Variáveis Aleatórias

Docente: Manuel G. Scotto

Departamento de Matemática
IST, ULisboa

Variável aleatória

Uma variável aleatória é uma aplicação de Ω em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \to X(\omega) = x \end{aligned}$$

Variável aleatória

Uma variável aleatória é uma aplicação de Ω em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \to X(\omega) = x \end{aligned}$$

Importante

Uma variável aleatória **associa um número real** a cada resultado possível, de tal forma que a probabilidade de um intervalo real é igual à probabilidade dos acontecimentos que lhe deram origem.

Variáveis aleatórias discretas

São variáveis aleatórias que só assumem um **número finito ou numerável** de possibilidades.

Variáveis aleatórias discretas

São variáveis aleatórias que só assumem um **número finito ou numerável** de possibilidades.

Exemplo

- **Experiência aleatória**: Observação do estado do tempo num dado fim de semana.
- $C = \{\text{Chuva}\}$, $S = \{\text{Sol}\}$, $P(C) = 1/4$, $P(S) = 3/4$.
- Espaço de resultados:

$$\Omega = \{(S,S), (S,C), (C,S), (C,C)\}.$$

- Seja $X =$ "número de dias com sol durante o fim de semana".

Função massa de probabilidade (fmp)

- fmp: $f \ : \ D \to (0,1]$

$$x \to f_X(x) := \begin{cases} P(X = x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}.$$

- $P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = x\})$; $\sum_{x_i} f_X(x_i) = 1.$

Exemplo: função massa de probabilidade

$$P(X=0) \quad = \quad P(C \cap C) \overset{ind}{=} P(C)P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

Exemplo: função massa de probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(C\cap C) \overset{ind}{=} P(C)P(C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
P(X=1) &= P[(S\cap C)\cup(C\cap S)] \\
&\overset{mut.exc.}{=} P(S\cap C) + P(C\cap S) \\
&\overset{ind}{=} P(S)P(C) + P(C)P(S) = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo: função massa de probabilidade

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(C\cap C) \overset{ind}{=} P(C)P(C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\\
P(X=1) &= P[(S\cap C)\cup(C\cap S)]\\
&\overset{mut.exc.}{=} P(S\cap C)+P(C\cap S)\\
&\overset{ind}{=} P(S)P(C)+P(C)P(S) = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\\
P(X=2) &= P(S\cap S) \overset{ind}{=} P(S)P(S) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo: função massa de probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(C\cap C) \overset{ind}{=} P(C)P(C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
P(X=1) &= P[(S\cap C)\cup(C\cap S)] \\
&\overset{mut.exc.}{=} P(S\cap C)+P(C\cap S) \\
&\overset{ind}{=} P(S)P(C)+P(C)P(S) = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
P(X=2) &= P(S\cap S) \overset{ind}{=} P(S)P(S) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} \\
P(X=x) &= 0,\;\; x\neq\{0,1,2\}.
\end{aligned}
$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo: função massa de probabilidade

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & x=0\\ \frac{6}{16}, & x=1\\ \frac{9}{16}, & x=2\\ 0, & \text{outros casos}\end{cases}$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Função distribuição

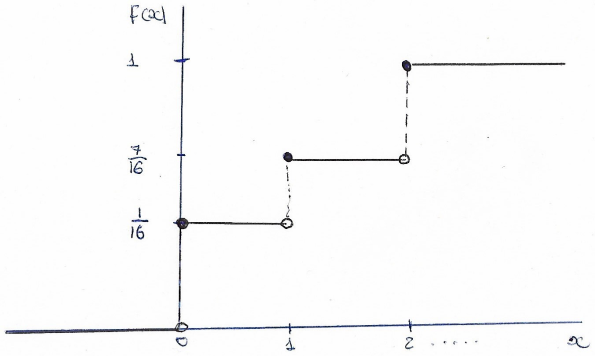
$$\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R} \to [0,1] \\ & x \to F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

- $0 \leq F(x) \leq 1$;
- Se $x < y$ então $F(x) \leq F(y)$;
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$;
- $F(x)$ é contínua à direita;
- $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \Leftrightarrow f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

Exemplo: função distribuição (cont)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{16} + \frac{6}{16}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{9}{16} = 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Variáveis Aleatórias Discretas



Valor esperado de uma variável aleatória discreta

Se X é uma v.a. discreta com função massa de probabilidade $f_X(x)$, então a expressão

$$E(X) = \sum_{x \in D} x \cdot f_X(x),$$

quando

$$E(X) = \sum_{x \in D} |x| \cdot f_X(x) < \infty,$$

define o valor esperado, média ou esperança matemática de X.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo: função massa de probabilidade (cont)

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & x=0\\[2ex] \frac{6}{16}, & x=1\\[2ex] \frac{9}{16}, & x=2\\[2ex] 0, & \text{outros casos}\end{cases}$$

Valor esperado: $E(X)=0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{6}{16}+2\cdot\frac{9}{16}=1.5$

Propriedades do valor esperado

- Sejam a e b duas constantes reais e X e Y duas variáveis aleatórias.

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i E(X_i)$$

- Seja X uma v.a. inteira não negativa, i.e., $D = \mathbb{N}_0$. Então

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F_X(x)].$$

Propriedades do valor esperado (cont)

- **Importante**: Seja $\psi(X)$ uma função mensurável de X. Então

$$E[\psi(X)] = \sum_{x \in D} \psi(x) \cdot f_X(x).$$

Propriedades do valor esperado (cont)

- **Importante**: Seja $\psi(X)$ uma função mensurável de X. Então

$$E[\psi(X)] = \sum_{x \in D} \psi(x) \cdot f_X(x).$$

- De um modo geral $E[\psi(X)] \neq \psi(E(X))$!!!!!

