Slajdy k přednášce Lineární algebra I

Milan Hladík

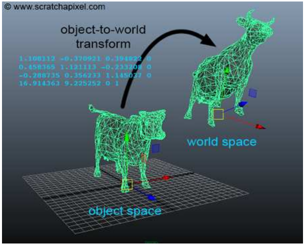
Katedra Aplikované Matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Karlova v Praze,
https://kam.mff.cuni.cz/~hladik

14. prosince 2022

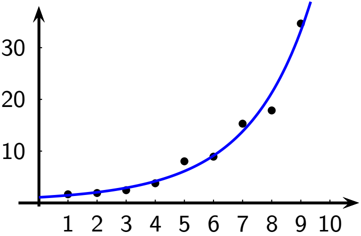
Obsah

Motivace

Vizualizace 3D objektů



Predikce



Komprese dat

Klasifikace

Následující téma

Intro

Nejstarší zaznamenaná úloha na soustavy rovnic: čínská kniha Chiu-chang Suan-shu (ca 200 př.n.l.)

> *Tři snopy dobrého obilí, dva snopy průměrného a jeden podřadného se prodávají celkem za 39 dou. Dva snopy dobrého obilí, tři průměrného a jeden podřadného se prodávají za 34 dou. Jeden snop dobrého obilí, dva průměrného a tři podřadného se prodávají za 26 dou. Jaká je cena za jeden snop dobrého / průměrného / podřadného obilí?*

Dnešní matematikou:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

Matice

Definice (Matice)

Reálná *matice* typu $m \times n$ je obdélníkové schema (tabulka) reálných čísel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Prvek na pozici (i, j) matice A (tj. v i-tém řádku a j-tém sloupci) značíme a_{ij} nebo A_{ij}.
- Množinu všech reálných matic typu $m \times n$ značíme $\mathbb{R}^{m \times n}$; podobně pro komplexní matice, racionální matice, atd.
- Je-li $m = n$, potom matici nazýváme *čtvercovou*.

Vektor

Definice (Vektor)

Reálný n-rozměrný aritmetický sloupcový *vektor* je matice typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

a řádkový vektor je matice typu $1 \times n$

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

- Standardně uvažujeme vektory sloupcové.
- Množina n-rozměrných vektorů se značí $\mathbb{R}^n$ (místo $\mathbb{R}^{n \times 1}$).
- Obecnější pojem vektoru zavedeme později.
- Pro odlišení značíme obecné matice velkými písmeny a vektory malými písmeny.

$*$ notace

Definice ($*$ notace)

- i-tý řádek matice A se značí: $A_{i*} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$.
- j-tý sloupec matice A se značí: $A_{*j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tudíž můžeme rozepsat po sloupcích a po řádcích takto

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \ldots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — & A_{1*} & — \\ — & A_{2*} & — \\ & \vdots & \\ — & A_{m*} & — \end{pmatrix}.$$

Soustava lineárních rovnic

Definice (Soustava lineárních rovnic)

Mějme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}$$

kde a_{ij}, b_i jsou dané koeficienty a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

- *Řešením* rozumíme každý vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vyhovující všem rovnicím.
- Zápis v zásadě obsahuje nadbytečné opakování symbolů. To nás vede na maticovou formu zápisu soustavy.

Matice soustavy

Definice (Matice soustavy)

Matice soustavy je matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a *rozšířená matice soustavy* je

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Svislá čára v rozšířené matici soustavy symbolizuje rovnost mezi levou a pravou stranou soustavy.

Matice soustavy

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Rozšířená matice soustavy plně popisuje soustavu rovnic:

- řádky odpovídají rovnicím,
- sloupce nalevo postupně proměnným $x_1, \dots, x_n$
- poslední sloupec hodnotám na pravé straně soustavy.

Tudíž můžeme soustavu rovnic zadávat i v maticovém tvaru.

Soustava z příkladu by se maticově zapsala jako

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned} \qquad \leftrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$$

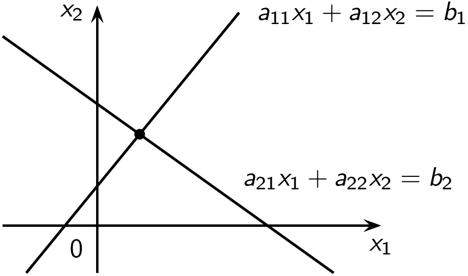
Geometrický význam soustavy rovnic

Nejprve případ $m = n = 2$, tedy dvě rovnice o dvou neznámých:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Za obecných předpokladů ($a_{11} \neq 0$ nebo $a_{12} \neq 0$) popisuje první rovnice přímku v rovině $\mathbb{R}^2$, a analogicky druhá rovnice.

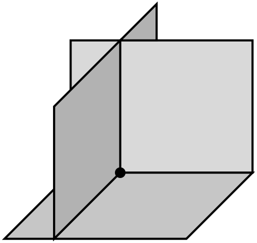
Řešení soustavy leží tedy v průniku obou přímek.



Geometrický význam soustavy rovnic pro $m = n = 3$

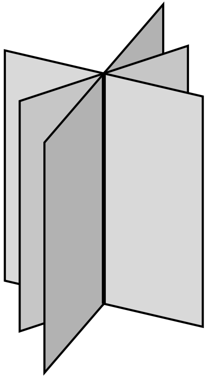
Každá rovnice s alespoň jedním nenulovým koeficientem popisuje rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$ a řešení představuje průnik těchto rovin.

Pokud jsou roviny v obecné poloze, průnikem je jediný bod:



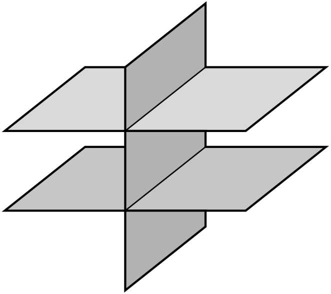
Geometrický význam soustavy rovnic pro $m = n = 3$

Ve speciálním případě mohou všechny roviny obsahovat jednu přímku:



Geometrický význam soustavy rovnic pro $m = n = 3$

Průnik rovin může být i prázdná množina:



Obecně, pro libovolné n, rovnice určují tzv. nadroviny a řešení soustavy hledáme v jejich průniku.

Elementární řádkové úpravy

Definice (Elementární řádkové úpravy)

Elementární řádkové úpravy matice jsou

1. vynásobení i-tého řádku reálným číslem $\alpha \neq 0$ (tj. vynásobí se všechny prvky řádku),
2. přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$ a $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. výměna i-tého a j-tého řádku.

Tvrzení

Elementární řádkové operace zachovávají množinu řešení soustavy.

Idea důkazu.

Základní myšlenkou je ukázat, že elementární úpravou se množina řešení nemění. Elementární úpravou neztratíme žádné řešení, protože pokud je x řešením před úpravou, je i po úpravě. A naopak, úpravou žádné řešení nepřibude. $\square$

Výměna řádků pomocí ostatních úprav

$$\begin{pmatrix} \dots \\ A_{i*} \\ \dots \\ A_{j*} \\ \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dots \\ A_{i*} \\ \dots \\ A_{j*} - A_{i*} \\ \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dots \\ A_{j*} \\ \dots \\ A_{j*} - A_{i*} \\ \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dots \\ A_{j*} \\ \dots \\ -A_{i*} \\ \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dots \\ A_{j*} \\ \dots \\ A_{i*} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Následující téma

Motivační příklad ke Gaussově eliminaci (1/2)

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 32, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 21, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 35. \end{array}$$

Chceme ji upravit na tvar

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 32, \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -11, \\ & & & - & x_3 & = & -6. \end{array}$$

Proč? Dopočítáme snadno řešení $(x_1, x_2, x_3) = (4, 5, 6)$.

Motivační příklad ke Gaussově eliminaci (2/2)

Úpravy:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 32, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 21, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 35. \end{array}$$

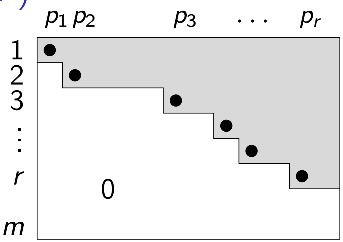
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 32, \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -11, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 35, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 32, \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -11, \\ & - & 5x_2 & - & 6x_3 & = & -61. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 32, \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -11, \\ & & & - & x_3 & = & -6. \end{array}$$

Odstupňovaný tvar matice (REF)

- Pozice $(1, p_1), \dots, (r, p_r)$ jsou *pivoty*,
- sloupce $p_1, \dots, p_r$ jsou *bázické*, ostatní *nebázické*



Definice (Odstupňovaný tvar matice)

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje r takové, že platí

- řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové (tj. každý obsahuje alespoň jednu nenulovou hodnotu),
- řádky $r + 1, \dots, m$ jsou nulové,

a navíc označíme-li jako $p_i = \min\{j;\ a_{ij} \neq 0\}$ pozici prvního nenulového prvku v i-tém řádku, tak platí

- $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Příklady

Příklad

Matice v odstupňovaném tvaru:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 5\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 4 & 5\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Matice, které nejsou v odstupňovaném tvaru:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 0\\3 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hodnost matice

Definice (Hodnost matice)

Hodností matice A rozumíme počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru a značíme $rank(A)$.

Pojem je dobře definován. I když odstupňovaný tvar není jednoznačný, pozice pivotů jednoznačné jsou.

Příklady.

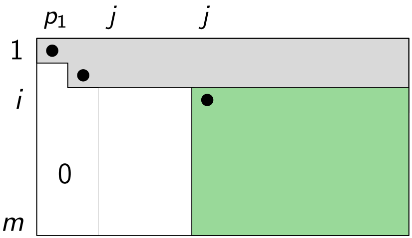
Převod matice na odstupňovaný tvar (REF)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmus REF



Algoritmus REF(A)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1: $i := 1$, $j := 1$,

2: **if** $a_{kl} = 0$ pro všechna $k \geq i$ a $l \geq j$ **then** konec,

3: $j := \min\{\ell;\ \ell \geq j,\ a_{k\ell} \neq 0$ pro nějaké $k \geq i\}$,

//přeskočíme nulové podsloupečky

4: urči $a_{kj} \neq 0$, $k \geq i$ a vyměň řádky A_{i*} a A_{k*},

//nyní je na pozici pivota hodnota $a_{ij} \neq 0$

5: pro všechna $k > i$ polož $A_{k*} := A_{k*} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} A_{i*}$,

//2. elementární úprava

6: polož $i := i + 1$, $j := j + 1$, a jdi na krok 2.

Gaussova eliminace (1/4)

Algoritmus (Gaussova eliminace)

- Buď dána soustava rovnic $(A \mid b)$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Převedeme rozšířenou matici soustavy $(A \mid b)$ na odstupňovaný tvar $(A' \mid b')$ a označíme $r = rank(A \mid b)$.

Nyní nastala právě jediná z následujících tří situací:

(A) *Soustava nemá řešení.*
Tato situace nastane v případě, že poslední sloupec je bázický, čili v posledním sloupci je pivot (tj. $rank(A) < rank(A \mid b)$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Důkaz.
r-tý řádek soustavy má tvar $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b'_r$. □

Gaussova eliminace (2/4)

(B) *Soustava má alespoň jedno řešení.*
Tato situace naopak nastane, pokud poslední sloupec je nebázický, čili neobsahuje pivota (tj. $rank\,(A) = rank(A \mid b)$).

(B1) *Soustava má jediné řešení.*
Jediné řešení existuje, pokud $r = n$.

Soustava v odstupňovaném tvaru má podobu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & a'_{nn} & b'_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right).$$

Gaussova eliminace (3/4)

V rovnicové podobě má soustava tvar

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ &\vdots \\ a'_{kk}x_k + \ldots + a'_{kn}x_n &= b'_k, \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Řešení nyní najdeme tzv. *zpětnou substitucí*: Postupně pro $k = n, n-1, \ldots, 1$ v tomto pořadí dosadíme

$$x_k := \frac{b'_k - \sum_{j=k+1}^{n} a'_{kj}x_j}{a'_{kk}}.$$

Gaussova eliminace (4/4)

(B2) *Soustava má nekonečně mnoho řešení.*
Tento případ nastane, pokud $r < n$. To znamená, že kromě nejpravějšího sloupečku je v matici alespoň jeden další nebázický sloupec.

Množinu všech nekonečně mnoho řešení popíšeme parametricky:

- *Bázické proměnné* jsou ty, které odpovídají bázickým sloupcům, tj. $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_r}$
- *Nebázické proměnné* jsou ty zbývající. Reprezentují parametry, pomocí nichž dopočítáme bázické proměnné opět zpětnou substitucí:

  Postupně pro $k = r, r-1, \ldots, 1$ v tomto pořadí dosadíme

$$x_{p_k} := \frac{b'_k - \sum_{j=p_k+1}^{n} a'_{kj} x_j}{a'_{kp_k}}.$$

Gaussova eliminace – příklad

- Odstupňovaný tvar rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \overset{\text{REF}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Zpětná substituce
  1. $x_4 = 1$
  2. x_3 je volná (nebázická) proměnná
  3. $x_2 = 1 + x_4 - 2x_3 = 2 - 2x_3$
  4. $x_1 = \frac{1}{2}(1 - 5x_4 + x_3 - 2x_2) = -4 + \frac{5}{2}x_3$
- Všechna řešení jsou tvaru

$$(-4 + \tfrac{5}{2}x_3, 2 - 2x_3, x_3, 1), \text{ kde } x_3 \in \mathbb{R},$$

resp.

$$(-4, 2, 0, 1) + x_3(\tfrac{5}{2}, -2, 1, 0), \text{ kde } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Řešitelnost soustavy a hodnost matice

- Z algoritmu vidíme, že řešitelnost soustavy lineárních rovnic souvisí nejenom s velikostí soustavy, ale především s hodností matice.
- Hodnost matice $(A \mid b)$ také udává počet významných rovnic v soustavě.

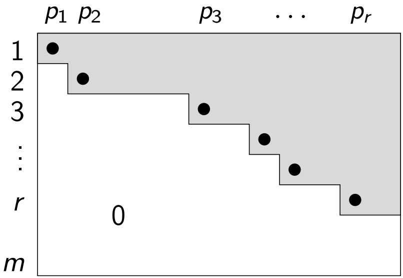
Věta (Frobeniova věta)

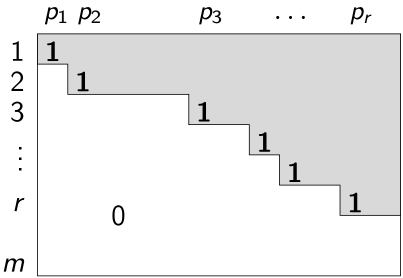
Soustava $(A \mid b)$ má alespoň jedno řešení právě tehdy, když

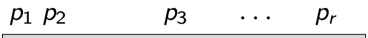
$$rank(A) = rank(A \mid b).$$

Následující téma

Schematické znázornění REF a RREF





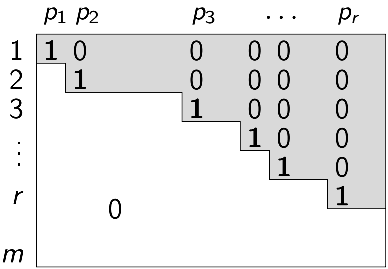


Redukovaný odstupňovaný tvar matice (RREF)

Definice (Redukovaný odstupňovaný tvar matice)

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru, pokud je v REF tvaru a navíc platí

- $a_{1p_1} = a_{2p_2} = \ldots = a_{rp_r} = 1$,
  (tedy na pozicích pivotů jsou jedničky),
- pro každé $i = 2, \ldots, r$ je $a_{1p_i} = a_{2p_i} = \ldots = a_{i-1,p_i} = 0$
  (tedy nad každým pivotem jsou samé nuly).



Algoritmus REF a RREF

Algoritmus RREF(A)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1: $i := 1$, $j := 1$,

2: **if** $a_{kl} = 0$ pro všechna $k \geq i$ a $l \geq j$ **then** konec,

3: $j := \min\{\ell;\ \ell \geq j,\ a_{k\ell} \neq 0$ pro nějaké $k \geq i\}$,
//přeskočíme nulové podsloupečky

4: urči $a_{kj} \neq 0$, $k \geq i$ a vyměň řádky A_{i*} a A_{k*},
//nyní je na pozici pivota hodnota $a_{ij} \neq 0$

5: polož $A_{i*} := \frac{1}{a_{ij}} A_{i*}$,
//nyní je na pozici pivota hodnota $a_{ij} = 1$

6: pro všechna $k \neq i$ polož $A_{k*} := A_{k*} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} A_{i*}$,
//2. elementární úprava

7: polož $i := i + 1$, $j := j + 1$, a jdi na krok 2.

Převod matice na redukovaný odstupňovaný tvar (RREF)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 & 2.5 \\ 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gaussova–Jordanova eliminace (1/4)

Algoritmus (Gaussova–Jordanova eliminace)

- Buď dána soustava rovnic $(A \mid b)$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
- Převedeme rozšířenou matici soustavy $(A \mid b)$ na redukovaný odstupňovaný tvar $(A' \mid b')$ a označíme $r = rank(A \mid b)$.

Nyní nastala právě jediná z následujících tří situací:

(A) *Soustava nemá řešení.*
Tato situace nastane v případě, že poslední sloupec je bázický, čili v posledním sloupci je pivot (tj. $rank(A) < rank(A \mid b)$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & a'_{1n} & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Gaussova–Jordanova eliminace (2/4)

(B) *Soustava má alespoň jedno řešení.*
Tato situace naopak nastane, pokud poslední sloupec je nebázický, čili neobsahuje pivota (tj. $\mathit{rank}\,(A) = \mathit{rank}(A \mid b)$).

(B1) *Soustava má jediné řešení.*
Jediné řešení existuje, pokud $r = n$.

Soustava v odstupňovaném tvaru má podobu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & b_2' \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_n' \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right).$$

Gaussova–Jordanova eliminace (3/4)

V rovnicové podobě má soustava tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= b'_1, \\ x_2 &= b'_2, \\ &\vdots \\ x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Gaussova–Jordanova eliminace (4/4)

(B2) *Soustava má nekonečně mnoho řešení.*
Tento případ nastane, pokud $r < n$. Rovnice mají tvar

$$x_{p_k} + \sum_{j \in N,\ j > p_k} a'_{kj} x_j := b'_k, \quad k = 1, \dots, r.$$

Množinu všech řešení popíšeme parametricky:

- *Bázické proměnné* jsou ty, které odpovídají bázickým sloupcům, tj. $x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_r}$
- *Nebázické proměnné* jsou ty zbývající. Reprezentují parametry, pomocí nichž dopočítáme bázické proměnné opět zpětnou substitucí:

  Postupně pro $k = r, r-1, \dots, 1$ v tomto pořadí dosadíme

$$x_{p_k} := b'_k - \sum_{j \in N,\ j > p_k} a'_{kj} x_j.$$

Gaussova–Jordanova eliminace – příklad

- Odstupňovaný tvar rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \overset{\text{RREF}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2{,}5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- Zpětná substituce
  1. $x_4 = 1$,
  2. x_3 je volná (nebázická) proměnná,
  3. $x_2 = 2 - 2x_3$,
  4. $x_1 = -4 + \frac{5}{2}x_3$.
- Všechna řešení jsou tvaru

$$(-4 + \tfrac{5}{2}x_3, 2 - 2x_3, x_3, 1), \text{ kde } x_3 \in \mathbb{R},$$

resp.

$$(-4, 2, 0, 1) + x_3(\tfrac{5}{2}, -2, 1, 0), \text{ kde } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Gaussova versus Gaussova–Jordanova eliminace

- Gaussova eliminace je řádově o třetinu rychlejší
- Gaussova–Jordanova eliminace bude potřeba pro inverzi matic

Následující téma

Základní operace s maticemi

Definice (Rovnost)

Dvě matice se rovnají, $A = B$, pokud mají stejné rozměry $m \times n$ a $A_{ij} = B_{ij}$ pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Definice (Součet)

Buď $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $A + B$ je matice typu $m \times n$ s prvky $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Základní operace s maticemi

Definice (Násobek)

Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak αA je matice typu $m \times n$ s prvky $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Příklad

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

- odčítání: $A - B \coloneqq A + (-1)B$.
- *nulová matice*: 0 či $0_{m \times n}$.

Násobek matic

Obrázek je reprezentován maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tak, že pixel obrázku na pozici (i, j) má barvu s číslem a_{ij}. Násobení matice A skalárem pak mění odstíny barev.

originál ($\alpha = 1$)

ztmavení ($\alpha = 0.5$)

Vlastnosti součtu a násobků matic

Tvrzení (Vlastnosti součtu a násobků matic)

Pro reálná čísla α, β *a matice* $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *platí:*

1. $A + B = B + A$ *(komutativita),*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asociativita),*
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributivita),*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(distributivita).*
5. $A + 0 = A$,
6. $A + (-1)A = 0$,
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
8. $1A = A$,

Vlastnosti součtu a násobků matic

Důkaz.

1. Důkaz komutativity: $A + B = B + A$

   Nejprve ověříme, že $A + B$ i $B + A$ mají stejný typ.

   Pak ukážeme, že odpovídající si prvky jsou shodné.

   Prvek na pozici (i, j) matice $A + B$:

   $$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

   Prvek na pozici (i, j) matice $B + A$:

   $$(B + A)_{ij} = B_{ij} + A_{ij}$$

   Oba se rovnají při využití komutativity sčítání reálných čísel.

$\square$

Součin matic

Kdo již umí násobit matice?

Definice (Součin matic)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Pak AB je matice typu $m \times n$ s prvky

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \ldots + A_{ip} B_{pj}$$

Poznámka

$(AB)_{ij}$ je tedy skalární součin řádku A_{i*} a sloupce B_{*j}.

Násobení matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mnemotechnicky:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{2} & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 3 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 14 \\ 2 & 2 & \mathbf{3} & 2 \\ 8 & 10 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matlab či Octave:

```
A=[1 2 3 4;0 1 0 1;2 2 2 2];
B=[1 1 1 1;1 0 2 2;1 2 1 3;1 2 1 0];
A*B
```

Vlastnosti součinu matic

Tvrzení (Vlastnosti součinu matic)

Platí následující vlastnosti; α je číslo a A, B, C matice vhodných rozměrů.

1. *obecně* $AB \neq BA$ *(komutativita neplatí),*
2. $(AB)C = A(BC)$ *(asociativita),*
3. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributivita zleva),*
4. $(A + B)C = AC + BC$ *(distributivita zprava),*
5. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

Důkaz prvních dvou vlastností, ostatní za cvičení.

Vlastnosti součinu matic

Důkaz.

1. *Nekomutativita součinu matic ($AB \neq BA$)*
   Například pro matice
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   je
   $$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Navíc, může se stát, že součin AB má smysl, a přitom násobit matice v pořadí BA nelze.
   Nebo matice AB a BA existují, ale mají různé rozměry. $\square$

Vlastnosti součinu matic

Důkaz.

2. *Asociativita součinu matic:* $(AB)C = A(BC)$

   Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times r}$ a $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Pak AB je $m \times r$, BC je $p \times n$ a obě $(AB)C$, $A(BC)$ jsou $m \times n$.

   Shodnost odpovídajících si prvků. Na pozici (i,j) je

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{r}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{\ell=1}^{p}A_{i\ell}B_{\ell k}\right)C_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{p}A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj},$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p}A_{i\ell}(BC)_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p}A_{i\ell}\left(\sum_{k=1}^{r}B_{\ell k}C_{kj}\right) = \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj}.$$

   Vidíme, že oba výrazy jsou shodné až na pořadí sčítanců. □

Jednotková matice

jednotková matice řádu n:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je to čtvercová matice řádu n s prvky $I_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $I_{ij} = 0$ jinak. (Příkladem diagonální matice.)

Související pojem *jednotkový vektor* e_i je pak i-tý sloupec jednotkové matice, tj. $e_i = I_{*i}$.

Tvrzení

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:

$$I_m A = A I_n = A.$$

Transpozice matice

Definice (Transpozice matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak *transponovaná matice* má typ $n \times m$, značí se A^T a je definovaná $(A^T)_{ij} := a_{ji}$.

Příklad

Transpozice vlastně znamená překlopení dle hlavní diagonály, např.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Díky transpozici můžeme sloupcové vektory $x \in \mathbb{R}^n$ zapisovat do řádků takto: $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Vlastnosti transpozice matice

Tvrzení (Vlastnosti transpozice)

Platí následující vlastnosti; $\alpha \in \mathbb{R}$ *a* A, B *matice vhodných rozměrů.*

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Důkaz.

Pro ilustraci dokážeme jen vlastnost 1, zbytek za cvičení.

1. Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak A^T má rozměr $n \times m$ a $(A^T)^T$ má tedy rozměr $m \times n$, shodný s A.
   Porovnáním odpovídajících si prvků:
   $$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij}. \qquad \square$$

Symetrická matice

Definice (Symetrická matice)

Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *symetrická*, pokud $A = A^T$.

Například

$$I_n \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Jsou symetrické matice uzavřené na součet?
- Jsou symetrické matice uzavřené na součin?

Příklad (Výskyt symetrických matic)

- V dopravních či geometrických úlohách. Hodnota a_{ij} udává vzdálenost mezi i-tým a j-tým objektem.
- Kovarianční matice ve statistice.
- Hessián (matice druhých parciálních derivací) pro dvakrát spojitě diferencovatelné funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Součiny vektorů

Dva možné součiny vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$:

1. *Standardní skalární součin*:

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   (formálně je to matice 1×1, ale ztotožníme ji s číslem).

2. *Vnější součin* vektorů x, y je čtvercová matice řádu n

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & x_1y^T & - \\ - & x_2y^T & - \\ & \vdots & \\ - & x_ny^T & - \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ xy_1 & xy_2 & \cdots & xy_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Například $e_i^T e_j = ?$, $e_i e_j^T = ?$

Vnější součin vektorů

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad — & x_1y^T & — \quad \\ \quad — & x_2y^T & — \quad \\ & \vdots & \\ \quad — & x_ny^T & — \quad \end{pmatrix}$$

Protože v matici xy^T jsou všechny řádky násobkem vektoru y^T, tak má matice xy^T hodnost nanejvýš 1.

Tvrzení

Matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má hodnost 1 právě tehdy, když je tvaru $A = xy^T$ pro nějaké nenulové vektory $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Vlastnosti součinu matice a vektoru (1/3)

Tvrzení

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Pak platí:*

1. $Ae_j = A_{*j}$,
2. $e_i^T A = A_{i*}$,

Schematické vyjádření první vlastnosti:

$$Ae_j = \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_{*1} & \cdots & A_{*j} & \cdots & A_{*n} \\ | & & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ A_{*j} \\ | \end{pmatrix},$$

Vlastnosti součinu matice a vektoru (2/3)

Tvrzení

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Pak platí:

1. $(AB)_{*j} = AB_{*j}$,
2. $(AB)_{i*} = A_{i*}B$,

Důkaz.

1. S využitím předchozí vlastnosti,
   $(AB)_{*j} = (AB)e_j = A(Be_j) = AB_{*j}$. $\square$

Schematické vyjádření první vlastnosti:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} | & & | \\ B_{*1} & \cdots & B_{*p} \\ | & & | \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} | & & | \\ AB_{*1} & \cdots & AB_{*p} \\ | & & | \end{pmatrix} \end{array},$$

Vlastnosti součinu matice a vektoru (3/3)

Tvrzení

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *a* $y \in \mathbb{R}^m$. *Pak platí:*

1. $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$,
2. $y^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i*}$.

Schematické vyjádření první vlastnosti:

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \cdots & A_{*n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ A_{*1} \\ | \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} | \\ A_{*2} \\ | \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} | \\ A_{*n} \\ | \end{pmatrix} x_n$$

Soustava rovnic: řádková interpretace

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

Maticově $Ax = b$, neboť

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Soustava rovnic: sloupcová interpretace

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
$$

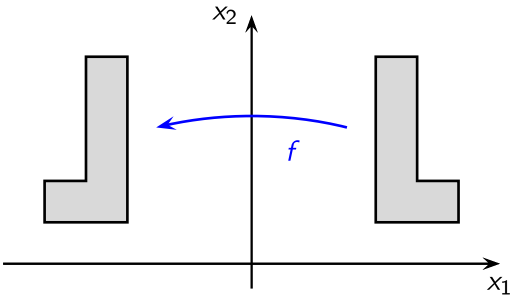
Sloupcová interpretace:

$$
\begin{pmatrix} | \\ A_{*1} \\ | \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} | \\ A_{*2} \\ | \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} | \\ A_{*n} \\ | \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} | \\ b \\ | \end{pmatrix}.
$$

Matice a lineární zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dívat jako na určité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ definované předpisem $x \mapsto Ax$.

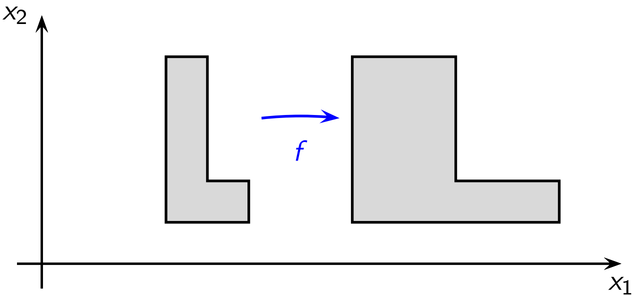
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Matice a lineární zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dívat jako na určité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ definované předpisem $x \mapsto Ax$.

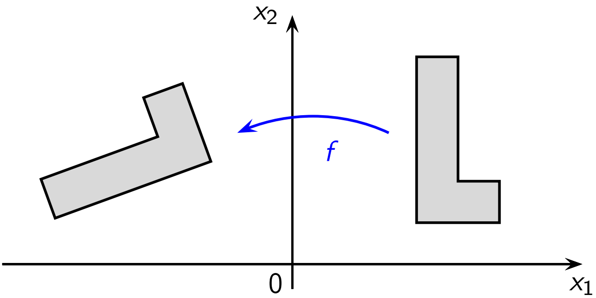
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Matice a lineární zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dívat jako na určité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ definované předpisem $x \mapsto Ax$.

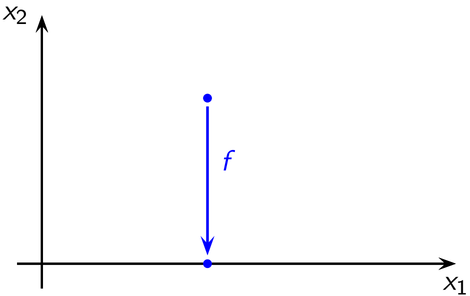
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{pmatrix}$$



Matice a lineární zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dívat jako na určité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ definované předpisem $x \mapsto Ax$.

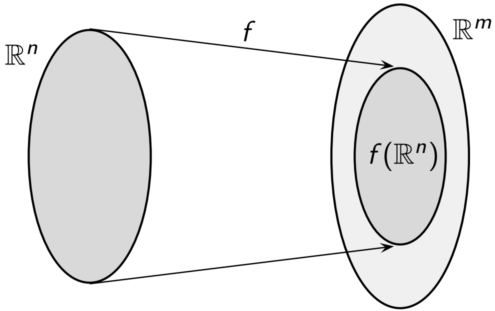
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Matice a lineární zobrazení $f : x \mapsto Ax$

Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dívat jako na určité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ definované předpisem $x \mapsto Ax$.

- Řešit soustavu rovnic $Ax = b$ znamená najít všechny vektory x, které se zobrazí na vektor b.



Matice a lineární zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Je užitečné se na matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dívat jako na určité zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ definované předpisem $x \mapsto Ax$.

- Složení dvou zobrazení $x \mapsto Ax$, $y \mapsto By$, kde $A \in \mathbb{R}^{p\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$.
  - první zobrazení $x \mapsto Ax = y$
  - druhé zobrazení $y \mapsto By = B(Ax) = (BA)x$

  Složené zobrazení $x \mapsto (BA)x$ má matici BA.
  Skládání zobrazení tudíž odpovídá násobení matic!

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "BA"'] & \mathbb{R}^p \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

Viz str. 91

Následující téma

Regulární matice

Definice (Regulární matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matice A je *regulární*, pokud soustava $Ax = 0$ má jediné řešení $x = 0$.

V opačném případě se matice A nazývá *singulární*.

- A je regulární právě tehdy, když $Ax \neq 0$ pro všechna $x \neq 0$
- A je singulární právě tehdy, když $Ax = 0$ pro nějaké $x \neq 0$

Příklad:

- regulární matice: I_n
- singulární matice: 0_n

Regulární matice

Tvrzení

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak následující jsou ekvivalentní:

1. *A je regulární,*
2. $\mathrm{RREF}(A) = I_n$,
3. *$rank(A) = n$,*
4. *pro nějaké $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení,*
5. *pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.*

- Jsou regulární matice uzavřené na součet?
- Jsou regulární matice uzavřené na součin?

Regulární matice a součin

Tvrzení

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Pak AB je také regulární.

Důkaz.

Buď x řešení soustavy $ABx = 0$. Chceme ukázat, že x musí být nulový vektor.

Označme $y := Bx$. Pak soustava lze přepsat na novou soustavu $Ay = 0$ s proměnnými y.

Z regularity matice A je jediné řešení $y = 0$, což dává rovnost $Bx = 0$. Z regularity matice B je pak $x = 0$. $\square$

Regulární matice a součin

Tvrzení

Je-li alespoň jedna z matic $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singulární, pak AB je také singulární.

Důkaz.

Uvažme dva případy: B je či není singulární.

Je-li matice B singulární, pak $Bx = 0$ pro nějaké $x \neq 0$. Z toho ale plyne $(AB)x = A(Bx) = A0 = 0$, tedy i AB je singulární.

Nyní předpokládejme, že matice B je regulární, tedy matice A je singulární a existuje $y \neq 0$ takové, že $Ay = 0$. Z regularity matice B existuje $x \neq 0$ takové, že $Bx = y$. Celkem dostáváme $(AB)x = A(Bx) = Ay = 0$, tedy AB je singulární. $\square$

Matice elementárních úprav (jsou regulární)

Elementární úpravy jdou reprezentovat násobením tzv. elementární maticí zleva

1. Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$:

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úprava na matici A se provede vynásobením $E_i(\alpha)A$.

Poznámka. $E_i(\alpha) = I + (\alpha - 1)e_i e_i^T$

Matice elementárních úprav (jsou regulární)

Elementární úpravy jdou reprezentovat násobením tzv. elementární maticí zleva

2. Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému ($i \neq j$):

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c@{\;}c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{array}\right) \\ & \begin{array}{ccccc} & j & & & \end{array} \end{array}.$$

Úprava na matici A se provede vynásobením $E_{ij}(\alpha)A$.

Poznámka. $E_{ij}(\alpha) = I + \alpha e_i e_j^T$

Matice elementárních úprav (jsou regulární)

Elementární úpravy jdou reprezentovat násobením tzv. elementární maticí zleva

3. Výměna i-tého a j-tého řádku:

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \\ 1 & 0 \\ & \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \end{array}.$$

Úprava na matici A se provede vynásobením $E_{ij}A$.

Poznámka. $E_{ij} = I + (e_j - e_i)(e_i - e_j)^T$

Matice elementárních úprav

Věta

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*. Pak* $\mathrm{RREF}(A) = QA$ *pro nějakou regulární matici* $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$*.*

Důkaz.

$\mathrm{RREF}(A)$ získáme aplikací konečně mnoha elementárních řádkových úprav. Nechť jdou reprezentovat maticemi $E_1, E_2, \dots, E_k$. Pak

$$\mathrm{RREF}(A) = E_k \dots E_2 E_1 A = QA,$$

kde $Q = E_k \dots E_2 E_1$. Protože matice $E_1, E_2, \dots, E_k$ jsou regulární, i jejich součin Q je regulární. $\square$

Matice elementárních úprav

Tvrzení

Každá regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dá vyjádřit jako součin konečně mnoha elementárních matic.

Důkaz.

Pokud k elementárními úpravami dokážu dovést matici A na jednotkovou I_n, pak jistými k elementárními úpravami mohu převést naopak I_n na A. Je to tím, že každá elementární úprava má svojí inverzní, která vykonává opačnou úpravu.

Tudíž existují matice $E_1, \dots, E_k$ elementárních úprav tak, že $A = E_k \dots E_2 E_1 I_n = E_k \dots E_2 E_1$. $\square$

Následující téma

Inverzní matice

Maticové sčítání má inverzní operaci odčítání:

- Od matice $A + B$ tak přejdu zpět k matici A přičtením $-B$,
  čili $A + B + (-B) = A$.
  (mohu přičíst zleva či zprava)

Existuje něco podobného i pro součin matic?

- Mohu od matice AB přejít zpět k matici A přenásobením B^{-1},
  aby $ABB^{-1} = A$?
  Zřejmě se mi to podaří, pokud $BB^{-1} = I_n$.

Definice

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak A^{-1} je *inverzní* maticí k A, pokud splňuje

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

- Jaká je inverzní matice k I_n?
- Jaká je inverzní matice k 0_n?

Inverzní matice

Věta (O existenci inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li A^{-1}, pak A je regulární.

Důkaz existence.

A je regulární, tedy soustava $Ax = e_j$ má řešení x_j pro každé j.

Ukážeme, že $A^{-1} = (x_1|x_2|\dots|x_n)$ je to hledaná inverze.

1. Rovnost $AA^{-1} = I$ ukážeme po sloupcích. Pro každé j je
$$(AA^{-1})_{*j} = A(A^{-1})_{*j} = Ax_j = e_j = I_{*j}.$$
2. Rovnost $A^{-1}A = I$ dokážeme trikem. Uvažme výraz
$$A(A^{-1}A - I) = AA^{-1}A - A = IA - A = 0.$$
Tedy pro každé j platí: $A(A^{-1}A - I)_{*j} = 0$.
Z regularity A je $(A^{-1}A - I)_{*j} = 0$. Tudíž $A^{-1}A = I$. $\square$

Inverzní matice

Věta (O existenci inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li A^{-1}, pak A je regulární.

Důkaz jednoznačnosti a druhé implikace.

1. "Jednoznačnost." Nechť pro nějakou matici B platí $AB = BA = I$. Pak
$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$
2. "Naopak." Nechť pro A existuje inverzní matice. Buď x řešení soustavy $Ax = 0$. Pak
$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0.$$
Tedy A je regulární.

□

Inverzní matice – vlastnosti

Tvrzení

Je-li A regulární, pak A^T je regulární.

Důkaz.

Je-li A regulární, pak existuje inverze a platí $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Po transponování všech stran rovností dostaneme

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T,$$

neboli

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I_n.$$

Matice A^T má inverzi a je tudíž regulární. □

Důsledek:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Zkráceně: A^{-T}

Inverzní matice – vlastnosti

Ukážeme, že dvě rovnosti $AA^{-1} = I_n$, $A^{-1}A = I_n$ nejsou nutné, stačí jen jedna.

Věta (Jedna rovnost stačí)

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Je-li $BA = I_n$, pak obě matice A, B jsou regulární a navzájem k sobě inverzní, to jest $B = A^{-1}$ a $A = B^{-1}$.

Důkaz.

Regularita vyplývá z dřívějšího tvrzení vzhledem k regularitě I_n.

Tudíž existují inverze A^{-1}, B^{-1}. Odvodíme

$$B = BI_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1},$$

a podobně

$$A = AI_n = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = I_nB^{-1} = B^{-1}. \qquad \square$$

Inverzní matice – výpočet

Důkaz věty ukázal návod:

j-tý sloupec A^{-1} je řešením soustavy $Ax = e_j$.

Věta (Výpočet inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- *Je-li* $\mathrm{RREF}(A \mid I_n) = (I_n \mid B)$, *pak* $B = A^{-1}$.
- *Jinak A je singulární.*

Důkaz.

Je-li $\mathrm{RREF}(A \mid I_n) = (I_n \mid B)$, potom existuje regulární Q tak, že

$$(I_n \mid B) = Q(A \mid I_n).$$

Po roztržení na dvě části $I_n = QA$ a $B = QI_n$.

První rovnost říká $Q = A^{-1}$ a druhá $B = Q = A^{-1}$.

Je-li $\mathrm{RREF}(A \mid I_n) \neq (I_n \mid B)$, pak $\mathrm{RREF}(A) \neq I_n$ a tudíž A je singulární. $\square$

Inverzní matice – výpočet

Příklad

Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Inverzní matici spočítáme takto:

$$
(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccr|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccr|rcc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccr|rcc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccr|rrc} 1 & 0 & 3{,}5 & 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & -9{,}5 & -4 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(I_3 \mid A^{-1}\right).
$$

Tedy máme $A^{-1} = \begin{pmatrix} -9{,}5 & -4 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Inverzní matice – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti inverzní matice)

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Pak:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
3. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ *pro* $\alpha \neq 0$,
4. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Důkaz.

1. Z rovnosti $A^{-1} A = I_n$ plyne, že inverzní matice k A^{-1} je A.
2. Bylo ukázáno.
3. Plyne z $(\alpha A)(\frac{1}{\alpha} A^{-1}) = \frac{\alpha}{\alpha} A A^{-1} = I_n$.
4. $(AB)(B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. □

Pro $(A + B)^{-1}$ žádný jednoduchý vzoreček není! (jako pro $\frac{1}{a+b}$)

Inverzní matice a soustava rovnic

Buď Q regulární. Pak

soustava $Ax = b$ je ekvivalentní s $(QA)x = (Qb)$

Důkaz.

Žádné řešení neztratíme.

Zpět se dostaneme přenásobením Q^{-1} zleva. $\square$

Důsledek pro A regulární:

soustava $Ax = b$ je ekvivalentní s $(A^{-1}A)x = (A^{-1}b)$

Věta (Soustava rovnic a inverzní matice)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem

$$x = A^{-1}b.$$

Inverzní matice – geometrie

▸ Viz str. 65

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární a uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$.

- pro každé $y \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Ax = y$
- zobrazení je tedy bijekcí
- inverzní zobrazení má předpis $y \mapsto A^{-1}y$ (důkaz: $x \mapsto Ax \mapsto A^{-1}Ax = x$)
- závěr: inverzní matice odpovídá inverznímu zobrazení!

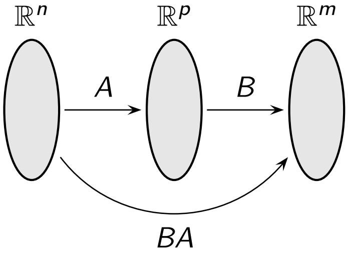
Řešit soustavu $Ax = b$ znamená hledat vzor vektoru b při zobrazení $x \mapsto Ax$.

Inverzní matice – geometrie

Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární.

Uvažujme dvě zobrazení $f : x \mapsto Ax$, $g : y \mapsto By$.

- Složené zobrazení $g \circ f$ má předpis $x \mapsto B(Ax) = (BA)x$.



- Inverzní zobrazení tedy má předpis $z \mapsto (BA)^{-1}z$.
- Jiný pohled: $z \mapsto A^{-1}(B^{-1}z) = (A^{-1}B^{-1})z$.

  Tím jsme geometricky ukázali identitu $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Následující téma

Numerická stabilita při řešení soustav

Dvě soustavy, které se liší v zaokrouhlení čísla $\frac{2}{30}$ nahoru či dolů

Soustava 1

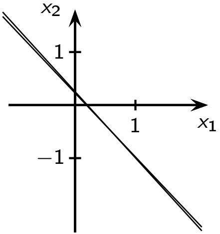
$$0.835x_1 + 0.667x_2 = 0.168$$
$$0.333x_1 + 0.266x_2 = \mathbf{0.067}$$

řešení $(x_1, x_2) = (1, -1)^T$.

Soustava 2

$$0.835x_1 + 0.667x_2 = 0.168$$
$$0.333x_1 + 0.266x_2 = \mathbf{0.066}$$

řešení $(x_1, x_2) = (-666, 834)^T$.



Hilbertovy matice a numerická stabilita

- Hilbertova matice H_n řádu n: $(H_n)_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ $\forall i, j$.

  např. $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

- Uvažujme soustavu $H_n x = b$, kde $b = H_n e$.
  H_n je regulární, soustava má jediné řešení $x = e = (1, \ldots, 1)^T$.

- Výpočty v Matlabu (R 2008b), double precision 52 bitů $\sim 10^{-16}$:

n	řešení
8	$x_i = 1$
10	$x_i \in [0.9995, 1.0003]$
12	$x_i \in [0.8246, 1.1500]$
14	$x_i \in [-45.4628, 53.3428]$

```
n=8;
A=hilb(n);
b=A*ones(n,1);
A\b
```

Parciální pivotizace

Vyřešme soustavu (aritmetika s přesností na 3 číslice):

$$
\begin{aligned}
10^{-3}x_1 - x_2 &= 1\\
2x_1 + x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

1. Tradičním způsobem:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{10^{-3}} & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1000 & 1000\\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1000 & 1000\\ 0 & \mathbf{2000} & -2000 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1000 & 1000\\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
$$

2. Parciální pivotizace (na místě pivota největší hodnotu v podsloupci):

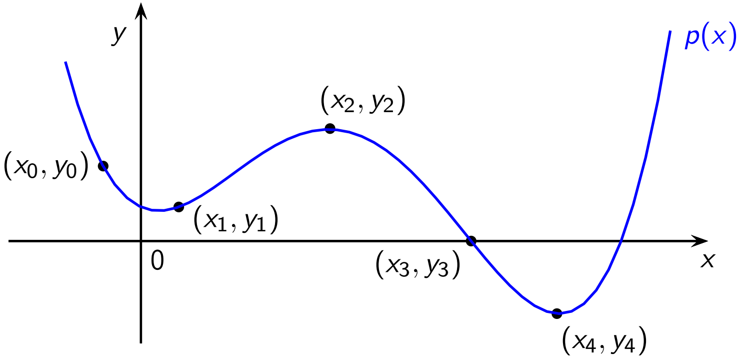
$$
\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & -1 & 1\\ \mathbf{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{2} & 1 & 0\\ 10^{-3} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
$$

Skutečné řešení: $\left(\frac{1000}{2001}, -\frac{2000}{2001}\right)^T$

Interpolace polynomem

Dány body (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), kde $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$.

Cílem je najít polynom $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, který prochází těmito body.



Interpolace polynomem

Dány body (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), kde $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$.

Cílem je najít polynom $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, který prochází těmito body.

Dosadíme-li dané body, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_n x_0^n + \ldots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0, \\ a_n x_1^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0 &= y_1, \\ &\vdots \\ a_n x_n^n + \ldots + a_1 x_n + a_0 &= y_n. \end{aligned}$$

Rovnic je $n + 1$ a proměnných také, jsou to koeficienty $a_n, \ldots, a_0$.

- Matice je regulární, takže řešení je jednoznačné (a tím i interpolační polynom)

Interpolace polynomem – regularita Vandermondovy matice

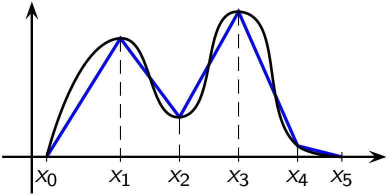
$$
\begin{pmatrix}
x_0^n & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\
x_1^n & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
x_n^n & \dots & x_n^2 & x_n & 1
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
(x_0 - x_n)x_0^{n-1} & \dots & (x_0 - x_n)x_0 & x_0 - x_n & 1 \\
(x_1 - x_n)x_1^{n-1} & \dots & (x_1 - x_n)x_1 & x_1 - x_n & 1 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
(x_n - x_n)x_n^{n-1} & \dots & (x_n - x_n)x_n & x_n - x_n & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix}
x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 & \frac{1}{x_0 - x_n} \\
x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & \frac{1}{x_1 - x_n} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
x_{n-1}^{n-1} & \dots & x_{n-1} & 1 & \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \\
0 & \dots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

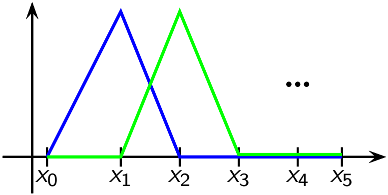
$$
\sim \dots \sim
\begin{pmatrix}
1 & & & \\
0 & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \\
0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Aplikace soustav rovnic – metoda konečných prvků

- Fyzikální úlohy vedou často soustavu diferenciálních rovnic.
  - strukturální analýza (elasticita těles, stabilita konstrukcí, ...)
  - proudění tekutin a plynů (meteorologie, ...)
  - ...
- Diskretizace po částech lineární funkcí.



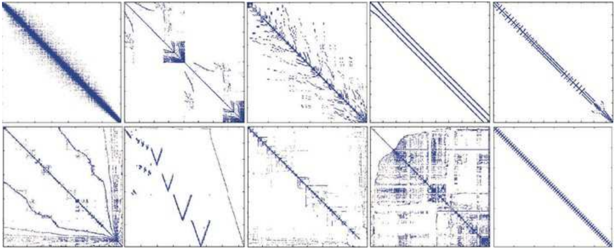
Aproximace lineární lomenou funkcí.



Báze lineárních lomenek.

- Vede na obrovskou (ale řídkou) soustavu lineárních rovnic.

Velké řídké soustavy rovnic



[zdroj: https://stormvirux.github.io/project/spmv/]

Iterativní metody pro řešení soustav lineárních rovnic

- Některé praktické úlohy vedou na velké, řídké soustavy $Ax = b$.
- Nechť že v každém řádku je nanejvýš k nenulových hodnot, přičemž k je výrazně menší než n (např. $n = 10^7$, $k = 10$).

  Otázky: Jak uchovávat matici A v paměti počítače, abychom mohli efektivně vykonávat běžné maticové operace?
- Gaussova eliminace není vhodnou metodou.

  Elementárními úpravami se matice A zahustí: z kn hodnot na n^2.
- Výhodnější jsou iterativní metody.
  - menší časové a paměťové nároky pro velké, řídké soustavy
  - menší citlivost k zaokrouhlovacím chybám
  - ale ne vždy všechny metody konvergují

Iterativní metody pro řešení soustav lineárních rovnic

Gaussova–Seidelova metoda. Uvažujme soustavu

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y - z &= 4 \\ x + 5y + z &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 27 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{6}(4 - 2y + z) \\ y &= \tfrac{1}{5}(3 - x - z) \\ z &= \tfrac{1}{4}(27 - 2x - y) \end{aligned}$$

Iterace (počáteční hodnoty $x^{(1)} = y^{(1)} = z^{(1)} = 1$):

$$\begin{aligned} x^{(i)} &= \tfrac{1}{6}(4 - 2y^{(i-1)} + z^{(i-1)}) \\ y^{(i)} &= \tfrac{1}{5}(3 - x^{(i)} - z^{(i-1)}) \\ z^{(i)} &= \tfrac{1}{4}(27 - 2x^{(i)} - y^{(i)}) \end{aligned}$$

Průběh:

iterace	x	y	z
0	1	1	1
1	0.5	0.3	6.425
2	1.6375	-1.0125	6.184375
3	2.034896	-1.043854	5.993516
4	2.013537	-1.001411	5.993584
5	1.999401	-0.998597	5.999949
6	1.999624	-0.999895	6.000212

LU rozklad

Definice

LU rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je rozklad na součin $A = LU$, kde

- L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále,
- U horní trojúhelníková matice.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

- LU rozklad úzce souvisí s odstupňovaným tvarem matice:
  - matice U odpovídá odstupňovanému tvaru matice A
  - matice L představuje akumulované elementární úpravy
- LU rozklad je v zásadě maticová verze Gaussovy eliminace
  - stejná asymptotická složitost
  - výhodnější pro teoretickou analýzu, prakticky při změně b

LU rozklad – postup

- Předpoklad: V Gaussově eliminaci neprohazujeme řádky.
- Používáme tedy matice

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{ij}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & -\alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Převedeme A na odstupňovaný tvar:

$$E_k \dots E_1 A = \mathrm{RREF}(A) = U.$$

2. Nyní vyjádříme (dolní trojúhelníkové matice jsou uzavřené na inverze i součiny)

$$A = \underbrace{E_1^{-1} \dots E_k^{-1}}_{L} U.$$

LU rozklad – efektivní implementace

- Obě matice L a U můžeme udržovat v jedné matici.
- Stačí při úpravě matice A místo nul pod diagonálou zapisovat koeficienty $(-\alpha)$ z elementárních úprav s maticí $E_{ij}(\alpha)$.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Tedy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

LU rozklad – použití pro řešení soustav rovnic

Použití LU rozkladu pro řešení $Ax = b$ (tedy $LUx = b$):

1. Najdi LU rozklad matice A, tj. $A = LU$,
2. vyřeš soustavu $Ly = b$ dopřednou substitucí,
3. vyřeš soustavu $Ux = y$ zpětnou substitucí.

Příklad

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ -6 & -2 & -12 & -2 \end{array}\right)$$

2.

$$\left(L \mid b\right) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow y = (-1, 7, 2)^T$$

3.

$$\left(U \mid y\right) = \left(\begin{array}{lrr|r} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow x = (5, -8, -1)^T$$

LU rozklad – co prohazování řádků?

- LU rozklad neexistuje pro každou matici, například pro

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Musíme umožnit prohazovat řádky.

Tvrzení

Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje LU rozklad matice $PA = LU$, kde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je vhodná permutační matice.

- permutační matice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ odpovídající permutaci $p \in S_n$ je definovaná

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = p(j) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- permutační matice způsobuje permutaci řádků matice A

Následující téma

Grupy

Snaha sjednotit strukturální vlastnosti různých matematických objektů (čísla, polynomy, geometrické útvary, ...) a pracovat s nimi jednotným způsobem.

Definice (Grupa)

Buď $\circ\colon G^2 \to G$ binární operace na množině G. Pak *grupa* je dvojice $(G, \circ)$ splňující:

(1) $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (asociativita)

(2) $\exists e \in G \; \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$ (existence neutrálního prvku)

(3) $\forall a \in G \; \exists b \in G : a \circ b = b \circ a = e$ (existence inverzního prvku)

Abelova (komutativní) grupa je taková grupa, která navíc splňuje:

(4) $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$ (komutativita).

Implicitně je tam schovaná podmínka:

- $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$ (uzavřenost).

Příklady grup

Abelovy grupy

- celá čísla $(\mathbb{Z}, +)$, racionální čísla $(\mathbb{Q}, +)$, reálná čísla $(\mathbb{R}, +)$ a komplexní čísla $(\mathbb{C}, +)$.

  Neutrálním prvkem je 0, inverzním prvkem k prvku a je $-a$.
- Grupy matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$.
- Konečná grupa $(\mathbb{Z}_n, +)$, kde množina $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ a sčítání modulo n.
- Číselné obory s násobením, např. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

  Nulu musíme vynechat, protože nemá inverzní prvek.

  Neutrálním prvkem je 1, inverzním prvkem k prvku a je a^{-1}.
- Množina reálných polynomů proměnné x se sčítáním.

Příklady grup

Neabelovské grupy

- Vzájemně jednoznačná zobrazení na množině s operací skládání (rotace atp.)
  Neutrálním prvkem je identita (otočení o nulový úhel), inverzním prvkem je inverzní zobrazení (otočení zpět).
- Regulární matice pevného řádu n s násobením (tzv. maticová grupa).
  Neutrálním prvkem je I_n, inverzním prvkem k matici A je inverzní matice A^{-1}.

Negrupy

- $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$, ...

Vlastnosti grup

Tvrzení (Základní vlastnosti v grupě)

Pro prvky grupy $(G, \circ)$ platí následující vlastnosti.

1. $a \circ c = b \circ c$ *implikuje* $a = b$ *(tzv. krácení),*
2. *neutrální prvek* e *je určen jednoznačně,*
3. *pro každé* $a \in G$ *je jeho inverzní prvek určen jednoznačně,*
4. *rovnice* $a \circ x = b$ *má právě jedno řešení pro každé* $a, b \in G$*,*
5. $(a^{-1})^{-1} = a$*,*
6. $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$*.*

Důkaz.

1.
$$\begin{aligned} a \circ c &= b \circ c \qquad / \circ c^{-1} \text{ zprava} \\ a \circ (c \circ c^{-1}) &= b \circ (c \circ c^{-1}) \\ a \circ e &= b \circ e \\ a &= b \end{aligned}$$

$\square$

Podgrupy

Definice (Podgrupa)

Podgrupa grupy $(G, \circ)$ je grupa $(H, \diamond)$ taková, že $H \subseteq G$ a pro všechna $a, b \in H$ platí $a \circ b = a \diamond b$. Značení: $(H, \diamond) \leq (G, \circ)$.

- Ekvivalentně musí platit vlastnosti uzavřenost a existence neutrálního a inverzního prvku

Příklad

- Každá grupa $(G, \circ)$ má dvě triviální podgrupy: sama sebe $(G, \circ)$ a $(\{e\}, \circ)$.
- $(\mathbb{N}, +) \not\leq (\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$.

Otázka

- Jsou podgrupy uzavřené na průnik? Na sjednocení?

Évariste Galois (1811–1832)

- Zakladatel teorie grup.
- Pro kořeny polynomů stupně ≥ 5 neexistuje vzoreček (Abel, 1824).
- Galoisova teorie dává návod, jak to otestovat pro konkrétní polynom.

  Nelze např. pro polynom $x^5 - 2x - 1$.

Poslední dopis od Galoise

Následující téma

Permutace

Definice (Permutace)

Permutace na konečné množině X je vzájemně jednoznačné zobrazení $p\colon X \to X$.

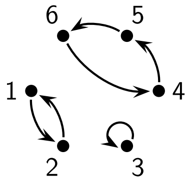
- Většinou budeme uvažovat $X = \{1, \ldots, n\}$
- Množina všech permutací na množině $\{1, \ldots, n\}$ se značí S_n

Zadání permutace je možné například:

- Tabulkou

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- Grafem



- Rozložením na cykly: $p = (1,2)(3)(4,5,6)$
  nebo zkráceně $p = (1,2)(4,5,6)$ vynecháním cyklů délky 1.

Operace s permutacemi

Příklady

- identita *id*
- *transpozice* $t = (i, j)$, prohazující dva prvky

Definice (Inverzní permutace)

Buď $p \in S_n$. *Inverzní permutace* k p je permutace p^{-1} definovaná $p^{-1}(i) = j$, pokud $p(j) = i$.

- $(i, j)^{-1} = (i, j), \; (i, j, k)^{-1} = (k, j, i), \; \ldots$

Definice (Skládání permutací)

Buďte $p, q \in S_n$. *Složená permutace* $p \circ q$ je permutace definovaná

$$(p \circ q)(i) = p(q(i)).$$

- $id \circ p = p \circ id = p, \; p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = id, \; \ldots$
- Skládání permutací je asociativní, ale ne komutativní.
  Například $p = (1, 2), \; q = (1, 3, 2)$

Znaménko permutace

Definice (Znaménko permutace)

Nechť se permutace $p \in S_n$ skládá z k cyklů. Pak *znaménko permutace* je číslo $sgn(p) = (-1)^{n-k}$.

- $sgn(id) = 1$, $sgn((i,j)) = -1$, ...
- permutace *sudé* (znaménko 1) a *liché* (znaménko -1).

Věta (O znaménku složení permutace a transpozice)

Buď $p \in S_n$ a buď $t = (i,j)$ transpozice. Pak

$$sgn(p) = -\,sgn(t \circ p) = -\,sgn(p \circ t).$$

Důkaz. Dokážeme $sgn(p) = -\,sgn(t \circ p)$, zbytek analogický.

1. i, j jsou částí stejného cyklu $(i, u_1, \dots, u_r, j, v_1, \dots, v_s)$.
   Pak počet cyklů se zvýší o jedna.
2. i, j náleží do dvou různých cyklů $(i, u_1, \dots, u_r)(j, v_1, \dots, v_s)$.
   Pak počet cyklů se sníží o jedna. $\square$

Znaménko permutace

Věta

Každou permutaci lze rozložit na složení transpozic.

Důkaz.

Rozložíme na transpozice postupně všechny cykly permutace.

$$(u_1, \dots, u_r) = (u_1, u_2) \circ (u_2, u_3) \circ (u_3, u_4) \circ \dots \circ (u_{r-1}, u_r). \quad \square$$

Důsledek

Platí $sgn(p) = (-1)^r$, kde r je počet transpozic při rozkladu p.

Důsledek

Buď $p, q \in S_n$. Pak $sgn(p \circ q) = sgn(p)\, sgn(q)$.

Důkaz. $sgn(p)\, sgn(q) = (-1)^{r_1}(-1)^{r_2} = (-1)^{r_1+r_2} = sgn(p \circ q)$. $\square$

Důsledek

Buď $p \in S_n$. Pak $sgn(p) = sgn(p^{-1})$.

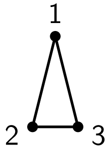
Důkaz. Plyne z $1 = sgn(id) = sgn(p \circ p^{-1}) = sgn(p)\, sgn(p^{-1})$. $\square$

Symetrická grupa

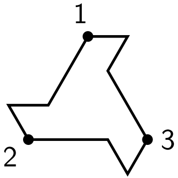
- $(S_n, \circ)$ tvoří nekomutativní grupu (tzv. *symetrickou grupu*)
- každá konečná grupa je isomorfní nějaké podgrupě $(S_n, \circ)$

Grupa $(S_n, \circ)$ a její podgrupy popisují symetrie různých objektů:

- symetrie podle svislé osy . . . permutace $(2, 3)$
  podobnost se sebou samým . . . permutace *id*

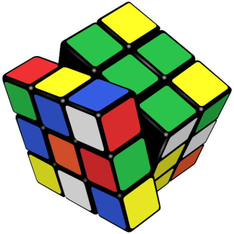


- Symetrie jsou rotace o 0°, 120° a o 240°.
  Odpovídají permutacím
  id, $(1, 2, 3)$ a $(1, 3, 2)$.



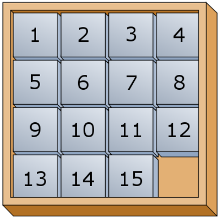
Symetrická grupa a aplikace

- Ve fyzice dokázaly symetrie předpovědět existenci několika elementárních částic.
  Např. baryon Ω^- fyzikem Murray Gell-Mannem v roce 1962.
- Analýza hlavolamů.



Rubikova kostka

[https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4771790]



Loydova patnáctka.

[https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=103351]

Následující téma

Tělesa

Definice (Těleso)

Těleso je množina $\mathbb{T}$ spolu se dvěma komutativními binárními operacemi $+$ a $\cdot$ splňující

(1) $(\mathbb{T}, +)$ je Abelova grupa,
neutrální prvek značíme 0 a inverzní k a pak $-a$,

(2) $(\mathbb{T} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa,
neutrální prvek značíme 1 a inverzní k a pak a^{-1},

(3) $\forall a, b, c \in \mathbb{T}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivita).

- Například $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$
- Tělesem není $\mathbb{Z}$ nebo floating-point čísla v počítači.
- Každé těleso má alespoň dva prvky, $0 \neq 1$.
- odčítání: $a - b \equiv a + (-b)$, dělení: $a/b \equiv ab^{-1}$.
- Proč jsme v definici tělesa požadovali komutativitu operací?

Vlastnosti těles

Tvrzení (Základní vlastnosti v tělese)

Pro prvky tělesa platí následující vlastnosti:

1. $0a = 0$,
2. $ab = 0$ *implikuje, že* $a = 0$ *nebo* $b = 0$,
3. $-a = (-1)a$.

Důkaz.

1. Odvodíme

$$\begin{aligned} 0a &= 0 + 0a = -(0a) + 0a + 0a \\ &= -(0a) + (0 + 0)a = -(0a) + 0a = 0. \end{aligned} \qquad \square$$

Poznámka

Nad tělesem pracujeme tedy podobně jako nad $\mathbb{R}$.
$(Ax = b, A^{-1}, \dots)$

Konečná tělesa

Množina $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ s operacemi $+, \cdot$ modulo n

- Je to těleso?
- Víme, že $(\mathbb{Z}_n, +)$ je Abelova grupa.
- $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ je těleso.
  - $0, 1$ odpovídá bitům,
  - sčítání odpovídá operaci XOR,
  - násobení operaci AND.
- $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ je těleso.
- $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ není těleso, neexistuje 2^{-1}.
- $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ je těleso.
- Je obecné pravidlo?

Těleso $\mathbb{Z}_5$

Operace nad $\mathbb{Z}_5$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Inverzní prvky:

x	0	1	2	3	4
$-x$	0	4	3	2	1

x	0	1	2	3	4
x^{-1}	$-$	1	3	2	4

Konečná tělesa

Lemma

Buď n prvočíslo a $0 \neq a \in \mathbb{Z}_n$. Při násobení modulo n platí

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} = \{0a, 1a, \ldots, (n-1)a\}.$$

- V množině $\{0a, 1a, \ldots, (n-1)a\}$ se objeví všechna čísla $0, 1, \ldots, n-1$ (zpřeházeně) a každé z nich právě jednou.

Důkaz.

Sporem předpokládejme, že $ak = a\ell$ pro nějaké $k, \ell \in \mathbb{Z}_n$, $k \neq \ell$. Pak dostáváme $a(k-\ell) = 0$, tudíž buď a nebo $k - \ell$ je dělitelné n. To znamená buď $a = 0$ nebo $k - \ell = 0$. Spor. □

Věta

$\mathbb{Z}_n$ je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

Důkaz.

Je-li n složené, pak $n = pq$, $p, q > 1$. Proto p^{-1} neexistuje.
Je-li n prvočíslo, $a \neq 0$, pak inverze a^{-1} existují dle lemmatu. □

Matice nad tělesy

Matice nad tělesy

- $\mathbb{T}^{m\times n}$ ... množina matic $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{T}$
- operace s maticemi, soustavy rovnic jako nad $\mathbb{R}$

Inverze matice nad $\mathbb{Z}_5$

$$(A\,|\,I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) = \left(I_3\,|\,A^{-1}\right)$$

Konečná tělesa

- $\mathbb{Z}_p$ je těleso pro p prvočíslo. Existují jiná konečná tělesa?

