Inferência Estatística

Docente: Manuel G. Scotto

Departamento de Matemática
IST, ULisboa

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

População e amostra

- **População:** conjunto de indivíduos ou objetos que apresentam uma ou mais caraterísticas em comum, podendo ser finita ou infinita, dependendo do número de elementos que a compõem.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

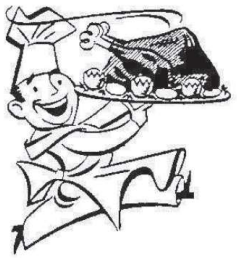
População e amostra

- **População:** conjunto de indivíduos ou objetos que apresentam uma ou mais caraterísticas em comum, podendo ser finita ou infinita, dependendo do número de elementos que a compõem.
- O objetivo usual é **inferir** sobre os parâmetros (ou a forma) da distribuição de X.

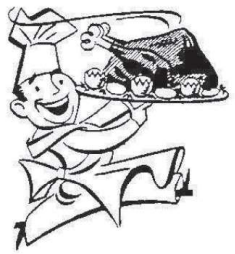
População e amostra

- **População:** conjunto de indivíduos ou objetos que apresentam uma ou mais caraterísticas em comum, podendo ser finita ou infinita, dependendo do número de elementos que a compõem.
- O objetivo usual é **inferir** sobre os parâmetros (ou a forma) da distribuição de X.
- **Amostra:** subconjunto de uma população da qual são estudadas as caraterísticas. Tem que ser representativa relativamente à população de onde foi retirada.

Amostra representativa



Amostra representativa



Amostras NÃO representativas

- **Amostras auto selecionadas**: apresentar uma questão e solicitar os espectadores que telefonem para um número se a sua opinião é "sim" e para outro número se a sua opinião é "não".

Amostras NÃO representativas

- **Amostras auto selecionadas**: apresentar uma questão e solicitar os espectadores que telefonem para um número se a sua opinião é "sim" e para outro número se a sua opinião é "não".

1. Deve haver pagamento de propinas no ensino superior público?

Amostras NÃO representativas

- **Amostras auto selecionadas**: apresentar uma questão e solicitar os espectadores que telefonem para um número se a sua opinião é "sim" e para outro número se a sua opinião é "não".

1. Deve haver pagamento de propinas no ensino superior público?
2. Os hipermercados devem fechar aos domingos?

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Amostras NÃO representativas

- **Amostras auto selecionadas**: apresentar uma questão e solicitar os espectadores que telefonem para um número se a sua opinião é "sim" e para outro número se a sua opinião é "não".

1. Deve haver pagamento de propinas no ensino superior público?
2. Os hipermercados devem fechar aos domingos?
3. Há hipótese de Portugal voltar a ter monarquia?

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Amostras NÃO representativas

- **Amostras inadequadas:** em geral não acontece inadvertidamente. É intencional a generalização abusiva do que foi observado numa amostra muito diminuta para uma população de dimensão considerável.


Jane Fonda fala-nos de Lux:
"adoro Lux; deixa a minha pele maravilhosamente macia!"
LUX
LUX
9 de cada 10 estrelas usam Lux

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Amostra aleatória

- Seja X uma variável aleatória de interesse e $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) de X. Então, o vetor aleatório $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ diz-se uma amostra aleatória (a.a.) respeitante à variável aleatória X.
- À observação particular da a.a. dá-se o nome de amostra e representa-se por $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Caraterização da amostra aleatória

Caso discreto: Função de probabilidade conjunta de $\underline{X}$

$$
\begin{aligned}
P(\underline{X} = \underline{x}) &= P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \;\; X_i \; ind \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) \;\; X_i \sim X
\end{aligned}
$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Caraterização da amostra aleatória

Caso contínuo: Função de densidade conjunta de $\underline{X}$

$$
\begin{aligned}
f_{\underline{X}}(\underline{x}) &= f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \;\; X_i \; ind \\
&= \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) \;\; X_i \sim X
\end{aligned}
$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Estatística

Função da amostra, $T = T(\underline{X})$, que não depende de parâmetros desconhecidos.

Estatística

Função da amostra, $T = T(\underline{X})$, que não depende de parâmetros desconhecidos.

Estatística		Valor observado da estatística	
Mínimo da a.a.	$X_{(1)} = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$	mínimo da amostra	$x_{(1)} = \min_{i=1,\ldots,n} x_i$
Máximo da a.a.	$X_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$	máximo da amostra	$x_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} x_i$
Amplitude da a.a.	$R = X_{(n)} - X_{(1)}$	amplitude da amostra	$r = x_{(n)} - x_{(1)}$
Média da a.a.	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	média da amostra	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Var. corrigida da a.a.	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	var. corrigida da am.	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
Var. não corrig. da a.a.	$(S')^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	var. não corrig. da am.	$(s')^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Estimação paramétrica

- Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra de uma população cuja função densidade pertence à familia $\mathcal{F}_\theta = \{f(x|\theta) : \theta \in \Theta\}$, de que se desconhece apenas o verdadeiro valor do parâmetro.
- A estimação paramétrica procura responder à seguinte questão: como utilizar a informação dada pela amostra para estimar o valor desconhecido de θ?
- Para resolver esta questão torna-se necessário ter em consideração dois aspetos fundamentais: a **precisão** e a **confiança**.

Estimador e estimativa pontual

- **Estimador:** a estatística $T = T(\underline{X})$ diz-se um estimador do parâmetro desconhecido θ, caso tome valores exclusivamente no espaço paramétrico Θ.
- **Estimativa:** é o valor concreto assumido pelo estimador para uma amostra particular $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = T(\underline{x})$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Seja $X \sim Be(\theta)$, com $\theta \in \Theta = [0,1]$. É $T(\underline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ um estimador para θ?

- $T(\underline{X})$ só depende de $\underline{X}$;
- $T(\underline{X})$ toma valores em $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\} \in [0,1]$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Importante

Para introduzir o **método da máxima verosimilhança** é indispensável definir primeiro o conceito de função de verosimilhança.

Função de densidade conjunta

Se $X_1, \ldots, X_n$ é uma a.a. casual de uma população com função densidade (ou função de probabilidade) dada por $f(x|\theta)$, a expressão

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta), \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

define a função densidade conjunta das variáveis que constituem a amostra, isto é, designa para um dado $\theta \in \Theta$ a densidade associada com a mostra particular $(x_1, \ldots, x_n)$.

Função de verosimilhança

Fixado $(x_1, \ldots, x_n)$ isto é observada uma amostra concreta, a mesma expressão interpretada como função do parâmetro θ define a função de verosimilhança, L. Pode escrever-se

$$L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta), \ (\theta \in \Theta).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Método da máxima verosimilhança

Dada a amostra $(x_1, \ldots, x_n)$, o método da máxima verosimilhança consiste em procurar se existe uma estimativa

$$\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) = \hat{\theta}(\underline{x}),$$

tal que

$$L(\hat{\theta}|x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \forall \theta \in \Theta.$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Estimativa de máxima verosimilhança

Obtida a amostra $(x_1, \ldots, x_n)$, a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro desconhecido corresponde ao **ponto de máximo** da função de verosimilhança ou, equivalentemente, ao ponto de máximo do logaritmo da função de verosimilhança, isto é

$$L(\hat{\theta}|\underline{x}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underline{x}), \quad \text{ou} \quad \ln L(\hat{\theta}|\underline{x}) = \max_{\theta \in \Theta} \ln L(\theta|\underline{x}).$$

Estimador de máxima verosimilhança

O estimador de MV de θ obtém-se por substituição de $\underline{x}$ por $\underline{X}$ na expressão geral da estimativa de MV $\hat{\theta}(\underline{x})$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercícios

- Utilize o método da máxima verosimilhança para encontrar estimadores para os parâmetros, no caso das seguintes distribuições: (i) $\mathrm{Po}(\lambda)$, (ii) $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecida, (iii) $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ com μ conhecido.
- Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra casual de uma população com função densidade dada por $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $(0 < x < 1)$, com $\theta > 0$. Calcule um estimador para θ utilizando o método da máxima verosimilhança.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Resolução

Utilize o método da máxima verosimilhança para encontrar estimadores para os parâmetros, no caso das seguintes distribuições: (i) $\mathrm{Po}(\lambda)$, (ii) $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecida, (iii) $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ com μ conhecido.

Caso I: Função de verosimilhança,

$$L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta), \ (\theta \in \Theta).$$

Neste caso $\theta = \{\lambda\}$.

Resolução

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}.$$

Função de log-verosimilhança:

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln \lambda - \ln \left(\prod_{i=1}^{n} x_i! \right).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Resolução

Maximização:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = n,$$

pelo que a estimativa de máxima verosimilhança de λ é $\hat{\lambda} = \bar{x}$.

O estimador de máxima verosimilhança de λ é $\hat{\lambda}_{MV} = \bar{X}$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Resolução

Caso II: neste caso $\theta = \{\mu\}$.

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Função de log-verosimilhança:

$$\ln L(\mu) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Resolução

Maximização:

$$\frac{\partial \ln L(\mu)}{\partial \mu} = \frac{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(-1)}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0$$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu,$$

pelo que a estimativa de máxima verosimilhança de μ é $\hat{\mu} = \bar{x}$.

O estimador de máxima verosimilhança de μ é $\hat{\mu}_{\text{MV}} = \bar{X}$.

Exercícios

- Considere uma amostra aleatória de uma distribuição Uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Calcule um estimador para θ utilizando o método da máxima verosimilhança.
- Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra casual de uma população com função densidade dada por

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \theta - 1/2 \leq x \leq \theta + 1/2 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases},$$

para $\theta \in (-\infty, \infty)$. Calcule um estimador para θ utilizando o método da máxima verosimilhança.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Resolução

Considere uma amostra aleatória de uma distribuição Uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Calcule um estimador para θ utilizando o método da máxima verosimilhança.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}.$$

Função de distribuição conjunta:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x_{(n)}) I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})$$

com $x_{(1)} = \min(x_1, \ldots, x_n)$ e $x_{(n)} = \max(x_1, \ldots, x_n)$.

Resolução

Estimador de máxima verosimilhança para θ

$$\hat{\theta}_{\text{MV}} = X_{(n)},$$

com $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Propriedades dos estimadores de MV

- **Invariância**: Seja h uma função bijetiva de θ. Então

$$\widehat{h(\theta)} = h(\hat{\theta}).$$

- **Consistência**: Esta propriedade pode ser informalmente traduzida no seguinte comportamento probabilístico: à medida que aumentamos a dimensão da a.a. $X_1, \ldots, X_n$, o estimador de máxima verosimilhança de θ dispersa-se cada vez menos em torno do verdadeiro valor de θ.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Distribuição amostral

A distribuição de uma estatística, estimador ou sua função é denominada de **distribuição amostral** (ou **distribuição por amostragem**).

Distribuição amostral

A distribuição de uma estatística, estimador ou sua função é denominada de **distribuição amostral** (ou **distribuição por amostragem**).

Exemplo

Distribuição do máximo e do mínimo de uma a.a. $X_1, \ldots, X_n$ com função de densidade F.

$$X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n), \; X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Importante

- Uma estimativa pontual de um parâmetro não contém informação sobre a **precisão** do valor obtido.
- Uma forma mais completa de abordar a questão consiste em construir estimativas na forma de **intervalos** e conhecer a probabilidade do intervalo conter o verdadeiro valor do parâmetro.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Importante

- Assim, em vez de propor apenas uma estimativa isolada $\hat{\theta}$ de θ, faz-se acompanhar esta de um certo intervalo (θ_1, θ_2).
- Em muitos casos, o intervalo é da forma $(\hat{\theta} - \epsilon, \hat{\theta} + \epsilon)$, em que o valor de ϵ pode ser considerado uma medida de precisão à estimativa $\hat{\theta}$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Intervalo Aleatório e Intervalo de Confiança

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com função densidade $f(x|\theta)$, e $\theta \in \Theta$. Considerem-se duas estatísticas $T_1 \equiv T_1(X_1, \ldots, X_n)$ e $T_2 \equiv T_2(X_1, \ldots, X_n)$ a verificar $T_1 < T_2$. Um intervalo aleatório para θ é um intervalo (T_1, T_2) tais que

$$P(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha, \ \forall \theta \in \Theta, \ \alpha \in (0, 1).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

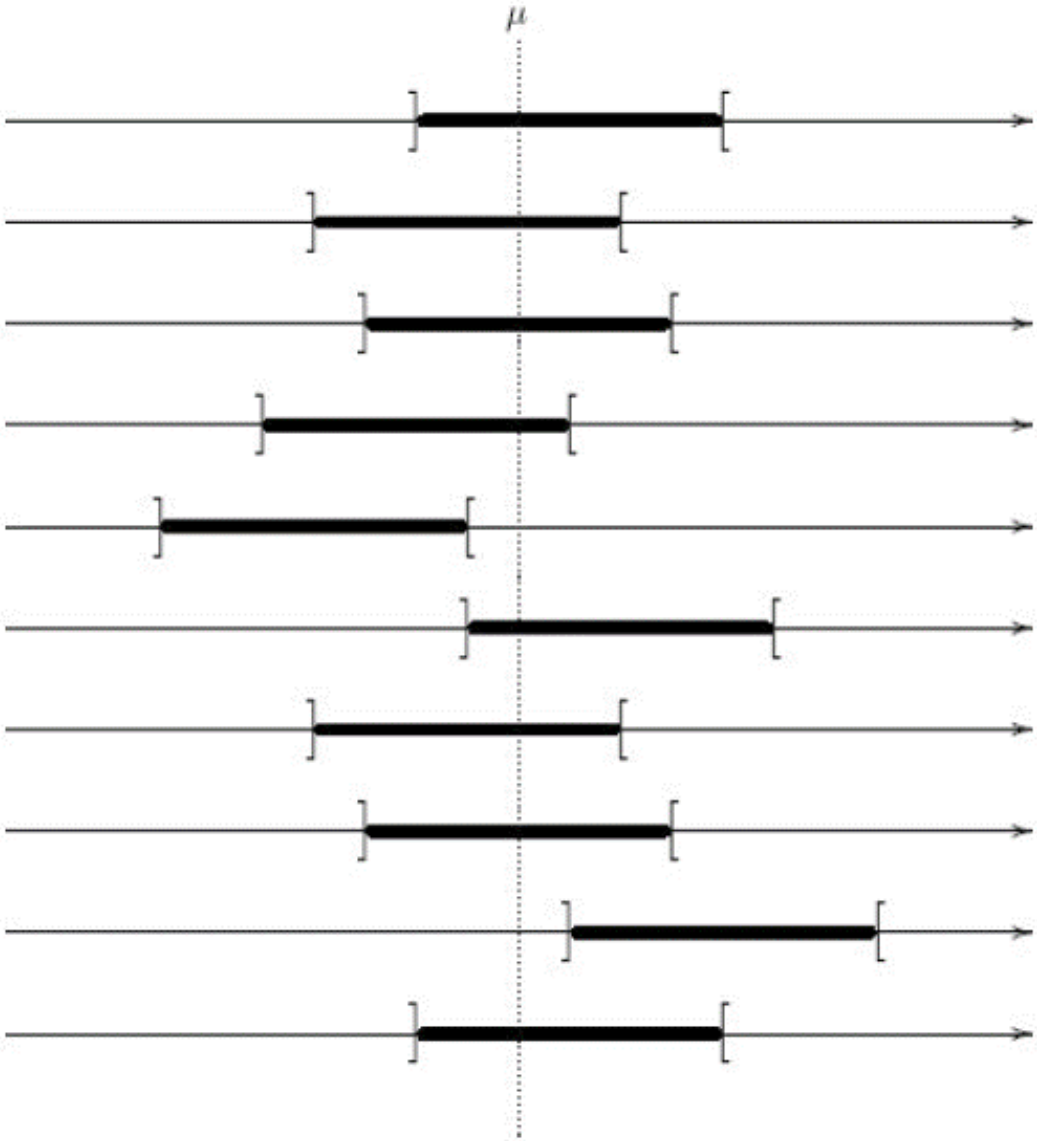
Intervalo Aleatório e Intervalo de Confiança

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com função densidade $f(x|\theta)$, e $\theta \in \Theta$. Considerem-se duas estatísticas $T_1 \equiv T_1(X_1, \ldots, X_n)$ e $T_2 \equiv T_2(X_1, \ldots, X_n)$ a verificar $T_1 < T_2$. Um intervalo aleatório para θ é um intervalo (T_1, T_2) tais que

$$P(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha, \ \forall \theta \in \Theta, \ \alpha \in (0, 1).$$

Quando se dispõe de uma amostra particular $x = (x_1, \ldots, x_n)$, sejam $t_1 = T_1(x)$ e $t_2 = T_2(x)$ os valores assumidos pelas estatísticas T_1 e T_2. Então, (t_1, t_2) chama-se intervalo de confiança a $(1-\alpha)*100\%$ para θ. O valor $1-\alpha$ traduz o grau de confiança do intervalo (t_1, t_2).

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA



DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Variável fulcral

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com função densidade $f(x|\theta)$. A função das observações e de θ, $Z(X_1, \ldots, X_n, \theta)$, diz-se uma variável fulcral se a respetiva função densidade f_Z é independente de θ.

Cálculo do intervalo de confiança

- Fixado o grau de confiança, procuram-se dois números a_α e b_α tais que $P(a_\alpha < Z < b_\alpha) = 1 - \alpha$. Uma vez que existe geralmente uma infinidade de pares de valores (a_α, b_α) nessas condições, a opção mais corrente consiste em escolher (a_α, b_α) tais que

$$P(Z < a_\alpha) = P(Z > b_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

- Inverter a dupla desigualdade $a_\alpha < Z < b_\alpha$ em ordem a θ

$$P(a_\alpha < Z < b_\alpha) = 1 - \alpha \rightarrow P(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha.$$

- Para $(x_1, \ldots, x_n)$, (t_1, t_2) é o IC a $(1 - \alpha) * 100\%$ para θ.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

IC para o valor esperado de uma população Normal com variância CONHECIDA

- **Variável fulcral:** $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$;
- $a_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2),\ b_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$;
- Inverter a dupla desigualdade $a_\alpha < Z < b_\alpha$ em ordem a μ

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1-\alpha \iff$$
$$P(\bar{X} - \Phi^{-1}(1-\alpha/2) * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \Phi^{-1}(1-\alpha/2) * \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$
$$= 1-\alpha.$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

IC para o valor esperado de uma população Normal com variância CONHECIDA

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)*100\%} = (\bar{x} - \Phi^{-1}(1-\alpha/2) * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \Phi^{-1}(1-\alpha/2) * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Uma brigada da GNR pediu ao gerente do bar onde trabalha o Rocha para colaborar numa campanha de sensibilização para o dever de não beber quando se vai conduzir. Assim, o Rocha foi encarregue de pedir aos clientes do bar para soprarem no balão à saída do bar. Ao fim de alguns dias o Rocha já tinha recolhido 101 observações sendo a média amostral $0.6 mg/l$. De acordo com as instruções da GNR, os valores da quantidade de álcool no sangue das pessoas são bem modelados por uma distribuição Normal de variância 0.04. Calcular um IC a 95% para a verdadeira taxa de alcoolemia dos clientes à saída do bar.

Resolução

Informação inicial: $n = 101,\ \bar{x} = 0.6,\ \sigma^2 = 0.04.$

Intervalo de confiança:
$IC(\mu)_{(1-0.05)*100\%} = (\bar{x} - \Phi^{-1}(1-0.05/2) * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \Phi^{-1}(1-0.05/2) * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$

Quantil: $\Phi^{-1}(1 - 0.05/2) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ (tabela 4)

ou `qnorm(0.975, 0,1)`

$$\begin{aligned} IC(\mu)_{(1-0.05)*100\%} &= (0.6 - 1.96 * \frac{\sqrt{0.04}}{\sqrt{101}}, 0.6 + 1.96 * \frac{\sqrt{0.04}}{\sqrt{101}}) \\ &= (0.5609, 0.6390). \end{aligned}$$

Exemplo

Considere uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de uma $N(\mu, 9)$. Um IC para μ é $(\bar{x} - \frac{5.88}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{5.88}{\sqrt{n}})$. Determine o grau de confiança do intervalo.

IC para o valor esperado de uma população Normal com variância DESCONHECIDA

- **Variável fulcral:** $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$;
- $a_\alpha = -F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1-\alpha/2),\ b_\alpha = -a_\alpha$;
- Inverter a dupla desigualdade $a_\alpha < Z < b_\alpha$ em ordem a μ

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)*100\%} =$$
$$(\bar{x} - F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1-\alpha/2) * \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1-\alpha/2) * \frac{s}{\sqrt{n}}).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercício

No exemplo anterior (bar do Rocha) seria mais realista **não** assumir um valor conhecido para a variância da distribuição pois, em geral, não é possível determinar com exatidão esse valor. Com base na amostra de valores recolhidos pelo Rocha a variância amostral corrigida foi de 0.06. Calcular o IC de confiança a 95% para a taxa média de alcoolemia.

Resolução

Informação inicial: $n = 101,\ \bar{x} = 0.6,\ s^2 = 0.06.$

Intervalo de confiança:

$$IC(\mu)_{(1-0.05)*100\%} = (\bar{x} - F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1 - 0.05/2) * \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1 - \alpha/2) * \frac{s}{\sqrt{n}}).$$

Quantil: $F^{-1}_{t_{(100)}}(0.975) = 1.984$ (tabela 5) ou `qt(0.975, 100)`

$$\begin{aligned} IC(\mu)_{(1-0.05)*100\%} &= (0.6 - 1.984 * \frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{101}}, 0.6 + 1.984 * \frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{101}}) \\ &= (0.5516, 0.6483). \end{aligned}$$

Exercício

De uma certa população observou-se uma amostra aleatória de dimensão $n = 151$, tendo-se obtido $\bar{x} = 75$ e $s = 10$. Construa intervalos de confiança aproximados de 95% e 99% para μ.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

IC para a variância de uma população Normal com média DESCONHECIDA

- **Variável fulcral:** $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$;
- $a_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha/2),\ b_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\alpha/2)$;
- Inverter a dupla desigualdade $a_\alpha < Z < b_\alpha$ em ordem a σ^2

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1-\alpha \iff$$
$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{b_\alpha} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a_\alpha}\right) = 1-\alpha.$$

$$IC(\sigma^2)_{(1-\alpha)*100\%} = \left(\frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha/2)}\right).$$

Exercício

Suponha-se que o tempo de vida em horas de certas componentes eletrónicas produzidas segundo determinado processo de fabrico tem distribuição Normal (μ, σ^2). Obtida uma amostra de 20 componentes, verificou-se a duração das mesmas, sendo $\bar{x} = 1832$ e $s = 479$. Determinar um IC a 95% para σ^2.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Resolução

Informação inicial: $n = 20$, $\bar{x} = 1832$, $s = 479$

Quantis: $F^{-1}_{\chi^2_{19}}(0.025) = 8.907$, $F^{-1}_{\chi^2_{19}}(0.975) = 32.85$ (tabela 6) ou

`qchisq(.025, 19)` e `qchisq(.975, 19)`

Intervalo de confiança:

$$\begin{aligned} IC(\sigma^2)_{(1-0.05)*100\%} &= \left(\frac{19 * 479^2}{32.85}, \frac{19 * 479^2}{8.907} \right) \\ &= (132705.6, 489432.9). \end{aligned}$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

IC aproximado para uma probabilidade

- $(X_1, \ldots, X_n)$ $X \sim Be(p)$;
- n grande $(n > 30)$;
- **Variável fulcral:** $Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \sim_{TLC} N(0,1)$;
- $a_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha/2)$, $b_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$;
- Inverter a dupla desigualdade $a_\alpha < Z < b_\alpha$ em ordem a p

$$IC(p)_{(1-\alpha)*100\%} = \left(\bar{x} - \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exercício

Um candidato a deputado por determinado círculo uninominal teve conhecimento de que, numa sondagem feita junto de $n = 350$ eleitores, houve 185 que declararam dar-lhe o seu voto. Determine um IC a 95% para a probabilidade p de uma pessoa escolhida ao acaso nesse círculo uninominal votar no candidato.

Hipótese estatística

Uma **hipótese estatística** é uma conjetura sobre uma característica da população.

Teste de hipóteses

Um **teste de hipóteses** é um procedimento estatístico que averigua se os dados sustentam uma hipótese.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Hipótese estatística

Uma **hipótese estatística** é uma conjetura sobre uma característica da população.

Teste de hipóteses

Um **teste de hipóteses** é um procedimento estatístico que averigua se os dados sustentam uma hipótese.

As hipóteses: Num teste de hipóteses há sempre duas hipóteses:

$$\text{Hipótese Nula} - H_0 \qquad vs \qquad \text{Hipótese alternativa} - H_1$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Tipos de hipótese e tipos de testes

- As várias hipóteses podem ser **simples** ou **compostas**. Uma hipótese simples apenas contempla uma possibilidade ($=$).
- Os testes podem ser **unilaterais** ou **bilaterais**. Nos testes unilaterais a hipótese alternativa apenas contempla possibilidades à direita ou à esquerda da hipótese nula.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exemplos de testes unilaterais

- Testes unilaterais à direita:

$$H_0 : \mu = 1 \ vs \ H_1 : \mu > 1$$
$$H_0 : \mu = 4 \ vs \ H_1 : \mu = 7$$

- Testes unilaterais à esquerda:

$$H_0 : \mu = 1 \ vs \ H_1 : \mu < 1$$
$$H_0 : \mu = 4 \ vs \ H_1 : \mu = 2$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Testes bilaterais

Nos testes **bilaterais** a hipóteses alternativa contempla valores à direita e à esquerda da hipotese nula.

Exemplo de testes bilateral

- Teste bilateral:

$$H_0 : \mu = 1 \ vs \ H_1 : \mu \neq 1$$

Estatística de teste

É uma estatística calculada a partir da amostra e que é usada para tomar a decisão acerca de rejeitar, ou não, a hipótese nula. Costuma-se representar por T.

Região de rejeição

A região de rejeição (ou região crítica , RC) é o conjunto de valores da estatística T que nos levam a rejeitar a hipótese nula.

Se o valor observado de T, (t_{obs}), pertencer à região crítica, rejeita-se H_0 a favor de H_1. Caso contrário não se rejeita H_0.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Inferência Estatística: Testes de Hipóteses

		Hipótese verdadeira H_0	Hipótese verdadeira H_1
Decisão do teste	Rejeito H_0	Erro de tipo I	$\surd$
	Não rejeito H_0	$\surd$	Erro de tipo II

$$P(\textbf{Erro de tipo I}) = \alpha \qquad P(\textbf{Erro de tipo II}) = \beta.$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Tamanho do teste ou Nível de significância:

$$\alpha = P(\text{Erro de tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeiro}).$$

Potência do teste:

$$1 - \beta = 1 - P(\text{Erro de tipo II}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_1 \text{ verdadeiro}).$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Importante

Procedimentos para a realização de um TH de tamanho $\alpha \in (0, 1)$.

Procedimento com base na região de rejeição

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar H_0 e H_1;
2. Escolher uma estatística de teste T, com distribuição conhecida (admitindo que H_0 é verdadeira);
3. Identificar a região de rejeição;
4. Calcular o t_{obs};
5. Se $t_{obs} \in$ RC então rejeita-se H_0. Caso contrário não se rejeita;
6. Concluir.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Teste para a média de uma distribuição Normal com variância CONHECIDA

1. **Definir** H_0 e H_1: $H_0 : \mu = \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu \ <, \neq, > \ \mu_0$
2. **Estatística de teste:**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

3. **Região de rejeição:**

Se $\mu \neq \mu_0$ então $RC = \{t_{obs} : |t_{obs}| > z_{1-\alpha/2}\}$;

Se $\mu < \mu_0$ então $RC = \{t_{obs} : t_{obs} < z_{\alpha}\}$;

Se $\mu > \mu_0$ então $RC = \{t_{obs} : t_{obs} > z_{1-\alpha}\}$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Teste para a média de uma distribuição Normal com variância DESCONHECIDA

1. **Definir** H_0 e H_1: $H_0 : \mu = \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu \ <, \neq, > \ \mu_0$
2. **Estatística de teste:**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} \underset{sob\ H_0}{\sim} t_{n-1}$$

3. **Região de rejeição:**

$$\text{Se } \mu \neq \mu_0 \text{ então } RC = \{t_{obs} : |t_{obs}| > t_{1-\alpha/2,n-1}\};$$
$$\text{Se } \mu < \mu_0 \text{ então } RC = \{t_{obs} : t_{obs} < t_{\alpha,n-1}\};$$
$$\text{Se } \mu > \mu_0 \text{ então } RC = \{t_{obs} : t_{obs} > t_{1-\alpha,n-1}\}.$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Um serviço adquiriu, para equipar as suas instalações, lâmpadas da marca A, aceitando a afirmação do fabricante de que a vida média das lâmpadas é 1650 horas. Numa experiência feita com 50 lâmpadas obteve-se $\bar{x} = 1575$ horas e $s_c = 120$ horas. Pode admitir-se correta a afirmação do fabricante, admitindo que os tempos de vida têm distribuição Normal?

1. Hipóteses: $H_0 : \mu = 1650$ *vs* $H_1 : \mu \neq 1650$
2. Estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} \underset{sob\ H_0}{\sim} t_{n-1}$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exemplo (cont)

1. Região de rejeição:

$$\begin{aligned} RC &= \{t_{obs} : |t_{obs}| > t_{1-\alpha/2,n-1}\} \\ &= \{t_{obs} : |t_{obs}| > t_{0.975,49}\} \\ &= \{t_{obs} : |t_{obs}| > 2.009\}. \end{aligned}$$

2. Valor observado da estatística de teste:

$$t_{obs} = \frac{1575 - 1650}{120/\sqrt{50}} = -4.41.$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Teste para a média numa população genérica, $n \geq 30$

1. **Definir** H_0 e H_1: $H_0 : \mu = \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu \ <, \neq, > \ \mu_0$
2. **Estatística de teste:**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{\text{sob } H_0}{\overset{\circ}{\sim}} N(0,1), \ \sigma^2 \text{ conhecida}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} \underset{\text{sob } H_0}{\overset{\circ}{\sim}} N(0,1), \ \sigma^2 \text{ desconhecida}$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Teste para a variância de uma distribuição Normal com média DESCONHECIDA

1. **Definir** H_0 e H_1: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *vs* $H_1 : \sigma^2 \ <, \neq, > \ \sigma_0^2$
2. **Estatística de teste:**

$$T = \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma_0^2} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$$

3. **Região de rejeição:** se $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ então

$$RC = \{t_{obs} : t_{obs} < \chi^2_{\alpha/2,n-1} \text{ ou } t_{obs} > \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\};$$

Se $\sigma^2 < \sigma_0^2$ então $RC = \{t_{obs} : t_{obs} < \chi^2_{\alpha,n-1}\}$;

Se $\sigma^2 > \sigma_0^2$ então $RC = \{t_{obs} : t_{obs} > \chi^2_{1-\alpha,n-1}\}$.

Exercício

O diâmetro interior das porcas feitas numa determinada fábrica é uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pretende-se testar

$$H_0 : \sigma^2 = 0.7 \text{ vs } H_1 : \sigma^2 > 0.7$$

Determine a região de rejeição a partir de uma amostra de dimensão 16. Considere $\alpha = 0.05$. Na amostra de 16 porcas obteve-se $s_c^2 = 0.96$. Qual a conclusão do teste com base nesta amostra?

Exercício

- Região de rejeição:

$$\begin{aligned} RC &= \{t_{obs} : t_{obs} > \chi^2_{1-\alpha,n-1}\} \\ &= \{t_{obs} : t_{obs} > \chi^2_{0.95,15}\} \\ &= \{t_{obs} : t_{obs} > 25.00\} \end{aligned}$$

- Valor observado da estatística de teste:

$$t_{obs} = \frac{15 * 0.96}{0.70} = 20.57.$$

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Teste para uma proporção

1. **Definir** H_0 e H_1: $H_0 : p = p_0$ *vs* $H_1 : p <, \neq, > p_0$
2. **Estatística de teste:**

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \underset{\text{sob } H_0}{\overset{\circ}{\sim}} N(0,1)$$

3. **Região de rejeição:**

Se $p \neq p_0$ então $RC = \{t_{obs} : |t_{obs}| > z_{1-\alpha/2}\}$;
Se $p < p_0$ então $RC = \{t_{obs} : t_{obs} < z_{\alpha}\}$;
Se $p > p_0$ então $RC = \{t_{obs} : t_{obs} > z_{1-\alpha}\}$.

Exemplo

Numa sondagem à opinião pública, em dado círculo eleitoral, foram inquiridas 1000 pessoas e houve 43% que se disseram favoráveis a determinado partido político. Rejeita-se a hipótese de este partido ter 50% das preferências naquele círculo?

$$H_0 : p = 0.5 \ vs \ H_1 : p \neq 0.5$$

1. Região de rejeição: $RC = \{t_{obs} : |t_{obs}| > z_{0.975} = 1.96\}$
2. Valor observado da estatística de teste:

$$t_{obs} = \frac{0.43 - 0.50}{\sqrt{0.5 \times 0.5/1000}} = -4.42$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Procedimento com base no *p-value*

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar H_0 e H_1;
2. Calcular o valor observado da estatística de teste;
3. Determinar o *p-value* do teste;

   O p-value do teste é a probabilidade de observar um valor da estatística de teste tanto ou mais afastado que o valor observado na amostra, assumindo que H_0 é verdadeira.

4. Rejeitar H_0 se $p\text{-value} \leq \alpha$. Não rejeitar H_0 se $p\text{-value} > \alpha$.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo do *p-value*

- Quando a RC é da forma $T > c$ o $p\text{-}value = P(T > t_{obs}|H_0)$;
- Quando a RC é da forma $T < c$ o $p\text{-}value = P(T < t_{obs}|H_0)$;
- Quando a RC é da forma $T < c_1$ ou $T > c_2$ (com igual probabilidade nos dois casos) o $p\text{-}value$ é igual a

$$\begin{cases} 2P(T < t_{obs}|H_0) \text{ se } t_{obs} \text{ for reduzido} \\ 2P(T > t_{obs}|H_0) \text{ se } t_{obs} \text{ for elevado} \end{cases};$$

- Dizer que t_{obs} é reduzido (elevado) significa dizer que a estimativa que se obtém para o parâmetro a testar é inferior (superior) ao valor especificado em H_0.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Na empresa onde o Rocha trabalha de dia, faz-se regularmente o controlo de qualidade dos medicamentos aí produzidos. Um desses medicamentos é constituído por cápsulas que devem ter $20mg$ de fluoxetina cada uma. Regularmente são retiradas amostras de $n = 100$ cápsulas com as quais se realiza o seguinte teste:

$$H_0 : \mu = 20 \ vs \ H_1 : \mu \neq 20,$$

onde μ representa a verdadeira média da quantidade de fluoxetina contida nas cápsulas. Suponhamos que uma certa amostra forneceu $\bar{x} = 20.04$ e $s_c = 0.2$. Para o nível de significância $\alpha = 0.001$ que podemos concluir?

Exemplo, cont

- **Procedimento com base na região de rejeição**

Neste caso a região de rejeição é do tipo:

$$RC = \{t_{obs} : |t_{obs}| > t_{0.9995,99} = 3.39\}.$$

Valor observado da estatística de teste:

$$t_{obs} = \frac{20.04 - 20}{0.2/\sqrt{100}} = 2.$$

Como t_{obs} não pertence à região crítica não se rejeita H_0.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo, cont

- **Procedimento com base no intervalo de confiança**

Um intervalo de confiança para μ a 99.9% é dado por

$$\begin{aligned} IC(\mu)_{99.9\%} &= (\bar{x} - t_{0.9995,99}\frac{s_c}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{0.9995,99}\frac{s_c}{\sqrt{n}}) \\ &= (20.04 - 3.39 \times \frac{0.2}{10}, 20.04 + 3.39 \times \frac{0.2}{10}) \\ &= (19.97, 20.11). \end{aligned}$$

Como $20 \in IC(\mu)_{99.9\%}$, não se rejeita H_0.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo, cont

- **Procedimento com base no** *p-value*

  Neste caso $\bar{x} = 20.04 > 20$, pelo que o *p-value* é

  $$2P(T > t_{obs}|H_0) = 2P(T > 2|H_0) = 0.048.$$

  Como este valor é superior ao $\alpha = 0.001$ não se rejeita H_0.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA