Козунов Алексей, 12 группа, вариант 10

Лабораторная работа 2

Задание 1

$$10)\ \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, f(x)\, dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3);$$

Алгоритм взят со ссылки на edufpmi, в учебных материалах, ссылка на сам алгоритм: https://www.youtube.com/watch?v=yrSXEy66uEo

$$10)\ \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, f(x)\, dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

$$A_i = \int_a^b \rho(x)\, \Delta_i(x)\, dx$$

базисная функция Лагранжа

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij}\psi_j(x)$$

$$a_{ij} = \frac{(\varphi_i, \psi_j)}{(\psi_j, \psi_j)}$$

$$\varphi_0 = x^i \qquad \psi_0 = \varphi_0 = 1$$

$$i=1,\quad \varphi_1(x) = x,\quad \psi_1(x) = \varphi_1(x) - a_{10}\psi_0(x),\quad \rho(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$a_{10} = \frac{(\varphi_1, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} = \frac{\int_0^1 \rho(x)\cdot x \cdot 1\, dx}{\int_0^1 \rho(x)\cdot 1 \cdot 1\, dx} = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Узлами являются корни ортогонального многочлена на $[a,b]$. Для нахождения многочлена воспользуемся процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

$$\psi_1(x) = x - \frac{1}{4}$$

$$i=2,\quad \varphi_2(x) = x^2,\quad \psi_2(x) = \varphi_2(x) - a_{20}\psi_0(x) - a_{21}\psi_1(x)$$

$$a_{21} = \frac{(\varphi_2, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)} = \frac{\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) x^2 \left(x - \frac{1}{4}\right) dx}{\int_0^1 \rho(x)\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx} = \frac{3\pi}{128}\cdot\frac{32}{\pi} = \frac{3}{4}$$

$$a_{20} = \frac{(\varphi_2, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} = \frac{\int_0^1 \rho(x)\, x^2 \cdot 1\, dx}{\int_0^1 \rho(x)\, 1 \cdot 1\, dx} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{8}$$

$$\psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right) = x^2 + \frac{1}{16} - \frac{3}{4}x.$$

$$i=3,\quad \varphi_3(x) = x^3,\quad \psi_3(x) = \varphi_3(x) - a_{30}\psi_0(x) - a_{31}\psi_1(x) - a_{32}\psi_2(x)$$

$$a_{32} = \frac{(\varphi_3, \psi_2)}{(\psi_2, \psi_2)} = \frac{\int_0^1 \rho(x)\, x^3 \left(x^2 + \frac{1}{16} - \frac{3}{4}x\right) dx}{\int_0^1 \rho(x) \left(x^2 + \frac{1}{16} - \frac{3}{4}x\right)^2 dx} = \frac{5\pi}{2048}\cdot\frac{512}{\pi} = \frac{5}{4}$$

$$a_{31} = \frac{(\varphi_3, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)} = \frac{\int_0^1 \rho(x)\, x^3 \psi_1(x)\, dx}{\int_0^1 \rho(x)\, \psi_1^2(x)\, dx} = \frac{9\pi}{512}\cdot\frac{32}{\pi} = \frac{9}{16}$$

Козунов Алексей, 12 группа, вариант 10

$$a_{30}=\frac{(\varphi_3,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}=\frac{\int_0^1 x^3\rho(x)\cdot 1\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\cdot 1\cdot 1\,dx}=\frac{5\pi}{128}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{5}{64}$$

$$\psi_3=x^3-\frac{5}{64}-\frac{9}{16}\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{4}\left(x^2+\frac{1}{16}-\frac{3}{4}x\right)=x^3-\frac{5x^2}{4}+\frac{3x}{8}-\frac{1}{64}$$

$$i=4,\quad \varphi_4(x)=x^4,\quad \psi_4(x)=\varphi_4(x)-a_{40}\psi_0(x)-a_{41}\psi_1(x)-a_{42}\psi_2(x)-a_{43}\psi_3(x)$$

$$a_{43}=\frac{(\varphi_4,\psi_3)}{(\psi_3,\psi_3)}=\frac{\int_0^1 \rho(x)x^4\left(x^3-\frac{5x^2}{4}+\frac{3x}{8}-\frac{1}{64}\right)dx}{\int_0^1 \rho(x)\left(x^3-\frac{5x^2}{4}+\frac{3x}{8}-\frac{1}{64}\right)^2dx}=\frac{7\pi}{32768}\cdot\frac{8192}{\pi}=\frac{7}{4}$$

$$a_{42}=\frac{(\varphi_4,\psi_2)}{(\psi_2,\psi_2)}=\frac{\int_0^1 \rho(x)x^4\psi_2(x)\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\psi_2^2(x)\,dx}=\frac{5\pi}{2048}\cdot\frac{512}{\pi}=\frac{5}{4}$$

$$a_{41}=\frac{(\varphi_4,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}=\frac{\int_0^1 \rho(x)x^4\psi_1(x)\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\psi_1^2(x)\,dx}=\frac{7\pi}{512}\cdot\frac{32}{\pi}=\frac{7}{16}$$

$$a_{40}=\frac{(\varphi_4,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}=\frac{\int_0^1 \rho(x)x^4\cdot 1\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\cdot 1\cdot 1\,dx}=\frac{7\pi}{256}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{7}{128}$$

$$\psi_4(x)=x^4-\frac{7}{128}-\frac{7}{16}\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{4}\left(x^2+\frac{1}{16}-\frac{3}{4}x\right)-\frac{7}{4}\left(x^3-\frac{5x^2}{4}+\frac{3x}{8}-\frac{1}{64}\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$x_0=0{,}25$; $x_1=0{,}030154$; $x_2=0{,}58682$; $x_3=0{,}88302$.

$$A_0=\int_0^1 \rho(x)\Lambda_0(x)\,dx=\left[\Lambda_0=\prod_{i\neq 0}\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right]=$$

$$=\int_0^1 \rho(x)\cdot\frac{(x^3-1{,}45999x^2+0{,}562495x-0{,}015625)}{0{,}4687}=0{,}5236078664$$

$$A_1 = \int_0^1 \rho(x)\, \Lambda_1(x)\, dx = \left[\Lambda_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right] =$$

$$= \int_0^1 \rho(x) \cdot \frac{(x^3 - 1{,}71984x^2 + 0{,}885634x - 0{,}129543)}{-0{,}1043741} = 0{,}6770749 1458$$

$$A_2 = \int_0^1 \rho(x) \cdot \frac{(x^3 - 1{,}16317x^2 + 0{,}25492x - 0{,}00665665)}{-0{,}0555363 8691} = 0{,}288437921326$$

$$A_3 = \int_0^1 \rho(x) \cdot \frac{(x^3 - 0{,}866974x^2 + 0{,}171938x - 0{,}00442374)}{0{,}159912821 4} = 0{,}0816669 4733$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, f(x)\, dx \approx 0{,}5236078664 \cdot f(0{,}25) + 0{,}67707491458 \cdot f(0{,}030154) +$$

$$+ 0{,}288437921326 \cdot f(0{,}58682) + 0{,}08166694733 \cdot f(0{,}88302)$$

Проверка при $f(x) = \sin(x)$:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, \sin(x)\, dx = 0{,}372775$$

построенная квадратурная формула $= 0{,}372769$

Погрешность (В связи с тем, что я взял не точные значения x):

0,372775 – 0,372769 = 0,000006

Козунов Алексей, 12 группа, вариант 10

АСТ $I(x^i) \approx Q(x^i)$, $i=0,1,\dots$

1) $i=0$

$$I(1) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$Q(1) \approx \frac{\pi}{2}$

2) $i=1$

$$I(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, x\, dx = \frac{\pi}{8}$$

$Q(x) \approx \frac{\pi}{8}$

3) $i=2$

$$I(x^2) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, x^2\, dx = \frac{\pi}{16}$$