Exemplo

Seja X uma v.a. com função massa de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = -1, 1, 2 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Considere-se a função $\psi(X) = X^2$. Então

$$E[\psi(X)] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Moda de uma variável aleatória discreta

A moda de uma variável aleatória discreta X, designada por mo, corresponde ao ponto de máximo da função massa de probabilidade de X

$$mo = \max_x P(X = x).$$

A moda de uma variável aleatória discreta **nem sempre é única**.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Variância e desvio padrão

- A **variância** de uma variável aleatória é

$$V(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in D} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x),$$

  sendo $\mu = E(X)$.
- Desvio padrão: $\sigma = +\sqrt{V(X)}$.

Propriedades da variância

$$
\begin{aligned}
&V(X) \geq 0, \\
&V(b) = 0, \ \forall b \in \mathbb{R}, \\
&V(aX) = a^2 V(X), \ \forall a \in \mathbb{R}, \\
&V(aX + b) = a^2 V(X), \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \\
&V\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i V(X_i), \ X_1, X_2, \ldots, \ \text{independentes}, \\
&V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Seja X uma v.a. com função massa de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-2} \cdot \frac{2^x}{x!}, & x \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} .$$

Exemplo (cont)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-2} \cdot \frac{2^x}{x!} \\
&= 2e^{-2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{2^{x-1}}{(x-1)!} \\
&\overset{(j=x-1)}{=} 2e^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \\
&= 2e^{-2} e^{2} \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo (cont)

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-2} \cdot \frac{2^x}{x!} \\
&= 2e^{-2} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{2^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= 2e^{-2} \sum_{x=1}^{\infty} (x+1-1) \frac{2^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= 2e^{-2} \left(\sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{2^{x-1}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{2^{x-1}}{(x-1)!} \right)
\end{aligned}
$$

Exemplo (cont)

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= 2e^{-2}\left(2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{2^{x-2}}{(x-2)!}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{2^{x-1}}{(x-1)!}\right)\\
&= 2e^{-2}\left(2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{i}}{i!}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j}}{j!}\right) = 2e^{-2}(2e^2+e^2)\\
&= 2^2+2.
\end{aligned}$$

Assim, $V(X) = 2^2 + 2 - 2^2 = 2.$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Distribuição Binomial

Seja X a v.a. que representa o número de filhas num casal com 4 filhos. Considere-se que a probabilidade de nascer menina é $2/3$ e a de nascer menino $1/3$, e que cada nascimento é independente dos restantes. Obter a função massa de probabilidade da v.a. X.

Distribuição Binomial

Seja X a v.a. que representa o número de filhas num casal com 4 filhos. Considere-se que a probabilidade de nascer menina é $2/3$ e a de nascer menino $1/3$, e que cada nascimento é independente dos restantes. Obter a função massa de probabilidade da v.a. X.

$$P(X=x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^4, & x=0\\ 4\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3, & x=1\\ 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2, & x=2\\ 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}, & x=3\\ \left(\frac{2}{3}\right)^4, & x=4\\ 0, & \text{outros casos.}\end{cases}$$

Distribuição Binomial (cont)

- Distribuição Binomial: $X \sim Bi(n, p),\ \ p \in (0, 1).$

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, \ldots, n \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

- $P(X = x) =$ `dbinom(x,size=n, prob=p)`

Cálculo das Probabilidades com Recurso ao R

$$P(X=x)=\begin{cases}\texttt{dbinom(0,size=4, prob=2/3)}, & x=0\\ \texttt{dbinom(1,size=4, prob=2/3)}, & x=1\\ \texttt{dbinom(2,size=4, prob=2/3)}, & x=2\\ \texttt{dbinom(3,size=4, prob=2/3)}, & x=3\\ \texttt{dbinom(4,size=4, prob=2/3)}, & x=4\\ 0, & \text{outros casos.}\end{cases}$$

Exemplo

Você está desejoso de manter uma boa forma física mas sem grande fadiga. Para isso, todos os dias (exceto aos fins de semana) usa a metodologia seguinte: lança um dado equilibrado e se o resultado for inferior ou igual a 4, vai a pé para a Universidade; caso contrário volta para a cama. Seja X o número de dias da semana em que ganhou direito a repouso. Determine:

- A função massa de probabilidade de X.
- Calcule a $P(X > 1)$, $P(X = 4)$, $P(1 \leq X \leq 3)$.

Exemplo

- A fmp de X. Neste caso $X \sim Bi(n = 5, p = 1/3)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} \cdot (1/3)^x \cdot (2/3)^{5-x}, & x = 0, \ldots, 5 \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

$P(X = x) =$ `dbinom(x,size=5, prob=1/3)`

- Calcular:

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - \texttt{dbinom(0,size=5, prob=1/3)} - \\ &- \texttt{dbinom(1,size=5, prob=1/3)} = 0.5390. \end{aligned}$$

Exemplo

- Calcular:

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \binom{5}{4} \cdot (1/3)^4 \cdot (2/3) \\ &= \texttt{dbinom(4,size=5, prob=1/3)} \\ &= 0.041. \end{aligned}$$

- Calcular:

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \texttt{dbinom(1,size=5, prob=1/3)} + \\ &+ \texttt{dbinom(2,size=5, prob=1/3)} + \\ &+ \texttt{dbinom(3,size=5, prob=1/3)} \\ &= 0.8230. \end{aligned}$$

Distribuição Geométrica

Num estudo sobre o vírus da SIDA são analisadas amostras de sangue de indivíduos infetados. Suponha que cada amostra contém pelo menos 1 vírus com probabilidade 0.8. Se X representar o número de amostras que é necessário analisar até surgir a primeira amostra contaminada, determine

- A função massa de probabilidade de X.
- Calcule a $P(X > 5)$.

Resolução

Pede-se para calcular $P(X = x)$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

Resolução

Pede-se para calcular $P(X = x)$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

- Se $x = 1$, então $P(X = 1) = 0.8$

Resolução

Pede-se para calcular $P(X = x)$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

- Se $x = 1$, então $P(X = 1) = 0.8$
- Se $x = 2$, então $P(X = 2) = (1 - 0.8) \cdot 0.8$

Resolução

Pede-se para calcular $P(X = x)$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

- Se $x = 1$, então $P(X = 1) = 0.8$
- Se $x = 2$, então $P(X = 2) = (1 - 0.8) \cdot 0.8$
- Se $x = 3$, então $P(X = 3) = (1 - 0.8)^2 \cdot 0.8$ pelo que

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p, \;\; x = 1, 2, 3, \ldots.$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Resolução

Pede-se para calcular $P(X = x)$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$.

- Se $x = 1$, então $P(X = 1) = 0.8$
- Se $x = 2$, então $P(X = 2) = (1 - 0.8) \cdot 0.8$
- Se $x = 3$, então $P(X = 3) = (1 - 0.8)^2 \cdot 0.8$ pelo que

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p, \;\; x = 1, 2, 3, \ldots.$$

- $P(X = x) =$ `dgeom(x-1, prob=p)`

Distribuição Geométrica (cont)

- Função massa de probabilidade:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p, & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

- Função de distribuição:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1-(1-p)^{[x]}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

- Valor esperado: $E(X) = 1/p$.
- Variância: $V(X) = (1-p)/p^2$.

Distribuição de Poisson

Seja X a variável aleatória que representa a contagem do número de acontecimentos num intervalo unitário (uma hora, um mês, um ano, etc). $X \sim Po(\lambda)$

- Função massa de probabilidade:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \dots, \quad (\lambda > 0) \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} .$$

$P(X = x) =$ `dpois(x,lambda)`

Distribuição de Poisson (cont)

- Função de distribuição:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{i=0}^{[x]} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

- **Propriedade importante:** $E(X) = V(X)$;
- Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes. Se $X_1 \sim Po(\lambda_1)$ e $X_2 \sim Po(\lambda_2)$ então

$$Y = X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Exercícios: distribuição Poisson (cont)

- Uma companhia de seguros recebe em média, 5 participações de acidentes, por dia. Qual a probabilidade de haver no mínimo 3 participações num dia?
- O número de partículas emitidas por uma fonte radioativa numa dada unidade de tempo é uma variável aleatória de Poisson. Sabendo que a probabilidade de não ser emitida qualquer partícula numa unidade de tempo é $1/4$, determine a probabilidade do contador registar 2 partículas nessa mesma unidade de tempo.

Resolução

Seja X a variável aleatória que representa o número de participações por dia. Assim $X \sim Po(\lambda = 5)$.

Resolução

Seja X a variável aleatória que representa o número de participações por dia. Assim $X \sim Po(\lambda = 5)$.

- Qual a probabilidade de haver no mínimo 3 participações num dia?

Resolução

Seja X a variável aleatória que representa o número de participações por dia. Assim $X \sim Po(\lambda = 5)$.

- Qual a probabilidade de haver no mínimo 3 participações num dia?

$$\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\
&= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\
&= 1 - \left[e^{-5} + e^{-5} \cdot 5 + e^{-5} \cdot \frac{5^2}{2!}\right] \\
&\equiv 1 - \texttt{ppois(2,lambda=5)} \\
&= 0.875.
\end{aligned}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Resolução

Seja X a variável aleatória que representa o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa numa dada unidade de tempo. Assim $X \sim Po(\lambda)$.

- Sabe-se que $P(X = 0) = 1/4$, pelo que

$$e^{-\lambda} = 1/4 \Leftrightarrow \lambda = -\log(1/4) = 1.386.$$

Resolução

Seja X a variável aleatória que representa o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa numa dada unidade de tempo. Assim $X \sim Po(\lambda)$.

- Sabe-se que $P(X=0)=1/4$, pelo que
$$e^{-\lambda}=1/4 \Leftrightarrow \lambda=-\log(1/4)=1.386.$$
- Assim,
$$\begin{aligned} P(X=2) &= e^{-1.386}\times\frac{1.386^2}{2!} \\ &\equiv \texttt{dpois(2,lambda=1.386)} \\ &= 0.240. \end{aligned}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Variável Aleatória Contínua

Variáveis aleatórias que assumem valores em $\mathbb{R}$ ou em intervalos de $\mathbb{R}$.

Variável Aleatória Contínua

Variáveis aleatórias que assumem valores em $\mathbb{R}$ ou em intervalos de $\mathbb{R}$.

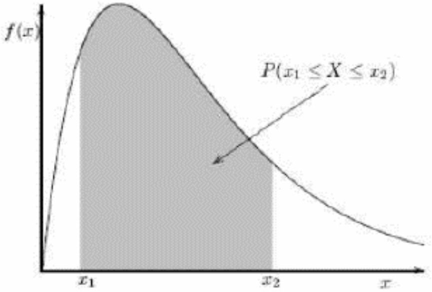
Função densidade de probabilidade e função de distribuição

Sendo X uma variável contínua, existe uma função real de variável real, $f_X(x)$, não negativa (função de densidade de probabilidade) tal que a função de distribuição é

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Propriedades

- $f_X(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R};$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1;$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = F_X(x_2) - F_X(x_1), \ \forall x_1 < x_2.$



Exercício

O tempo em horas que um sistema informático funciona até que ocorre uma falha é uma variável aleatória X com função de densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2k}{\theta} \cdot e^{-x\theta}, & x > 0, \ (\theta > 0) \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Calcular o valor da constante k.

Resolução

- Cálculo da constante k.

$$\int_0^{\infty} \frac{2k}{\theta} \cdot e^{-x\theta} dx = 1$$

- Resolução:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{2k}{\theta} \cdot e^{-x\theta} dx &= \frac{2k}{\theta} \int_0^{\infty} e^{-x\theta} dx = \frac{2k}{\theta} \int_0^{\infty} \frac{-\theta}{-\theta} e^{-x\theta} dx \\
&= -\frac{2k}{\theta^2} \int_0^{\infty} (-\theta) e^{-x\theta} dx = -\frac{2k}{\theta^2} [e^{-x\theta}]_0^{\infty} \\
&= -\frac{2k}{\theta^2}(0-1) = \frac{2k}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

- Assim, $k = \theta^2/2$.

Propriedades da função de distribuição

- F_X e uma função contínua, logo contínua quer à direita quer à esquerda;
- Função monótona não decrescente de x;
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$;
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
- **Importante**: $f_X(x) = F_X'(x)$.

Exercício

O tempo de vida de um componente eletrónico pode ser representado por uma variável aleatória X com fdp

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} \cdot e^{-x/1000}, & x > 0, \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Determine a função de distribuição e calcule a $P(X > 2000)$.

Exercício

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-(x/3)^2}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Determine a função de densidade de probabilidade de X.

Resolução

Sabendo que $f_X(x) = F'_X(x)$, tem-se

$$F'_X(x) = \frac{2x}{9} e^{-(x/3)^2},$$

pelo que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9} e^{-(x/3)^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Valor esperado de uma variável aleatória contínua

Se X é uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade $f_X(x)$, então a expressão

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx,$$

quando

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty,$$

define o valor esperado, média ou esperança matemática de X.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Propriedades do valor esperado

- Sejam a e b duas constantes reais e X e Y duas variáveis aleatórias.

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i E(X_i)$$

Propriedades do valor esperado (cont)

- Seja X uma v.a. contínua não negativa (ou positiva). Então

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > x)dx = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)]dx.$$

- **Importante**: Seja $\psi(X)$ uma função mensurável de X. Então

$$E(\psi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_X(x)dx.$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exercício

Considere-se a variável aleatória X com função de densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-x^2)^2, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Determine $E(X)$.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exercício

Considere-se a variável aleatória X com função de densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x > \theta > 0,\ \alpha > 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Determine $E(X)$.

Resolução

Cálculo do valor esperado:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_\theta^\infty x \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha\theta^\alpha \int_\theta^\infty x^{-\alpha} dx \\
&= \alpha\theta^\alpha \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\theta^\infty = \alpha\theta^\alpha \left(\frac{\theta^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\right) \\
&= \frac{\alpha\theta}{\alpha-1}.
\end{aligned}
$$

Moda de uma variável aleatória contínua

A moda de uma variável aleatória contínua X, designada por mo, corresponde ao ponto de máximo da função de densidade de probabilidade de X,

$$mo = \max_{x} f_X(x).$$

$$mo : \begin{cases} \frac{df_X(x)}{dx}\big|_{x=mo} = 0 \\ \frac{d^2 f_X(x)}{dx^2}\big|_{x=mo} < 0 \end{cases}.$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Variância e desvio padrão de uma variável aleatória contínua

- A **variância** de uma variável aleatória contínua é

$$V(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)dx,$$

  sendo $\mu := E(X)$.
- Desvio padrão: $\sigma = +\sqrt{V(X)}$.

Propriedades da variância

$$V(X) \geq 0,$$
$$V(b) = 0, \ \forall b \in \mathbb{R},$$
$$V(aX) = a^2 V(X), \ \forall a \in \mathbb{R},$$
$$V(aX + b) = a^2 V(X), \ \forall a, b \in \mathbb{R},$$
$$V\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i V(X_i), \ X_1, X_2, \ldots, \ \text{independentes},$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Quantil de ordem p

Seja X uma variável aleatória contínua, e $p \in (0,1)$. O **quantil de ordem** p, (χ_p) é um valor de X que satisfaz a condição

$$\int_{-\infty}^{\chi_p} f_X(x)dx = p \Longleftrightarrow F_X(\chi_p) = p.$$

- Primeiro quartil: $p = 0.25$;
- Mediana: $p = 0.5$;
- Terceiro quartil: $p = 0.75$.

Exercício

Considere-se a variável aleatória X com função de densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x > \theta > 0,\ \alpha > 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

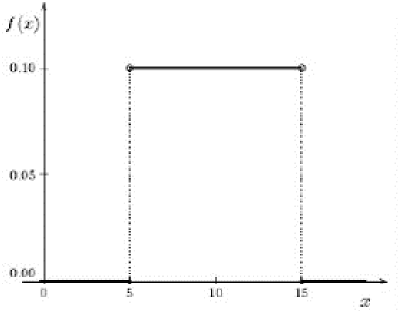
TPC: Calcular o primeiro quartil e o terceiro quartil.

Distribuição uniforme contínua

A v.a. X tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$ se

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} .$$

Exemplo: $a = 5$ e $b = 15$. Neste caso



Distribuição uniforme contínua (cont)

- Valor esperado: $E(X) = (a+b)/2$;
- Variância: $V(X) = (b-a)^2/12$;
- Função de distribuição:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Exercício

O verdadeiro peso de sacos de um quilo de café de uma certa marca é aleatório e apresenta uma densidade de probabilidade uniformemente distribuída entre 0.8 e 1.2 quilos. Qual a probabilidade de um saco de café pesar entre 0.95 e 1.12 quilos?

Resolução

- Seja $X \sim U(0.80, 1.20)$. Qual a probabilidade de um saco de café pesar entre 0.95 e 1.12 quilos?

$$
\begin{aligned}
P(0.95 \leq X \leq 1.12) &= F_X(1.12) - F_X(0.95) \\
&= \frac{1.12 - 0.80}{1.20 - 0.80} - \frac{0.95 - 0.80}{1.20 - 0.80} \\
&= 0.425.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(0.95 \leq X \leq 1.12) &= \texttt{punif(1.12, 0.80, 1.20)} - \\
&- \texttt{punif(0.95, 0.80, 1.20)} \\
&= 0.425
\end{aligned}
$$

Distribuição exponencial

Esta distribuição surge na prática no contexto da modelação dos tempos entre ocorrências consecutivas de eventos do mesmo tipo, e.g. chegadas de clientes a um sistema, falhas mecânicas, colisões, etc.

A v.a. X tem distribuição exponencial $X \sim Exp(\lambda)$ se

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Distribuição exponencial (cont)

- Valor esperado: $E(X) = 1/\lambda$;
- Variância: $V(X) = 1/\lambda^2$;
- Função de distribuição:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Exercício

Suponha que o tempo em horas de trabalho sem falha de um dispositivo segue uma lei exponencial com $\lambda = 0.03$.

- Determine a probabilidade de o dispositivo não falhar durante as primeiras 100 horas de funcionamento.
- Sabendo que o dispositivo não falhou nas primeiras 100 horas, qual a probabilidade de não falhar nas 200 horas seguintes?

Resolução

- Seja $X \sim Exp(0.03)$. Determine a probabilidade de o dispositivo não falhar durante as primeiras 100 horas de funcionamento.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 100) &= 1 - P(X \leq 100) = 1 - F_X(100) \\
&= 1 - (1 - e^{-0.03 \times 100}) \\
&= e^{-3} \\
&= 0.049.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 100) &= 1 - \texttt{pexp(100, 0.03)} \\
&= 0.049.
\end{aligned}
$$

Resolução

- Sabendo que o dispositivo não falhou nas primeiras 100 horas, qual a probabilidade de não falhar nas 200 horas seguintes?

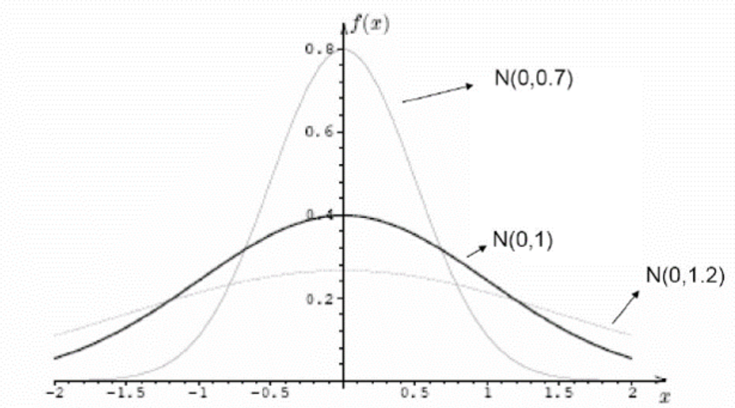
$$
\begin{aligned}
P(X \geq 300 | X \geq 100) &= \frac{P(X \geq 300, X \geq 100)}{P(X \geq 100)} \\
&= \frac{P(X \geq 300)}{P(X \geq 100)} = \frac{1 - F_X(300)}{1 - F_X(100)} \\
&= \frac{e^{-9}}{e^{-3}} = e^{-6} \\
&= P(X \geq 200).
\end{aligned}
$$

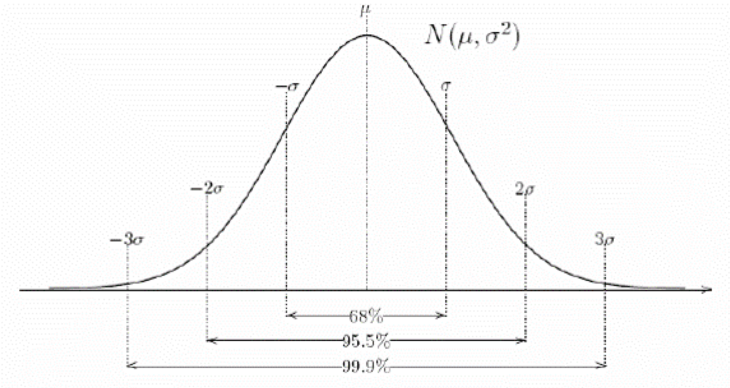
Distribuição Normal

Diz-se que uma variável aleatória X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, quando a função densidade é da forma

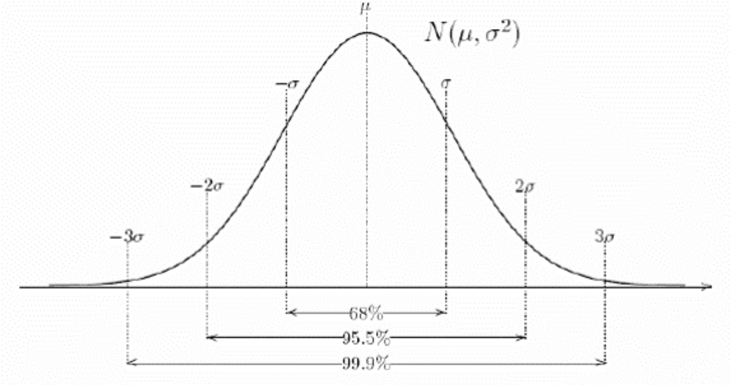
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in \mathbb{R} \; (\mu \in \mathbb{R}, \; \sigma^2 > 0).$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

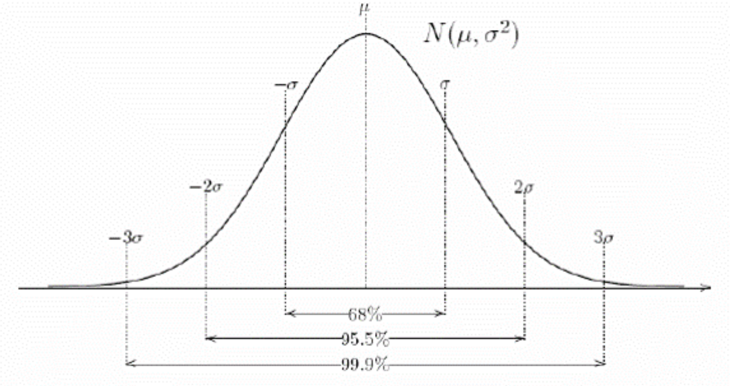




μ
$N(\mu, \sigma^2)$
$-\sigma$
σ
-2σ
2σ
-3σ
3σ
68%
95.5%
99.9%

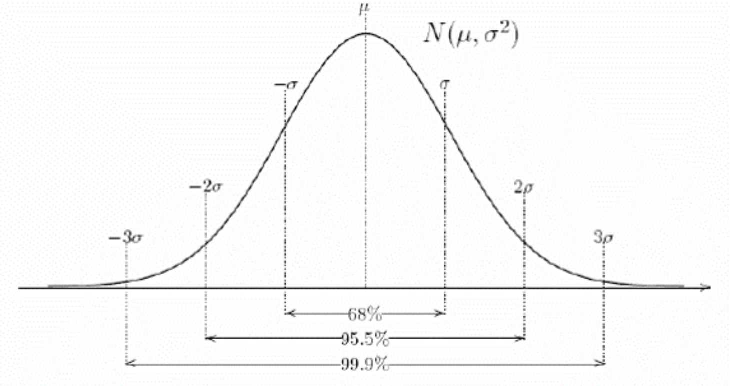


$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.68$$

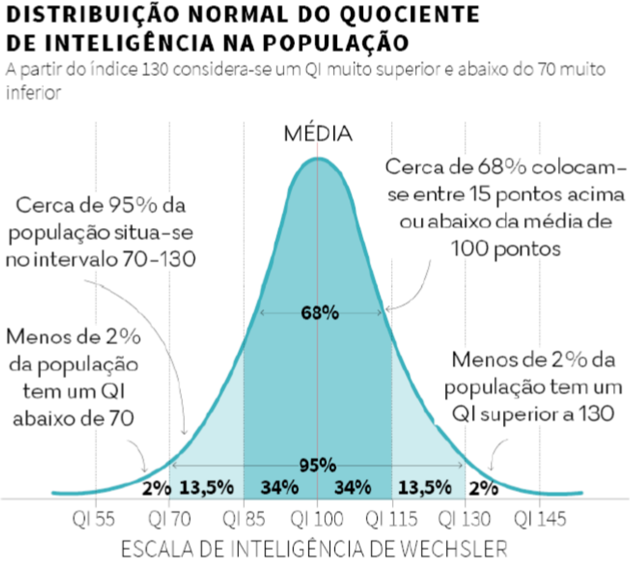


$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.955$$



$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.68$$
$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.955$$
$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$$


DISTRIBUIÇÃO NORMAL DO QUOCIENTE DE INTELIGÊNCIA NA POPULAÇÃO
A partir do índice 130 considera-se um QI muito superior e abaixo do 70 muito inferior
MÉDIA
Cerca de 95% da população situa-se no intervalo 70-130
Cerca de 68% colocam-se entre 15 pontos acima ou abaixo da média de 100 pontos
Menos de 2% da população tem um QI abaixo de 70
Menos de 2% da população tem um QI superior a 130
68%
95%
2%
13,5%
34%
34%
13,5%
2%
QI 55
QI 70
QI 85
QI 100
QI 115
QI 130
QI 145
ESCALA DE INTELIGÊNCIA DE WECHSLER

Distribuição Normal (cont)

- Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$
Esta lei denomina-se *Lei Normal Standard ou lei Normal centrada e reduzida*.
- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$, então
$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Distribuição Normal (cont)

- Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, é um conjunto de variáveis aleatórias **independentes**, então

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

Em particular, se $\mu_i = \mu$ e $\sigma_i^2 = \sigma^2$, para $i = 1 \ldots, n$, então

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right), \ \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right).$$

Exercício

O volume de cerveja das garrafas vendidas no bar onde o Rocha trabalha pode ser considerado $N(0.33, 10^{-5})$. Só são aceites para distribuição garrafas com um volume entre 0.32 e 0.34. Qual a probabilidade de uma garrafa ser rejeitada?

Exercício

O volume de cerveja das garrafas vendidas no bar onde o Rocha trabalha pode ser considerado $N(0.33, 10^{-5})$. Só são aceites para distribuição garrafas com um volume entre 0.32 e 0.34. Qual a probabilidade de uma garrafa ser rejeitada?

$$\begin{aligned} P(\text{garrafa ser rejeitada}) &= 1 - P(\text{garrafa ser aceite}) \\ &= 1 - P(0.32 \leq X \leq 0.34). \end{aligned}$$

Não esquecer que $E(X) = 0.33$ e $V(X) = 10^{-5}$.

Resolução (cont)

$$
\begin{aligned}
P(0.32 \leq X \leq 0.34) &= P\left(\frac{0.32-0.33}{\sqrt{10^{-5}}} \leq Z \leq \frac{0.34-0.33}{\sqrt{10^{-5}}}\right) \\
&= F_Z(3.16) - F_Z(-3.16) \\
&= F_Z(3.16) - [1 - F_Z(3.16)] = \\
&= 2F_Z(3.16) - 1 \\
&\overset{(tabela\,3)}{=} 2 * 0.999211 - 1, \ (F_Z(3.16) = 0.999211) \\
&= 0.998,
\end{aligned}
$$

pelo que $P(\text{garrafa ser rejeitada}) = 1 - 0.998 = 0.002.$

Resolução (cont)

$$
\begin{aligned}
P(\text{garrafa ser rejeitada}) &= 1 - P(\text{garrafa ser aceite}) \\
&= 1 - P(0.32 \leq X \leq 0.34) \\
&= 1 - [P(X \leq 0.34) - P(X \leq 0.32)] \\
&= 1 - \texttt{pnorm(0.34, 0.33, 0.0031)} + \\
&+ \texttt{pnorm(0.32, 0.33, 0.0031)} \\
&= 0.0012.
\end{aligned}
$$

Exercício

Seja X a variável aleatória que representa o tempo (em minutos) necessário para um aluno/a de PE fazer o trabalho de casa. Se a variável aleatória $X \sim N(\mu = 70, \sigma^2 = 12^2)$, determine a probabilidade de o trabalho demorar mais do que 90 minutos.

$$
\begin{aligned}
P(X > 90) &= 1 - P(X \leq 90) \\
&= 1 - \left[P\left(Z \leq \frac{90-70}{12}\right)\right] \\
&= 1 - P(Z \leq 1.666) \\
&\overset{(tabela\,3)}{=} 1 - 0.9515 = 0.0485.
\end{aligned}
$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Importante

- Ao realizar-se uma experiência aleatória é habitual estarmos interessados em estudar **mais do que uma** variável aleatória.
- Por outro lado, é também frequente estarmos interessados em **analisar a relação que existe** entre pares de variáveis aleatórias, em particular de que modo o conhecimento de uma variável aleatória pode influenciar o comportamento probabilístico da outra variável aleatória.

Variável aleatória bidimensional (ou par aleatório)

Uma variável aleatória bidimensional (X, Y) é uma função com domínio Ω e com contradomínio em $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (X, Y): \quad & \Omega \to \mathbb{R}^2 \\ & \omega \to (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

Função de distribuição conjunta

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. A função $F_{X,Y}(x, y)$, com domínio $\mathbb{R}^2$, definida por

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),$$

é a função de distribuição de (X, Y), ou função de distribuição conjunta das variáveis X e Y.

Distribuições Conjuntas de Probabilidade

Propriedades importantes

- $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$;
- F é não decrescente, separadamente, em relação a x e em relação a y;

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) &= F_{X,Y}(x_2,y_2) - F_{X,Y}(x_1,y_2) \\ &- F_{X,Y}(x_2,y_1) + F_{X,Y}(x_1,y_1). \end{aligned}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Variáveis bidimensionais DISCRETAS

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional **discreta**. A função $f_{X,Y}(x, y)$ definida por

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y),$$

é a função massa de probabilidade (X, Y), ou função massa de probabilidade conjunta das variáveis X e Y.

X	Y				
	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$\vdots$	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Numa garagem há 10 automóveis do mesmo modelo e do mesmo ano, e sabe-se que 5 estão em perfeitas condições, 2 com a transmissão deficiente e 3 com a direção desafinada. Dois carros são escolhidos ao acaso, designando por X o número de carros na amostra com transmissão deficiente, e Y, o número de carros na amostra com direção desafinada. Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Numa garagem há 10 automóveis do mesmo modelo e do mesmo ano, e sabe-se que 5 estão em perfeitas condições, 2 com a transmissão deficiente e 3 com a direção desafinada. Dois carros são escolhidos ao acaso, designando por X o número de carros na amostra com transmissão deficiente, e Y, o número de carros na amostra com direção desafinada. Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.

$\Omega = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)\}$

Exemplo (cont)

$$P(X=0,Y=0)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{10}{45}$$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{10}{45}$$

$$P(X=2,Y=0)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{45}$$

Exemplo (cont)

$$P(X=0,Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{15}{45}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{6}{45}$$

$$P(X=0,Y=2)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{3}{45}$$

Função de probabilidade marginal de X e Y

A função de probabilidade marginal de X é definida da seguinte maneira:

$$P(X = x) = \sum_{y} P(X = x, Y = y).$$

Do mesmo modo se define a função de probabilidade marginal de Y

$$P(Y = y) = \sum_{x} P(X = x, Y = y).$$

Função de distribuição marginal de X e Y

A função de distribuição marginal de X é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y} P(X = x_i, Y = y). \end{aligned}$$

Do mesmo modo se define a função de distribuição marginal de Y

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) &= \sum_{y_i \leq y} P(Y = y_i) \\ &= \sum_{y_i \leq y} \sum_{x} P(X = x, Y = y_i). \end{aligned}$$

Função de probabilidade condicionada

A função probabilidade de X condicionada pela realização do acontecimento $\{Y = y\}$, com $P(Y = y) > 0$, é dada por

$$f_{X|Y=y} = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

De modo análogo, a função probabilidade de Y condicionada pela realização de $\{X = x\}$, com $P(X = x) > 0$, é dada por

$$f_{Y|X=x} = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Função de distribuição de X condicional a $Y = y$

$$\begin{aligned} F_{X|Y=y}(x) &= P(X \leq x | Y = y) \\ &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i | Y = y) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \frac{P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)}. \end{aligned}$$

Função de distribuição de Y condicional a $X = x$

$$\begin{aligned} F_{Y|X=x}(y) &= P(Y \leq y|X = x) \\ &= \sum_{y_i \leq y} P(Y = y_i|X = x) \\ &= \sum_{y_i \leq y} \frac{P(X = x, Y = y_i)}{P(X = x)}. \end{aligned}$$

Valores esperados condicionais

- Valor esperado de X condicional a $Y = y$:

$$E(X|Y = y) = \sum_{x} x \cdot P(X = x|Y = y).$$

- Valor esperado de Y condicional a $X = x$:

$$E(Y|X = x) = \sum_{y} y \cdot P(Y = y|X = x).$$

Variâncias condicionais

- Variância de X condicional a $Y = y$:

$$\begin{aligned} V(X|Y=y) &= E(X^2|Y=y) - [E(X|Y=y)]^2 \\ &= \sum_x x^2 \cdot P(X=x|Y=y) - [E(X|Y=y)]^2 \end{aligned}$$

- Variância de Y condicional a $X = x$:

$$\begin{aligned} V(Y|X=x) &= E(Y^2|X=x) - [E(Y|X=x)]^2 \\ &= \sum_y y^2 \cdot P(Y=y|X=x) - [E(Y|X=x)]^2 \end{aligned}$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Independência

As variáveis aleatórias X e Y dizem-se independentes **se e só se**

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Variáveis bidimensionais CONTÍNUAS

O par aleatório (X, Y), com função de distribuição $F_{X,Y}(x, y)$, é uma variável aleatória bidimensional contínua se e só se existe uma função real de duas variáveis reais, não negativa, $f_{X,Y}(x, y)$, tal que

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) dv du, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A função $f_{X,Y}(x, y)$ chama-se **função densidade** de (X, Y) ou função densidade conjunta de X e Y.

Variáveis bidimensionais CONTÍNUAS (cont)

- Para $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_{X,Y}(x, y) \geq 0;$
- Para $x = +\infty$ and $y = +\infty$, tem-se

$$F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1;$$

- Se a função densidade $f_{X,Y}(x, y)$ for contínua no ponto (x, y), então

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exercício

Considere-se a função densidade da variável bidimensional (X, Y) dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (12/7)\cdot(x^2+xy), & 0<x<1,\, 0<y<1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Calcular

$$\begin{aligned} P(X>0.5,\ Y>0.80) &= \int_{0.5}^{\infty}\int_{0.8}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx \\ &= \int_{0.5}^{1}\int_{0.8}^{1} f_{X,Y}(x,y)dydx \\ &= 0.125 \end{aligned}$$

Exercício

Importante:

$$P(X > 0.5,\ Y > 0.80) \neq 1 - P(X \leq 0.5,\ Y \leq 0.80).$$

Exemplo

Considere-se a função densidade da variável bidimensional (X, Y) dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Calcular $P(X \leq 0.5,\ Y \leq 0.75)$.

Exemplo (cont)

$$\begin{aligned}
P(X \leq 0.5,\ Y \leq 0.75) &= F_{X,Y}(0.5, 0.75) \\
&= \int_{-\infty}^{0.5} \int_{-\infty}^{0.75} f_{X,Y}(u, v) dvdu \\
&= \int_{0}^{0.5} \int_{u}^{0.75} 2dvdu \\
&= 0.5.
\end{aligned}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo (cont)

Verificar que

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \wedge y < 0 \\ 2x\left(y - \frac{x}{2}\right), & 0 < x < y < 1 \\ 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right), & 0 < x < 1, y > 1 \\ y^2, & 0 < y < x < 1 \wedge y < 1 < x \\ 1, & x > 1, y > 1 \end{cases}.$$

Função de densidade marginal de X e Y

A função de densidade marginal de X é definida da seguinte maneira:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy.$$

A função de densidade marginal de Y é definida da seguinte maneira:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Função de distribuição marginal de X

A função de distribuição marginal de X é definida da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,y)dy \right) du \\
&= F_{X,Y}(x,+\infty).
\end{aligned}
$$

Função de densidade marginal de Y

A função de distribuição marginal de Y é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \right) dv \\ &= F_{X,Y}(+\infty, y). \end{aligned}$$

Exercício

Considere-se a função densidade da variável bidimensional (X, Y) dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Calcular $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Função de densidade condicionada

X condicional a $Y = y$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0.$$

Y condicional a $X = x$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

Função de distribuição condicionada

X condicional a $Y = y$

$$F_{X|Y=y}(x) = P(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y=y}(u)du.$$

Y condicional a $X = x$

$$F_{Y|X=x}(y) = P(Y \leq y|X = x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X=x}(v)dv.$$

Valor esperado

- Valor esperado de X condicional a $Y = y$

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)dx.$$

- Valor esperado de Y condicional a $X = x$

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{Y|X=x}(y)dy.$$

Variância

- Variância de X condicional a $Y = y$

$$\begin{aligned} V(X|Y=y) &= E(X^2|Y=y) - [E(X|Y=y)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_{X|Y=y}(x)dx - [E(X|Y=y)]^2. \end{aligned}$$

- Variância de Y condicional a $X = x$

$$\begin{aligned} V(Y|X=x) &= E(Y^2|X=x) - [E(Y|X=x)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_{Y|X=x}(y)dy - [E(Y|X=x)]^2. \end{aligned}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Independência

As variáveis aleatórias X e Y dizem-se independentes **se e só se**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA