Conceitos Básicos de Probabilidade

Docente: Manuel G. Scotto

Departamento de Matemática
IST, ULisboa

"Os estudantes habituaram-se a que seja socialmente aceitável não gostar e ser mau a Matemática"

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Quase nove em cada dez portugueses têm um seguro

Em Portugal, mais de oito em cada dez portugueses possuem pelo menos um seguro, segundo os

Quase nove em cada dez portugueses têm um seguro

Em Portugal, mais de oito em cada dez portugueses possuem pelo menos um seguro, segundo os

Cada português consumiu 3,3Kg de açúcar só em 2018

São 60 litros de refrigerante por pessoa, um valor que diminuiu desde a aplicação do imposto especial sobre estas bebidas.

Quem vive em Oeiras ganha mais 4000 euros que no resto do país

Dados divulgados esta quarta-feira pelo Instituto Nacional de Estatística revelam que o rendimento mediano dos portugueses foi de 8687 euros em 2017.

Média e Mediana

- A **média aritmética** é um conceito que geralmente oferece poucas dúvidas.
- O conceito de **mediana**, no entanto, gera muitas confusões.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

EXAMES NACIONAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO 2021

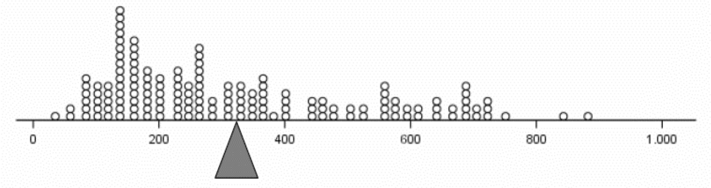
Resultados de Exames da 1ª Fase, por disciplina

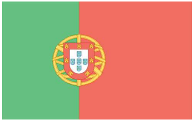
Data/hora		*Código e designação do exame*		*Inscrições*	*Provas*	*Faltas*		*Média do Exame*
02/07	09:30	**138**	**Português Língua Segunda**	27	27	0	0%	**119**
02/07	09:30	**639**	**Português**	41374	34318	7056	17%	**120**
02/07	09:30	**839**	**Português Língua Não Materna**	9	9	0	0%	**157**
05/07	09:30	**547**	**Espanhol (iniciação)**	1251	972	279	22%	**139**
05/07	09:30	**847**	**Espanhol (continuação)**	274	238	36	13%	**135**
05/07	14:00	**708**	**Geometria Descritiva A**	6827	5471	1356	20%	**124**
06/07	09:30	**714**	**Filosofia**	9907	7206	2701	27%	**122**
06/07	14:00	**517**	**Francês**	403	332	71	18%	**149**
07/07	09:30	**623**	**História A**	9538	6871	2667	28%	**129**
07/07	09:30	**723**	**História B**	487	314	173	36%	**116**
07/07	14:00	**724**	**História da Cultura e das Artes**	4153	3189	964	23%	**126**
08/07	09:30	**715**	**Física e Química A**	38782	32802	5980	15%	**98**
08/07	14:00	**732**	**Latim A**	11	10	1	9%	**136**
09/07	09:30	**712**	**Economia A**	13376	11524	1852	14%	**122**
09/07	14:00	**501**	**Alemão**	288	226	62	22%	**158**
12/07	09:30	**550**	**Inglês**	9290	7293	1997	21%	**149**
13/07	09:30	**635**	**Matemática A**	39679	34124	5555	14%	**106**

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Média

- A **média** pode ser pensada como o **centro de massa** dos valores das observações, ou seja, o **ponto de equilíbrio** após dispormos as observações sobre uma régua.
- Pontos afastados ou erros nas observações podem afastar a média do grosso das observações!!!



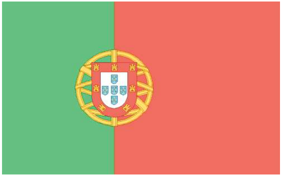


$0 - 0$

$7 - 0$

$0 - 0$

$0 - 1$



Golos	A favor	Contra
Média	1.75	0.25
Mediana	0	0
Moda	0	0

Definição de Estatística

A **Estatística** é a ciência que se ocupa da obtenção de informação, seu tratamento inicial, com a finalidade de, através de resultados probabilísticos adequados, inferir de uma amostra para a população, e eventualmente prever a evolução futura de um fenómeno.

Definição de Estatística

A **Estatística** é a ciência que se ocupa da obtenção de informação, seu tratamento inicial, com a finalidade de, através de resultados probabilísticos adequados, inferir de uma amostra para a população, e eventualmente prever a evolução futura de um fenómeno.

Definição de Estatística

Por outras palavras, é um instrumento de leitura da informação e da sua transformação em Conhecimento.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Importante

Para aprender Estatística é necessário:

Importante

Para aprender Estatística é necessário:

- **estudar**;

Importante

Para aprender Estatística é necessário:

- **estudar**;
- **estudar**;

Importante

Para aprender Estatística é necessário:

- **estudar**;
- **estudar**;
- **compreender e não decorar!**

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Importante

Um dos propósitos da Estatística é o de **estudar caraterísticas de determinada população a partir da observação de uma amostra**. Tratando-se de uma inferência indutiva, não é possível extrair conclusões sem que a estas esteja associado um determinado *grau de incerteza*.

Importante

Experiência Aleatória

Diz-se que uma experiência é **aleatória** se apresentar as seguintes caraterísticas:

- O conjunto dos resultados possíveis é conhecido antecipadamente;
- O resultado da experiência nunca pode ser previsto de forma exata.

Experiências Aleatórias

- Lançamento de uma moeda e observação do lado que fica para cima.
- Lançamento de um dado e registo do número de pontos obtido.
- Tiragem de uma carta de um baralho e anotação do naipe.
- Observação da taxa de inflação em anos sucessivos.
- Número de clientes a um balcão num determinado instante.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Espaço de Resultados

Denomina-se espaço de resultados, e representa-se por Ω, o conjunto formado por **todos os resultados** que é possível obter quando se efetua determinada experiência aleatória. Os resultados individuais, pontos ou elementos de Ω, são representados por ω.

DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Espaço de Resultados

Denomina-se espaço de resultados, e representa-se por Ω, o conjunto formado por **todos os resultados** que é possível obter quando se efetua determinada experiência aleatória. Os resultados individuais, pontos ou elementos de Ω, são representados por ω.

Tendo em conta a natureza de Ω, os espaços de resultados podem classificar-se do seguinte modo: **discretos** (finito ou infinitos numeráveis); **contínuos** (infinito não numerável).

Acontecimento

Chama-se acontecimento a qualquer subconjunto do espaço Ω.

Ao efetuar a experiência aleatória associada com Ω, diz-se que o acontecimento $A \subset \Omega$ se realiza, se o resultado da experiência é um ponto que pertence a $A : \omega \in A$.

Acontecimento

Chama-se acontecimento a qualquer subconjunto do espaço Ω.

Ao efetuar a experiência aleatória associada com Ω, diz-se que o acontecimento $A \subset \Omega$ se realiza, se o resultado da experiência é um ponto que pertence a $A : \omega \in A$.

Acontecimento Complementar

Se A for um acontecimento, $A^c = \Omega \backslash A$ é o seu complementar.

Acontecimento

Chama-se acontecimento a qualquer subconjunto do espaço Ω.

Ao efetuar a experiência aleatória associada com Ω, diz-se que o acontecimento $A \subset \Omega$ se realiza, se o resultado da experiência é um ponto que pertence a $A : \omega \in A$.

Acontecimento Complementar

Se A for um acontecimento, $A^c = \Omega \backslash A$ é o seu complementar.

Acontecimentos Mutuamente Exclusivos

Chama-se acontecimentos mutuamente exclusivos aos acontecimentos cuja interseção é o $\emptyset$.

Importante: Medida de Probabilidade (Axiomática de Kolmogorov)

- $P(\Omega) = 1$;
- $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$;
- Se $P(A_1 \cap A_2) = 0$ (Acontecimentos mutuamente exclusivos)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

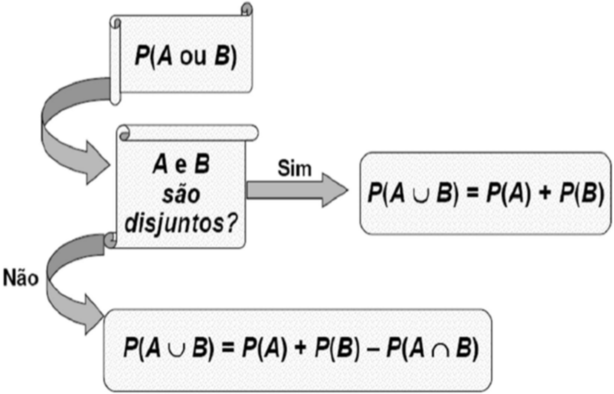
Mais genericamente, se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ forem acontecimentos em número infinito numerável e mutuamente exclusivos,

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Propriedades

- $P(A) \in [0, 1]$;
- $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- $P(\emptyset) = 0$;
- Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

REUNIÃO DE ACONTECIMENTOS



DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Interpretação do conceito de probabilidade

- **Interpretação clássica**: número finito de resultados possíveis, mutuamente exclusivos, obedecendo ao princípio de simetria (todos os resultados igualmente possíveis).

$$P(A) = \frac{\sharp A}{\sharp \Omega}.$$

Conceitos Básicos de Probabilidade

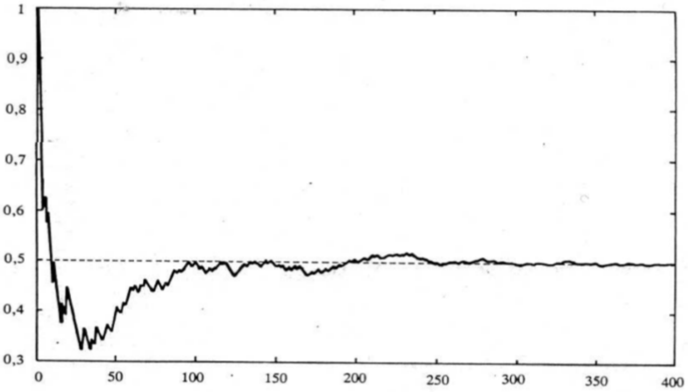
Interpretação do conceito de probabilidade

- **Interpretação clássica**: número finito de resultados possíveis, mutuamente exclusivos, obedecendo ao princípio de simetria (todos os resultados igualmente possíveis).

$$P(A) = \frac{\sharp A}{\sharp \Omega}.$$

- **Interpretação frequencista**: a probabilidade de um acontecimento pode ser avaliada, ou estimada, observado a frequência relativa do mesmo acontecimento numa sucessão numerosa de provas ou experiências idénticas e independentes.

Estabilização das frequências relativas no lançamento sucessivo de uma moeda ao ar



Exemplo

Em determinada população, 9.8% das pessoas adquirem a revista Caras, 22.9% a revista Lux e 5.1% ambas as revistas. Admite-se que a medida de probabilidade é a proporção dos indivíduos da população que adquirem as revistas. Sejam os acontecimentos

- $A = \{\text{adquirir a revista Caras}\}$;
- $B = \{\text{adquirir a revista Lux}\}$.

Exemplo

Qual a probabilidade de adquirir somente a revista Caras?

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Qual a probabilidade de adquirir somente a revista Caras?

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.098 - 0.051.$$

Exemplo

Qual a probabilidade de adquirir somente a revista Caras?

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.098 - 0.051.$$

Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso adquirir pelo menos uma das revistas?

Exemplo

Qual a probabilidade de adquirir somente a revista Caras?

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.098 - 0.051.$$

Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso adquirir pelo menos uma das revistas?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.276.$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Qual a probabilidade de adquirir somente a revista Caras?

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.098 - 0.051.$$

Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso adquirir pelo menos uma das revistas?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.276.$$

Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não adquirir nem a revista Caras nem a revista Lux?

Exemplo

Qual a probabilidade de adquirir somente a revista Caras?

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.098 - 0.051.$$

Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso adquirir pelo menos uma das revistas?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.276.$$

Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não adquirir nem a revista Caras nem a revista Lux?

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.276 = 0.724.$$

POLVO PAUL

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidade condicionada

A probabilidade de um acontecimento A **condicionada** à ocorrência de um acontecimento B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Probabilidade condicionada

A probabilidade de um acontecimento A **condicionada** à ocorrência de um acontecimento B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Relações úteis

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$;
- $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$;
- $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Num inquérito sociológico respeitante à importância atribuída à língua portuguesa dada pelos alunos (AL), pais (PA), professores (PR) e trabalhadores (TR), os resultados foram os seguintes:

	MPI	PI	I	MI
AL	57	269	1253	1278
PA	6	38	254	297
PR	3	33	214	330
TR	4	7	204	268

$A = \{$a pessoa selecionada ser um aluno$\}$ e $B = \{$a pessoa selecionada responder I$\}$.

Exemplo

- $P(A) = \frac{57+269+1253+1278}{4515} = 0.63;$
- $P(B) = \frac{1253+254+214+204}{4515} = 0.42;$
- $P(A \cap B) = \frac{1253}{4515} = 0.27.$

Admitamos que só estamos interessados em analisar as respostas dos alunos. Dispondo desta informação, qual é a probabilidade de que a resposta de um aluno, escolhido ao acaso, seja I?

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo

- $P(A) = \frac{57+269+1253+1278}{4515} = 0.63;$
- $P(B) = \frac{1253+254+214+204}{4515} = 0.42;$
- $P(A \cap B) = \frac{1253}{4515} = 0.27.$

Admitamos que só estamos interessados em analisar as respostas dos alunos. Dispondo desta informação, qual é a probabilidade de que a resposta de um aluno, escolhido ao acaso, seja I?

$$P(B|A) = \frac{1253}{2857} = 0.43.$$

Conceitos Básicos de Probabilidade

American Automobile Association Foundation for Traffic Safety

"1.5% dos condutores que tiveram um acidente de viação falavam ao telemóvel"

Exemplo: vão bater a outra porta!

- Num concurso televisivo o concorrente tem direito a escolher uma porta de entre três: A, B e C.
- Depois de ele escolher, o apresentador acaba por abrir uma outra porta.
- O concorrente deve **persistir** na sua escolha o deve **mudar** para a porta que não tinha escolhido?

Conceitos Básicos de Probabilidade

"A report from the London Assembly has revealed there is now one public lavatory for nearly 18000 residents in London. Even worse, for the 28 million visitors to London, there is one public toilet for every 67000."

Probabilidade total

Seja A um acontecimento em Ω e $B_1, \ldots, B_n$ uma partição desse espaço, ou seja

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega,$$

com $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Então

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Exemplo

O João vai passar as férias a Madrid e tenciona, nessa altura, visitar o museu Reina Sofia. Se for no inicio de agosto para Madrid, o que acontece com probabilidade 0.20, então atribui uma probabilidade de 0.15 de não visitar o museu Reina Sofia. Caso não vá no inicio de agosto então atribui uma probabilidade de 0.7 de visitar aquele museu. A probabilidade do João não visitar o museu é?

Exemplo

O João vai passar as férias a Madrid e tenciona, nessa altura, visitar o museu Reina Sofia. Se for no inicio de agosto para Madrid, o que acontece com probabilidade 0.20, então atribui uma probabilidade de 0.15 de não visitar o museu Reina Sofia. Caso não vá no inicio de agosto então atribui uma probabilidade de 0.7 de visitar aquele museu. A probabilidade do João não visitar o museu é?

- $A =${O João vai no inicio de agosto};
- $B =${O João visita o museu Reina Sofia}.

Exemplo (cont)

- $P(A) = 0.20$
- $P(B^c|A) = 0.15 \Rightarrow P(B|A) = 0.85$
- $P(B|A^c) = 0.70 \Rightarrow P(B^c|A^c) = 0.30$

Probabilidade do João não visitar o museu:

$$\begin{aligned}
P(B^c) &= P(B^c \cap A) + P(B^c \cap A^c) \\
&= P(B^c|A)P(A) + P(B^c|A^c)P(A^c) \\
&= 0.15 \times 0.20 + 0.30 \times 0.80 \\
&= 0.27.
\end{aligned}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo

Um aluno tem um despertador que toca na hora pretendida com probabilidade 0.70. **Se tocar**, a probabilidade do aluno acordar é 0.80. **Se não tocar**, a probabilidade do aluno acordar a tempo de ir às aulas é 0.30. Qual a probabilidade do aluno chegar a hora à aula?

Exemplo

Um aluno tem um despertador que toca na hora pretendida com probabilidade 0.70. **Se tocar**, a probabilidade do aluno acordar é 0.80. **Se não tocar**, a probabilidade do aluno acordar a tempo de ir às aulas é 0.30. Qual a probabilidade do aluno chegar a hora à aula?

- $A =${O aluno chega a horas à aula};
- $B =${O aluno acorda};
- $C =${O despertador toca na hora pretendida}.

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Exemplo (cont)

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(C \cap B) + P(C^c \cap B) \\
&= P(B|C)P(C) + P(B|C^c)P(C^c) \\
&= 0.80 \times 0.70 + 0.30 \times 0.30 \\
&= 0.65.
\end{aligned}
$$

Teorema de Bayes

Sejam A e B dois acontecimento em Ω. Então

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}.$$

Genericamente, seja $A \subset \Omega$ e $B_1, \ldots, B_n$ uma partição desse espaço, ou seja

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega,$$

com $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Exemplo

Suponha um teste de escolha múltipla com 5 respostas possíveis para cada questão. O aluno sabe a resposta com probabilidade $1/3$. Sabendo a resposta, responde corretamente com probabilidade 0.99; não sabendo, responde corretamente com probabilidade $1/5$. Determine a probabilidade de o aluno saber a resposta à pergunta dado que respondeu corretamente.

Exemplo

Suponha um teste de escolha múltipla com 5 respostas possíveis para cada questão. O aluno sabe a resposta com probabilidade $1/3$. Sabendo a resposta, responde corretamente com probabilidade 0.99; não sabendo, responde corretamente com probabilidade $1/5$. Determine a probabilidade de o aluno saber a resposta à pergunta dado que respondeu corretamente.

- $S =$ {O aluno sabe a resposta};
- $R =$ {O aluno responde corretamente}.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
P(S|R) &= \frac{P(S \cap R)}{P(R)} \\
&= \frac{P(R|S)P(S)}{P(R|S)P(S) + P(R|S^c)P(S^c)} \\
&= \frac{0.99 \times 1/3}{0.99 \times 1/3 + 1/5 \times 2/3} \\
&= 0.71.
\end{aligned}
$$

Acontecimentos independentes

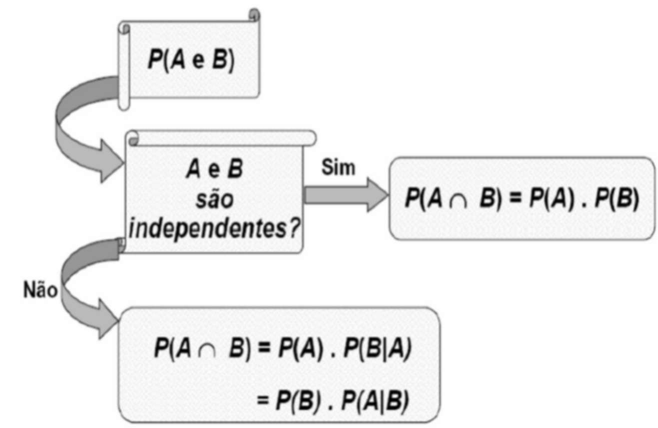
Dois acontecimentos são independentes **se e só se**

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \\ &\Leftrightarrow P(B|A) = P(B). \end{aligned}$$

De uma forma geral, os acontecimentos $A_1, \ldots, A_n$ são independentes **se e só se**

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES



Exercício

Numa certa família com três filhos, duas raparigas e um rapaz fazem turnos para lavar a louça. Com o tempo constatou-se que a probabilidade do rapaz partir a louça é duas vezes maior que a da irmã mais nova e esta é duas vezes maior que a da irmã mais velha. Qual a probabilidade de cada um dos filhos partir a louça, sabendo que é certo que alguma louça acaba por se partir?

Exercício

Sejam E, F e G acontecimentos de um mesmo espaço amostral e tais que $P(E) = 0.90$, $P(F) = 0.80$, $P(E \cup G) = 0.95$.

- Poderão E e F ser mutuamente exclusivos?
- Calcule $P(G)$, sendo E e G independentes.

Exercício

Sejam A e B acontecimentos do mesmo espaço amostral tais que $P(A) + P(B) = p$ e $P(A \cap B) = q$. Determine em função de p e q a probabilidade de que:

- não se realize nenhum dos acontecimentos;
- se realize um e só um dos acontecimentos;
- se realize pelo menos um dos acontecimentos;
- se realize quanto muito um dos acontecimentos.