$Q(x^2) \approx \frac{\pi}{16}$

4) $i=3$

$$I(x^3) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, x^3\, dx = \frac{5\pi}{128}$$

$Q(x^3) \approx \frac{5\pi}{128}$

5) $i=4$

$$I(x^4) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, x^4\, dx = \frac{7\pi}{256}$$

$Q(x^4) \approx \frac{7\pi}{256}$

Козунов Алексей, 12 группа, вариант 10

6) $i=5$

$$I(x^5)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,x^5\,dx=\frac{21\pi}{1024}$$

$$Q(x^5)\simeq\frac{66}{1024}$$

7) $i=6$

$$I(x^6)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,x^6\,dx=\frac{33\pi}{2048}$$

$$Q(x^6)\simeq\frac{33\pi}{2048}$$

8) $i=7$.

$$I(x^7)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,x^7\,dx=0,0411299$$

$$Q(x^7)=0,0411249$$

~~9) $i=8$~~

$$\cancel{I(x^8)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,x^8\,dx=0,0142}$$

$$\cancel{Q(x^8)=0,0142.}$$

~~10) $i=8$~~

9) при $i=8$

$$I(x^8)=0,05427.$$

$$Q(x^8)=0,05465\ \neq.$$

$ACT=7.$

ACT = 7, вообще в связи с тем, что при вычислении моей квадратурной формулы я взял не точные значения x, вычислять ACT было не совсем корректно, но остановка произошла при сильном отклонении от результата. Так же она совпадает с ACT<=2n-1. Я пробовал пересчитывать квадратурную формулу, но результат оставался прежним. Поэтому оставил ACT = 7, а порядок поэтому будет равен 8, так как он равен ACT+1 в большинстве случаев.

Козунов Алексей, 12 группа, вариант 10

Главный член погрешности:

$$R[f] = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b \rho(x)\,\omega^2(x)\,dx$$

$$R(f) = \frac{1}{8!} f^{(8)}(\xi) \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\big((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\big)^2 dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\big((x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\big)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \left(x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}\right)^2 dx = \frac{107\pi}{65536}$$

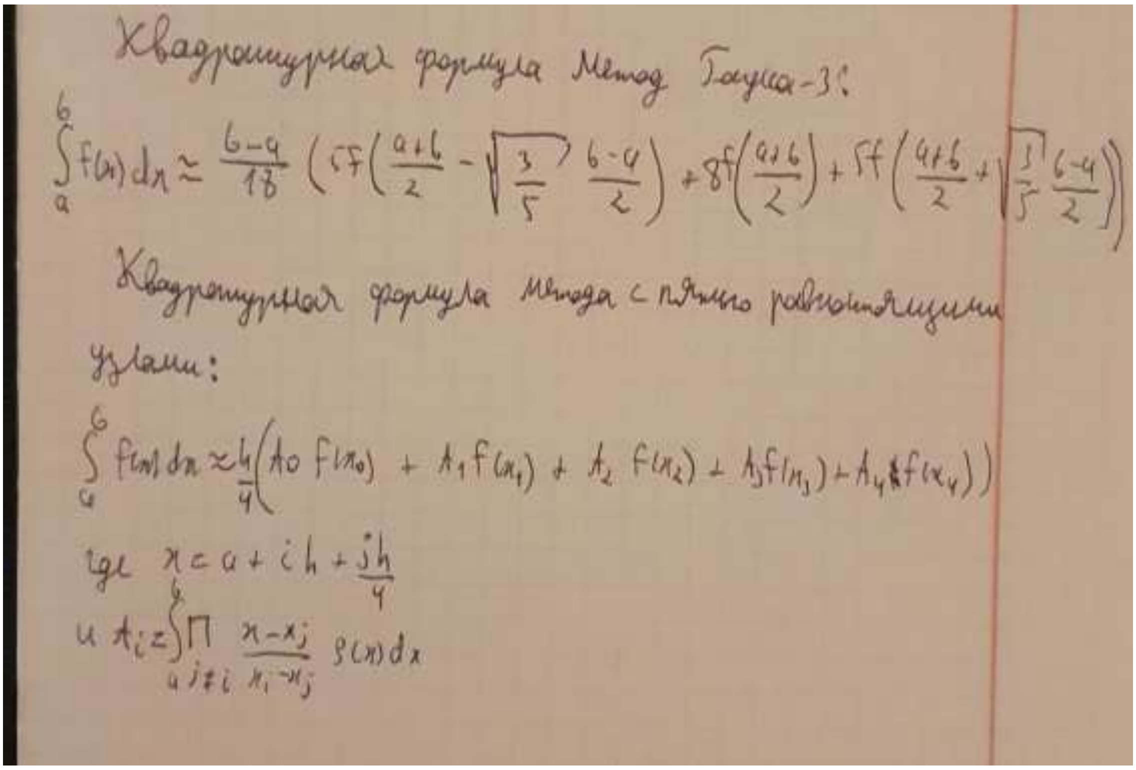
$$R(f) = \frac{107\pi}{65536 \cdot 8!} f^{(8)}(\xi)$$

Главный член погрешности.

Козунов Алексей, 12 группа, вариант 10

Задание 2

$$10)\ I = \int_{-2}^{2} \left(1 + e^{-x^2} \sin 7x\right) dx\,;$$


Квадратурная формула Метод Гаусса-3:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{18}\left(5f\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}\right)+8f\left(\frac{a+b}{2}\right)+5f\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}\right)\right)$$

Квадратурная формула метода с пятью равноотстоящими узлами:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{4}\left(A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + A_4 f(x_4)\right)$$

где $x = a + ih + \frac{jh}{4}$

и $A_i = \int_a^b \prod_{j \ne i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} g(x)dx$

А считается с x = [-2, -1, 0, 1, 2], для моего случая.

1)

Точное значение

4.0

Метод по 5 узлам

для i = 0

Время

0.0 с

Ответ: 4.0

Погрешность

0.0

для i = 1

Время

0.0110034 с

Ответ: 3.9998160646699468

Погрешность

0.00018393533005323093

для i = 2

Время

11.5422305 с

Ответ: 3.999994136330081

Погрешность

5.863669918948489e-06

Метод Гаусса-3

для i = 0

Время

0.0 с

Ответ: 4.0

Погрешность

0.0

для i = 1

Время

0.0060164 с

Ответ: 4.000000000000007

Погрешность

-7.105427357601002e-15

для i = 2

Время

6.8322039 с

Ответ: 4.000000000000088

Погрешность

-8.79296635503124e-14

Вывод: исходя из полученного результата видно, что в моем варианте метод Гаусса-3 показал лучший результат и по времени работы, и по точности вычисления, мое предположение это потому, что в нем мы учитываем помимо двух крайних точек еще и среднюю, и это работает лучше, чем 5 равномерно расставленных узлов. Так же я заметил, что увеличение узлов дает менее точный результат в методе Гаусса-3, и что если брать шаг равный отрезку, то считается без погрешности и я немного не уверен почему так происходит.

2)

Точное значение

4.0

Метод по 5 узлам с выбором шага

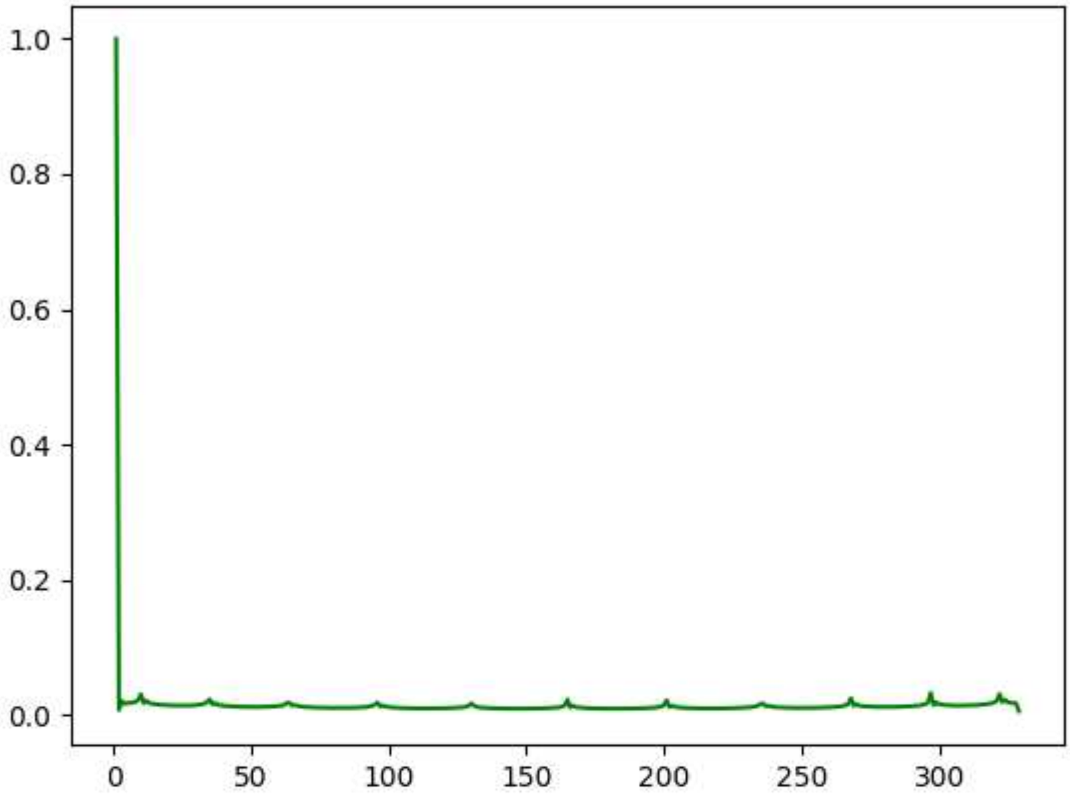
Время

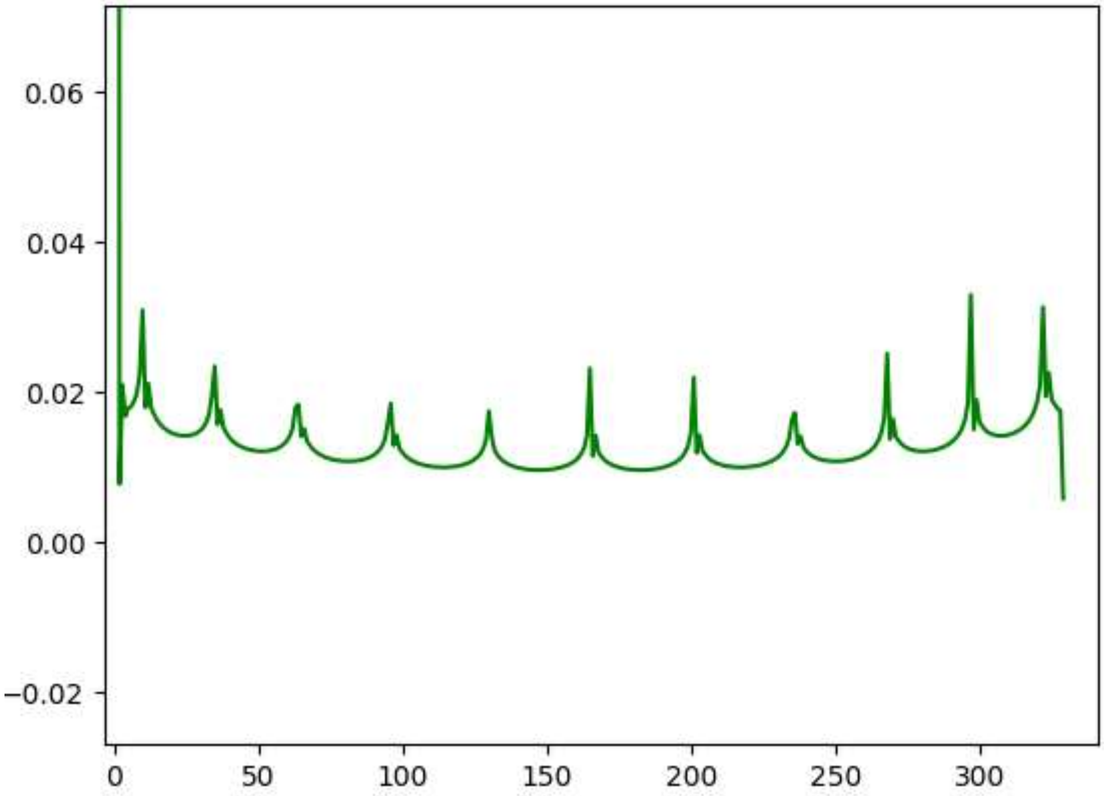
0.0159583 с

Ответ: 4.000000000000002

Погрешность

-1.7763568394002505e-15





Исходя из графика изменения шага, можно увидеть, что шаг изменяется волнообразно, каждый пик увеличения находиться примерно на равном расстоянии от соседних и они очень похоже друг на друга.

Метод Гаусса-3 с выбором шага

Время

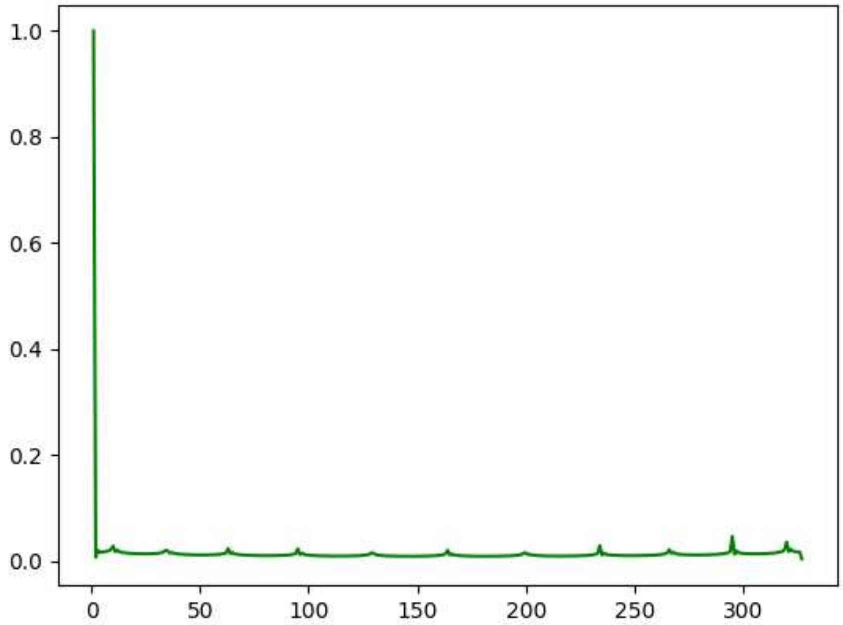
0.0199463 с

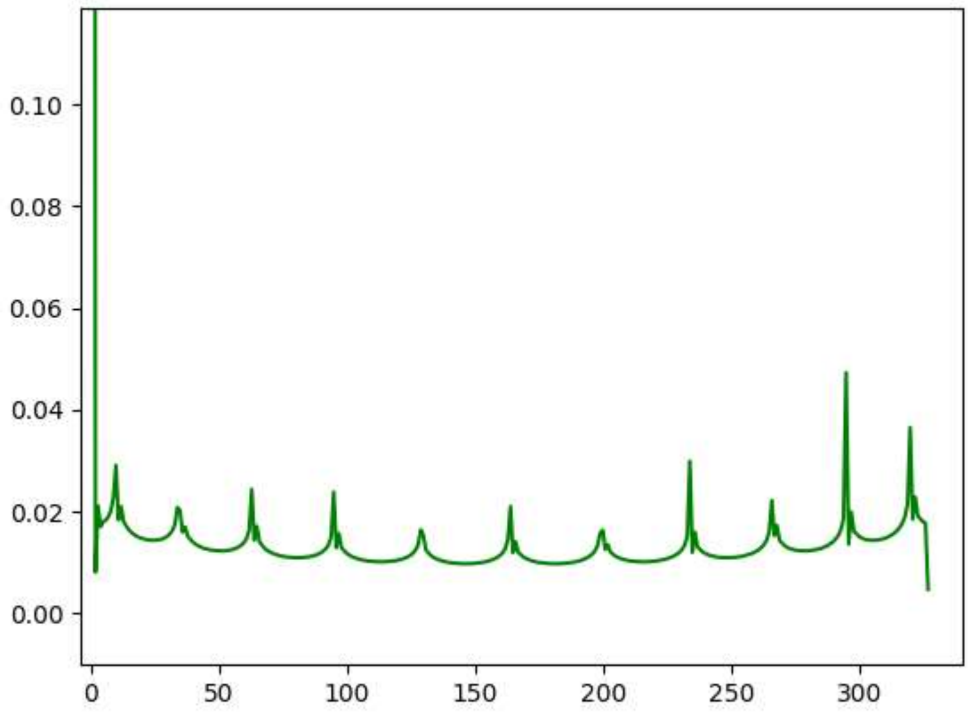
Ответ: 3.9999999999999982

Погрешность

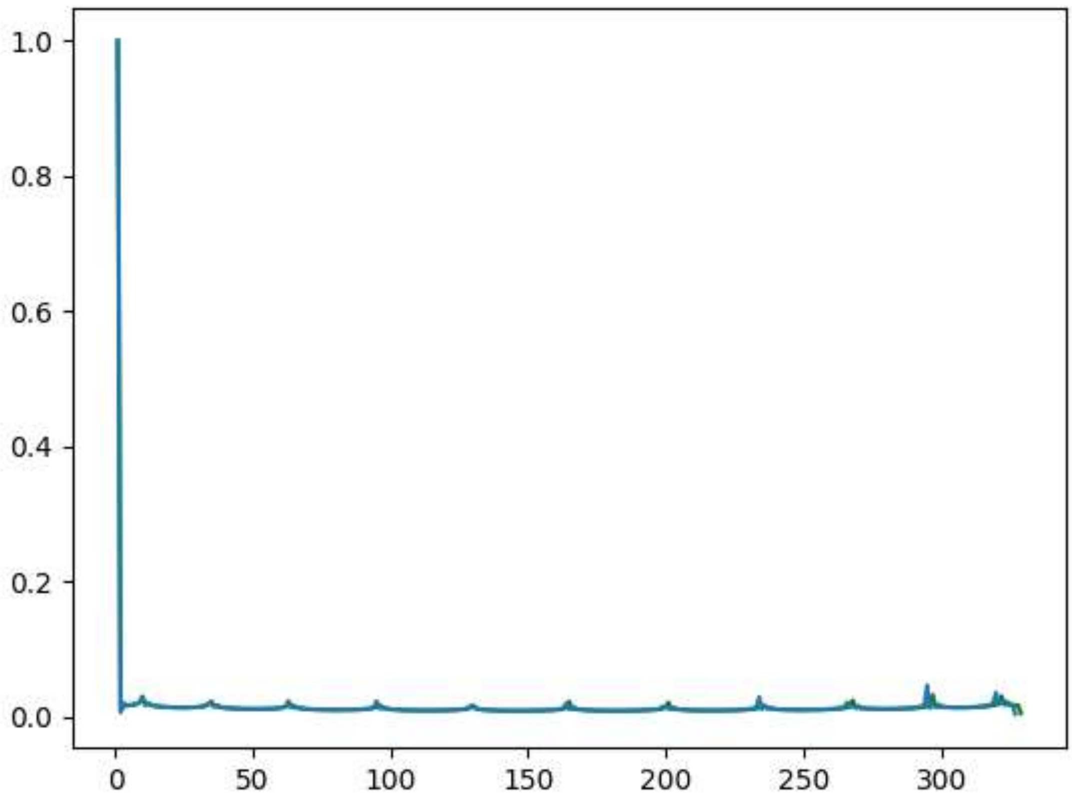
1.7763568394002505e-15

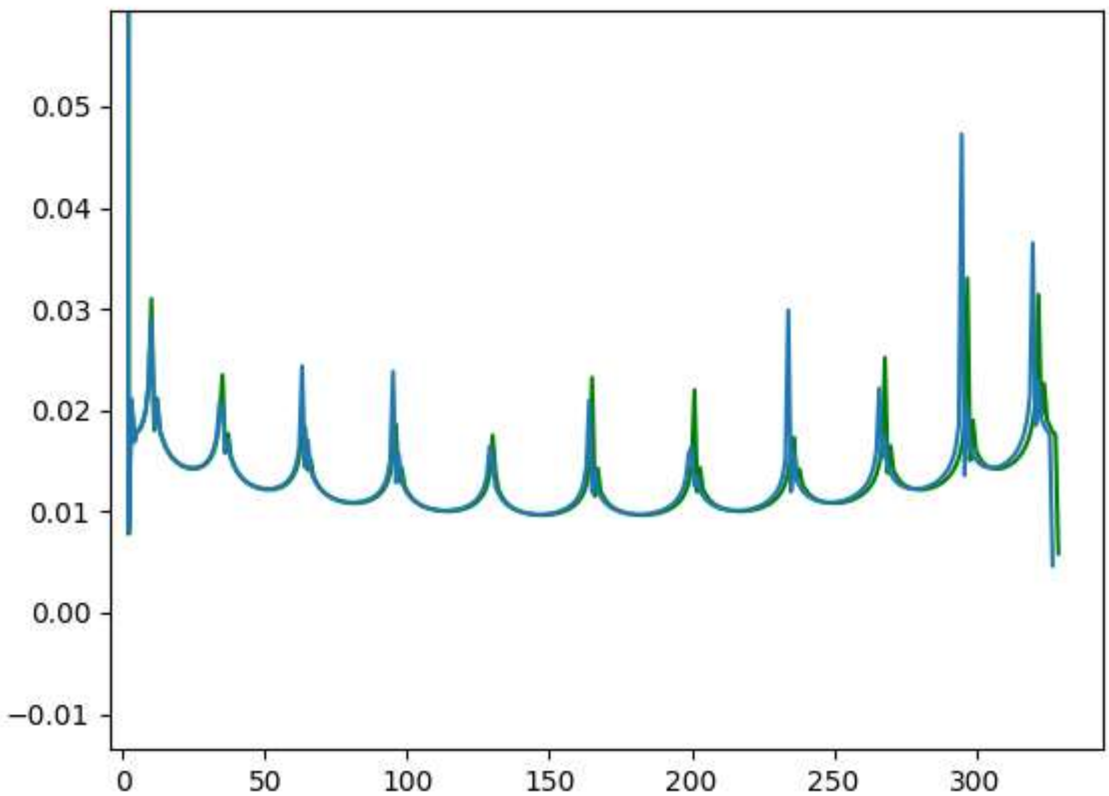
Козунов Алексей, 12 группа, вариант 10





Для метода Гаусса-3 изменения h очень схожи.





Для обоих в одном

Из этого можно сделать вывод, что для адаптивного выбора шага, не зависимости от метода шаг будет примерно одинаковый.

Вывод:

Метод Рунге действительно позволяет выбрать шаг для получения нужной нам точности, однако для большой точности порой это может быть очень медленно. Для получения такой же точности метод Гаусса-3 с выбранным шагом оказался быстрее. Но если не знать нужное количество разбиений, то это оптимальный вариант для нахождения значения с необходимой точностью.