), h(a) = h(Y), g(h(a), h(a)) = g(h(a), h(b)), h(Y) = h(a)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{g(h(a), h(Y)) = g(h(a), h(a)), h(a) = h(Y), h(a) = h(a), h(a) = h(b), h(Y) = h(a)\}$.
DESCOMPUNERE: $S = \{X = h(a), Z = a\}$, $R = \{g(h(a), h(Y)) = g(h(a), h(a)), h(a) = h(Y), h(a) = h(a), a = b, h(Y) = h(a)\}$.

Cum $a \neq b$ (simbolurile de constante a şi b nu coincid), se IESE CU EŞEC: termenii r, s şi u **nu unifică**.

• *A doua metodă:* Conform celor de mai sus şi proprietăţilor ALGORITMULUI DE UNIFICARE, avem următoarele:

un cel mai general unificator pentru r şi s este substituţia $\{X/h(a), Y/a\}$, pe care o notăm ρ,

un cel mai general unificator pentru r şi u este $\{X/h(a), Y/b, Z/a\}$,

iar **un cel mai general unificator** pentru s şi u este $\{X/h(b), Y/b, Z/b\}$, pe care îl notăm cu σ.

Substituţiile de mai sus nu sunt **nici singurii unificatori**, **nici singurii cei mai generali unificatori** ai acestor perechi de termeni. Însă, conform definiţiei unui *cel mai general unificator*, avem că:

orice unificator pentru r şi s este o compunere a unei alte substituţii cu unificatorul ρ,

şi **orice unificator** pentru s şi u este o compunere a unei alte substituţii cu σ.

Desigur, la fel pentru r şi u şi unificatorul de mai sus.

Aşadar, dacă o substituţie μ este un unificator pentru r, s şi u, atunci există substituţii κ şi λ astfel încât $\mu = \kappa \circ \rho = \lambda \circ \sigma$.

Rezultă că:

$\mu(X) = \kappa(\rho(X)) = \kappa(h(a)) = h(\kappa(a)) = h(a)$ şi

$\mu(X) = \lambda(\sigma(X)) = \lambda(h(b)) = h(\lambda(b)) = h(b)$,

de unde rezultă că $h(a) = h(b)$; avem o contradicţie, pentru că $a \neq b$ (constantele a şi b diferă), aşadar $h(a) \neq h(b)$: termenii $h(a)$ şi $h(b)$ sunt diferiţi; amintesc că termenii sunt cuvinte peste alfabetul acestui limbaj de ordinul I, aşadar doi termeni coincid ddacă sunt LITERAL IDENTICI, i.e. de aceeaşi lungime şi formaţi din aceleaşi litere.

Rezultă că nu există o substituţie μ care să unifice termenii r, s şi u, adică **nu există unificator** pentru r, s şi u, i.e. termenii r, s şi u **nu unifică**.

Exercițiul 5. Considerăm un limbaj de ordinul I conținând un simbol de operație unară f, un simbol de constantă a și simbol de relație binară r. Considerăm și patru variabile distincte v, x, y și z. Să se pună următorul enunț într–o formă Skolem și să se aplice algoritmul Davis–Putnam acelei forme Skolem:

$$\varepsilon = \exists\, v\, \forall\, x\, [[\exists\, y\, r(v, f(y)) \leftrightarrow \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \rightarrow r(a, f(x))].$$

Rezolvare:

$$\varepsilon = \exists\, v\, \forall\, x\, [[\exists\, y\, r(v, f(y)) \leftrightarrow \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \rightarrow r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\neg\, [\exists\, y\, r(v, f(y)) \leftrightarrow \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\neg\, [[\exists\, y\, r(v, f(y)) \rightarrow \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \wedge [\forall\, z\, r(f(f(z)), f(a)) \rightarrow \exists\, y\, r(v, f(y))]] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\neg\, [[\neg\, \exists\, y\, r(v, f(y)) \vee \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \wedge [\neg\, \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a)) \vee \exists\, y\, r(v, f(y))]] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\neg\, [[\forall\, y\, \neg\, r(v, f(y)) \vee \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \wedge [\exists\, z\, \neg\, r(f(f(z)), f(a)) \vee \exists\, y\, r(v, f(y))]] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\neg\, [\forall\, y\, \neg\, r(v, f(y)) \vee \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \vee \neg\, [\exists\, z\, \neg\, r(f(f(z)), f(a)) \vee \exists\, y\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [[\neg\, \forall\, y\, \neg\, r(v, f(y)) \wedge \neg\, \forall\, z\, r(f(f(z)), f(a))] \vee [\neg\, \exists\, z\, \neg\, r(f(f(z)), f(a)) \wedge \neg\, \exists\, y\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [[\exists\, y\, \neg\, \neg\, r(v, f(y)) \wedge \exists\, z\, \neg\, r(f(f(z)), f(a))] \vee [\forall\, z\, \neg\, \neg\, r(f(f(z)), f(a)) \wedge \forall\, y\, \neg\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [[\exists\, y\, r(v, f(y)) \wedge \exists\, z\, \neg\, r(f(f(z)), f(a))] \vee [\forall\, z\, r(f(f(z)), f(a)) \wedge \forall\, y\, \neg\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\exists\, y\, [r(v, f(y)) \wedge \exists\, z\, \neg\, r(f(f(z)), f(a))] \vee \forall\, z\, [r(f(f(z)), f(a)) \wedge \forall\, y\, \neg\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\exists\, y\, \exists\, z\, [r(v, f(y)) \wedge \neg\, r(f(f(z)), f(a))] \vee \forall\, z\, \forall\, y\, [r(f(f(z)), f(a)) \wedge \neg\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))] \models\!\dashv$$

$$\exists\, v\, \forall\, x\, [\exists\, y\, \exists\, z\, [r(v, f(y)) \wedge \neg\, r(f(f(z)), f(a))] \vee \forall\, y\, \forall\, z\, [r(f(f(z)), f(a)) \wedge \neg\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))].$$

Redenumim variabilele, astfel încât nicio variabilă să nu apară cuantificată și existențial, și universal. Dacă am avea o formulă arbitrară, nu neapărat un enunț, atunci ar trebui să redenumim variabilele și pentru a nu avea variabile care să apară și libere, și legate.

Ca o paranteză, putem observa că avem posibilitatea de a efectua această redenumire a variabilelor calculând valoarea de adevăr a enunțului ε într–o algebră $\mathcal{A}$ cu mulțimea elementelor A, înzestrată cu o operație unară $f^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$, o constantă $a^{\mathcal{A}} \in A$ și o relație binară $r^{\mathcal{A}} \subseteq A^2 = A \times A$. Amintesc că, întrucât ε este un enunț, pentru orice interpretare $s : Var \rightarrow A$, valoarea de adevăr a enunțului ε în algebra $\mathcal{A}$ este $||\varepsilon||_{\mathcal{A}} = s(\varepsilon)$: nu depinde de interpretarea s, ci doar de algebra $\mathcal{A}$. Fie, așadar, $s : Var \rightarrow A$ o interpretare arbitrară; avem:

$$||\varepsilon||_{\mathcal{A}} = ||\exists\, v\, \forall\, x\, [\exists\, y\, \exists\, z\, [r(v, f(y)) \wedge \neg\, r(f(f(z)), f(a))] \vee \forall\, y\, \forall\, z\, [r(f(f(z)), f(a)) \wedge \neg\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))]||_{\mathcal{A}} =$$

$$s(\exists\, v\, \forall\, x\, [\exists\, y\, \exists\, z\, [r(v, f(y)) \wedge \neg\, r(f(f(z)), f(a))] \vee \forall\, y\, \forall\, z\, [r(f(f(z)), f(a)) \wedge \neg\, r(v, f(y))] \vee r(a, f(x))]) =$$

$$\bigvee_{p \in A} \bigwedge_{q \in A} [\bigvee_{t \in A} \bigvee_{u \in A} [r'^{\mathcal{A}}(p, f^{\mathcal{A}}(t)) \wedge \neg\, r'^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u)), f^{\mathcal{A}}(a^{\mathcal{A}}))] \vee$$

$$\bigwedge_{w \in A} \bigwedge_{m \in A} [r'^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(m)), f^{\mathcal{A}}(a^{\mathcal{A}})) \wedge \neg\, r'^{\mathcal{A}}(p, f^{\mathcal{A}}(w))] \vee r'^{\mathcal{A}}(a^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}(q))]),$$

unde am notat cu $r'^{\mathcal{A}} : A^2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ operația binară de rezultat boolean asociată relației binare $r^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$: pentru orice $d, e \in A$, $r'^{\mathcal{A}}(d, e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (d, e) \in r^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{dacă } (d, e) \notin r^{\mathcal{A}}. \end{cases}$ Am folosit faptul că, de exemplu, $V(r(p, f(y)) \wedge \neg\, r(f(f(z)), f(a))) = \{y, z\}$, așadar, pentru orice $t, u \in A$, $\left(s\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix}(r'^{\mathcal{A}}(p, f^{\mathcal{A}}(t)) \wedge \neg\, r'^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u))) = r'^{\mathcal{A}}(p, f^{\mathcal{A}}(t)) \wedge \neg\, r'^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u)),$ prin urmare:

$$s(\exists\, y\, \exists\, z\, [r(p, f(y)) \wedge \neg\, r(f(f(z)), f(a))]) = \bigvee_{t \in A} \bigvee_{u \in A} \left(s\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix}(r'^{\mathcal{A}}(p, f^{\mathcal{A}}(t)) \wedge \neg\, r'^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(u)).$$

Variabilele y şi z, care apar cuantificate şi existenţial, şi universal, servesc la parcurgerea mulţimii A (aşadar cu perechea de variabile (y,z) se parcurge mulţimea $A^2 = A \times A$). Cele două parcurgeri sunt independente, aşadar putem redenumi prima pereche de variabile (y,z) în (y',z'):

$$\varepsilon \vDash\!\dashv \exists\, v\,\forall\, x\,[\exists\, y'\,\exists\, z'\,[r(v,f(y')) \wedge \neg\, r(f(f(z')),f(a))] \vee \forall\, y\,\forall\, z\,[r(f(f(z)),f(a)) \wedge \neg\, r(v,f(y))] \vee r(a,f(x))] \vDash\!\dashv$$

$$\exists\, v\,\forall\, x\,[\exists\, y'\,\exists\, z'\,[[r(v,f(y')) \wedge \neg\, r(f(f(z')),f(a))] \vee \forall\, y\,\forall\, z\,[r(f(f(z)),f(a)) \wedge \neg\, r(v,f(y))]] \vee r(a,f(x))] \vDash\!\dashv$$

$$\exists\, v\,\forall\, x\,[\exists\, y'\,\exists\, z'\,\forall\, y\,\forall\, z\,[[r(v,f(y')) \wedge \neg\, r(f(f(z')),f(a))] \vee [r(f(f(z)),f(a)) \wedge \neg\, r(v,f(y))]] \vee r(a,f(x))] \vDash\!\dashv$$

$$\exists\, v\,\forall\, x\,\exists\, y'\,\exists\, z'\,\forall\, y\,\forall\, z\,[[r(v,f(y')) \wedge \neg\, r(f(f(z')),f(a))] \vee [r(f(f(z)),f(a)) \wedge \neg\, r(v,f(y))] \vee r(a,f(x))] \vDash\!\dashv$$

$$\exists\, v\,\forall\, x\,\exists\, y'\,\exists\, z'\,\forall\, y\,\forall\, z\,[[r(v,f(y')) \vee r(f(f(z)),f(a)) \vee r(a,f(x))] \wedge [r(v,f(y')) \vee \neg\, r(v,f(y)) \vee r(a,f(x))] \wedge$$
$$[\neg\, r(f(f(z')),f(a)) \vee r(f(f(z)),f(a)) \vee r(a,f(x))] \wedge [\neg\, r(f(f(z')),f(a)) \vee \neg\, r(v,f(y)) \vee r(a,f(x))]].$$

Acum înlocuim variabilele cuantificate existenţial cu funcţii Skolem:

- variabila v cu o constantă Skolem c;
- variabilele y' şi z' cu funcţii Skolem unare g şi h (întrucât acestea depind de variabila x, cuantificată universal, care le precede):

$$\xi \overset{\text{notaţie}}{=} \forall\, x\,\forall\, y\,\forall\, z\,[[r(c,f(g(x))) \vee r(f(f(z)),f(a)) \vee r(a,f(x))] \wedge [r(c,f(g(x))) \vee \neg\, r(c,f(y)) \vee r(a,f(x))] \wedge$$
$$[\neg\, r(f(f(h(x))),f(a)) \vee r(f(f(z)),f(a)) \vee r(a,f(x))] \wedge [\neg\, r(f(f(h(x))),f(a)) \vee \neg\, r(c,f(y)) \vee r(a,f(x))]].$$

ξ este o formă Skolem a lui ε.

Amintesc semnificaţia funcţiilor Skolem: $\mathcal{A} \vDash \varepsilon$ (algebra $\mathcal{A}$ satisface enunţul ε), adică $||\varepsilon||_{\mathcal{A}} = 1$, ddacă, adăugând la signatură un simbol de constantă c şi două simboluri de operaţii unare g şi h, există o constantă $c^{\mathcal{A}} \in A$ şi două funcţii $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ şi $h^{\mathcal{A}} : A \to A$ astfel încât algebra $\mathcal{A}' = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, h^{\mathcal{A}}; r^{\mathcal{A}}; a^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ satisface enunţul ξ. Aşadar ε e satisfiabil ddacă ξ e satisfiabil.

Forma clauzală a lui ξ, adică mulţimea de clauze corespunzătoare lui ξ, este următoarea – amintesc că trebuie să redenumim variabilele astfel încât mulţimile variabilelor care apar în clauze diferite să fie disjuncte:

$$\{r(c,f(g(x))),\ r(f(f(z)),f(a)),\ r(a,f(x))\},\ \{r(c,f(g(x'))),\ \neg\, r(c,f(y)),\ r(a,f(x'))\}$$

$$\{\neg\, r(f(f(h(x''))),f(a)),\ r(f(f(z'')),f(a)),\ r(a,f(x''))\},\ \{\neg\, r(f(f(h(x'''))),f(a)),\ \neg\, r(c,f(y'')),\ r(a,f(x'''))\}.$$

Dintre aceste clauze, $\{\neg\, r(f(f(h(x''))),f(a)),\ r(f(f(z'')),f(a)),\ r(a,f(x''))\}$ şi $\{r(c,f(g(x'))),\ \neg\, r(c,f(y)),\ r(a,f(x'))\}$ sunt clauze triviale, pentru că formulele atomice $r(f(f(h(x''))),f(a))$ şi $r(f(f(z'')),f(a))$ unifică, având $\{z''/h(x'')\}$ drept un cel mai general unificator, şi formulele atomice $r(c,f(g(x')))$ şi $r(c,f(y))$ unifică, având $\{y/g(x')\}$ drept un cel mai general unificator. Aceste formule atomice unifică privite ca termeni cu o operaţie dominantă r, de rezultat boolean, asociată relaţiei r, în modul în care, mai sus, am asociat operaţia $r'^{\mathcal{A}}$ relaţiei $r^{\mathcal{A}}$ – mai precis, adăugând în signatură un simbol de operaţie binară r căruia, în algebrele în care interpretăm aceste formule, îi corespunde o operaţie binară având rezultatul boolean (astfel că valorile booleene trebuie adăugate la mulţimile de elemente ale acelor algebre), definită, în funcţie de relaţia din acele algebre corespunzătoare simbolului de relaţie r la fel ca operaţia $r'^{\mathcal{A}}$ de mai sus în funcţie de relaţia $r^{\mathcal{A}}$; amintesc că, în acest mod, predicatele, adică relaţiile, în Prolog, devin operaţii de rezultat boolean, astfel că putem imbrica predicatele la fel cum imbricăm orice operatori, iar formulele (fără cuantificatori) devin termeni.

Algoritmul Davis–Putnam are doar un rol de exersare aici, pentru că, după cum ne amintim din curs, nu dă întotdeauna răspunsul corect, spre deosebire de cazul în care Prologul aplică rezoluţia.

Eliminăm clauzele triviale şi obţinem următoarea mulţime de clauze, care are o singură derivare prin rezoluţie:

$$\dfrac{\dfrac{\{r(c,f(g(x))),\ \cancel{r(f(f(z)),f(a))},\ r(a,f(x))\},\ \{\cancel{\neg\, r(f(f(h(x'''))),f(a))},\ \neg\, r(c,f(y'')),\ r(a,f(x'''))\}\ \text{(cu unificatorul } \{z/h(x''')\})}{\{r(c,f(g(x))),\ r(a,f(x)),\ \neg\, r(c,f(y'')),\ r(a,f(x'''))\}}}{\emptyset}$$

Exerciţiul 6. Considerăm un limbaj de ordinul I conţinând un simbol de operaţie unară f, un simbol de constantă a, un simbol de relaţie binară r şi simbol de relaţie unară q. Considerăm şi trei variabile distincte x, y şi z. Să se aplice algoritmul Davis–Putnam următoarei mulţimi de clauze:

$$\{q(f(a)), r(x, f(x))\},\ \{\neg\, q(f(y)), r(y, y)\},\ \{q(f(z))\}.$$

Rezolvare: Nu putem alege, pentru a efectua un pas al algoritmului DP, decât formula atomică $q(f(z))$. Un cel mai general unificator pentru $q(f(a))$, $q(f(y))$ şi $q(f(z))$ este: $\{y/a, z/a\}$.

$$\frac{\dfrac{\{q(f(a)), r(x, f(x))\},\ \{\neg\, q(f(y)), r(y, y)\},\ \{q(f(z))\}}{\{r(x, f(x)), r(a, a)\},\ \{r(a, a)\}}}{\emptyset}$$