Věta (O velikosti konečných těles)

Existují konečná tělesa právě o velikostech p^n, kde p je prvočíslo a $n \geq 1$.

Jak sestrojit těleso o velikosti p^n?

- Značíme GF(p^n) ... Galois field
- Prvky jsou polynomy stupně nanejvýš $n-1$ s koeficienty v tělese $\mathbb{Z}_p$,
$$GF(p^n) = \{a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0;\, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}_p\}.$$
- Sčítání klasicky.
  Násobení modulo pevný ireducibilní polynom stupně n.
- Každé konečné těleso velikosti p^n je isomorfní s $GF(p^n)$.

Těleso GF(8)

- Množina:
$$GF(8) = \{0,\ 1,\ x,\ x+1,\ x^2,\ x^2+1,\ x^2+x, x^2+x+1\}$$
- Sčítání:
$$\begin{aligned}(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)\\ = (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)\end{aligned}$$
př.: $(x+1) + (x^2+x) = x^2+1.$
- Násobení: modulo ireducibilní polynom, např. x^3+x+1

  př.: $x^2 \cdot x = -x - 1 = x + 1$

  př.: $x^2 \cdot (x^2+1) = -x = x$

Malá Fermatova věta

Věta (Malá Fermatova věta)

Buď p prvočíslo a buď $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$. Pak v tělese $\mathbb{Z}_p$:

$$a^{p-1} = 1.$$

Důkaz.

Podle lemmatu je $\{0, 1, \ldots, p-1\} = \{0a, 1a, \ldots, (p-1)a\}$.

Protože $0 = 0a$, platí $\{1, \ldots, p-1\} = \{1a, \ldots, (p-1)a\}$.

Tudíž $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) = (1a) \cdot (2a) \cdot (3a) \cdot \ldots \cdot (p-1)a$.

Nyní zkrať obě strany čísly $1, 2, \ldots, p-1$. $\square$

Příklad

Jaká je hodnota 2^{111} v tělese $\mathbb{Z}_{11}$?

Podle Malé Fermatovy věty je $2^{10} = 1$, tudíž i $2^{110} = 1$. Proto

$$2^{111} = 2^{110+1} = 2^{110} 2^1 = 2.$$

- Aplikace: Pravděpodobnostní test prvočíselnosti.

Charakteristika tělesa

Definice (Charakteristika tělesa)

Charakteristika tělesa $\mathbb{T}$ je nejmenší n takové, že

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0.$$

Pokud takové n neexistuje, pak ji definujeme jako 0.

- tělesa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$ mají charakteristiku 0, těleso $\mathbb{Z}_p$ ji má p

Tvrzení

Charakteristika tělesa je buď nula, nebo prvočíslo.

Důkaz. Pokud by byla charakteristika $n = pq$, pak

$$0 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n=pq} = (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p})(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{q}), \qquad \square$$

Poznámka (průměr, není-li charakteristika 2)

- Označme $2 := 1 + 1$. Pro $a, b \in \mathbb{T}$ lze zavést $p = \frac{1}{2}(a + b)$.
- Příklad: průměr 0 a 1 nad $\mathbb{Z}_2$ resp. $\mathbb{Z}_5$.

Samoopravné kódy

Doktor ohledal mrtvolu.

$\xrightarrow{\text{přenosový kanál}}$

Doktor ohlodal mrtvolu.

Samoopravné kódy

Hammingův kód (7,4,3): detekce a oprava jedné přenosové chyby

Vstupní 4 bity zakódujeme na 7 vynásobením generující maticí $H \in \mathbb{Z}_2^{7\times 4}$.

$$\text{př.: } Ha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = b.$$

Kontrola po přijetí: $Db = 0$ v pořádku, jinak přenosová chyba.

$$\text{př.: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \text{v pořádku.}$$

$$\text{př.: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \text{chyba na posici } 110_2 = 6.$$

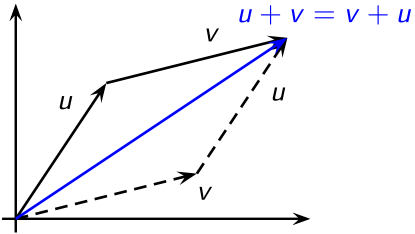
Následující téma

Motivace

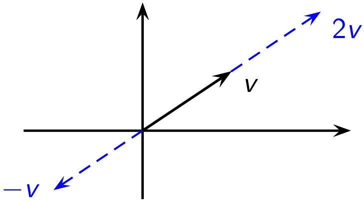
Aritmetické vektory

- $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$, dvě interpretace: bod nebo směrový vektor
- S vektory umíme následující operace:

Sčítání.



Násobení číslem.



Vektorový prostor

Definice (Vektorový prostor)

Buď $\mathbb{T}$ těleso s neutrálními prvky 0 pro sčítání a 1 pro násobení. *Vektorovým prostorem nad tělesem* $\mathbb{T}$ rozumíme množinu V s operacemi sčítání vektorů $+\colon V^2 \to V$, a násobení vektoru skalárem $\cdot\colon \mathbb{T} \times V \to V$ splňující pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, $u, v \in V$:

(1) $(V, +)$ je Abelova grupa.
Neutrální prvek značíme o a inverzní k v pak $-v$,

(2) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (asociativita),

(3) $1v = v$,

(4) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributivita),

(5) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributivita).

- Prvky vektorového prostoru V jsou *vektory*, značíme latinkou.
- Prvky tělesa $\mathbb{T}$ jsou *skaláry*, značíme řeckými písmeny.
- Vektory píšeme bez šipek, tedy v a ne $\vec{v}$.

Vektorový prostor – příklady

Příklady vektorových prostorů:

- Aritmetický prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.
- Obecněji $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T}$ je libovolné těleso.
  Axiomy vektorového prostoru pak vyplývají z vlastností tělesa.
- Prostor matic $\mathbb{R}^{m \times n}$ nad $\mathbb{R}$, či obecněji $\mathbb{T}^{m \times n}$ nad $\mathbb{T}$.
  Axiomy vektorového prostoru plynou z vlastností matic a těles.
- Prostor $\mathcal{P}$ reálných polynomů proměnné x.
- Prostor $\mathcal{P}^n$ polynomů z $\mathcal{P}$ stupně nanejvýš n.
- Prostor reálných funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, který značíme $\mathcal{F}$.
- Prostor $\mathcal{C}$ spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Prostor $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých funkcí $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$.

Vektorový prostor $\mathbb{T}^{m\times n}$

Prvky:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ kde } a_{ij} \in \mathbb{T}.$$

Sčítání:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & \dots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Násobení skalárem $\alpha \in \mathbb{T}$:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a_{11}) & (\alpha a_{12}) & \dots & (\alpha a_{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha a_{m1}) & (\alpha a_{m2}) & \dots & (\alpha a_{mn}) \end{pmatrix}$$

Nulový vektor a opačný vektor:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vektorový prostor $\mathcal{P}^n$

Prvky: reálné polynomy $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{R}$.

Sčítání:

$$\begin{aligned} &(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \\ &+(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) = \\ &= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

Násobení skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\alpha(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ &= (\alpha a_n) x^n + (\alpha a_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (\alpha a_1) x + (\alpha a_0) \end{aligned}$$

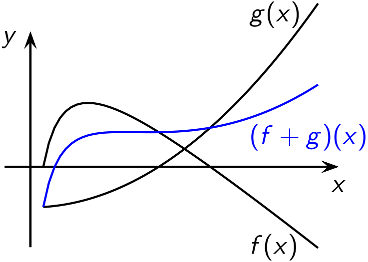
Nulový vektor: 0

Opačný vektor:

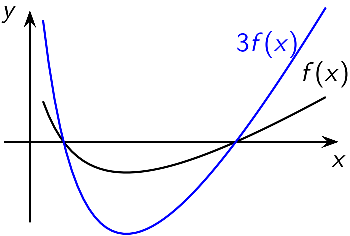
$$\begin{aligned} &-(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ &= (-a_n) x^n + (-a_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (-a_1) x + (-a_0) \end{aligned}$$

Vektorový prostor $\mathcal{F}$

Prvky: reálné funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Součet vektorů.



Vynásobení vektoru skalárem.

Vektorové prostory – vlastnosti

Tvrzení (Základní vlastnosti vektorových prostorů)

Ve vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ platí pro každý skalár $\alpha \in \mathbb{T}$ a vektor $v \in V$:

1. $0v = o$,
2. $\alpha o = o$,
3. $\alpha v = o$ *implikuje, že* $\alpha = 0$ *nebo* $v = o$,
4. $(-1)v = -v$.

Důkaz.

Analogicky jako u vlastností v tělese. $\square$

Vektorové podprostory

Definice (Podprostor)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak $U \subseteq V$ je *podprostorem* prostoru V, pokud tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ se stejně definovanými operacemi.

Značení: $U \Subset V$.

Tvrzení

Buď U podmnožina vektorového prostoru V nad $\mathbb{T}$. Pak U je podprostorem V právě tehdy, když platí:

1. $o \in U$,
2. $\forall u, v \in U : u + v \in U$,
3. $\forall \alpha \in \mathbb{T}\ \forall u \in U : \alpha u \in U$.

Důkaz.

Uzavřenost na opačné vektory: $-v = (-1)v$. $\square$

Vektorové podprostory – příklady

Příklady vektorových podprostorů:

- Dva triviální podprostory prostoru V jsou: V a $\{o\}$.
- Libovolná přímka v rovině procházející počátkem je podprostorem $\mathbb{R}^2$, jiná ne.
- $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{P} \Subset \mathcal{C} \Subset \mathcal{F}$.
- Množina symetrických reálných matic řádu n je podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{Q}$ není podprostorem prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.

Některé vlastnosti vektorových podprostorů:

- $(U, V \Subset W \ \wedge \ U \subseteq V) \ \Rightarrow \ U \Subset V$.
- "Býti podprostorem" je transitivní: $U \Subset V \Subset W \ \Rightarrow \ U \Subset W$.

Vektorové podprostory a jejich vlastnosti

Tvrzení (Průnik podprostorů)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme V_i, $i \in I$, libovolný systém podprostorů V. Pak $\bigcap_{i \in I} V_i$ je opět podprostor V.

Důkaz.

Stačí ověřit tři vlastnosti:

- Protože $o \in V_i$ pro každé $i \in I$, musí být i v jejich průniku.
- Uzavřenost na sčítání: Buď $u, v \in \bigcap_{i \in I} V_i$, tj. pro každé $i \in I$ je $u, v \in V_i$, tedy i $u + v \in V_i$. Proto $u + v \in \bigcap_{i \in I} V_i$.
- Analogicky uzavřenost na násobky. $\square$

- Otázka: Jsou podprostory uzavřené na sjednocení?

Lineární obal

- Předchozí vlastnost opravňuje k následující definici.

Definice (Lineární obal)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak *lineární obal množiny* $W \subseteq V$ je průnik všech podprostorů V obsahujících W,

$$span(W) = \bigcap_{U : W \subseteq U \Subset V} U.$$

- Lineární obal množiny W je nejmenší prostor obsahující W.
- Pokud W je podprostorem prostoru V, pak $W = span(W)$.

Příklady lineárních obalů v prostoru $\mathbb{R}^2$

- $span\{(1,0)^T\}$,
- $span\{(1,0)^T, (2,0)^T\}$,
- $span\{(1,1)^T, (1,2)^T\}$,
- $span\{\}$.

Generátory prostoru

Definice (Generátory a konečně generovaný prostor)

Nechť vektorový prostor U je lineárním obalem množiny vektorů W, tedy $U = span(W)$.

Pak říkáme, že W *generuje* prostor U, a prvky množiny W jsou *generátory* prostoru U.

Prostor U se nazývá *konečně generovaný*, jestliže je generovaný nějakou konečnou množinou vektorů.

Příklad

- $\mathbb{R}^2 = span\{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ je konečně generovaný
- $span\{(1,0)^T\} = span\{(2,0)^T\} = span\{(1,0)^T, (2,0)^T\}$
- $\mathcal{P}$ nebo $\mathcal{F}$ nejsou konečně generované
- snaha o minimální reprezentaci (povede později k pojmu báze)

Lineární kombinace

- Vektory umíme sčítat a násobit skalárem.
  Iterujme tyto operace.

Definice (Lineární kombinace)

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak *lineární kombinací* vektorů $v_1, \ldots, v_n$ rozumíme libovolný výraz typu

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \text{ kde } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}.$$

- Lineární kombinace konečně mnoha vektorů.
- Lineární kombinace je výraz i výsledný vektor.
- Co znamená $v_1, \ldots, v_n$?

  Buďto n vektorů, anebo složky aritmetického vektoru $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

Lineární kombinace

- Pomocí lineárních kombinací můžeme vygenerovat celý lineární obal konečné množiny vektorů.

Věta

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, a mějme $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak

$$span\{v_1, \ldots, v_n\} = \{\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}\}.$$

Důkaz.

Inkluze "$\supseteq$". $span\{v_1, \ldots, v_n\}$ je podprostor, musí být uzavřený na součty a násobky.

Inkluze "$\subseteq$". Stačí ukázat, že množina M je podprostor V, kde

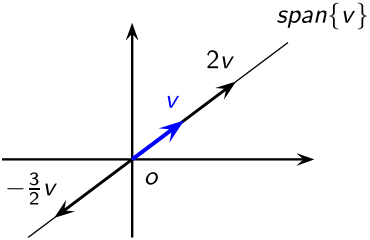
$$M := \{\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}\}.$$

Obsahuje o a je uzavřená na součty a násobky. $\square$

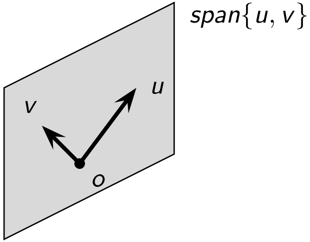
- Dvojí pohled na lineární obal.

Lineární kombinace – ilustrace

Lineární obal jednoho vektoru v. Dán množinou všech jeho lineárních kombinací, tedy násobků.



Lineární obal dvou vektorů u, v (s různými směry) v prostoru $\mathbb{R}^3$ představuje rovinu.



Lineární kombinace a soustava $Ax = b$

Uvažujme soustavu $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{T}^m$.

Horizontální pohled na soustavu

- každá rovnice popisuje nadrovinu v $\mathbb{R}^n$,
- cílem je najít průnik nadrovin.

Vertikální pohled na soustavu

- $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinace sloupců matice
- řešit soustavu $Ax = b$ znamená hledat lineární kombinaci sloupců, která se rovná b
- Řešení existuje $\Leftrightarrow$ $b \in span\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$.

Lineární kombinace a součin matic AB

Víme $(AB)_{*j} = AB_{*j} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} A_{*k}$.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & b_{pj} & \dots \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_{*1} & A_{*2} & \dots & A_{*p} \\ | & | & & | \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & | & \\ \dots & (AB)_{*j} & \dots \\ & | & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- Každý sloupec matice AB je lineární kombinací sloupců A.
- Každý řádek matice AB je lineární kombinací řádků B.

Následující téma

Lineární nezávislost

Definice (Lineární nezávislost)

Vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ jsou *lineárně nezávislé*, pokud rovnost $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = o$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

V opačném případě jsou vektory *lineárně závislé*.

Příklady lineárně (ne)závislých vektorů v $\mathbb{R}^2$:

- $(1,0)^T$ je lineárně nezávislý,
- $(1,0)^T$, $(2,0)^T$ jsou lineárně závislé,
- $(1,1)^T$, $(1,2)^T$ jsou lineárně nezávislé,
- $(1,0)^T$, $(0,1)^T$, $(1,1)^T$ jsou lineárně závislé,
- $(0,0)^T$ je lineárně závislý,
- prázdná množina je lineárně nezávislá.

Příklad

- Sloupce regulární matice ($Ax = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$).

Lineární nezávislost

Věta

Vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ *jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *takové, že*

$$v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$$

pro nějaké $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$.

- Jinými slovy, lineární závislost znamená, že pro určité k platí

$$v_k \in span\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

Důkaz.

Implikace "$\Rightarrow$". Buď $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = o$, kde $\beta_k \neq 0$ pro nějaké k.

Pak $\beta_k v_k = -\sum_{i \neq k} \beta_i v_i$.

Po zkrácení $v_k = \sum_{i \neq k} (-\beta_k^{-1} \beta_i) v_i$.

Implikace "$\Leftarrow$". Je-li $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$, pak $v_k - \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i = o$. $\square$

Lineární nezávislost

Důsledek

Vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ *jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje* $k \in \{1, \dots, n\}$ *takové, že*

$$span\{v_1, \dots, v_n\} = span\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

- Vektory jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ odebráním libovolného z nich se lineární obal zmenší (není mezi nimi žádný nadbytečný).

Důkaz.

Implikace "$\Rightarrow$". Nechť $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$ a dokážeme inkluzi "$\subseteq$":

$$u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \beta_k v_k + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = \beta_k \left(\sum_{i \neq k} \alpha_i v_i\right) + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i$$
$$= \sum_{i \neq k} (\beta_k \alpha_i + \beta_i) v_i \in span\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

Implikace "$\Leftarrow$". Z předchozí věty, neboť

$$v_k \in span\{v_1, \dots, v_n\} = span\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\} \qquad \square$$

- Vektory $(2,3)^T, (2,1)^T, (4,2)^T \in \mathbb{R}^2$ a volba k

Báze

Definice (Báze)

Bází prostoru V je lineárně nezávislý systém generátorů V.

- Báze je tedy minimální systém generátorů prostoru V.
- Systémem vektorů rozumíme uspořádanou množinu vektorů, ale budeme psát $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Příklady bází

- V $\mathbb{R}^2$ např. $e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$. Nebo $(7,5)^T$, $(2,3)^T$.
- V $\mathbb{R}^n$ např. *kanonická* báze $e_1, \ldots, e_n$, značí se kan.
- V $\mathcal{P}^n$ např. $1, x, x^2, \ldots, x^n$, neboť každý $p \in \mathcal{P}^n$ je tvaru
$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$
Bernsteinova báze: $\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- V $\mathcal{P}$ je bází např. nekonečný systém polynomů $1, x, x^2, \ldots$
- V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ také existuje báze, ale těžké vyjádřit.

Báze a souřadnice

Věta

Buď $v_1, \dots, v_n$ *báze prostoru* V*. Pro každý vektor* $u \in V$ *existují jednoznačné koeficienty* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ *takové, že* $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$*.*

Důkaz.

"Existence." Díky tomu, že vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi prostoru V.

"Jednoznačnost." Sporem nechť $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$.
Potom $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = o$.
Z lineární nezávislosti musí $\alpha_i = \beta_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. □

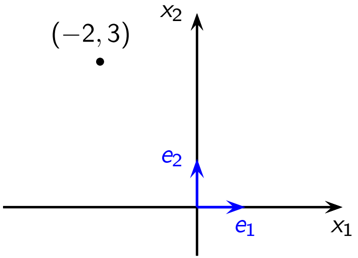
Definice (Souřadnice)

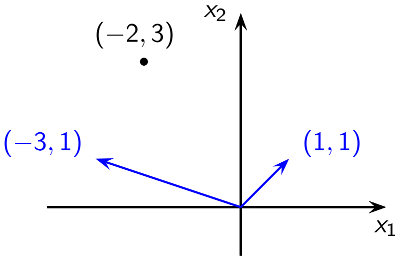
Buď $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ báze prostoru V a nechť $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.
Pak *souřadnicemi* vektoru u vzhledem k bázi B rozumíme koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a značíme

$$[u]_B := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

- Umožňuje reprezentovat obecné vektory pomocí souřadnic, tedy aritmetických vektorů.

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi – příklady





Souřadnice vektoru $(-2,3)$ vzhledem ke kanonické bázi:

$$[(-2,3)]_{\mathrm{kan}} = (-2,3)$$

Souřadnice vektoru $(-2,3)$ vzhledem k bázi $B = ((-3,1),(1,1))$:

$$[(-2,3)]_B = (\tfrac{5}{4}, \tfrac{7}{4})$$

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi – příklady

- Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ je $[v]_{\mathrm{kan}} = v$.

  Důkaz. Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ má vyjádření $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$.
- Uvažujme bázi $B = \{1, x, x^2\}$ prostoru $\mathcal{P}^2$.
  Pak $[3x^2 - 5]_B = (-5, 0, 3)^T$.
- Obecně $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{P}^n$ má vůči bázi $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ souřadnice $[p(x)]_B = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$.
- Buď $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ báze prostoru V. Potom

$$[v_1]_B = (1, 0, \ldots, 0)^T = e_1, \quad [v_2]_B = e_2, \ldots, \quad [v_n]_B = e_n.$$

Tvrzení

Pro vektory $u, v \in V$, skalár $\alpha \in \mathbb{T}$, bázi B prostoru V platí

$$[u + v]_B = [u]_B + [v]_B,$$
$$[\alpha v]_B = \alpha [v]_B.$$

- Tedy souřadnice zachovávají strukturu a vazby mezi vektory (lineární kombinace, závislost, nezávislost).

Existence báze

Věta (O existenci báze)

Každý vektorový prostor má bázi.

Důkaz. (Jen pro konečně generovaný prostor V.)
Buď $v_1, \ldots, v_n$ systém generátorů prostoru V.

Jsou-li vektory lineárně nezávislé, tak už tvoří bázi.

Jinak existuje index k tak, že

$$span\{v_1, \ldots, v_n\} = span\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

Odstraníme v_k a opakujeme dokud nenajdeme bázi. □

- Ukážeme, že pro konečně generovaný prostor jsou všechny jeho báze stejně velké. To povede k zavedení pojmu dimenze.

Steinitzova věta o výměně

Lemma (O výměně)

Nechť $y_1, \ldots, y_n$ *generují prostor* V *a buď* $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \in V$.
Pokud $\alpha_k \neq 0$, *pak* $y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \ldots, y_n$ *generují* V.

Důkaz.

Ze vztahu $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ vyjádříme $y_k = \frac{1}{\alpha_k}(x - \sum_{i \neq k} \alpha_i y_i)$.
Pro každé $z \in V$ lze psát

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^n \beta_i y_i = \beta_k y_k + \sum_{i \neq k} \beta_i y_i = \\ &= \frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big(x - \sum_{i \neq k} \alpha_i y_i\Big) + \sum_{i \neq k} \beta_i y_i = \\ &= \frac{\beta_k}{\alpha_k} x + \sum_{i \neq k} \Big(\beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\alpha_i\Big) y_i. \end{aligned}$$

□

- Uvažujme vektory $y_1 = (1, 2)^T$, $y_2 = (3, 5)^T$, $x = (2, 4)^T$.
  Pak $\mathbb{R}^2 = span\{y_1, y_2\} = span\{x, y_2\} \neq span\{y_1, x\}$

Steinitzova věta o výměně

Věta (Steinitzova věta o výměně)

Buď V vektorový prostor, buď $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V, a nechť $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů V. Pak platí

1. $m \leq n$,
2. *existují navzájem různé indexy $k_1, \ldots, k_{n-m}$ takové, že*

$$span\{x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}\} = V.$$

Důkaz (1.).

Indukcí podle m. Pro $m = 0$ tvrzení platí triviálně.

Indukční krok "$m \leftarrow (m-1)$." Z předpokladu je

$$m - 1 \leq n, \quad span\{x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}\} = V.$$

Kdyby $m - 1 = n$, pak by $span\{x_1, \ldots, x_{m-1}\} = V \ni x_m$.

To je spor s lineární nezávislostí $x_1, \ldots, x_m$. Tudíž $m \leq n$. $\square$

Steinitzova věta o výměně

Věta (Steinitzova věta o výměně)

Buď V vektorový prostor, buď $x_1, \ldots, x_m$ lineárně nezávislý systém ve V, a nechť $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů V. Pak platí

1. *$m \leq n$,*
2. *existují navzájem různé indexy $k_1, \ldots, k_{n-m}$ takové, že*

$$span\{x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}\} = V.$$

Důkaz (2.).

Uvažujme lineární kombinaci

$$x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m+1} \beta_j y_{\ell_j}.$$

Kdyby $\beta_1 = \ldots = \beta_{n-m+1} = 0$, pak dostáváme spor s lineární nezávislostí vektorů $x_1, \ldots, x_m$.

Proto existuje $\beta_k \neq 0$. Nakonec aplikuj lemma o výměně. $\square$

Dimenze

Důsledek

Všechny báze konečně generovaného vektorového prostoru V jsou stejně velké.

Důkaz.

Buďte $x_1, \ldots, x_m$ a $y_1, \ldots, y_n$ dvě báze prostoru V.

- $x_1, \ldots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a $y_1, \ldots, y_n$ generují V. Tedy $m \leq n$.
- $y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a $x_1, \ldots, x_m$ generují V. Tedy $n \leq m$. □

Definice (Dimenze)

Dimenze konečně generovaného vektorového prostoru V je velikost nějaké jeho báze. Značíme $\mathit{dim}\, V$.

Dimenze prostoru, který není konečně generovaný, je ∞.

Dimenze – příklady

Dimenze konečně generovaných vektorových prostorů:

- $dim\, \mathbb{R}^n = n$
- $dim\, \mathbb{R}^{m \times n} = mn$
- $dim\, \{o\} = 0$
- $dim\, \mathcal{P}^n = n + 1$

Nekonečně generované vektorové prostory ($dim = \infty$):

- $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$, nebo prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$

Nadále uvažujeme pouze konečně generované vektorové prostory.

Vztah počtu prvků systému k dimenzi

Tvrzení (Vztah počtu prvků systému k dimenzi, 1/2)

Nechť $x_1, \ldots, x_m \in V$ *jsou lineárně nezávislé. Pak* $m \leq \dim V$.

Pokud $m = \dim V$*, potom* $x_1, \ldots, x_m$ *je báze.*

Důkaz.

Označme $d = \dim V$ a nechť $z_1, \ldots, z_d$ je báze prostoru V.

- Protože $x_1, \ldots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a $z_1, \ldots, z_d$ generátory V, tak podle Steinitzovy věty je $m \leq d$.
- Pokud $m = d$, pak dle Steinitzovy věty lze systém $x_1, \ldots, x_m$ doplnit o $d - m = 0$ vektorů na generátory prostoru V.
  Tedy jsou to nutně generátory a tím i báze. $\square$

- Báze je tedy maximální lineárně nezávislý systém (co do inkluze i co do počtu).

Vztah počtu prvků systému k dimenzi

Tvrzení (Vztah počtu prvků systému k dimenzi, 2/2)

Nechť $y_1, \ldots, y_n$ jsou generátory V. Pak $n \geq dim\, V$.

Pokud $n = dim\, V$, potom $y_1, \ldots, y_n$ je báze.

Důkaz.

Označme $d = dim\, V$ a nechť $z_1, \ldots, z_d$ je báze prostoru V.

- Protože $y_1, \ldots, y_n$ jsou generátory prostoru V a $z_1, \ldots, z_d$ lineárně nezávislé, tak podle Steinitzovy věty je $n \geq d$.
- Nechť $n = d$. Jsou-li $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislé, tvoří bázi.

  Pokud jsou lineárně závislé, pak lze jeden vynechat a získat systém generátorů o velikosti $n - 1$. Podle Steinitzovy věty pak $d \leq n - 1$, což je spor. □

- Báze je tedy minimální systém generátorů (co do inkluze i co do počtu).

Rozšíření lineárně nezávislého systému na bázi

Věta (Rozšíření lineárně nezávislého systému na bázi)

Každý lineárně nezávislý systém prostoru V lze rozšířit na bázi V.

Důkaz.

Nechť $x_1, \dots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a $z_1, \dots, z_d$ je báze V.
Podle Steinitzovy věty existují indexy $k_1, \dots, k_{d-m}$ takové, že

$$x_1, \dots, x_m, z_{k_1}, \dots, z_{k_{d-m}}$$

jsou generátory V. Je jich d, tedy je to báze V. $\square$

Dimenze podprostoru

Věta (Dimenze podprostoru)

Je-li W podprostorem prostoru V, pak $\dim W \leq \dim V$.
Pokud navíc $\dim W = \dim V$, tak $W = V$.

Důkaz.

Definujme množinu $M := \emptyset$. Pokud $span(M) = W$, jsme hotovi.

Jinak přidáme vektor $v \in W \setminus span(M)$ do M a postup opakujeme.

Množina M je lineárně nezávislá, proto její velikost $|M| \leq \dim(V)$.

Proces je tedy konečný.

Protože $span(M) = W$, množina M je bází W a $\dim W \leq \dim V$.

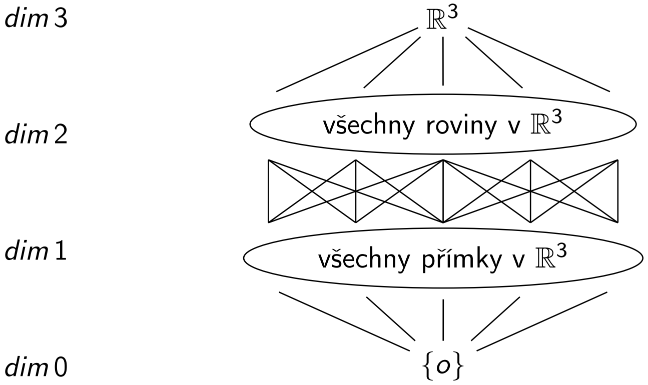
Je-li $\dim W = \dim V$, tak množina M je bází V, a tak $W = V$. $\square$

Příklad. Najděme všechny podprostory prostoru $\mathbb{R}^2$:

- dimenze 2: to je pouze $\mathbb{R}^2$,
- dimenze 1: všechny přímky procházející počátkem,
- dimenze 0: to je pouze $\{o\}$.

Struktura podprostorů

Struktura podprostorů prostoru $\mathbb{R}^3$



Spojení podprostorů

Definice (Spojení podprostorů)

Buďte $U, V \Subset W$. Pak *spojení podprostorů* U, V je definováno

$$U + V := \{u + v;\ u \in U, v \in V\}.$$

Tvrzení (Spojení podprostorů)

Buďte $U, V \Subset W$. Pak platí

$$U + V = span(U \cup V).$$

Důkaz.

Inkluze "$\subseteq$": Platí, neboť $span(U \cup V)$ je uzavřený na součty.
Inkluze "$\supseteq$": Stačí ukázat, že

- $U + V$ obsahuje prostory U, V,
- $U + V \Subset W$ (obsahuje o, je uzavřený na součty a násobky) . $\square$

Příklad

- $\mathbb{R}^2 = span\{e_1\} + span\{e_2\} = span\{e_1\} + span\{e_2\} + span\{(5,6)^T\}$,
- $\mathbb{R}^3 = span\{e_1, e_2\} + span\{e_3\} = span\{e_1, e_2\} + span\{e_2, e_3\}$.

Dimenze spojení a průniku

Věta (Dimenze spojení a průniku)

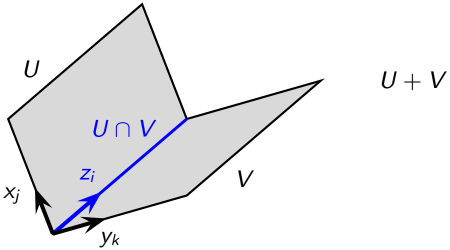
Buďte $U, V \Subset W$. Pak platí

$$dim(U + V) + dim(U \cap V) = dim\, U + dim\, V.$$

Důkaz (1/2). Buď $z_1, \ldots, z_p$ báze $U \cap V$.

- rozšíříme na $z_1, \ldots, z_p, x_1, \ldots, x_m$ bázi U
- rozšíříme na $z_1, \ldots, z_p, y_1, \ldots, y_n$ bázi V

Ukážeme, že $z_1, \ldots, z_p$, $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ tvoří bázi $U + V$.



Dimenze spojení a průniku

Věta (Dimenze spojení a průniku)

Buďte $U, V \Subset W$. Pak platí

$$dim\,(U+V) + dim\,(U \cap V) = dim\,U + dim\,V.$$

Důkaz (2/2).

"Generujícnost." Buď $z = u + v \in U + V$, kde $u \in U, v \in V$.

Tedy $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j$, $v = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i z_i + \sum_{k=1}^{n} \delta_k y_k$.

Potom $z = u + v = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \gamma_i) z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \delta_k y_k$.

"Lineární nezávislost."

Buď $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k = o$ a označme

$$z := \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k.$$

Protože $z \in U \cap V$, lze psát $z = \sum_{i=1}^{p} \delta_i z_i$.

Z rovnice $z = \sum_{i=1}^{p} \delta_i z_i = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$ plyne $\delta_i = \gamma_k = 0\ \forall i, k$.

Z rovnice $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = o$ plyne $\alpha_i = \beta_j = 0\ \forall i, j$. $\square$

Direktní součet podprostorů

Poznámka (Direktní součet podprostorů)

Je-li $U \cap V = \{o\}$, pak spojení podprostorů $W = U + V$ se nazývá *direktní součet* podprostorů U, V.

Značení: $W = U \oplus V$.

- $dim\,(U \oplus V) = dim\,U + dim\,V$
- každý vektor $w \in W$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$,
- např. $\mathbb{R}^2 = span\{e_1\} \oplus span\{e_2\}$,
- např. $\mathbb{R}^3 = span\{e_1\} \oplus span\{e_2, e_3\}$,
- ale nelze psát $\mathbb{R}^3 = span\{e_1, e_2\} \oplus span\{e_2, e_3\}$.

Následující téma

Maticové prostory

Definice (Maticové prostory)

Buď $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$. Pak definujeme

1. sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) := span\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
2. řádkový prostor $\mathcal{R}(A) := \mathcal{S}(A^T)$,
3. jádro $Ker(A) := \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = o\}$.

Poznámky

- $\mathcal{S}(A) = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\} \Subset \mathbb{T}^m$,
- $\mathcal{R}(A) = \{A^T y;\ y \in \mathbb{T}^m\} \Subset \mathbb{T}^n$.
- jádro $Ker(A)$ je podprostor $\mathbb{T}^n$:
  - obsahuje nulový vektor: $Ao = o$,
  - je uzavřené na součty:
    $$Ax = o,\ Ay = o \quad \Rightarrow \quad A(x+y) = Ax + Ay = o + o = o,$$
  - a na násobky: $Ax = o \ \Rightarrow \ A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha o = o$.
- Je-li $V \Subset \mathbb{T}^n$, pak $V = \mathcal{S}(A)$ pro vhodnou matici $A \in \mathbb{T}^{n \times m}$.

Maticové prostory

Příklad

Uvažme reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- sloupcový prostor je $\mathcal{S}(A) = \mathbb{R}^2$
- řádkový prostor je $\mathcal{R}(A) = span\{(1,1,1)^T, (0,1,0)^T\}$.
- jádro je množina řešení soustavy $Ax = o$, tedy

$$Ker(A) = \{(x_3, 0, -x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\} = span\{(1,0,-1)^T\}.$$

Zajímavost

- Platí $\mathbb{R}^3 = \mathcal{R}(A) \oplus Ker(A)$
- Navíc jsou oba prostory na sebe kolmé.

Prostory a násobení maticí zleva

Tvrzení (Prostory a násobení maticí zleva)

Buď $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$. Pak

1. *$\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$,*
2. *Pokud $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.*

Důkaz.

1. Stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Buď $x \in \mathcal{R}(QA)$, pak existuje $y \in \mathbb{T}^p$ tak, že $x = (QA)^T y = A^T Q^T y = A^T(Q^T y) \in \mathcal{R}(A)$.
2. $(QA)_{*k}=QA_{*k}=Q(\sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j})=\sum_{j\neq k} \alpha_j QA_{*j}=\sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$. $\square$

Každý řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} \text{---} & A_{1*} & \text{---} \\ \text{---} & A_{2*} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & A_{m*} & \text{---} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \dots & & & \dots \\ q_{i1} & q_{i2} & \dots & q_{im} \\ \dots & & & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \dots & \\ \text{---} & \sum_{j=1}^{m} q_{ij} A_{j*} & \text{---} \\ & \dots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Prostory a násobení maticí zleva

Příklad

- V matici A je druhý sloupeček dvojnásobkem prvního. Toto platí i pro výsledný součin QA:

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- V matici A' je třetí sloupeček součtem prvních dvou. Toto platí i pro výsledný součin QA':

$$QA' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prostory a násobení regulární maticí zleva

Tvrzení (Prostory a násobení regulární maticí zleva)

Buď $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ regulární a $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$. Pak

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$,
2. $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j} \quad \Leftrightarrow \quad (QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$, *kde $k \in \{1, \ldots, n\}$ a $\alpha_j \in \mathbb{T}$, $j \neq k$.*

Důkaz.

1. Z předchozího tvrzení: $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$.
   Z předchozího tvrzení: $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q^{-1}QA) \subseteq \mathcal{R}(QA)$.
   Dohromady máme $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$.
2. Z předchozího tvrzení: implikace "$\Rightarrow$".
   Implikace "$\Leftarrow$" plyne z předchozího tvrzení, aplikovaného na matici (QA) násobenou zleva Q^{-1}. $\square$

Maticové prostory a RREF

Věta (Maticové prostory a RREF)

Buď $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ *a* A^R *její RREF s pivoty* $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$. *Pak*

1. *nenulové řádky* A^R, *tedy vektory* $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$, *tvoří bázi* $\mathcal{R}(A)$,
2. *sloupce* $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ *tvoří bázi* $\mathcal{S}(A)$,
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \operatorname{rank}(A) = r$.

Důkaz.

Víme, že $A^R = QA$ pro nějakou regulární matici Q.

1. Platí $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$.
   Nenulové řádky A^R tvoří bázi $\mathcal{R}(A^R)$, tedy i $\mathcal{R}(A)$.
2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A^R)$, neboť jsou jistě lineárně nezávislé a každý nebázický sloupec se dá vyjádřit

$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$

   Dle předchozího tvrzení tvoří $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ bázi $\mathcal{S}(A)$.
3. Báze $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{S}(A)$ mají velikost r. $\square$

Maticové prostory a RREF

Věta (Maticové prostory a RREF)

Buď $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ *a* A^R *její RREF s pivoty* $(1, p_1), \dots, (r, p_r)$*. Pak*

1. *nenulové řádky* A^R*, tedy vektory* $A^R_{1*}, \dots, A^R_{r*}$*, tvoří bázi* $\mathcal{R}(A)$*,*
2. *sloupce* $A_{*p_1}, \dots, A_{*p_r}$ *tvoří bázi* $\mathcal{S}(A)$*,*
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \operatorname{rank}(A) = r$*.*

Pomni

- bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ najdeme v řádcích matice A^R,
- ale bázi $\mathcal{S}(A)$ najdeme ve sloupcích původní matice A.

Důsledek

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ *platí* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$*.*

Maticové prostory a RREF

Příklad

$V = span\{(1,2,3,4,5)^T,\ (1,1,1,1,1)^T,\ (1,3,5,7,9)^T,\ (2,1,1,0,0)^T\}.$

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{RREF}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Báze V je např.: $(1,2,3,4,5)^T$, $(1,1,1,1,1)^T$, $(2,1,1,0,0)^T$.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{RREF}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Báze V je např.: $(1,0,0,-1,-1)^T$, $(0,1,0,1,0)^T$, $(0,0,1,1,2)^T$.

Frobeniova věta z pohledu prostorů

Frobeniova věta (připomenutí)

Soustava $(A \mid b)$ má alespoň jedno řešení právě tehdy, když

$$rank(A) = rank(A \mid b).$$

Zdůvodnění pomocí maticových prostorů

- $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když b se dá vyjádřit jako lineární kombinace sloupců matice A.
- Jinými slovy, $b \in \mathcal{S}(A)$.
- Jinými slovy, $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(A \mid b)$.
- Jinými slovy, $rank(A) = rank(A \mid b)$.

Dimenze jádra

Věta (O dimenzi jádra a hodnosti matice)

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$dim\, Ker(A) + rank(A) = n.$$

Důkaz. Buď $v_1, \dots, v_k$ báze $Ker(A)$.

- Rozšiřme na $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ bázi $\mathbb{T}^n$.
- Stačí ukázat, že vektory $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$.

"*Generujícnost.*" Buď $y \in \mathcal{S}(A)$, pak $y = Ax$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^n$.
Toto x lze vyjádřit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Dosazením

$$y = Ax = A\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (A v_i).$$

"*Lineární nezávislost.*" Buď $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i A v_i = o$.
Pak platí $A\big(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i\big) = o$, čili $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \in Ker(A)$.
Proto $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$ pro nějaké skaláry $\beta_1, \dots, \beta_k$.
Z lineární nezávislosti $v_1, \dots, v_n$ musí být koeficienty nulové. $\square$

Dimenze jádra – příklad

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{RREF}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy $dim\, Ker(A) = 4 - 2 = 2$ a jádro obsahuje vektory tvaru

$$\begin{aligned} &(6x_3 + 4x_4, -4x_3 - 3x_4, x_3, x_4)^T \\ &= x_3(6, -4, 1, 0)^T + x_4(4, -3, 0, 1)^T,\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Tudíž vektory $(6, -4, 1, 0)^T$, $(4, -3, 0, 1)^T$ tvoří bázi $Ker(A)$
- Tyto vektory nalezneme i dosazením za nebázické proměnné:
  - vektor $(6, -4, 1, 0)^T$ získáme dosazením $x_3 = 1$, $x_4 = 0$
  - vektor $(4, -3, 0, 1)^T$ získáme dosazením $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

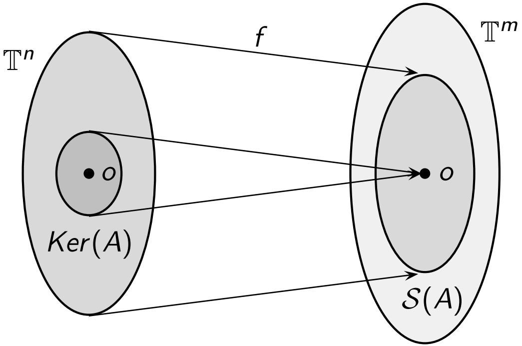
Tento postup platí obecně:

- počet nebázických proměnných je $n - rank(A) = dim\, Ker(A)$
- tedy nalezené generátory tvoří vždy bázi jádra matice A

Maticové prostory – geometrický pohled

Uvažujme zobrazení $f(x) = Ax$ s maticí $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$.

- Sloupcový prostor $\mathcal{S}(A)$ je množina obrazů.
- Jádro $Ker(A)$ tvoří vektory, které se zobrazí na nulový vektor.
- $dim\, Ker(A) = n - dim\, \mathcal{S}(A)$ udává míru zmenšení dimenze.
  (pro A regulární: $0 = n - n$, pro $A = 0$: $n = n - 0$)



Ekvivalentní podmínky regularity pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- A je regulární;
- soustava $Ax = 0$ má řešení pouze $x = 0$,
- pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ soustava $Ax = b$ má jediné řešení,
- pro nějaké $b \in \mathbb{R}^n$ soustava $Ax = b$ má jediné řešení,
- $\mathrm{RREF}(A) = I_n$,
- $rank(A) = n$,
- existuje A^{-1},
- řádky A jsou lineárně nezávislé,
- sloupce A jsou lineárně nezávislé,
- $\mathcal{S}(A) = \mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$,
- $Ker(A) = \{o\}$,
- A^T je regulární.

Samoopravné kódy (podruhé)

Hammingův kód (7,4,3): detekce a oprava jedné přenosové chyby

Vstupní 4 bity zakódujeme na 7 vynásobením generující maticí $H \in \mathbb{Z}_2^{7\times 4}$.

$$\text{př.: } Ha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = b.$$

tedy $b \in \mathcal{S}(H)$,
$dim\, \mathcal{S}(H) = 4$

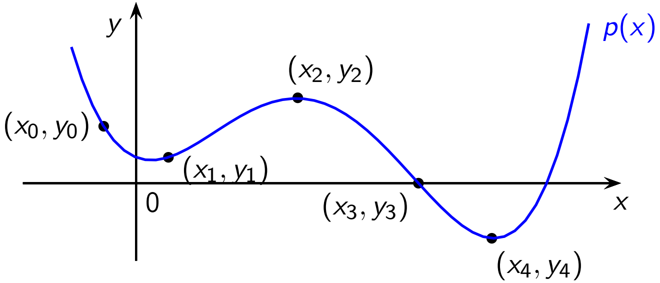
Kontrola po přijetí: $Db = 0$ v pořádku, jinak přenosová chyba.

$$\text{př.: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \text{v pořádku.}$$

tedy $Ker(D) = \mathcal{S}(H)$

Interpolace polynomem (podruhé)

- Dány body (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$.
- Cíl: prolož polynomem $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.



- Víme: jednoznačné řešení,
  vede na soustavu rovnic s Vandermondovou maticí
- Nelze snadněji, kdybychom zvolili jinou bázi prostoru $\mathcal{P}^n$?

Interpolace polynomem (podruhé) – Lagrangeův tvar

- Dány body (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$.
- Cíl: prolož polynomem $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.

Lagrangeův tvar interpolačního polynomu

Definujme polynomy stupně n:

$$p_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}(x - x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- platí $p_i(x_i) = 1$, $p_i(x_j) = 0$ pro $j \neq i$,
- $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ tvoří bázi prostoru $\mathcal{P}^n$,
- hledaný polynom je lineární kombinací

$$p(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} y_j p_i(x).$$

- explicitní vyjádření interpolačního polynomu (ne základní tvar)
- interpolační polynom je určen jednoznačně.

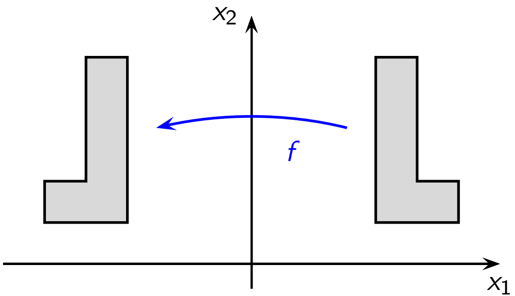
Následující téma

Připomenutí – matice a zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$.

Překlopení podle osy x_2:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

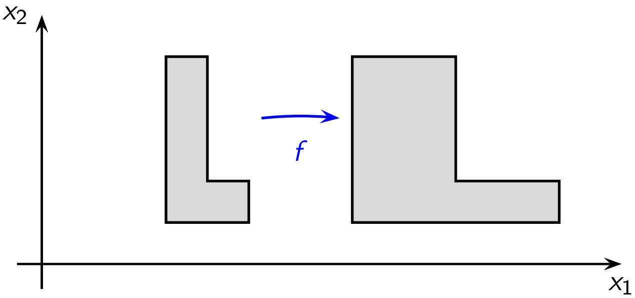


Připomenutí – matice a zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$.

Škálování:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

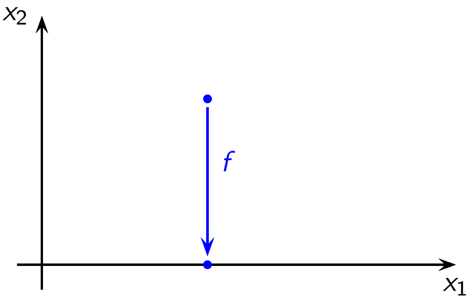


Připomenutí – matice a zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$.

Projekce na osu x_1:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

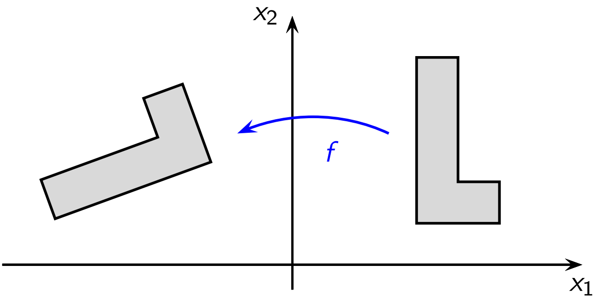


Připomenutí – matice a zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$.

Otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček:

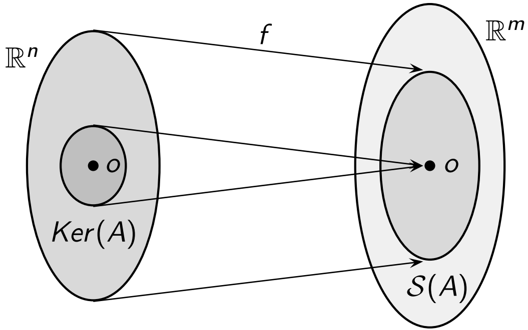
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{pmatrix}$$



Připomenutí – matice a zobrazení $f: x \mapsto Ax$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a uvažujme zobrazení $x \mapsto Ax$.

- Řešit soustavu rovnic $Ax = b$ znamená najít všechny vektory x, které se zobrazí na vektor b.



- $dim\, Ker(A) + dim\, \mathcal{S}(A) = n$

Připomenutí – matice a zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$

Další vlastnosti:

- Regulární matice odpovídá bijekci.

  Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak zobrazení $x \mapsto Ax$ je bijekcí (vzájemně jednoznačné) právě tehdy, když A je regulární.

- Inverzní matice odpovídá inverznímu zobrazení.

  Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Pak inverzní zobrazení k zobrazení $x \mapsto Ax$ je dané předpisem $y \mapsto A^{-1}y$.

- Skládání zobrazení odpovídá maticovému násobení.

  Buď $A \in \mathbb{R}^{p\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ a uvažujme dvě zobrazení $x \mapsto Ax$, $y \mapsto By$. Pak složené zobrazení $x \mapsto Ax \mapsto B(Ax) = (BA)x$.

Pro lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ zřejmě také platí:

$$(x+y) \mapsto A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y),$$
$$(\alpha x) \mapsto A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha f(x).$$

Lineární zobrazení – definice

Definice (Lineární zobrazení)

Buďte U, V vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f\colon U \to V$ je *lineární*, pokud pro každé $x, y \in U$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Lineární zobrazení se též nazývá *homomorfismus*.

Další příklady lineárních zobrazení:

- $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je pevná matice.
  (Žádné jiné lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ neexistuje.)
- Triviální zobrazení $f\colon U \to V$ definované $f(x) = o$.
- Identita je zobrazení $id\colon U \to U$ definované $id(x) = x$.
- Zobrazení $f\colon \mathbb{T}^{m\times n} \to \mathbb{T}^{n\times m}$ dané předpisem $f(A) = A^T$.
- Derivace z prostoru reálných diferencovatelných funkcí do prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$, protože

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\alpha f)' = \alpha f'$$

Lineární zobrazení – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti lineárních zobrazení)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak

1. $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \ \ \forall \alpha_i \in \mathbb{T},\ x_i \in U,\ i = 1, \dots, n,$
2. $f(o) = o.$

Důkaz.

1. Z definice lineárního zobrazení máme $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ a zbytek dostaneme rozšířením matematickou indukcí pro libovolné přirozené n.
2. $f(o) = f(0 \cdot o) = 0 \cdot f(o) = o.$ $\square$

- Lineární zobrazení tudíž zachovává lineární vztahy (závislost, ale ne nezávislost).
- Posunutí není lineární zobrazení.

Lineární zobrazení – vlastnosti

Poznámka

Lineární zobrazení zobrazují přímku na přímku nebo na bod.

Důkaz.

Přímka určená dvěma různými vektory v_1, v_2 je množina vektorů tvaru

$$\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2, \quad \lambda \in \mathbb{T}$$

neboli

$$v_2 + \lambda(v_1 - v_2), \quad \lambda \in \mathbb{T}.$$

Obrazem této množiny při lineárním zobrazení f je množina popsaná

$$f(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) = \lambda f(v_1) + (1-\lambda)f(v_2),$$

což je opět přímka nebo bod (je-li $f(v_1) = f(v_2)$). □

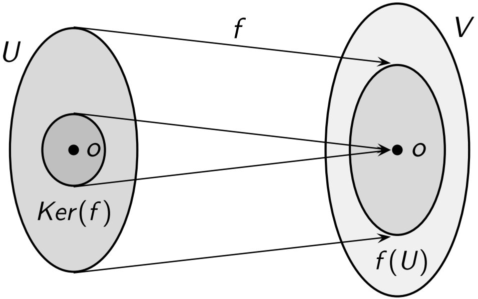
☞ Posunutí není lineární zobrazení, ale zobrazuje přímky na přímky.

Obraz a jádro

Definice (Obraz a jádro)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak definujeme

- obraz $f(U) := \{f(x);\ x \in U\}$,
- jádro $Ker(f) := \{x \in U;\ f(x) = o\}$.



Pro zobrazení $f(x) = Ax$ je $Ker(f) = Ker(A)$ a $f(U) = \mathcal{S}(A)$.

Go to page 195

Obraz a jádro

Tvrzení

Buď $f: U \to V$ lineární zobrazení. Pak:

1. *$f(U)$ je podprostorem V,*
2. *$Ker(f)$ je podprostorem U.*

Důkaz.

1. Stačí ověřit, že $f(U)$ obsahuje o a je uzavřený na součty a násobky vektorů.
   - Protože $f(o) = o$, máme $o \in V$.
   - Pokud $v_1, v_2 \in f(U)$, tak existují $u_1, u_2 \in U$ takové, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. Potom
   $$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2 \in f(U).$$
   - Pokud $v \in f(U)$, tak existuje $u \in U : f(u) = v$.
   Pak pro libovolné $\alpha \in \mathbb{T}$ je $f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha v \in f(U)$.
2. Analogicky, ponecháváme za cvičení. $\square$

Obraz a jádro

Tvrzení

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak pro každé $x_1, \dots, x_n \in U$:
$$f(span\{x_1, \dots, x_n\}) = span\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

Důkaz.

Označme $W := span\{x_1, \dots, x_n\}$. Tedy chceme dokázat:
$$f(W) = span\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

• Inkluze "$\subseteq$".
Každý vektor $w \in W$ lze vyjádřit ve tvaru $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ pro nějaké $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$. Z linearity zobrazení f pak
$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \in span\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

• Inkluze "$\supseteq$".
Protože $x_1, \dots, x_n \in W$, tak $f(x_1), \dots, f(x_n) \in f(W)$.
Podprostor $f(W)$ s vektory musí obsahovat i jejich lineární obal. $\square$

- Návod jak určovat obraz podprostoru W prostoru U: určíme obrazy báze (či generátorů W), a ty tvoří generátory $f(W)$.

Zobrazení prosté (injektivní) a “na” (surjektivní)

Definice

Zobrazení $f\colon U \to V$ je “na”, pokud $f(U) = V$.

Jinými slovy, pro každý vektor $y \in V$ existuje vektor $x \in U$, který se na něj zobrazí, tj. $f(x) = y$.

- Jak rozhodnout, zda zobrazení f je “na”?
  Podle předchozího tvrzení: Zvol generátory prostoru U a ověř, jestli jejich obrazy generují prostor V.

Důsledek

Lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je “na” právě tehdy, když se nějaké generátory prostoru U zobrazí na generátory prostoru V.

Definice

Zobrazení $f\colon U \to V$ je prosté, pokud $f(x) = f(y)$ jen pro $x = y$.

Jinými slovy, pro každé vektory $x, y \in U$, $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$.

Zobrazení prosté (injektivní) a “na” (surjektivní)

Věta (Prosté lineární zobrazení)

Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení. Následující jsou ekvivalentní:

(1) *f je prosté,*

(2) *$Ker(f) = \{o\}$,*

(3) *obraz libovolné lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá množina.*

Důkaz.

Dokážeme implikace (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

- Implikace “(1) $\Rightarrow$ (2)”.

  Protože $f(o) = o$, tak $o \in Ker(f)$. Vzhledem k tomu, že f je prosté zobrazení, tak jádro už jiný prvek neobsahuje. $\square$

Zobrazení prosté (injektivní) a “na” (surjektivní)

Věta (Prosté lineární zobrazení)

Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení. Následující jsou ekvivalentní:

(1) *f je prosté,*

(2) *$Ker(f) = \{o\}$,*

(3) *obraz libovolné lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá množina.*

Důkaz.

Dokážeme implikace (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

- Implikace “(2) $\Rightarrow$ (3)”.

  Buďte $x_1, \ldots, x_n \in U$ lineárně nezávislé a $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = o$.

  Pak $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = o$, čili $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ leží v $Ker(f) = \{o\}$.

  Tudíž musí $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = o$ a z lineární nezávislosti vektorů máme $\alpha_i = 0$ pro všechna i. $\square$

Zobrazení prosté (injektivní) a “na” (surjektivní)

Věta (Prosté lineární zobrazení)

Buď $f: U \to V$ lineární zobrazení. Následující jsou ekvivalentní:

(1) *f je prosté,*

(2) *$Ker(f) = \{o\}$,*

(3) *obraz libovolné lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá množina.*

Důkaz.

Dokážeme implikace (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

- Implikace “(3) $\Rightarrow$ (1)”.

  Sporem předpokládejme, že existují dva různé vektory $x, y \in U$ takové, že $f(x) = f(y)$. Potom $o = f(x) - f(y) = f(x - y)$.

  Vektor o představuje lineárně závislou množinu vektorů, tedy $x - y$ musí být podle předpokladu (3) také lineárně závislá množina, a tudíž $x - y = o$, neboli $x = y$. To je spor. $\square$

Zobrazení prosté (injektivní) a “na” (surjektivní)

Věta (Prosté lineární zobrazení)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Následující jsou ekvivalentní:

(1) *f je prosté,*

(2) *$Ker(f) = \{o\}$,*

(3) *obraz libovolné lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá množina.*

- Speciálně, bod (3) říká, že prosté lineární zobrazení $f\colon U \to V$ zobrazuje bázi prostoru U na bázi $f(U)$. Tudíž
$$dim\, U = dim\, f(U).$$
Později uvidíme, že tato rovnost plně charakterizuje prostá zobrazení.
- Prosté lineární zobrazení nemusí být “na”, například vnoření $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^{n+1}$, definované $(v_1, \ldots, v_n)^T \mapsto (v_1, \ldots, v_n, 0)^T$.

Go to page 195

Reprezentace lineárního zobrazení

Jak lineární zobrazení representovat? Vzorečkem,...

Obrazy báze:

- Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to V$.

  Pokud známe pouze obraz vektoru $x \neq o$, pak můžeme určit obrazy všech jeho násobků, tj. vektorů na přímce $span\{x\}$, jednoduše ze vztahu $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

  Nedokážeme však zrekonstruovat celé zobrazení a potřebujeme znát ještě obraz jiného vektoru y.

  Potom umíme dopočítat obrazy nejen všech násobků vektorů x a y, ale i jejich součtu a všech lineárních kombinací ze vztahu

  $$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

  Tudíž lineární zobrazení f je charakterizováno pouze obrazy dvou lineárně nezávislých vektorů, tedy báze.

Reprezentace lineárního zobrazení

Věta (Lineární zobrazení a jednoznačnost vůči obrazům báze)

Buďte U, V prostory nad $\mathbb{T}$ a $x_1, \ldots, x_n$ báze U. Pak pro libovolné vektory $y_1, \ldots, y_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení takové, že $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz.

Buď $x \in U$ libovolné a vyjádři $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.
Z definice lineárního zobrazení pak hodnota $f(x)$ je jednoznačně daná předpisem

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i.$$

Linearita zobrazení se ověří snadno (plyne z linearity souřadnic). $\square$

Následující téma

Úvod k matici lineárního zobrazení

Uvažme opět lineární zobrazení $x \mapsto Ax$.

- Kam se zobrazí e_1? Odpověď: $e_1 \mapsto Ae_1 = A_{*1}$
- Podobně $e_i \mapsto Ae_i = A_{*i}$ pro všechna i

Příklad

Překlopení dle osy x_2:

- $e_1 = (1, 0)^T$ se zobrazí na $(-1, 0)^T$
- $e_2 = (0, 1)^T$ se zobrazí na $(0, 1)^T$

Tudíž zobrazení má tvar $x \mapsto Ax$, kde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Úvod k matici lineárního zobrazení

Opačný směr: Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$.

Potom pro libovolné $x \in \mathbb{T}^n$ platí

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

Označíme-li matici se sloupci $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ jako

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \cdots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix},$$

pak zřejmě $f(x) = Ax$.

Důsledek

Každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ lze tedy reprezentovat maticově jako $f(x) = Ax$.

Úvod k matici lineárního zobrazení

První krok ke zobecnění: Uvažujme lineární zobrazení $f\colon U \to \mathbb{T}^m$ a bázi $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ prostoru U.

Nechť vektor $x \in U$ má vyjádření $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, tedy $[x]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. Potom

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i).$$

Označíme-li matici se sloupci $f(v_1), \dots, f(v_n)$ jako

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(v_1) & \cdots & f(v_n) \\ | & & | \end{pmatrix},$$

pak zřejmě $f(x) = A \cdot [x]_B$.

- Budeme muset pracovat v souřadnicích!

Matice lineárního zobrazení

Definice (Matice lineárního zobrazení)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení,

- $B_U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ báze prostoru U nad $\mathbb{T}$,
- $B_V = \{y_1, \ldots, y_m\}$ báze prostoru V nad $\mathbb{T}$.

Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$.
Potom matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ s prvky a_{ij} se nazývá *matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázím B_U, B_V* a značí se ${}_{B_V}[f]_{B_U}$.

Jinými slovy,

$$
{}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(x_1)]_{B_V} & \cdots & [f(x_n)]_{B_V} \\ | & & | \end{pmatrix}.
$$

Matice lineárního zobrazení

Příklad (Matice lineárního zobrazení)

Uvažujme zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem $f(x) = Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zvolme báze $B_U = \{(1,2)^T, (2,1)^T\}$, $B_V = \{(1,-1)^T, (0,1)^T\}$ a najděme matici zobrazení f vzhledem k bázím B_U, B_V.

Obraz prvního vektoru báze B_U je $f(1,2) = (5,-5)^T$, a jeho souřadnice vzhledem k bázi B_V jsou $[f(1,2)]_{B_V} = (5,0)^T$.

Podobně, obraz druhého vektoru báze B_U je $f(2,1) = (4,2)^T$, a jeho souřadnice vzhledem k bázi B_V jsou $[f(2,1)]_{B_V} = (4,6)^T$.

Tudíž

$${}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení

K čemu je mi matice zobrazení?

Věta (Maticová reprezentace lineárního zobrazení)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení, $B_U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ báze prostoru U, a $B_V = \{y_1, \ldots, y_m\}$ báze prostoru V. Pak $\forall x \in U$ je

$$[f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}.$$

- mnemotechnika
- paralela s $f(x) = Ax$ mezi prostory $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$

Matice lineárního zobrazení

Věta (Maticová reprezentace lineárního zobrazení)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení, $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ báze prostoru U, a $B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$ báze prostoru V. Pak $\forall x \in U$ je

$$[f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}.$$

Důkaz.

Označme $A := {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Buď $x \in U$, tedy $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, neboli $[x]_{B_U} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. Pak

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij}\right) y_i.$$

Tedy i-tá souřadnice $f(x)$ je $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} = (A \cdot [x]_{B_U})_i$. $\square$

Matice lineárního zobrazení

Důsledek

Každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ se dá vyjádřit jako $f(x) = Ax$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$.

Důkaz.

Pro každé $x \in \mathbb{T}^n$ je

$$f(x) = [f(x)]_{\mathrm{kan}} = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} \cdot [x]_{\mathrm{kan}} = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} \cdot x.$$

Tedy $f(x) = Ax$, kde $A = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$. $\square$

Matice lineárního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $f\colon U \to V$ a báze B_U, B_V prostorů U, V. Víme, že matice $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$ splňuje

$$[f(x)]_{B_V} = A \cdot [x]_{B_U} \quad \forall x \in U. \tag{$\star$}$$

Ukážeme, že žádná jiná matice tuto vlastnost nemá.

Věta (Jednoznačnost matice lineárního zobrazení)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení, B_U báze prostoru U a B_V báze prostoru V. Pak jediná matice A splňující $(\star)$ je $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$.

Důkaz.

Nechť $B_U = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Pro spor předpokládejme, že f má dvě maticové reprezentace pomocí matic $A \neq A'$.
Tudíž existuje vektor $s \in \mathbb{T}^n$ takový, že $As \neq A's$.

Definujme vektor $x := \sum_{i=1}^n s_i z_i$. Pak

$$[f(x)]_{B_V} = As \neq A's = [f(x)]_{B_V},$$

spor. $\square$

Matice lineárního zobrazení

- Každé lineární zobrazení jde reprezentovat maticově.
- Naopak každá matice představuje matici nějakého lineárního zobrazení.

  Důkaz. Buďte B_U, B_V báze prostorů U, V dimenzí n, m a mějme $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$. Pak existuje jediné lineární zobrazení $f\colon U \to V$ takové, že $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$; ve sloupcích matice A vyčteme souřadnice obrazů vektorů báze B_U. $\square$

- Tedy existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi lineárními zobrazeními $f\colon U \to V$ a prostorem matic $\mathbb{T}^{m \times n}$.

Matice přechodu

Definice (Matice přechodu)

Buď V vektorový prostor a B_1, B_2 dvě jeho báze. Pak *maticí přechodu* od B_1 k B_2 nazveme matici ${}_{B_2}[id]_{B_1}$.

- Matice přechodu má pak podle maticové reprezentace tento význam: Buď $x \in V$, pak
$$[x]_{B_2} = {}_{B_2}[id]_{B_1} \cdot [x]_{B_1},$$
tedy pouhým maticovým násobením získáváme souřadnice vzhledem k jiné bázi.
- Zřejmě platí ${}_{B}[id]_{B} = I_n$ pro libovolnou bázi B.

Matice přechodu – příklad

Příklad: Najděte matici přechodu v $\mathbb{R}^3$ od báze

$$B_1 = \{(1,1,-1)^T, (3,-2,0)^T, (2,-1,1)^T\}$$

k bázi

$$B_2 = \{(8,-4,1)^T, (-8,5,-2)^T, (3,-2,1)^T\}.$$

Řešení: Spočítáme

$$\begin{aligned} [(1,1,-1)^T]_{B_2} &= (2,3,3)^T, \\ [(3,-2,0)^T]_{B_2} &= (-1,-4,-7)^T, \\ [(2,-1,1)^T]_{B_2} &= (1,3,6)^T. \end{aligned}$$

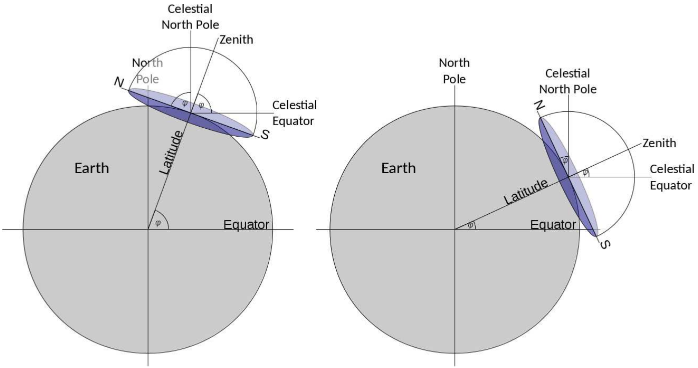
Tedy

$${}_{B_2}[id]_{B_1} = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Např. víme-li $[(4,-1,-1)^T]_{B_1} = (1,1,0)^T$, pak $[(4,-1,-1)^T]_{B_2} = A \cdot [(4,-1,-1)^T]_{B_1} = A \cdot (1,1,0)^T = (1,-1,-4)^T$.

Matice přechodu

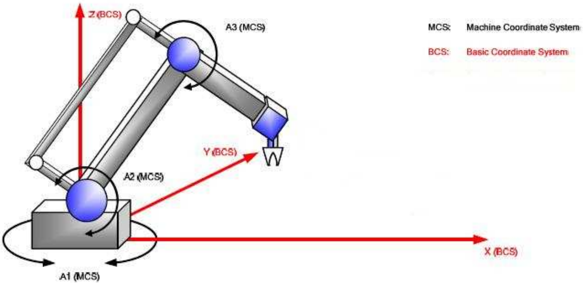
Proč různé souřadné systémy?



[zdroj: https://astroedu.iau.org/]

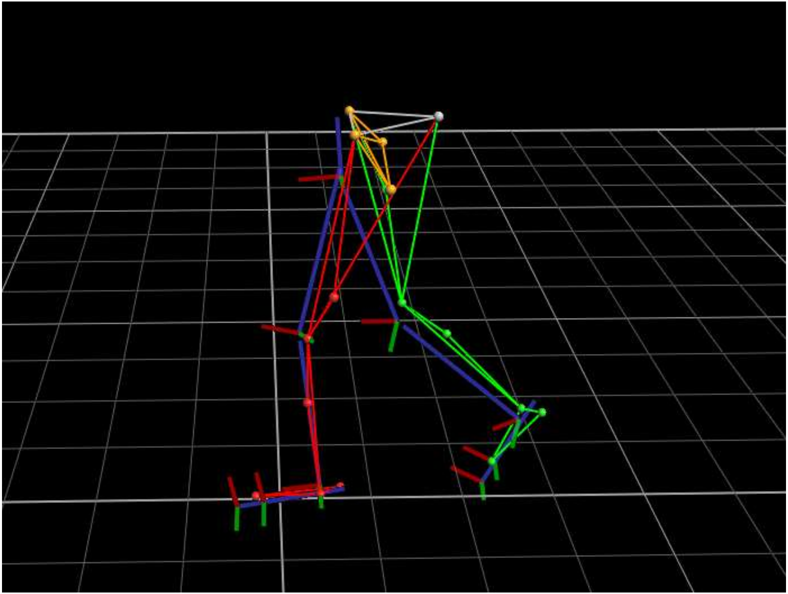
Matice přechodu

Proč různé souřadné systémy?

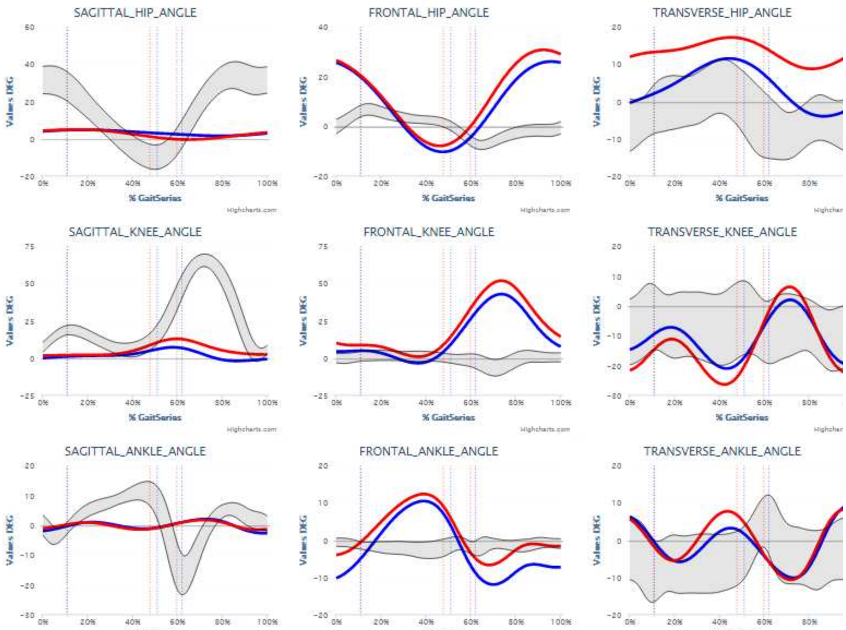


[zdroj: https://forum.deltamotion.com/]

Model chůze [zdroj: KBI FBMI ČVUT]

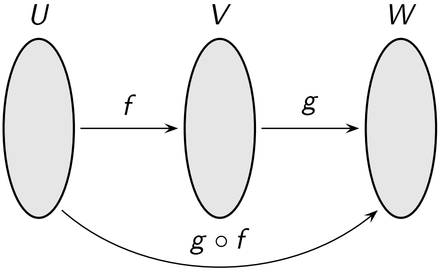


Model chůze [zdroj: KBI FBMI ČVUT]



Matice složeného lineárního zobrazení

- Podstatnou roli v teorii lineárních zobrazení hraje skládání.
- Pro zobrazení $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to W$ je složené zobrazení $g \circ f$ definované předpisem $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, $x \in U$.



Tvrzení (Složené lineární zobrazení)

Buďte $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ lineární zobrazení. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je zase lineární zobrazení.

Matice složeného lineárního zobrazení

Tvrzení (Složené lineární zobrazení)

Buďte $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ lineární zobrazení. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je zase lineární zobrazení.

Důkaz.

Podle definice ověříme pro libovolné $x, y \in U$ a $\alpha \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y), \\ (g \circ f)(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x). \quad \square\end{aligned}$$

Jak vypadá matice složeného zobrazení?

- Uvažujme dvě lineární zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^p$ a $g\colon \mathbb{T}^p \to \mathbb{T}^m$:

  $$f(x) = Ax, \quad g(y) = By$$

  Potom složené zobrazení má předpis

  $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = B(Ax) = (BA)x.$$

Matice složeného lineárního zobrazení

Věta (Matice složeného lineárního zobrazení)

Buďte $f\colon U \to V$ *a* $g\colon V \to W$ *lineární zobrazení, buď* B_U *báze* U, B_V *báze* V *a* B_W *báze* W. *Pak*

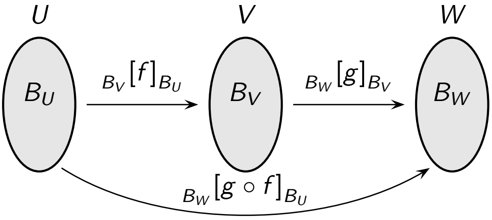
$$ {}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \,. $$

Důkaz.

Pro každé $x \in U$ je

$$ \begin{aligned} [(g \circ f)(x)]_{B_W} &= [g(f(x))]_{B_W} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot [f(x)]_{B_V} \\ &= {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}. \end{aligned} $$

Zbytek díky jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. $\square$



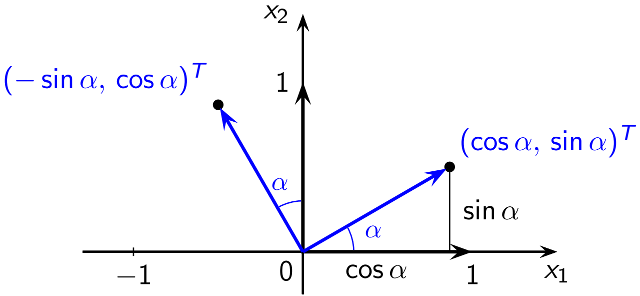
Matice lineárního zobrazení při změně báze

- Dáno: ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.
- Cíl: ${}_{B_4}[f]_{B_3}$.
- Řešení:

$$
{}_{B_4}[f]_{B_3} = {}_{B_4}[id]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot {}_{B_1}[id]_{B_3} .
$$

Matice rotace v $\mathbb{R}^2$

Otočení v rovině kolem počátku o úhel α proti směru hodinových ručiček:



Maticový zápis:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} x.$$

Skládání otočení a součtové vzorce pro *sinus* a *kosinus*

Otočení o úhel α: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Otočení o úhel β: $\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

Otočení o úhel $\alpha+\beta$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha.
\end{aligned}$$

3D rotace

Rotace v $\mathbb{R}^3$, ale v rovině os x_1, x_2:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

`http://babylonjs.com/Demos/Decals/`

`http://www.thingiverse.com/thing:126286`

`http://babylonjs.com/Demos/fur/`

`http://gleborgne.github.io/molvwr/#1GCN`

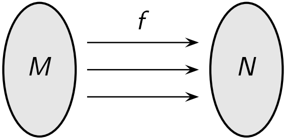
`https://sketchfab.com/models/03d7639ecbe943bba20b22ba1f9746d3`

Následující téma

Isomorfismus

Vzájemně jednoznačné zobrazení (neboli bijekce) $f\colon M \to N$: prosté a "na".

Tedy existuje inverzní f^{-1}



Definice (Isomorfismus)

Isomorfismus mezi prostory U, V nad tělesem $\mathbb{T}$ je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení $f\colon U \to V$.

Pokud mezi prostory U, V existuje isomorfismus, pak říkáme, že U, V jsou *isomorfní.*

- Isomorfní prostory se chovají z pohledu lineární algebry stejně:
  - zobrazuje lineárně závislé vektory na lineárně závislé (se stejnými vztahy)
  - zobrazuje lineárně nezávislé vektory na lineárně nezávislé
  - zobrazuje bázi na bázi, zachovává dimenzi, ...

Isomorfismus – příklady

Isomorfismy v $\mathbb{R}^2$:

- otáčení, škálování, překlápění, ... (projekce ne)

Isomorfní prostory:

- $\mathcal{P}^n$ a $\mathbb{R}^{n+1}$, kdy vhodným (a nikoliv jediným) isomorfismem je

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \;\mapsto\; (a_n, \ldots, a_1, a_0),$$

- $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, kdy isomorfismem je např.

$$a + ib \in \mathbb{C} \;\mapsto\; (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

- $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{mn}$, kdy isomorfismem je např.

$$A \;\mapsto\; (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}).$$

- nekonečně-dimenzionální prostor $\mathcal{P}$ a prostor reálných posloupností s konečně mnoha nenulovými prvky

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \;\mapsto\; (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots).$$

Isomorfismus – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti isomorfismu)

1. *Je-li $f : U \to V$ isomorfismus, pak $f^{-1} : V \to U$ existuje a je to také isomorfismus.*
2. *Jsou-li $f : U \to V$ a $g : V \to W$ isomorfismy, pak $g \circ f : U \to W$ je také isomorfismus.*

Důkaz.

1. Zobrazení f je vzájemně jednoznačné, tedy f^{-1} existuje a je také vzájemně jednoznačné. Zbývá dokázat linearitu:
   - Buď $v_1, v_2 \in V$, $f^{-1}(v_1) = u_1$ a $f^{-1}(v_2) = u_2$.
     Pak $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$, tedy
     $$f^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2).$$
   - Podobně pro násobky: Nechť $v \in V$ a $f^{-1}(v) = u$, pak $f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha v$, tedy $f^{-1}(\alpha v) = \alpha u = \alpha f^{-1}(v)$.
2. Vzájemně jednoznačné zobrazení i linearita se zachovává skládáním. $\square$

Isomorfismus – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti isomorfismu)

1. *Lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je isomorfismem právě tehdy, když libovolná báze prostoru U se zobrazuje na bázi prostoru V.*
2. *Je-li $f\colon U \to V$ isomorfismus, pak $\dim U = \dim V$.*

Důkaz.

1. "$\Rightarrow$" Buď $x_1, \dots, x_n$ báze U.
   - f je prosté, tudíž $f(x_1), \dots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.
   - f je "na", tudíž $f(x_1), \dots, f(x_n)$ generují prostor $f(U) = V$.

   Tím pádem vektory $f(x_1), \dots, f(x_n)$ tvoří bázi V. $\square$

Isomorfismus – vlastnosti

Tvrzení (Vlastnosti isomorfismu)

1. *Lineární zobrazení $f : U \to V$ je isomorfismem právě tehdy, když libovolná báze prostoru U se zobrazuje na bázi prostoru V.*
2. *Je-li $f : U \to V$ isomorfismus, pak $\dim U = \dim V$.*

Důkaz.

1. "$\Leftarrow$" Buď $x_1, \ldots, x_n$ báze U a $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ báze V.
   - Pak zobrazení f je zřejmě "na".
   - Prosté: Pro spor předpokládejme, že jádro $Ker(f)$ obsahuje vektor $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \neq o$.
     Tudíž $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = o$.
     Z linearity zobrazení dostáváme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = o$, což je spor s lineární nezávislostí vektorů $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.
2. Plyne z předchozího bodu. $\square$

Isomorfismus – matice zobrazení

Tvrzení

Buď $f\colon U \to V$ isomorfismus, B_U báze U a B_V báze V. Pak

$$_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U}^{-1}.$$

Důkaz.

Protože $f^{-1} \circ f = id$, dostáváme

$$_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B_U}[f^{-1} \circ f]_{B_U} = {}_{B_U}[id]_{B_U} = I.$$

Jelikož $_{B_V}[f]_{B_U}$ je čtvercová, je $_{B_U}[f^{-1}]_{B_V}$ její inverzní matice. □

- Matice isomorfismu má inverzní, musí tedy být regulární.
- Naopak: Je-li matice zobrazení f regulární, pak je f isomorfismem (inverzní matice dává předpis pro f^{-1}).

Tvrzení

Lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je isomorfismus právě tehdy, když nějaká (libovolná) matice reprezentující f je regulární.

Isomorfismus – matice přechodu

Důsledek pro matici přechodu mezi bázemi B_U a B_V

$$ {}_{B_U}[id]_{B_V} = {}_{B_V}[id]_{B_U}^{-1}\,. $$

Poznámka (Mnemotechnika počítání matice přechodu v $\mathbb{T}^n$)

$$ \left(\mathcal{B}_\mathcal{V} \mid \mathcal{B}_\mathcal{U}\right) \overset{\text{RREF}}{\sim} \left(I_n \mid {}_{B_V}[id]_{B_U}\right)\,. $$

Důkaz. Víme $\mathcal{B}_\mathcal{U} = {}_{\text{kan}}[id]_{B_U}$, $\mathcal{B}_\mathcal{V} = {}_{\text{kan}}[id]_{B_V}$.

Víme ${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}$.

Tudíž ${}_{B_V}[id]_{B_U} = {}_{B_V}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_U} = {}_{\text{kan}}[id]_{B_V}^{-1} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_U}$.

Převedením na RREF tvar lze vyjádřit vynásobením maticí ${\mathcal{B}_\mathcal{V}}^{-1}$

$$ \left(\mathcal{B}_\mathcal{V} \mid \mathcal{B}_\mathcal{U}\right) \overset{\text{RREF}}{\sim} \left(I_n \mid {\mathcal{B}_\mathcal{V}}^{-1}\mathcal{B}_\mathcal{U}\right)\,. \qquad \square $$

Isomorfismus – matice přechodu

Příklad

Najděte matici přechodu v $\mathbb{R}^3$ od báze B_1 k bázi B_2

$$B_1 = \{(1,1,-1)^T,\ (3,-2,0)^T,\ (2,-1,1)^T\},$$
$$B_2 = \{(8,-4,1)^T,\ (-8,5,-2)^T,\ (3,-2,1)^T\}.$$

Řešení: spočítáme

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 8 & -8 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{RREF}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 6 \end{array}\right).$$

Tedy

$$_{B_2}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Isomorfismus a dimenze

- Víme, že isomorfní prostory mají stejnou dimenzi.
- Platí to i naopak?

Tvrzení

Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ dimenze n s bází B. Pak zobrazení $x \mapsto [x]_B$ je isomorfismus mezi prostory V a $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$.

Důkaz.

Nechť báze B sestává z vektorů $v_1, \ldots, v_n$.

- Zobrazení $x \mapsto [x]_B$ je lineární:
  - Buď $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Pak $x + y = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i$. Tudíž $[x+y]_B = [x]_B + [y]_B$.
  - Analogicky $[\alpha x]_B = \alpha [x]_B$.
- Zobrazení $x \mapsto [x]_B$ je prosté: z jednoznačnosti souřadnic
- Zobrazení $x \mapsto [x]_B$ je "na":

  každá n-tice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^n$ představuje souřadnice nějakého vektoru, konkrétně vektoru $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. $\square$

Isomorfismus a dimenze

Věta (Isomorfismus n-dimenzionálních prostorů)

Všechny n-dimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$ jsou navzájem isomorfní.

Důkaz.

Všechny n-dimenzionální vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$ isomorfní s $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$.

Tím pádem jsou isomorfní i navzájem mezi sebou. □

- Všechny n-dimenzionální prostory nad stejným tělesem jsou "stejné" (z pohledu lineární algebry)
- Isomorfismus zachovává lineární závislost vektorů, zachovává lineární nezávislost vektorů, a také zachovává dimenzi obrazu podprostoru.
- Stačí přejít isomorfismem do prostoru $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$, kde se pracuje mnohem lépe.
- Isomorfismus je relace ekvivalence (s reprezentanty $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$).

Isomorfismus a dimenze

Příklad

Uvažujme polynomy

$$2x^3 + x^2 + x + 3, \quad x^3 + 2x^2 + 3x + 1,$$
$$x^3 - x^2 - 2x + 2, \quad 4x^3 - x^2 - 3x + 7$$

jako vektory prostoru $\mathcal{P}^3$. Jsou lineárně nezávislé? Jakou dimenzi má prostor jimi generovaný? Jaká je jeho báze?

Použij isomorfismus $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mapsto (a_3, a_2, a_1, a_0)$. Takto se polynomy zobrazí na vektory

$$(2, 1, 1, 3)^T, \ (1, 2, 3, 1)^T, \ (1, -1, -2, 2)^T, \ (4, -1, -3, 7)^T.$$

Standardním způsobem zjistíme, že vektory (a tedy i polynomy) jsou lineárně závislé, generují dvoudimenzionální podprostor a bázi tvoří například první dva.

Obraz a jádro ještě jednou

Víme, že pro zobrazení $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definované $f(x) = Ax$ platí:

$$Ker(f) = Ker(A), \quad f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(A).$$

Věta (O dimenzi jádra a obrazu)

Buď $f \colon U \to V$ lineární zobrazení, B_U báze prostoru U a B_V báze prostoru V. Označme $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Pak:

1. *$\dim Ker(f) = \dim Ker(A)$,*
2. *$\dim f(U) = \dim \mathcal{S}(A) = rank(A)$.*

Důkaz 1.

Stačí: $x \in Ker(f) \mapsto [x]_{B_U}$ je isomorfismem mezi $Ker(f)$ a $Ker(A)$.

- Víme, že je lineární a prosté.
- Zbývá ukázat, že $[x]_{B_U} \in Ker(A)$ a že je "na".
- Buď $x \in Ker(f)$, pak

$$o = [o]_{B_V} = [f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U},$$

- Také naopak, pro každé $[x]_{B_U} \in Ker(A)$ je $f(x) = o$. □

Obraz a jádro ještě jednou

Věta (O dimenzi jádra a obrazu)

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení, B_U báze prostoru U a B_V báze prostoru V. Označme $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Pak:

1. $dim\, Ker(f) = dim\, Ker(A)$,
2. $dim\, f(U) = dim\, \mathcal{S}(A) = rank(A)$.

Důkaz 2.

Označme $dim\, U = n$, $dim\, V = m$. Opět sestrojíme isomorfismus, nyní mezi $f(U)$ a $\mathcal{S}(A)$, a to takto $y \in f(U) \mapsto [y]_{B_V}$.

- Pro libovolné $y \in f(U)$ existuje $x \in U$ takové, že $f(x) = y$. Nyní $[y]_{B_V} = [f(x)]_{B_V} = A \cdot [x]_{B_U}$, tedy $[y]_{B_V}$ náleží do $\mathcal{S}(A)$.
- Naopak, pro každé $b \in \mathcal{S}(A)$ existuje $a \in \mathbb{T}^n$ tak, že $b = Aa$.

  Čili pro vektor $x \in U$ takový, že $[x]_{B_U} = a$, platí
  $y := f(x) \in f(U)$ a zároveň
  $$[y]_{B_V} = [f(x)]_{B_V} = A \cdot [x]_{B_U} = Aa = b \in \mathcal{S}(A). \qquad \square$$

Obraz a jádro ještě jednou

Důkaz věty je konstruktivní – říká nejen jak spočítat dimenzi jádra a obrazu f, ale také jak najít jejich báze.

- Je-li $x_1, \ldots, x_k$ báze $Ker(A)$, pak tyto vektory tvoří souřadnice (vzhledem k bázi B_U) báze $Ker(f)$.
- je-li $y_1, \ldots, y_r$ báze prostoru $\mathcal{S}(A)$, pak tyto vektory představují souřadnice báze prostoru $f(U)$ vzhledem k B_V.

Připomeňme pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí rovnost

$$n = dim\, Ker(A) + rank(A).$$

Speciálně, pro $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$ dosaďme

$$n = dim\, U, \quad dim\, Ker(f) = dim\, Ker(A), \quad dim\, f(U) = rank(A).$$

Důsledek

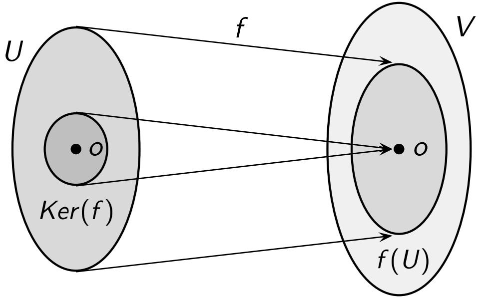
Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení, pak

$$dim\, U = dim\, Ker(f) + dim\, f(U).$$

Obraz a jádro ještě jednou

Ilustrace identity

$$dim\, U = dim\, Ker(f) + dim\, f(U).$$



Kdy je lineární zobrazení prosté a “na”?

Tvrzení

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení, B_U báze prostoru U a B_V báze prostoru V. Pak:

1. *f je prosté $\Leftrightarrow$ ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé sloupce,*
2. *f je “na” $\Leftrightarrow$ ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé řádky.*

Důkaz.

Označme $A := {}_{B_V}[f]_{B_U} \in \mathbb{T}^{m\times n}$, tedy $m = dim\, V$, $n = dim\, U$.

1. Připomeňme $dim\, U = dim\, Ker(f) + dim\, f(U)$.

$$\begin{aligned} f \text{ prosté} &\Leftrightarrow Ker(f) = \{o\} \Leftrightarrow dim\, U = dim\, f(U) \\ &\Leftrightarrow n = rank(A). \end{aligned}$$

2. f je “na” $\Leftrightarrow dim\, V = dim\, f(U) \Leftrightarrow m = rank(A)$. $\square$

Obraz a jádro – příklad

Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{P}^2$ dané

$$
{}_{B_2}[f]_{B_1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},
$$

$$
B_1 : (1,2,1)^T,\ (0,1,1)^T,\ (1,2,4)^T,
$$

$$
B_2 : x^2 - 2x + 3,\ x - 1,\ 2x^2 + x.
$$

(1) $rank(A) = 2$, tedy $dim\, Ker(f) = 1$, $dim\, f(\mathbb{R}^3) = 2$.

(2) Takže f není prosté ani “na”.

(3) Báze $Ker(A)$ je $(2,-3,1)^T$, tedy báze $Ker(f)$ je

$$
2(1,2,1)^T - 3(0,1,1)^T + 1(1,2,4)^T = (3,3,3)^T.
$$

(4) Báze $\mathcal{S}(A)$ je $(1,3,0)^T$, $(1,2,1)^T$, tedy báze $f(\mathbb{R}^3)$ je

$$
1(x^2 - 2x + 3) + 3(x - 1) = x^2 + x,
$$

$$
1(x^2 - 2x + 3) + 2(x - 1) + 1(2x^2 + x) = 3x^2 + x + 1.
$$

Prostor lineárních zobrazení

Buď U prostor dimenze n a V prostor dimenze m.

- Množina lineárních zobrazení $U \to V$ tvoří vektorový prostor.

  (součet $f + g$, násobek αf, nulový vektor, ...)

- Isomorfní s prostorem matic $\mathbb{T}^{m \times n}$.

- Isomorfismem např. $f \mapsto {}_{B_V}[f]_{B_U}$, kde B_U, B_V jsou pevné báze U, V.

  Linearita tohoto zobrazení plyne jednoduše (díky linearitě souřadnic) z vlastností

$$
\begin{aligned}
{}_{B_V}[f+g]_{B_U} &= {}_{B_V}[f]_{B_U} + {}_{B_V}[g]_{B_U}\,, \\
{}_{B_V}[\alpha f]_{B_U} &= \alpha\, {}_{B_V}[f]_{B_U}\,.
\end{aligned}
$$

- Prostor lineárních zobrazení $U \to V$ má dimenzi mn.

Lineární forma (případ prostoru lineárních zobrazení pro $V = \mathbb{T}^1$)

Definice

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak *lineární forma* (nebo též lineární funkcionál) je lineární zobrazení z V do $\mathbb{T}$.

Duální prostor V^* je vektorový prostor všech lineárních forem.

Například

- $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,
- $g(x_1, \dots, x_n) = x_1$.

Vlastnosti:

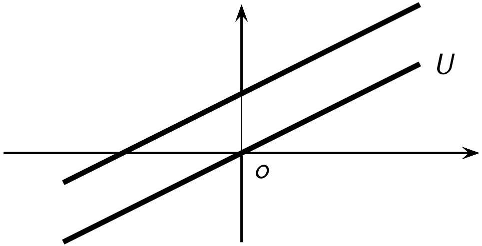
- $dim\, V = dim\, V^*$
- Je-li $v_1, \dots, v_n$ báze V, pak V^* má tzv. duální bázi $f_1, \dots, f_n$, kde f_i je určeno obrazy báze $f_i(v_i) = 1$ a $f_i(v_j) = 0$ pro $i \neq j$.
- Proč neuvažovat duál k duálu, tj. V^{**}?
  Pak $dim\, V = dim\, V^{**}$, ...
- Pro nekonečně-dimenzionální prostory je to jinak.
  (více viz funkcionální analýza)

Následující téma

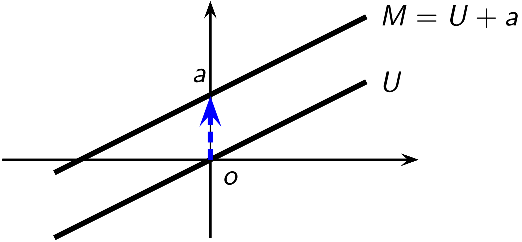
Afinní podprostory – motivace

- Vektorové podprostory musí obsahovat nulový vektor.
- Afinní podprostory nemusí.

Chceme přímky, roviny, . . . , neprocházející nutně počátkem.



Afinní podprostory – definice



Definice (Afinní podprostor)

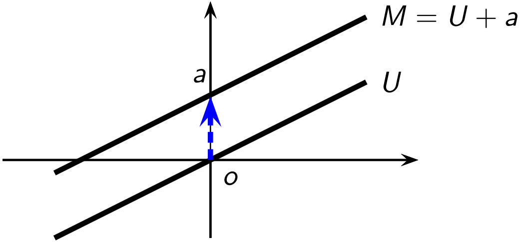
Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak *afinní podprostor* (množina) je jakákoli množina $M \subseteq V$ tvaru

$$M = U + a = \{u + a;\ u \in U\},$$

kde $a \in V$ a U je vektorový podprostor V.

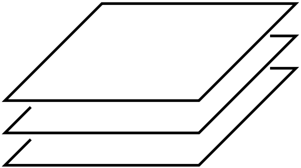
- Afinní podprostor je podprostor U "posunutý" vektorem a.

Afinní podprostory – definice



- U je u každého afinního podprostoru určený jednoznačně.
- Reprezentant $a \in M$ není jednoznačný, lze zvolit libovolně z M.
- Vektorový podprostor U je afinním podprostorem, neboť $U = U + o$.
- Pro každý vektor $a \in V$ je $\{a\}$ jednoprvkový afinní podprostor.

Dláždění afinními podprostory

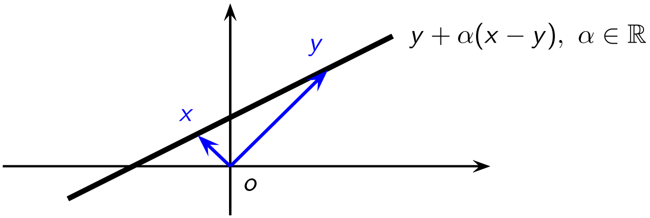


Buď V vektorový prostor a U jeho podprostor.

- Pak afinní podprostory $U + a$, $U + a'$ jsou buď shodné či disjunktní.
- Každý vektor $v \in V$ leží v nějakém afinním podprostoru tohoto tvaru, například $U + v$.
- Tudíž prostor V lze rozložit na disjunktní sjednocení afinních podprostorů tvaru $U + a$ pro vhodné volby a.

Afinní kombinace

- Vektorové podprostory jsou uzavřené na lineární kombinace
- Afinní podprostory jsou uzavřené na afinní kombinace.



Definice

Afinní kombinace dvou vektorů $x, y \in V$ je výraz (vektor)

$$\alpha x + (1 - \alpha)y, \quad \text{kde } \alpha \in \mathbb{T}$$

Ekvivalentně

$$y + \alpha(x - y).$$

Afinní kombinace

Věta (Charakterizace afinního podprostoru)

Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2, a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak M je afinní podprostor právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$.

Důkaz.

Implikace "$\Rightarrow$".

Nechť M je tvaru $M = U + a$. Buď $x, y \in M$, tedy jsou tvaru $x = u + a$, $y = v + a$, kde $u, v \in U$. Potom

$$\begin{aligned}\alpha x + (1-\alpha)y &= \alpha(u+a) + (1-\alpha)(v+a) \\ &= \alpha u + (1-\alpha)v + a \in U + a = M.\end{aligned}$$

□

Afinní kombinace

Věta (Charakterizace afinního podprostoru)

Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2, a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak M je afinní podprostor právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$.

Důkaz.

Implikace "$\Leftarrow$". Zvolme $a \in M$ lib. a $U := M - a = \{x - a;\ x \in M\}$.

Ověříme, že $M = U + a$ (zřejmě) a že U je vektorový podprostor.

Uzavřenost na násobky: Buď $u = x - a$ pro nějaké $x \in M$. Pak

$$\alpha u = \alpha(x - a) = (\alpha x + (1 - \alpha) a) - a \in M - a = U.$$

$\square$

Afinní kombinace

Věta (Charakterizace afinního podprostoru)

Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2, a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$. Pak M je afinní podprostor právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $\alpha x + (1-\alpha) y \in M$.

Důkaz.

Implikace "$\Leftarrow$". Zvolme $a \in M$ lib. a $U \coloneqq M - a = \{x - a;\ x \in M\}$.

Ověříme, že $M = U + a$ (zřejmě) a že U je vektorový podprostor.

Uzavřenost na součty: Buďte $u = x - a$, $u' = x' - a$ pro nějaké $x, x' \in M$. Jejich součtem dostaneme

$$u + u' = (x - a) + (x' - a) = (x + x' - a) - a.$$

Stačí ukázat, že $x + x' - a \in M$. Protože $x, x' \in M$, také

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x' \in M.$$

Protože $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'), a \in M$, také jejich afinní kombinace (s $\alpha = 2$)

$$2\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x'\right) + (1-2)a = x + x' - a \in M. \qquad \square$$

Afinní kombinace

Definice (Afinní kombinace n vektorů)

Afinní kombinace vektorů $x_1, \ldots, x_n \in V$ je výraz (vektor)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \text{kde} \quad \alpha_i \in \mathbb{T}, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

- Pro $n = 3$: afinní kombinace popisují rovinu, která je těmito body určena.

Zobecnění předchozí věty:

Tvrzení

Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a buď $\emptyset \neq M \subseteq V$.
Pak M je afinní podprostor $\Leftrightarrow$ M je uzavřené na afinní kombinace.

Afinní podprostory a soustavy rovnic

Věta (Soustavy lineárních rovnic a afinní podprostory)

Množina řešení soustavy rovnic $Ax = b$ je prázdná nebo afinní. Je-li neprázdná, můžeme tuto množinu řešení vyjádřit ve tvaru

$$Ker(A) + x_0,$$

kde x_0 je jedno libovolné řešení soustavy.

Důkaz.

Pokud x_1 je řešením, pak lze psát $x_1 = x_1 - x_0 + x_0$. Stačí ukázat, že $x_1 - x_0 \in Ker(A)$. Dosazením

$$A(x_1 - x_0) = Ax_1 - Ax_0 = b - b = o.$$

Tedy $x_1 \in Ker(A) + x_0$.

Naopak, je-li $x_2 \in Ker(A)$, pak $x_2 + x_0$ je řešením soustavy, neboť

$$A(x_2 + x_0) = Ax_2 + Ax_0 = o + b = b. \qquad \square$$

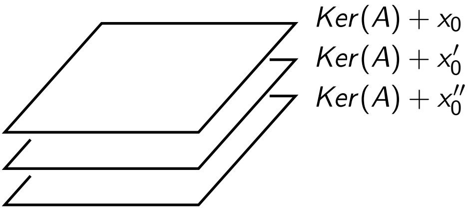
- Platí i naopak: každý afinní podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$ lze popsat pomocí soustavy rovnic.

Afinní podprostory a soustavy rovnic

Poznámka (Soustava lineárních rovnic při změně pravé strany)

Nechť $Ax = b$ je řešitelná, tedy popisuje afinní podprostor $Ker(A) + x_0$.

- Změníme-li pravou stranu soustavy b na b', pak buďto soustava přestane mít řešení, nebo se afinní podprostor posune na $Ker(A) + x_0'$, kde x_0' je jedno vybrané řešení.
- Množina řešení se tedy při změně pravé strany posouvá nějakým směrem.



Dimenze afinního podprostoru

Definice (Dimenze afinního podprostoru)

Dimenze afinního podprostoru $M = U + a$ je definována jako

$$dim\,(M) := dim\,(U).$$

- Zobecňuje pojem dimenze (každý vektorový podprostor je afinní).
- Přirozeně zavádí dimenzi bodu jako nula, dimenzi přímky v $\mathbb{R}^n$ jako jedna a dimenzi roviny jako dva, ...

Definice (Přímka)

Přímka je afinní podprostor dimenze jedna.

Jinými slovy, přímka je $p = span\{v\} + a$, kde $a, v \in V$ a $v \neq o$. Odsud dostáváme i známý parametrický popis přímky

$$p = \{\alpha v + a;\ \alpha \in \mathbb{T}\}.$$

Dimenze afinního podprostoru

Definice (Nadrovina)

Nadrovina v prostoru dimenze n je afinní podprostor dimenze $n-1$.

- v $\mathbb{R}^2$ jsou to přímky
- v $\mathbb{R}^3$ roviny, atd.

Příklad

Pro jakékoli $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ a $b \in \mathbb{R}$ je množina popsaná rovnicí

$$a^T x = b$$

nadrovinou v $\mathbb{R}^n$. A naopak!

Tvrzení

Buď $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{T}^m$. Je-li množina řešení soustavy $Ax = b$ neprázdná, pak ji tvoří afinní podprostor dimenze $n - rank(A)$.

Důkaz.

Množina řešení je tvaru $Ker(A) + x_0$. Její dimenze je tedy rovna dimenzi jádra, tedy $dim\, Ker(A) = n - rank(A)$. $\square$

Afinní nezávislost

- Lineární nezávislost vektorů $x_1, \dots, x_n$:
  minimální množina generátorů podprostoru.
- Afinní nezávislost vektorů $x_1, \dots, x_n$:
  minimální množina generátorů afinního podprostoru.
- Afinní podprostor jsme definovali jako posunutý podprostor.
  Afinní nezávislost budeme definovat posunem zpět.

Definice (Afinní nezávislost)

Vektory $x_0, x_1, \dots, x_n$ jsou *afinně nezávislé*, pokud

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_0,\ \dots,\ x_n - x_0$$

jsou lineárně nezávislé. V opačném případě jsou *afinně závislé*.

- Afinní nezávislost nezávisí na pořadí vektorů, a tedy ani na volbě x_0.

Afinní nezávislost

Definice (Afinní nezávislost)

Vektory $x_0, x_1, \dots, x_n$ jsou *afinně nezávislé*, pokud

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_0,\ \dots,\ x_n - x_0$$

jsou lineárně nezávislé. V opačném případě jsou *afinně závislé*.

Například:

- Vektory $(1,1)^T, (2,2)^T, (1,2)^T \in \mathbb{R}^2$ jsou sice lineárně závislé, ale afinně nezávislé.
- Tři body na přímce jsou afinně závislé, protože přímka je jednoznačně určena jen dvěma body.
- Dva různé body v $\mathbb{R}^n$ jsou afinně nezávislé a nejmenší afinní podprostor, který je obsahuje, je přímka.

Afinní nezávislost

Poznámka (Body v obecné poloze)

Množina bodů $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ je v obecné poloze, když každá její podmnožina velikosti nanejvýš $n+1$ je afinně nezávislá.

Například v rovině $\mathbb{R}^2$ jsou dané body v obecné poloze pokud žádné tři neleží na společné přímce.

Další témata:

- Souřadnice v afinním podprostoru.
- Vztah afinních podprostorů (rovnoběžnost, různoběžnost, mimoběžnost, ...)

Afinní zobrazení

Definice (Afinní zobrazení)

Buď $g\colon U \to V$ lineární zobrazení a mějme pevný vektor $b \in V$. Potom *afinní zobrazení* má tvar $f(u) = g(u) + b$.

- Afinní zobrazení nemusí zobrazovat nulový vektor v U na nulový vektor ve V.

Příklady:

- posunutí: $x \mapsto x + b$, kde $b \in V$ je pevné.
- $x \mapsto Ax + b$, kde $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{T}^m$.

Tvrzení (Vlastnosti afinního zobrazení)

1. *Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.*
2. *Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.*

Afinní zobrazení

Tvrzení

Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak úplný vzor vektoru $v \in V$

$$f^{-1}(v) := \{u \in U;\ f(u) = v\}$$

je buďto prázdná množina, nebo afinní podprostor v U.

Důkaz.

Buďte U, V prostory nad tělesem $\mathbb{T}$ a buďte $u_1, \ldots, u_n \in f^{-1}(v)$.
Uvažujme jejich afinní kombinaci $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Pak

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v = v.$$

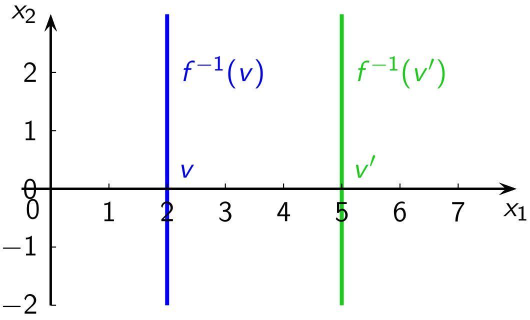
Tudíž $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in f^{-1}(v)$, což ukazuje, že množina $f^{-1}(v)$ je uzavřená na afinní kombinace. $\square$

Afinní zobrazení

Příklad (Projekce na osu x_1)

Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem $f(x) = Ax$, kde $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Úplným vzorem bodů na ose x_1 jsou vertikální přímky.



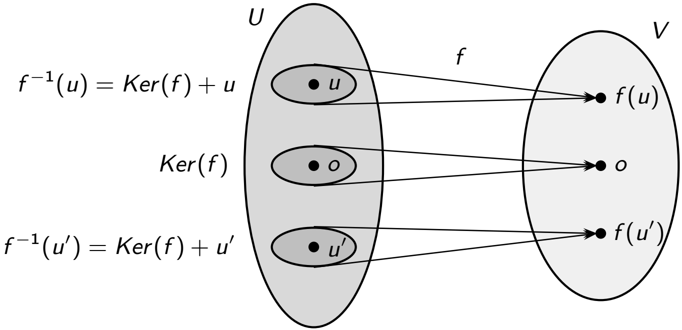
Afinní zobrazení

Analogie s řešením soustav lineárních rovnic:

- Uvažujme lineární zobrazení $f(x) = Ax$.
- Hledat všechna řešení soustavy $Ax = b$ vlastně znamená najít úplný vzor vektoru b, tedy

$$f^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\}.$$

Ještě jiný pohled pomocí jádra lineárního zobrazení:



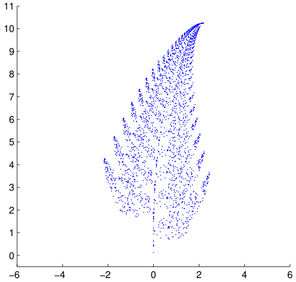
Afinní zobrazení a fraktály

$$T_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.03 \\ -0.03 & 0.86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{s pravděpodobností } 0.83$$

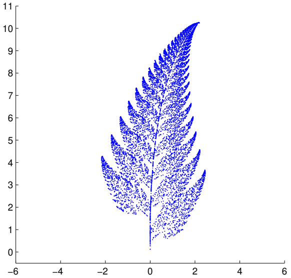
$$T_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.25 \\ 0.21 & 0.23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{s pravděpodobností } 0.08$$

$$T_3(x,y) = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.27 \\ 0.25 & 0.26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.45 \end{pmatrix} \quad \text{s pravděpodobností } 0.08$$

$$T_4(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{s pravděpodobností } 0.01$$



2500 iterací.



10000 iterací.

Stewart–Goughova platforma v robotice

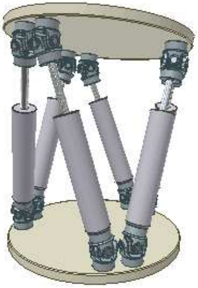
(http://www.youtube.com/watch?v=d84X60If2vM)
(https://www.youtube.com/watch?v=zNUBZfrOXUc)

Převod souřadnic plošiny x na souřadnice základny:

$$x' = Px + c.$$

Rameno (i) má koncové body $x^{(i)}$ na základně a $y^{(i)}$ na plošině. Délka ramene je vzdálenost $x^{(i)}$ a $y'^{(i)} = Py^{(i)} + c$.

Problémy: z délek ramen určit pozici plošiny, atp.



[zdroj: Wikipedia]

Lineární klasifikátor (a neuronové sítě)

- data reprezentovaná vektory $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$
- každá hodnota patří do skupiny A či B.
- chceme sestrojit klasifikátor, který bude umět novou hodnotu $v \in \mathbb{R}^n$ automaticky zařadit do příslušné skupiny

Lineární klasifikátor, založený na oddělující nadrovině $a^T x = b$: