

Metody interpolacji

Piotr Pesta, 184531

Maj 2022

1. Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie dwóch metod interpolacji: metody Lagrange'a oraz funkcji splejanych. W realizacji zadania skorzystałem z biblioteki matplotlib do rysowania wykresów oraz modułu os do pobierania informacji o plikach w folderze.

2. Ogólne założenia

Liczba n oznaczać będzie liczbę węzłów interpolacji, a więc przedziałów interpolacji będzie $n-1$.

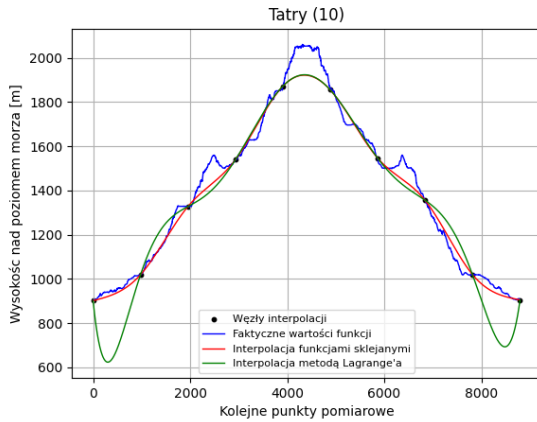
3. Metoda Lagrange'a

Metoda Lagrange'a korzysta z faktu, że $n+1$ punktów definiuje jednoznacznie wielomian n -tego stopnia. Wartość funkcji interpolującej w dowolnym punkcie x wynosi:

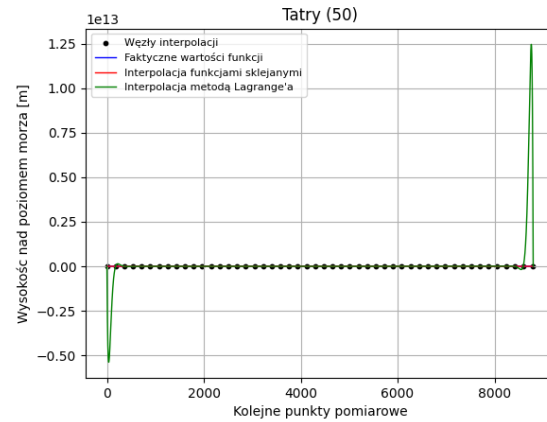
$$F(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Zaletą tej metody jest fakt, że nie trzeba tworzyć i rozwiązywać układu równań, co może być kosztowne obliczeniowo. Największą jej wadą jest natomiast efekt Rungego, który pojawia się przy interpolacji równo-odległych punktów przy użyciu wielomianów wysokiego stopnia. Efekt Rungego polega na pojawianiu się oscylacji na krańcach przedziału interpolacji. Zaczyna być widoczny dla $n = 10$, a wraz ze wzrostem n , oscylacje stają się coraz większe.



(a) Przykład dla $n = 10$



(b) Przykład dla $n = 50$

Rysunek 1: Efekt Rungego

Jak widać na powyższych wykresach, metoda Lagrange'a dla dużych n daje bardzo złe rezultaty, a dla mniejszych n , dokładność interpolacji może nie być zadowalająca. Sprawia to, że metoda ta jest średnio przydatna, szczególnie jeżeli zależy nam na sotsunkowo dokładnym wyznaczeniu funkcji interpolującej.

4. Interpolacja funkcjami sklejanymi

W metodzie interpolacji funkcjami sklejanymi stosujemy interpolację lokalną - dla każdego przedziału stosujemy interpolację wielomianem niskiego stopnia. Pozwala to na uzyskanie dobrej dokładności przy jednoczesnym braku efektu Rungego.

To rozwiązanie jest jednak bardziej kosztowne obliczeniowo, ze względu na koniczność ułożenia i rozwiązania układu równań liniowych. Ma to na celu wyznaczenie współczynników n wielomianów (po 1 na przedział interpolacji) 3 stopnia. Układ ten będzie zatem zawierał $4n$ równań i $4n$ niewiadomych

Konstrukcja układu:

- $S_i(x_i) = f(x_i)$ - ustalona wartość w węzłach interpolacji
- $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ - ciągłość funkcji w węzłach
- $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$ - ciągłość pierwszej pochodnej w węzłach
- $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$ - ciągłość drugiej pochodnej w węzłach
- $S''_0(x_0) = 0, S''_{n-1}(x_n) = 0$ - zerowanie drugiej pochodnej w węzłach granicznych