Задача на Биркхоф

Петър Чернев
ф.н. 26270

1 Увод

Интерполацията представлява процесът на определяне на фукция на базата на множество от данни, такава че тя преминава през всички точки в данните и може да се изпозлва за оженяване на нови точки извън зададеното множество. В тази дефиництя няма ограничение над класа на търсената функция. Ние ще се фокусираме над интерполация на двумерни данни с полиноми. Най-простата форма за задачата представлява интерполационната задача на Нютон:

Задача 1 (Интерполационна задача на Нютон)**.** *Дадени са* $n+1$ *на брой точки* $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2\}_{i=0}^{n}$, *такива че* $x_i = x_j \Leftrightarrow i = j$. *Да се намери полином* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *от степен най-много* n, *който преминава през всички точки:*

$$p(x_i) = y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Виждаме, че в тази задача се интересуваме само от стойностите на самия полином в дадените x_i. Често в практиката е нужно да наложим условия над стойнотите на производните на функията в точките (напр. във физиката - може да се интересуваме от скоростта или ускорените на обект в даден момент от време). Един начин да стане това е чрез задаване на:

Задача 2 (Интерполационна задача на Ермит)**.** *Дадени са* $n + 1$ *на брой различни точки по* x *оста* $\{x_i \in \mathbb{R}\}_{i=0}^{n}, (x_i = x_j \Leftrightarrow i = j)$, *техните кратности* $\{\lambda_i \in \mathbb{Z}\}_{i=0}^{n}$ *и таблица от общо* $N+1 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ *стойности* $\{w_{ij} \in \mathbb{R}\}_{i=0,j=0}^{n,\lambda_i-1}$. *Да се намери полином* p *степен* N, *за който:*

$$p^{(j)}(x_i) = w_{ij}, \tag{2}$$

където $p^{(j)} = \dfrac{d^j p}{dx^j}$ *е* j*-тата производна на* p.

Горните две задачи са добре познати. И за двете съществуват единствени решения за всяка формулировка на задачата. На практика обаче, може да е нужно да поставим условия над някоя производна на функцията в точка, но не и на по-ниските производни. Тази задача може да се разшири до задача на Ермит и да се намери единствен полином. Степента на този полином обаче ще е по-висока от броя условия в оригинлната ни задача. Ако искаме да търсим възможно най-малко мерният полином, които удовлетворява изходните ни условия, трябва да дефинираме интерполационната задача на Биркхоф.

2 Интерполационна задача на Биркхоф

2.1 Матрица на инцидентност

Преди да изложим задачата, ще е удобно да дадем следната:

Дефиниция 2.1 (Матрица на инцидентност)**.** *Една матрица* $E = \{E_{ij}\}_{i=1,j=0}^{k,n}$ *наричаме матрица на инцидентност, ако са изпълнени следните условия:*

1. $E_{ij} \in \{0,1\}$*, т.е.* $E \in \{0,1\}^{k\times(n+1)}$

2. $|E| := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} E_{ij} = n+1$

С други думи матрицата на инцидентност е матрица $k \times (n+1)$ с елементи 0 и 1, съдържаща общо $n+1$ единици. За удобство дефинираме индексното множество, съответващо на дадена матрица на инцидентност:

Дефиниция 2.2 (Индексното множество)**.** *Индексното множество е, съответващо на матриата* E*, наричаме множеството от наредени двойки* (i,j)*:*

$$e = \{(i,j) : E_{ij} = 1\} \tag{3}$$

С тези дефиниции сме готови да дефинирмае задачата на Биркхоф.

2.2 Дефинция на задачата

Задача 3 (Интерполационна задача на Биркхоф)**.** *Дадени са* k *на брой различни точки по* x *оста* $\{x_i \in \mathbb{R}\}_{i=1}^{k}, (x_i = x_j \Leftrightarrow i = j)$*, матица на инцидентност* $E_{k\times n+1}$ *и множество от стойности* $\{w_{ij} \in \mathbb{R} : (i,j) \in e\}$*. Да се намери полином* p *от степен* n*, такъв че:*

$$p^{(j)}(x_i) = w_{ij}, \quad (i,j) \in e \tag{4}$$

Интерпретацията на матрицата на инцидентност E е такава: можем да си мислим, че i-тия ред съответства на стойността x_i, а j-тата колона - на j-тата поризводна. Ако на място (i,j) имаме 1 (т.е. $E_{ij} = 1$ или $(i,j) \in e$), значи имаме условие над j-тата производна в точката x_i със съответнат му стойност w_{ij}.

2.3 Съществуване и единственост на рещението

Съществуване и единствеността на решението на задачата на Биркхов в общия случай е все още отворен проблем. Ще казваме, че една матрица на инцидентност E е *(*балансирана) (poised), ако съответващата ѝ задача на Биркхоф има решение за всеки избор на точки $\{x_i\}$ и стойности $\{w_{ij}\}$. Основен резултат в класификацията на матриците на инцидентност е условието на Полйа, дадено от Полйа в случая $k = 2$ и генерализирано от Шоенберг за $k > 2$. То е необходимо условие за бланасираност на E.

Дефиниция 2.3 (Условие на Полйа)**.** *Дефинираме сумите на колоните на една матрица на инцидентност* E *като:*

$$m_j = \sum_{i=1}^{k} E_{ij} \tag{5}$$

и сумата на всички колони до j*-тата като:*

$$M_j = \sum_{i=0}^{j} m_i \tag{6}$$

Една матрица на инцидентност E *удовлетворява условието на Полйа, ако:*

$$M_j \geq j+1, \quad \forall j = 0, \ldots, n \tag{7}$$

Теорема 1 (Шоенберг, [1])**.** *Ако една матрица на инцидентност е балансирана, то тя удовлетворява условиято на Полйа.*

Следващата голяма стъпка към класификацията на матриците на инцидентност правят Еткинсън и Шарма. За целта, трябва да дадем следните дефиниции:

Дефиниция 2.4 (Блок)**.** *Всяка максимална последователност (т.е. която не се съдържа от последователност) от единици b в една матрица на инцидентност E се нарича блок:*

$$e \supset b_{ij_1j_2} = \{(i,j) : j_1 \le j \le j_2 \wedge (j_1 = 0 \vee E_{i,j_1-1} = 0) \wedge (j_2 = n \vee E_{i,j_2+1} = 0)\} \qquad (8)$$

Дефиниция 2.5. *Един блок се нарича* четен *(*нечетен*), ако съдържа четен (нечетен) брой единици.*

Дефиниция 2.6. *Един блок $b_{ij_1j_2}$ се нарича подкрепен (nonconservative), ако съществуват индекси (i', j') и (i'', j''), такива че:*

$$(i', j'), (i'', j'') \in e, \quad i' < i < i'' \quad \text{и} \quad j', j'' < j_1 \qquad (9)$$

С други думи един блок в реда i и започващ от колоната j_1 е подкрепен, когато в колоните преди j_1 има поне една единица в редовете над реда i и поне една единица в редовете под реда i.

Дефиниция 2.7. *Една матрица на инцидентност се нарича* неподкрепена*, ако не съдържа нечетни подкрепени блокове.*

С тези дефиниции сме готови да дадем следната теорема:

Теорема 2 (Еткинсън-Шарма, [2])**.** *Ако една матрица на инцидентност е неподкрепена и удовлетворява условието на Полйа, то тя е балансирана.*

В своята работа [2], Еткинсън и Шарма те дават и едно предположение базирано на собствената си работа, тази на Шоенберг и екстензивно търсене на контрапримери. Преди да го изкажем, трябва да дадем една дефиниция, която ще изпозлваме и понататък:

Дефиниция 2.8 (Нередуцируема матрица на инцидентност)**.** *Една матрица на инцидентност се нарича нередицируема, ако:*

$$M_j > p + 1, \quad \forall j = 0, \ldots, n-1 \qquad (10)$$

Виждаме, че условието за нередуцируемост е по-силно от условието на Полйа. Използвайки тези дефиниция, Еткинсън и Шарма дават следното

Предположение 1. *Ако една матрица на инцидентност е нередуцируема и балансирана, то тя е неподкрепена.*

Ако това предположение бъде доказано, бихме имали пълна класификация на матриците на инцидентност за задачата на Биркхоф.

В следващата глава ние ще се фокусираме над един алгоритъм за намиране на едно решение на задачата на Биркхоф за балансирана матрица ин инцидентност.

3 Рекурсивен метод за намиране на решение при балансирана матрица на инцидентност

В изложеним метода представен [3] с допълнение на няколко доказателства, които липсват в цитирания труд. Алгоритъмът се състои в рекурсивно разделяне на матрицата на инцидентност чрез прилагане на две операции в зависимост от това дали тя е редуцируема или не до достигане на матрици, които нефинират интерполационни задачи на Нютон. Решенията на тези задачи се комбинират по долу описания начин, за да се получи решение на пълната задача.

Първо ще дефинираме двете операции на разделяне на матрицата и връзката между решенията на изходната и на резултатните задачи.

3.1 Декомпозиция на редуцируема матрица на инцидентност

Дефинираме операцията $\oplus$ като:

Дефиниция 3.1 (Декомпозиция)**.**

$$E_{k\times(p+q+2)} = F_{k\times(p+1)} \oplus G_{k\times(q+1)}$$
$$\Updownarrow$$
$$E_{ij} = \begin{cases} F_{ij}, & j <= p \\ G_{i,j-p-1}, & j > p \end{cases}$$

С други думи операцията $\oplus$ просто "долепя"матриците една след друга. Например, ако:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то:

$$F \oplus G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Еткинсън и Шарма дават следната

Теорема 3 (за декомпозицията, [2])**.** *Нека матрицата на инцидентност E удовлетворява условието на Полйа. Тогава*

1. *E има единствена декомпозиция:*

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n, \tag{11}$$

където всяка матрица E_i е нередуцируема.

2. *E е балансирана $\Leftrightarrow$ всички E_i са балансирани*

Тази декомпозиция можем да намерим рекурсивно, като приложим следното

Твърдение 1. *Нека $E_{k\times(p+q+2)}$, $F_{k\times(p+1)}$ и $G_{k\times(q+1)}$ са матрици на инцидентност, такива че:*

$$E = F \oplus G. \tag{12}$$

Нека още E удовлетворява условието на Полйа. Тогава F и G удовлетворяват условието на Полйа.

Доказателство. Твърдение следва директно от дефинициите. Да означим с M_j^A сумите на колоните до j-тата в матрицата A. От това, че E удовлетворавя условието на Полйа и дефиницията на $\oplus$, имаме:

$$M_j^F = M_j^E \geq p + 1, \tag{13}$$

Което доказва, че F удовлетворява условието на Полйа. Също имаме:

$$M_{p+j+1}^E \geq p + j + 2 \tag{14}$$

От дефиницията на $\oplus$ следва

$$M_j^G = M_{p+j+1}^E - |F| = M_{p+j+1}^E - p - 1 \geq p + j + 2 - p - 1 = j + 1, \tag{15}$$

което е точно условието на Полйа за матрицата G. $\square$

Така можем да намерим крайната декомпозиция на матрица, удовлетворяваща условието на Полйа, чрез следния рекурсивен алгоритъм:

```
Decomposition
Data: E: Polya(E) == True and Irreducible(E) == False
Result: Array[E_i]: E = ⊕_{i=1}^n E_i and
  Irreducible(E_i) == True ∀i = 1, ..., n − 1

array = [ ]
for j = 0, ..., p + q + 1 do
    E_{k×(n+1)} = F_{k×(j+1)} ⊕ G_{k×(n−j)}
    if ¬(IsIncidenceMatrix(F) ∧ IsIncidenceMatrix(G)) then
        continue
    end

    if Irreducible(F) then
        array.append(F)
    end
    else
        continue
    end

    if Irreducible(G) then
        array.append(G)
    end
    else
        array.concatenate(Decomposition(G)
    end
end
```

С така дефинирата операция $\oplus$, теоремата за декомпозицията и алгоритъмът горе можем да разделим всяка бланисрана матрица удовлетворяваща условието на Полйа до няколко балансирани нередуцируеми матрици. Сега ще разгледаме операция за разделяне на нередуцируема матрица.

3.2 Редукция на нередуцируема неподкрепена матрица на инцидентност

Първо отбелязваме оксиморонното наименование на операцията. Както казахме, следваме изложението в [3] където се изпозлва тази терминология на английски. Авторът е с немска фамилия, така че предполагаме, че е или загуба в превода, или опит за ирония. С риск изложението да стане объркващо, ние се придържаме към терминилогията от оригиналната статия.

С това преминаваме към дефиницията на операцията:

Дефиниция 3.2 (Редукция)**.** *Нека E е нередуцируема неподкрепена матрица на инцидентност. Означаваме:*

$$E = \overline{E} \times \underline{E}, \tag{16}$$

където $\overline{E}$ (съответно $\underline{E}$) е матриата на инцидентност, получена от E чрез премахване на последния ред и смяна на най-дясната единица в първия (съответно последния) ред на матрицата с нула.

За така дефинираната операция имаме следното

Твърдение 2. *$\overline{E}$ и $\underline{E}$ удовлетворяват условието на Полйа и са неподкрепени.*

Доказателство.

1. От това, че E е нередуцируема имаме, че $M_j^E > j+1, j = 0, \ldots, n-1$. Нека б.о.о. приемем, че сме премахнали единица от k-тата колона. Тогава че имаме:

$$\begin{aligned} M_j^E &> j+1, \quad j = 0, \ldots, k-1 \\ M_j^E &> j \geq j+1, \quad j = k, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

   Сумите на $\overline{E}$ и $\underline{E}$ съвпадат с тези за E и следователно матриците удовлетворяват условието на Полйа.

2. Условието една матрица на инцидентност да е неподкрепена е да не съдържа подкрепени нечетни блокове. Нито премахването на последната колона, нито премахването на коя да е единица може да добави нов блок или на направи неподкрепен блок подкрепен, което доказва втората част от твърдението.

□

От горното твърдение и теоремата на Еткинсон-Шерма следва, че $\overline{E}$ и $\underline{E}$ са балансирани.

3.3 Свеждане до матрици на инцидентност на Лагранж

Така дефинирахме две операции над балансирани, който запазват свойството балансираност. Първата от тях (декомпозицията $\oplus$) приема балансирана и редуцируема матрица и връща множество от балансирани, нередуцируеми матрици. Втората опреция (редукцията $\times$) прима балансирана, нередуцируема и неподкрепена матрица и връща балансирани неподкрепени матрици. Нека означим следните множества от матрици на инцидентност:

$$\begin{aligned} B &= \{\text{балансираните матрици}\} \\ R &= \{\text{редуцируемите матрици}\} \\ C &= \{\text{неподкрепените матрици}\}. \end{aligned}$$

Можем схематично да представим операциите като:

$$\begin{aligned} \oplus &: B \cap R \longrightarrow B \cap \overline{R} \\ \times &: B \cap \overline{R} \cap C \longrightarrow B \cap C, \end{aligned}$$

като игнорираме факта, че тези операции всъщност връщат подмножества на множествата от дясно.

Целта ни е да се подсигурим, че можем да прилагаме някоя от двете операции във всеки един случай. Винаги ще работим с балансирани матрици. Ако изходната матрица е редуцируема, можем да приложим декомпозиция и да получим нередуцируеми матрици, т.е. сме в $B \cap \overline{R}$. В противен случай изхождаме от $B \cap \overline{R}$. Следователно можем да приложим операцията $\times$ и да получим матрици от $B \cap C$. На този етап нашият алгоритъм би се провалил, ако някоя от ресултатните матрици е в множеството $B \cap R \cap C$, т.е. е балансирана, радуцируема и неподкрепена.

Тук сме принудени да приемем Предположение 1 за вярно. В нашето представяне, то може да се изрази така:

$$B \cap \overline{R} \subset C, \tag{17}$$

от където следва

$$B \cap \overline{R} = B \cap \overline{R} \cap C. \tag{18}$$

Така отново схметично можем да изразим операциите като:

$$\oplus : B \cap R \longrightarrow B \cap \overline{R}$$
$$\times : B \cap \overline{R} \longrightarrow B \cap C.$$

С комбинацията от двете операции покриваме цялото множество B и следователно можем да приложим едната от тях във всеки случай на балансирана матрица на инцидентност.

Матриците на Лагранж са тези инцидентни матрици, които имат единици само в първата си колона. Всички матрици на инцидентност с една колона на матрици на инцидентност на Лагранж. Понеже тези операции строго намаляват броя колоните в матриците, сме сигурни, че ще достигнем до Лагранжеви матрици на инцидентност. В следващата глава ще дадем решение на интерполационната задача на Нютон съответваща на тези матрици, а в последващите две - метод за комбиниране на решенията, в зависимост коя от двете операции е използвана.

3.4 Решение на интерполационната задача на Нютон

Интерполационната задача на Нютон съответства на матрица на инцидентност от вида:

$$\begin{aligned} &E_{ij} \in \{0, 1\}, j = 0 \\ &E_{ij} = 0 \qquad , j > 0 \end{aligned}$$

Един начин да се реши задачата за дадени точки $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ и стойности $\{w_i\}_{i=1}^{n+1}$ е чрез полиномите на Лагранж:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{\substack{1 \leq m < n+1 \\ m \neq i}} \frac{x - x_m}{x_i - x_m} \tag{19}$$

Коефициентите на $p(x)$ могат да се получат в явна форма от [4]:

$$p(x) = (-1) \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & w_1 & w_2 & \cdots & w_{n+1} \\ x^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \\ x^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \tag{20}$$

като се развие детерминантата в числителя по първия стълб.

3.5 Изграждане на решението на изходната задача при декомпозиция

Алгоритъмит 1 разделя редуцируема матрица, удовлетворяваща условието на Полйа, до нередуцируеми матрици. Можем да изпозлваме съкратена версия на този алгоритъм, за да получим точно две матрици: една нередуцируема и една удовлетворяваща условието на Полйа. Това става като спрем при първата намерена нередуцируема матрица (която знаем, че съществува, от теорамата за декомпозицията 3):

```
DecompositionToTwo
Data: E: Polya(E) == True and Irreducible(E) == False
Result: F, G: E = F ⊕ G and
  Irreducible(F) == True and Polya(G) == True

for j = 0, ..., p + q + 1 do
    E_{k×(n+1)} = F_{k×(j+1)} ⊕ G_{k×(n−j)}
    if ¬(IsIncidenceMatrix(F) ∧ IsIncidenceMatrix(G)) then
        continue
    end

    if Irreducible(F) then
        return
    end
end
```

Сигурни сме, че G удовлетворява условието на Полйа от Тв. 1. Ако сме разделили по този начин една редуцируема матрица на инцидентност E, удовлетворяваща условието на Полйа, на две матрици:

$$E = F \oplus G, \tag{21}$$

такива че F е нередуцируема матрица, а G удовлетворява условието на Полйа, можем да намерим решението на пълната задача, съответваща на матрицата на инцидентност E като приложим следното

Твърдение 3. *Нека $E_{k\times(n+1)}$ и $G_{k\times(n-m+1)}$ удовлетворяват условието на Полйа, а $F_{k\times m}$ е нередуцируема матрица. Нека те са свързани така:*

$$E = F \oplus G. \tag{22}$$

Нека имаме дадени точки $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ и стойности $\{w_{ij}\}_{i=1,j=0}^{k,n}$. Нека p_1 е полином от степен m, който е решение на задачата на Биркхоф:

$$p_1^{(j)}(x_i) = w_{ij} - p_2^{(j)}(x_i), \quad \forall(i,j) \in f, \tag{23}$$

а p_2 е полином от степен n удовлетворяващ $p_2^{(m)} = p_3$, където p_3 е полином от степен $n-m$, който е решение на задачата на Биркхоф:

$$p_3^{(j)}(x_i) = w_{i,m+j}, \quad \forall(i,j) \in g. \tag{24}$$

(f и g са индексните множества, съответстващи на матриците на инцидентност F и G).

Тогава

$$p = p_1 + p_2 \tag{25}$$

е решение на задачата на Биркхоф:

$$p^{(j)}(x_i) = w_{ij}, \quad \forall(i,j) \in e. \tag{26}$$

Доказателство. Заместваме (33) в (35):

$$p^{(j)}(x_i) = p_1^{(j)}(x_i) + p_2^{(j)}(x_i). \tag{27}$$

При $j < m$:

$$p_1^{(j)}(x_i) + p_2^{(j)}(x_i) = w_{ij} - p_2^{(j)}(x_i) + p_2^{(j)}(x_i) = w_{ij}. \tag{28}$$

При $j \geq m$, $p_1^{(j)} = 0$ и $(i,j) \in e \Leftrightarrow (i,j) \in g$, от където:

$$p_2^{(j)}(x_i) = p_3^{(j-m)}(x_i) = w_{i,m+j-m} = w_{ij} \tag{29}$$

□

С това твърдение сведохме намирането на решение на задачата (35) до намиране на две решения на по-малко мерните задачи (23) и (24). Сега ще направим същото в случая на разделяне на матрицата E чрез операцията редукция

3.6 Изграждане на решението на изходната задача при редукция

Твърдение 4. *(доказано в [3])*
Нека $E_{k\times(n+1)}$ е нередуцируема матрица, която сме разложили така

$$E = \overline{E}_{k\times n} \times \underline{E}_{k\times n}, \tag{30}$$

Нека имаме дадени точки $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ и стойности $\{w_{ij}\}_{i=1,j=0}^{k,n}$. Нека $\overline{p}$ е полином от степен $n-1$, който е решение на задачата на Биркхоф:

$$\overline{p}^{(j)}(x_i) = w_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \overline{e}, \tag{31}$$

и $\overline{p}_n$ е полином от степен $n-1$, който е решение на задачата на Биркхоф:

$$\overline{p}_n^{(j)}(x_i) = P_n^{(j)}(x_i), \quad \forall (i,j) \in \overline{e}, \tag{32}$$

където $P_n(x) = x^n$. Нека $\underline{p}$ и $\underline{p}_n$ са дефинирани аналогично, но за $\underline{e}$, вместо $\overline{e}$.
Тогава

$$p = \overline{p} + c(P_n - \overline{p}_n) = \underline{p} + c(P_n - \underline{p}_n) =: \overline{p} \times \underline{p}, \tag{33}$$

където $c \in \mathbb{R}$ е константа, такава, че:

$$\overline{p} - \underline{p} = c(\overline{p}_n - \underline{p}_n), \tag{34}$$

е решение на задачата на Биркхоф:

$$p^{(j)}(x_i) = w_{ij}, \quad \forall (i,j) \in e. \tag{35}$$

С последните две върдения и формула 20 сме готови да дефинираме алгоритъма за намиране на решението на задачата на Биркхоф

3.7 Алгоритъм

Алгоритъмът се дефинира така: Изходната ни матрица е балансирана. Ако е матрица на Лагранж, намираме решението и по формула 20 и алгоритъмът приключва. Ако е радуцируема, прилагаме операцията декомпозиция $\oplus$ по алгоритъмът 2, а ако е нередуцируема - редукция $\times$ (отново отбелязваме, че оксиморонът тук не е грешка). И в двата случа получаваме две балансирани матрици. Прилагаме алгоритъм алгоритъмът към двете получени матрици рекурсивно. Получаваме две решения на подзадачите, чрез който намираме решението на изходната задача по един описаните в предишните две глави начини. В псевдокод това може да се изрази така

```
Solve
Data:
   x = {x_i}_{i=1}^k
   w = {w_ij}_{i=1,j=0}^{k,n},
   E_{k×(n+1)}: Conservative(E) == True
Result: p ∈ π_n : p solves BirkhoffProblem(x, w, E)

if IsLagrangeMatrix(E) then
 |  return LagrangePolynomial(x, w, E)
end
else if Irreducible(E) then
 |  E = Ē × E̲
 |  return Solve(x, w, xĒ) × Solve(x, w, E̲)
end
else
 |  E = F ⊕ G
 |  return Solve(x, w, F) + Solve(x, w, G)
end
```

Тук декомпозицията $\oplus$ е в смисъла на разделяне на две матрици - една нередуцируема и една удволетворяваща условието на Полйа - по алгоритъм 2.

В глава 3.3 доказахме, че ако работим под Предположение 1, то този алгоритъм е добре дефиниран, т.е. така дефинираните матрици $\overline{E}, \underline{E}, F$ и G винаги са балансирани (conservative) и могат да се подадат рекурсивно като вход на алгоритъма. Сега остана само да имплементираме алгоритъма.

4 Имплементация

Имплементацията на горе дефинирания алгоритъм може да намерим в това GitHub хранилище: https://github.com/PetarChernev/birkhoff. Основната фунцкионалност се изпозлва чрез функцията `solve` от файла `algorithm.py`.

Литература

[1] I. Schoenberg (1966). On Hermite-Birkhoff interpolation. Journal of Mathematical Analysis and Applications

[2] K. Atkinson and A. Sharma (1969). A Partial Characterization of Poised Hermite-Birkhoff Interpolation Problems. SIAM Journal on Numerical Analysis

[3] G. Mühlbach (1981). An algorithmic approach to Hermite-Birkhoff-interpolation. Numerische Mathematik

[4] V. B. Tymchyshyn and A. V. Khlevniuk (2019). Beginner's guide to mapping simplexes affinely. Preprint