Съдържание

Записки от Упражненията по Линейна Алгебра, четени през зимния семестър на 2020-2021 уч. г.

Петър Евгениев.

18 юли 2021 г.

1 Комплексни числа. Формула на Моавър. Тригонометричен и експоненциален вид на комплексно число.

Необходимостта от комплексните числа класически се обяснява с невъзможността да решим уравнението $x^2+1=0$ в реалните числа $\mathbb{R}$. Действително, ако се опитаме да го решим бихме получили $x^2=-1$ което на пръв поглед е абсурд, защото кое е това реално число, което повдигнато на квадрат дава отрицателно число? В този случай казваме, че уравнението $x^2+1=0$ не е решимо в реалните числа. (над $\mathbb{R}$.) Или полиномът с реални коефициенти x^2+1 няма реални корени. Но, ако към реалните числа добавим "нещо ново"и го наречем $i:=\sqrt{-1}$-имагинерна единица, получаваме множеството $\mathbb{C}$ на комплексните числа. По-точно, определяме $\mathbb{C} := \left\{ f(i) \,|\, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x] \right\}$ като множеството на полиномите на i с реални коефициенти. Всеки полином $f(i) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k i^k = a_0 + a_1 i + \ldots + a_n i^n = a + ib \in \mathbb{C}$ на i с реални коефициенти се представя като полином $a+bi \in \mathbb{R}[i]$ от степен ≤ 1, защото

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1,$$

Общата формула е

$$i^k = (\sqrt{-1})^k = \begin{cases} 1 & \text{ако } k = 4l, \\ i & \text{ако } k = 4l+1, \\ -1 & \text{ако } k = 4l+2, \\ -i & \text{ако } k = 4l+3. \end{cases}$$

Определение 1.1. Ако $z = a + bi \in \mathbb{C}$ с $a, b \in \mathbb{R}$ е комплексно число, то казваме че $a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ е реалната част на z и $b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ е имагинерната част на z.

Две комплексни числа събираме като съберем съответно реалните и имагинерните им части, а умножаваме както умножаваме полиноми, което илюстрираме в следния

Пример 1.2. Нека вземем две комплексни числа $z = 5 + 35i \in \mathbb{C}$ и $s = -2 + 5i \in \mathbb{C}$. Тяхната сума $z + s = (5 + 35i) + (-2 + 5i) = (5 - 2) + (35 + 5)i = 3 + 40i = s + z \in \mathbb{C}$.

И можем да си мислим, че ги събираме "покомпонентно тоест като наредени двойки $(5,35)+(-2,5)=(3,40)$. По този начин можем да отъждествяваме $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ с равнината, понеже и реалната и имагинерната част на едно комплексно числа са реални числа!($z \in \mathbb{C} \Rightarrow Re(z), Im(z) \in \mathbb{R}$.) Ако искаме да умножим двете комплексни числа $z.s = s.z = (5+35i)(-2+5i) = (-10-175)+i(25-70) = -185-45i \in \mathbb{C}$.

Определение 1.3. Нека $z = a+bi \in \mathbb{C}$ е комплексно число. Комплексно спрегнатото $\overline{z} = a-bi \in \mathbb{C}$ на z има същата реална част $\mathrm{Re}(\overline{z}) = a = \mathrm{Re}(z)$ като z и противоположна имагинерна част $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -b = -\mathrm{Im}(z)$.

Възниква въпросът: "Как се делят комплексни числа?". В разяснение на този въпрос даваме следното: Ако $c+di = 0$ за $c,d \in \mathbb{R}$, то $c=d=0$, защото ако $d \neq 0$, то $i = -\frac{c}{d} \in \mathbb{R}$ трябва да е реално число, което е противоречие. За $c+di \neq 0$ имаме

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \in \mathbb{C}.$$

с $c^2+d^2 \in \mathbb{R}^{>0}$.

Свойства 1.4 (на комплексното спрягане на комплексни числа в алгебричен вид)**.**

$$(a) \quad \overline{s} \pm \overline{z} = \overline{s \pm z},$$
$$(b) \quad \overline{z}.\overline{s} = \overline{sz},$$
$$(c) \quad \frac{\overline{s}}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{s}{z}\right)}.$$

Ако нанесем $z \in \mathbb{C}$ като точка в равнината(с координати $(Re(z), Im(z))$, то $\overline{z} \in \mathbb{C}$ представлява симетричното относно абсцисната ос(реалната ос в $\mathbb{C}$.) комплексно число. И така можем да говорим за "радиус-вектор"в комплексната равнина. Това е разстоянието от началото($0 \in \mathbb{C}$) до $z \in \mathbb{C}$.

Да забележим, че $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a - i^2b^2 = a^2+b^2 \geqq 0$ е неотрицателно реално число и $z\overline{z} = 0$ тогава и само тогава, когато $a = b = 0$. Затова неотрицателното реално число $|z| := \sqrt{z\overline{z}} \in \mathbb{R}^{\geqq 0}$ наричаме модул на комплексното число $z \in \mathbb{C}$ и това е дължината на радиус-вектора в комплексната равнина от $0 \in \mathbb{C}$ до $z \in \mathbb{C}$.

Представянето $z = a+bi \in \mathbb{C}$ с $a,b \in \mathbb{R}$ се нарича алгебричен вид на комплексното число z. Ако $z \neq 0$, $r = |z|$ е дължината на радиус-вектора на z и φ е ъгълът между положителната реална полуос и $\overrightarrow{Oz}$, то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ се нарича тригиномтричен вид на $z \in \mathbb{C}$. Аргументът φ на z е определен с точност до целочислено кратно на 2π.

Важна забележка. Докато всеки две комплексни числа в алгебричен вид $z = a+ib$ и $s = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ са равни точно когато са равни съответно реалната и имагинерната им част. $s = z \Leftrightarrow Re(s) = Re(z)$ и $Im(s) = Im(z)$, разглеждайки две комплексни числа в тригонометричен вид вече има леко изменение.

По точно, за $s = r_1(\cos\theta + i\sin\theta), z = r_2(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ е вярно ,че са равни точно когато $r_1 = r_2$ и $\varphi - \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Тоест две комплексни числа в тригонометричен вид са равни, точно когато модулите им са равни и аргументите им се различават с кратно на 2π.(Този факт се дължи на 2π периодичността на функциите $\sin(x), \cos(x)$.)

Това ще илюстрираме в следния

Пример 1.5. Ако $\mathbb{C} \ni z = 3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{14}\right)\right]$ и $\mathbb{C} \ni s = 3\left[\cos\left(\frac{15\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right]$, то от факта, че $|z| = 3 = |s|$ и $Arg(z) - Arg(s) = \frac{2\pi}{14} - \frac{15\pi}{7} = \frac{2\pi - 30\pi}{14} = \frac{-28\pi}{14} = -2\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$ разликата на аргументите им е кратна на 2π и значи заключаваме, че $s = z \in \mathbb{C}$ съвпадат като комплексни числа.

Начинът, по който умножаваме комплексни числа в тригонометричен вид, е следният. Ако $s = r_1(\cos\theta + i\sin\theta)$ и $z = r_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ са ненулеви комплексни числа, то

$$sz = r_1r_2[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)] =$$
$$= r_1r_2[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)],$$

$$\frac{s}{z} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{(\cos\varphi - i\sin\varphi)} =$$
$$\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]}{\cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)].$$

Така изведохме, следните формули:

$$sz = r_1r_2[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]. \tag{1}$$

$$\frac{s}{z} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)]. \tag{2}$$

На лекции е доказано, че ако $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, то множеството Ω на всички корени на полинома $x^n - z$, т.е. на числата $\sqrt[n]{z}$ с $(\sqrt[n]{z})^n = z$ за $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ има вида

$$\Omega = \left\{\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \middle| \, 0 \leqq k \leqq n-1\right\}$$

и се състои от n различни комплексни числа! В този ред даваме

Пример 1.6. Ако в горното(формула на Моавър) заместим $z = 1.(\cos 0 + i\sin 0) = 1 \in \mathbb{C}$ (единицата), то Ω се състои от от всички n-ти корени на единицата. В този случай е прието да пишем $\Omega = \mathbb{C}_n$. А всички $n-$ти корени на единицата имат вида:

$$\mathbb{C}_n = \left\{1.\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \middle| \, 0 \leqq k \leqq n-1\right\} =$$
$$= \left\{\omega_0, \omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}\right\},$$

където $\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ за $0 \leqq k \leqq n-1$.

Да забележим също, че ако вземем $\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ с него и само него можем да получим останалите, съгласно начина по който се разбрахме, че умножаваме комплексни числа в тригонометричен вид. По-точно

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \cos\left(2.\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(2.\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_2,\\
\omega_1^3 &= \cos\left(3.\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(3.\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_3,\\
&\dots\\
\omega_1^{n-1} &= \cos\left((n-1).\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left((n-1).\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_{n-1},\\
\omega_1^n &= \cos\left(n.\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(n.\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_0.
\end{aligned}$$

Това доказва, че $\mathbb{C}_n = \{\omega_1^k \ \mid\ 0 \leqq k \leqq n-1\}$.

Тези $n-$ти корени на единицата, които разгледахме по-горе са много важни и ще се налага да работите с тях, затова им обръщаме специално внимание. $\mathbb{C}_n$ могат да се изобразят като върхове на правилен $n-$ъгълник вписан в единичната окръжност $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ \mid\ |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$.

Задача 1.7. Да се пресметне и запише в алгебричен вид комплексното число.

$$\begin{aligned}
&(1.1). \quad (3+i)^2 + (3-i)^2.\\
&(1.2). \quad \frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2}.\\
&(1.3). \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2}.\\
&(1.4). \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k}.\\
&(1.5). \quad \sqrt{2i}.\\
&(1.6). \quad \sqrt{3-4i}
\end{aligned}$$

Решение. (1.1).

$$(3+i)^2 + (3-i)^2 = 9 + 6i + i^2 + 9 - 6i + i^2 = 18 + 2(-1) = 16 = 16 + i.0 \in \mathbb{C}.$$

(1.2).

$$\begin{aligned}
\frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2} &= \frac{1 + 4i + 4.(-1) - [2^3 - 3.2^2.i + 3.2.i^2 - i^3]}{1^3 - 3.1^2.i + 3.1.i^2 - i^3 + 4 + 4i + i^2} =\\
&= \frac{1 + 4i - 4 - 8 + 12i + 6 - i}{1 - 3i - 3 + i + 4 + 4i - 1} = \frac{-5 + 15i}{1 + 2i}.\frac{(1-2i)}{(1-2i)} =\\
&= \frac{-5 + 15i + 10i + 30}{1 + 4} = \frac{25 + 25i}{5} = 5 + 5i.
\end{aligned}$$

Основното важно нещо в тази задача беше, след като достигнем до частно на две комплексни числа в алгебричен вид. Т.е. комплексно число от вида $\frac{a+ib}{\alpha+i\beta}$ да се сетим(спомнете си как рационализирахте знаменател на дадена функция), че можем да умножим и числителя и знаменателя(а така не променяме дробта, т.к. по същество я умножаваме с единица) по комплексно спрегнатото на знаменателя. Така поради факта, че за всяко $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z\overline{z} \in \mathbb{R}$, то получаваме знаменател, който е реално число. (1.3). Да забележим, че $-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ и $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Затова:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{3k+2} =$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi(3k+2)}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(3k+2)}{3}\right) = \cos\left(\frac{6k\pi+4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{6k\pi+4\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Тук използвахме равенството (30) многократно($3k+1$-кратно), след което се възползвахме от 2π-периодичността на функциите $\sin(x), \cos(x)$.

(1.4). Както в (1.3). използвахме формулата за повдигане умножение на комплексно число(многократно), което ни даде начин за пресметянето степен на комплексно число в тригонометричен вид.(по-точно използваме формулата (30) и $z^n = \underbrace{z \dots z}_{n}$)

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{6k} = \cos\left(\frac{2\pi.6k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi.6k}{3}\right) =$$
$$= \cos(4k\pi) + i\sin(4k\pi) = \cos(4k\pi - 2(2k)\pi) + i\sin(4k\pi - 4(2k)\pi) = \cos(0) + i\sin(0) = 1.$$

(1.5). Тук вече не е едно комплексно число а, 2 съгласно формулата на Моавър.

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} \in$$
$$\in \left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{2}\right)\right) \middle| 0 \leqq k \leqq (2-1) = 1 \Rightarrow k \in \{0,1\}\right\} =$$
$$= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right\}.$$

Забелязваме, че $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$ и се възползваме от известните формули $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ и $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ за да пресметнем:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Оттук получаваме

$$\sqrt{2i} \in \left\{ \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \right\} =$$
$$= \left\{ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\} = \{(1+i), (-1-i)\}.$$

(1.6). Тук вместо първо да превръщаме числото под корена в тригонометричен вид, ще постъпим по следния начин:

$$\sqrt{3-4i} = a + ib.$$

Откъдето

$$3 - 4i = (a+ib)^2 = a^2 + i2ab - b^2 = \underbrace{(a^2 - b^2)}_{Re} + i\underbrace{(2ab)}_{Im}.$$

Откъдето след приравняване на съответно реалната и имагинерната част на последното равенство, съставяме следната система от две уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{array} \right. .$$

От второто уравнение изразяваме $b = -\frac{2}{a}$ и го заместваме в първото, с което получаваме

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0.$$

Полагаме $t := a^2$ и горното става квадратно уравнение на $t\ : t^2 - 3t - 4 = 0$ с корени $t_1 = 4$ и $t_2 = -1$ откъдето $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$ и $a^2 = -1 \Rightarrow a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, но в качеството си на реална част на комплексно число $a \in \mathbb{R}$. Тоест единствено е възможно $a = \pm 2$. Откъдето връщайки се в изразяването на $b = -\frac{2}{a} = -\frac{2}{\pm 2} = \mp 1$. И така получихме, че

$$\sqrt{3-4i} \in \{(2-i), (-2+i)\}.$$

Задача 1.8. Да се докаже, че:

(i) Ако $\alpha := r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ е тригонометричният вид на комплексното число $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\beta_\circ := \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$, то $\beta_\circ^n = \alpha$;

(ii) Ако $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\beta^n = \alpha$, то числата $\beta\omega_0, \ldots, \beta\omega_{n-1}$ са всички корени на уравнението $x^n = \alpha$.

Доказателство. (i) Директно по правилото за умножение на комплексни числа в тригонометричен вид(виж равенството (30)) получаваме, че

$$\beta_\circ^n = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\right]^n = r\left(\cos\frac{n\varphi}{n} + i\sin\frac{n\varphi}{n}\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) =: \alpha,$$

което се твърдеше.

За (ii) нека $\beta \in \mathbb{C}$ е някой от $n-$тите корени на $\alpha \in \mathbb{C}$. Т.е. $\beta^n = \alpha$. То съгласно формулите на Моавър

$$\beta \in \left\{ \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \middle| \, 0 \leqq k \leqq n-1 \right\} = \Omega.$$

Т.е. β е някое от числата от Ω. Фиксираме произволен индекс $0 \leqq m \leqq n-1$ и така

$$\beta = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right)\right] \in \Omega.$$

Сега, това което в (ii) се твърди е съвпадението на множества

$$\Omega = \{\beta\omega_0, \dots, \beta\omega_{n-1}\} =: \mathcal{A},$$

което ще покажем.

От това, че

$$|\Omega| = |\mathcal{A}| \tag{3}$$

е достатъчно да докажем само едно включване. Ще докажем, че $\mathcal{A} \subseteqq \Omega$, което комбинирано с (11) дава точно съвпадението на множествата и твърдението би било доказано. За целта, вземаме произволно $\beta\omega_j \in \mathcal{A}$, т.е. $1 \leqq j \leqq n-1$.

$$\begin{aligned}\beta\omega_j = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right)\right].\left[\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right] =\\ = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2(m+j)\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2(m+j)\pi}{n}\right)\right] =\\ = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2q\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2q\pi}{n}\right)\right] \in \Omega.\end{aligned}$$

С което доказахме, че $\mathcal{A} \subseteqq \Omega$ и при допълнително направените разсъждения по-горе следва твърдението.(Съществено е че всички елементи в Ω и в $\mathcal{A}$ са два по два различни.) $\square$

Задача 1.9. Да се докаже, че:
(i) $\omega_1^k = \omega_k, \quad 0 \leqq k \leqq n-1$;
(ii) $\omega_1^s = 1$ тогава и само тогава, когато $n \mid s$;
(iii) числата $\omega_k^j, \quad 0 \leqq j \leqq n-1$ са всичките $n-$ти корени на единицата, точно когато числата k и n са взаимно прости. (единственият им общ делител е 1.)

Доказателство. (i) вече го доказахме, в началото на текущото упражнение.

Нека докажем (ii).

$$\omega_1^s = \cos\left(\frac{2s\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2s\pi}{n}\right)$$

Сега, ако $n \mid s \Rightarrow s = nq, \quad q \in \mathbb{Z}$. Откъдето следва

$$\omega_1^s = \cos\left(\frac{2nq\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2nq\pi}{n}\right) = \cos(2q\pi)+i\sin(2q\pi) = 1.$$

Обратното също е вярно. Ако

$$\omega_1^s = \cos\left(\frac{2s\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2s\pi}{n}\right) = 1,$$

то $\operatorname{Arg}(\omega_1^s) = \frac{2s\pi}{n} \in, 2\pi\mathbb{Z}$, откъдето $\frac{2s\pi}{n} = 2l\pi 2s\pi = 2l.n.\pi \Rightarrow s = l.n \Rightarrow n \mid s$.

(iii) Да забележим, че множеството $\mathbb{C}_n = \{\omega_1^k \,|\, 0 \leq k \leq n-1\}$ на n-тите корени на 1 съвпада с $M := \{\omega_1^m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$. Включването $\mathbb{C}_n \subseteqq M$ е ясно. Произволно $m \in \mathbb{Z}$ се дели на n с частно $q \in \mathbb{Z}$ и остатък $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq r \leqq n-1$, така че $m = qn + r$. Следователно

$$\omega_1^m = \omega_1^{qn+r} = (\omega_1^n)^q \omega_1^r = \omega_1^r \in \mathbb{C}_n$$

и $M \subseteqq \mathbb{C}_n$. Това доказва, че $M = \mathbb{C}_n$.

За произволно $k \in \mathbb{Z}$ разглеждаме множеството

$$M_k := \{\omega_k^j \,|\, 0 \leqq j \leqq n-1\} \subseteqq M = \mathbb{C}_n.$$

Ако k и n са взаимно прости, достатъчно е да докажем, че M_k има $|M_k| = n$ различни елемента, за да получим, че $M_k = \mathbb{C}_n$. Наистина, от допускането

$$\omega_1^{ki} = (\omega_1^k)^i = \omega_k^i = \omega_k^j = (\omega_1^k)^j = \omega_1^{kj} \quad \text{за някои} \quad 0 \leq i < j \leq n-1$$

следва $1 = \frac{\omega_1^{kj}}{\omega_1^{ki}} = \omega_1^{k(j-i)}$. Съгласно Задача 3 (ii), това изисква n да дели $k(j-i)$. Поради взаимната простота на n и k, n трябва да дели $1 \leqq j - i \leqq n-1$. Това води до противоречие и доказва, че $\omega_k^i \neq \omega_k^j$ за всички $0 \leqq i < j \leq n-1$, откъдето $M_k = \mathbb{C}_n$ за взаимно прости k и n.

Да предположим, че $M_k = \mathbb{C}_n$ и $d > 1$ е най-голям общ делител на k и n. Означаваме $k_o := \frac{k}{d}, n_o := \frac{n}{d} \in \mathbb{N}$ и забелязваме, че

$$(\omega_k^j)^{n_o} = (\omega_1^{kj})^{\frac{n}{d}} = \omega_1^{\frac{k}{d}jn} = (\omega_1^n)^{k_o j} = 1$$

за всички $0 \leqq j \leqq n-1$. Следователно $\mathbb{C}_n = M_k \subseteqq \mathbb{C}_{n_o}$, откъдето

$$n = n_o d = |\mathbb{C}_n| \leqq |\mathbb{C}_{n_o}| = n_o,$$

противно на $d > 1$. Противоречието доказва взаимната простота на k и n при $M_k = \mathbb{C}_n$. □

Ще дадем примери за множества от комплексни числа. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} | \quad |z| = 1\}$ представлява множеството от всички онези комплексни числа, лежащи върху едничната окръжност в комплексната равнина. (Уравнението на окръжност в $\mathbb{R}^2$ с център точката $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ е $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Направете аналогията с $|z| = 1$ точно когато $Re(z)^2 + Im(z)^2 = 1$ Как се изобразява множеството от комплкесни числа $z \in \mathbb{C}$, за които $1 < |z| \leqq 3$? А тези със $|z-1| = 1$?

Задача 1.10. Да се намерят $z \in \mathbb{C}$, за които $|z+i| + |z-i| = 2$.

Решение. Нека $z = a + ib$, където $a, b \in \mathbb{R}$. Тогава условието от задачата е еквивалентно на

$$|a + (b+1)i| + |a + (b-1)i| = 2.$$

Затова

$$|a + (b+1)i| = 2 - |a + (b-1)i|.$$

Досега видяхме как комплексните числа могат да бъдат представени в алгебричен и тригонометричен вид. Освен това видяхме и че понякога е много удобно да се работи с комплексни числа в тригонометричен вид(формула на Моавър напр.) Сега ще покажем, още едно представяне на комплексните числа, което също е много удобно за работа, както ще видим в задача по-долу.

Нека $\mathbb{C} \ni z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ е комплексно число представено в тригонометричен вид. Ако се възползваме от известната формула на Ойлер, която свързва три от най-забележителните функции, а именно: $\mathrm{e}^x, \sin(x), \cos(x)$.

Теорема 1.11 (Ойлер)**.** В сила е равенството

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x). \tag{4}$$

Доказателство. Ще бъде изложено в курса по ДИС. Но все пак доказателството на (4) е самото развитие на функцията e^{ix} в ред на Тейлор, като знаем разлаганията на $\cos(x), \sin(x)$ в ред на Тейлор. □

Сега умножавайки двете страни на (4) с e^t получаваме

$$\mathrm{e}^{t+ix} = \mathrm{e}^t[\cos(x) + i\sin(x)].$$

С което вече сме готови да запишем комплексното число във вида

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \mathrm{e}^{\ln(r)}.(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \mathrm{e}^{\ln(r)+i\varphi}.$$

По този начин всяко комплексно число може да бъде записвано във вида

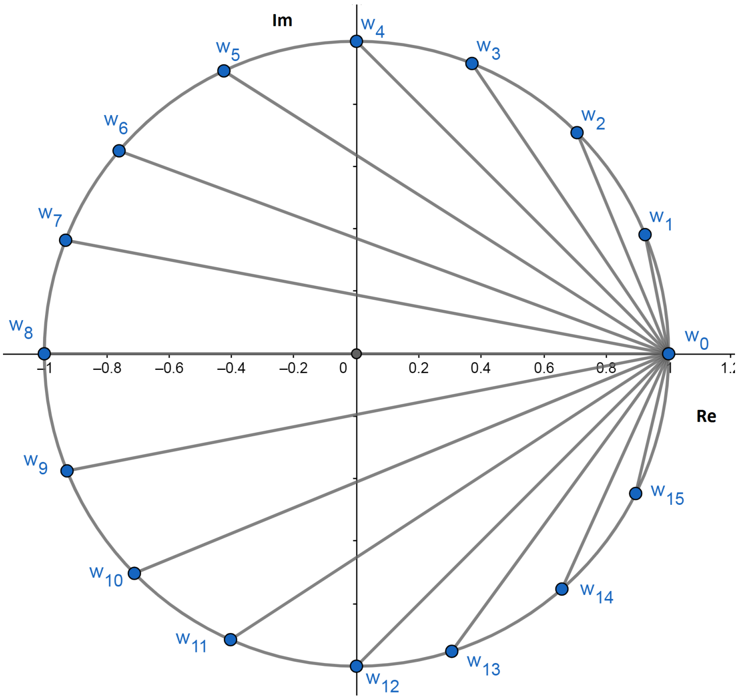
$$\begin{aligned} z &= \mathrm{e}^{\ln(|z|)+iArg(z)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(|z|)} \cdot \mathrm{e}^{iArg(z)} \\ &= |z|\, \mathrm{e}^{iArg(z)}. \end{aligned}$$

Така $n-$тите корени на единицата приемат вида$(0 \leqq k \leqq n-1)$

$$\mathbb{C}_n \ni \omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{e}^{\ln(1)+i.\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}}.$$

Задача 1.12. Нека $n \in \mathbb{N}$ е произволно естествено число и $p_0, \dots, p_{n-1}$ са n на брой равноотдалечени точки върху окръжност с радиус 1. Фиксираме една произволна от тях и построяваме отсечките, свързващи фиксираната точка с всички останали.(Това са общо $(n-1)$ на брой отсечки, като не броим отсечката свързаща точката със себе си, т.к. тя би имала дължина 0.) Да се докаже, че произведението на дължините от тези $(n-1)$ отсечки е винаги n.

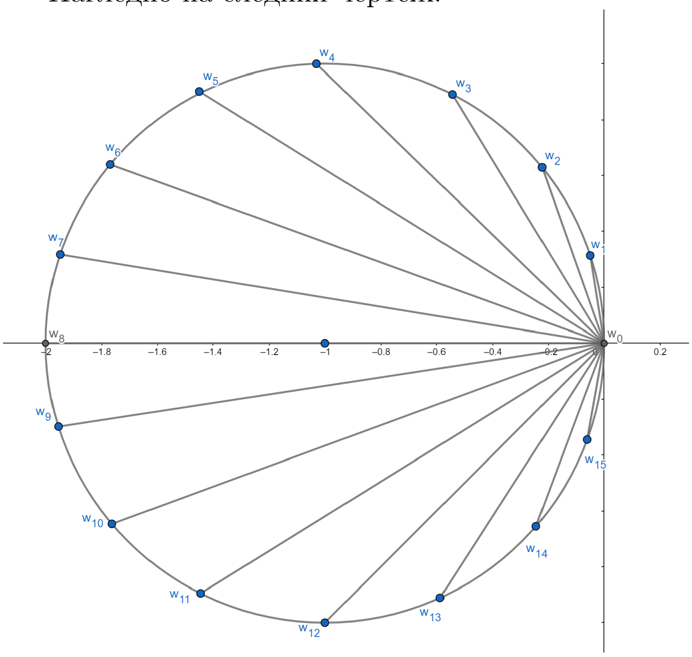
Преди да докажем това. Ще дадем чертеж в случая $n = 16$.



Тук сме фиксирали за удобство ω_0.

Сега да забележим, че ако транслираме цялата единична окръжност $S^1 = \{z \in \mathbb{C}| \quad |z| = 1\} \supset \mathbb{C}_n$ наляво с 1 въпросните отсечки, които търсим се превръщат в модулите комплексните числа $\omega_k - 1$.

Нагледно на следния чертеж:



И така вече имаме начин да напишем произведението на всички тези (15 в случая) отсечки като произведението на модулите на комплексните числа $\omega_k - 1 \in \mathbb{C}, \quad \forall 1 \leqq k \leqq 15$. Т.е. в този частен случай се твърди, че

$$|\omega_1 - 1|.|\omega_2 - 1| \dots |\omega_{15} - 1| = 15.$$

След като е ясно какво се твърдим и от чертежите и разсъжденията по-горе изложихме основната идея за доказателството(транслирането с 1 наляво и интерпретирането на тези отсечки като модулите на комплексните числа-n-тите корени на единица транслирани съответно с 1 наляво) преминаваме към него.

Доказателство. От горните разсъжения стана ясно, че е достатъчно да докажем, че е в сила равенството

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left| \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1 \right| = \prod_{k=1}^{n-1} |\omega_k - 1| = n. \tag{5}$$

За да покажем това, ще постъпим по следния начин. Вече изяснихме, че $n-$тите корени на единицата са точно всички корени на полинома $x^n - 1$, това означава, че той може да бъде разложен в линейни множители като:

$$\begin{aligned} z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}} \right) = (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}} \right) = \\ = (-1)^{n-1} (z-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}} - z \right). \end{aligned}$$

След като изнесохме първия множител на произведението (този за k=0) и след това изнесохме по един минус от всяка от скобите, останали в произведението. Като целим да получим израз от вида (5). Сега разделяме двете страни на $z - 1$ и вземаме модула на двете страни и получаваме

$$|z^{n-1} + \dots + z + 1| = \left| \frac{(z-1)(z^{n-1} + \dots + z^1 + 1)}{(z-1)} \right| = \left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}} - z \right|.$$

Полагаме в горното $z = 1$ и получаваме точно търсеното равенство (5) и задачата е решена. □

Както споменахме Доказателството на Теорема 1 най-естествено следва от разлаганията в ред на Тейлор. За пълнота ще изложа алтернативно доказателство, което изисква минимални знания за производна на функция.

Доказателство. Определяме помощната функция $f(x) = \mathrm{e}^{-ix}(\cos(x) + i\sin(x))$. Нека пресметнем нейната производна

$$\begin{aligned} f'(x) &= -i\,\mathrm{e}^{-ix}(\cos(x) + i\sin(x)) + \mathrm{e}^{-ix}(-\sin(x) + i\cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^{-ix}(-i\cos(x) + \sin(x) - \sin(x) + i\cos(x)) \\ &= \mathrm{e}^{-ix} \cdot (0) = 0. \end{aligned}$$

Но каква е онази функция, чиято производна е тъждествено нулева? Това е константа функция. Тоест получихме, че $f(x) = C$, където C е някаква константа. За да пресметнем стойността на тази константа е достатъчно да остойностим нашата функция в точка лесна за пресмятане(произволна точки става). Например $f(0) = 1 \cdot (1 + i.0) = 1$. Получихме $C = 1 = f(x) = \mathrm{e}^{-ix}(\cos(x) + i\sin(x))$. Или умножавайки двете страни на равенството

$$1 = \mathrm{e}^{-ix}(\cos(x) + i\sin(x))$$

с e^{ix} извеждаме

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),$$

което и твърдим. $\square$

Задача 1.13. Пресметнете стойността на произведението

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}.$$

Упътване. От

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x \\ \mathrm{e}^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{array} \right.$$

изразяваме

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

След това сведете до възможност за използване на идеята на Задача 1.12.

Задача 1.14. Пресметнете сумата на реда

$$S = 1 + \frac{1}{2}\cos\varphi + \ldots + \frac{1}{n}\cos n\varphi + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\cos(k\varphi).$$

Решение. Разглеждаме редицата $\{S_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{2^k}\cos k\varphi + i\frac{1}{2^k}\sin k\varphi\right] \right\}_{n=0}^{\infty}$.

$$\frac{\cos k\varphi}{2^k} + i\frac{\sin k\varphi}{2^k} = \frac{1}{2^k}\,\mathrm{e}^{ik\varphi}.$$

Превръщаме комплексното число в тригонометричен вид S_k в експоненциален

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\,\mathrm{e}^{ik\varphi}.$$

Това вече е геометрична прогресия с частно $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ и първи член 1. Възползваме се от $\left|\frac{\mathrm{e}^{i\varphi}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, защото $|\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1$. И нейната сума е

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,\mathrm{e}^{ik\varphi} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{i\varphi}/2}$$

Търсената сума е реалната част на горното число.

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\varphi}/2} = \frac{2}{2-\mathrm{e}^{i\varphi}} = \frac{2}{(2-\cos\varphi)-i\sin\varphi} = \frac{2(2-\cos\varphi+i\sin\varphi)}{4-4\cos\varphi+1}$$
$$= \frac{4-2\cos\varphi+i2\sin\varphi}{4-4\cos\varphi+1}.$$

Окончателно

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,\mathrm{e}^{ik\varphi} = \Re\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\varphi}/2}\right) = \Re\left(\frac{4-2\cos\varphi+i2\sin\varphi}{4-4\cos\varphi+1}\right) = \frac{4-2\cos\varphi}{5-4\cos\varphi}.$$

2 Системи линейни уравнения. Метод на Гаус-Жордан за решаването на системи линейни уравнения. Матрица и разширена матрица на система линейни уравнения.

Ситема от линейни уравнения се нарича система от вида(тук системата е от m уравнения и n неизвестни)

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{6}$$

където $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m} \subset \mathbb{F}$ са коефициентите на системата от поле $\mathbb{F}$, а $\{b_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{F}$ са свободни членове. Написаната система има m уравнения и n неизвестни. Най-често ще разглеждаме системи с реални коефициенти.

Системите линейни уравнения се разделят основно на два класа - тези, които имат решение и такива, които нямат решение. Системите, които нямат, нито едно решение наричаме несъвместими системи. А онези, които имат поне едно решение се наричат съвместими. Сега сами по себе си съвместимите системи(онези, които можем да решим) се разделят на два вида - определени системи и неопределени. Определените системи са онези съвместими системи, които имат точно едно решение. А неопределените системи имат повече от едно решение. Ще видим, че $\mathbb{F}$ е безкрайно поле, то всяка неопределена система линейни уравнения има безбройно много решения.

Правоъгълна таблица от числа се нарича матрица. Коефициентите на неизвестните в (30) образъват матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

с m реда и n стълба. Присъединявайки към A стълба $\{b_i\}_{i=1}^{m}$ на свободните членове, получаваме разширената матрица

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{8}$$

на (30), която задава еднозначно тази система линейни уравнения. Отсега нататък ще изпускаме имената на променливите и ще работим с разширената матрица на (30).

Да си припомним кои бяха елементарните преобразувания по редове.

Определение 2.1 (Елементарни преобразувания по редове върху матрица.)**.** (i) умножение на $i-$тия ред R_i с число p и прибавяне към $j-$тия ред R_j за $1 \leqq i \neq j \leqq m$, така че "новият $j-$ти ред е $R_j^{new} = pR_i + R_j^{old}$;

(ii) умножение на $i-$ти ред с ненулево число, т.е. $R_i^{new} = q.R_i^{old}, \quad q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$;

(iii) размяната на два реда $R_i \leftrightarrow R_j$.

Доказва се, че елементарните преобразувания по редове към разширената матрица на система линейни уравнения не променят множеството на нейните решения.

Определение 2.2 (Система в Гаусов вид.)**.** Системата (30) е в Гаусов вид, ако:

(i) Не съдържа ред от вида $(0 \dots 0|b_i)$ в разширената си матрица.

(ii) Първият ненулев елемент на всеки ред от разширената матрица $(A|b)$ е единица - наричаме водеща единица.

(iii) Водещите единици от следващите редове са надясно от водещата единица на текущия ред. Тоест стълбовете на водещите единици съдържат единствено нули под водещите единици.

Определение 2.3 (Система в Гаус-Жорданов вид.)**.** Системата (30) е в Гаус-Жорданов вид, ако е в Гаусов вид и стълбовете на водещите единици са съставени от нули под и над тези водещи единици. Тоест водещите единици са единствените ненулеви елементи от тези стълбове.

Пример 2.4. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$ е в Гаусов вид.

Пример 2.5. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$ е в Гаус-Жорданов вид.

Стратегията в задачи ще бъде от дадена система линейни уравнения да съставим разширената и матрица и с елементарни преобразувания да достигнем до Гаус-Жорданов вид и така вече директно четем решенията. Възниква въпросът, как да реазберем дали една система е съвместима. Започваме с разширената матрица на дадена система и извършваме елементарни преобразувания по редове. Ако след дадено елементарно преобразувание получим някой ред да е от вида $(0 \dots 0|b_i \neq 0)$, то системата е несъвместима, защото този ред означава, че в системата която получаваме(еквивалентна на първоначалната) има уравнение от вида $0x_1 + \dots + 0x_n = b_i \neq 0$ което никога не може да се удовлетвори за каквито и стойности на $x_1, \dots, x_n$. Ако пък получим ред от вида $(0,\dots,0|0)$ можем да го "задраскаме,"защото той не задава никакви ограничения върху другите уравнения от системата а значи и върху множеството от решения.(И практически не носи никаква информация.) Ако пък получим някъде в решаването нулев ред и не получим ред от вида $(0,\dots,0|b_i \neq 0)$ това означава, че системата ни е съвместима, но неопределена. Защото имаме "повече неизвестни, отколкото уравнения"и в този случай системата има безброй много решения.

Задача 2.6. Да се определи вида на системата и да се намерят решенията, ако такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{array}\right. .$$

Решение. Започваме със записването на разширената матрица на тази система:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -5 \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -18 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim_5 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim_6 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Елементарните преобразувания по редове, които извършихме са както следва:

$$\begin{array}{ll} \sim_1: & R_2 - 5R_1 \text{ и } R_3 - 3R_1. \\ \sim_2: & R_2 + 2R_3. \\ \sim_3: & -\dfrac{1}{6}.R_2. \\ \sim_4: & R_1 + (-1)R_2 \text{ и } R_3 + R_2. \\ \sim_5: & \dfrac{1}{2}.R_2 \text{ и } (-1)R_3. \\ \sim_6: & R_2 \leftrightarrow R_3. \end{array}$$

От последната разширена матрица можем директно да прочетем решенията на системата $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{2}$.

$$\left|\begin{array}{l} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 2 \\ 0x_1 + x_2 + 1x_3 = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Решението записваме като наредена тройка $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, \frac{3}{2})$.

Задача 2.7. Да се определи вида на системата и да се намерят решенията, ако такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 18 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 26 \end{array}\right. .$$

Решение. Както в предната задача, записваме разширената матрица на системата и я свеждаме до Гаус-Жорданов вид.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 15 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 18 \\ 3 & -3 & -1 & -4 & 26 \end{array}\right) \sim_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 13 & -11 \\ 0 & -7 & \boxed{-1} & 3 & 9 \\ 0 & -9 & -4 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -25 & 0 & 25 & 25 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 19 & 0 & -19 & -19 \end{array}\right)$$

$$\sim_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_5 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\sim_6 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Отново елементарните преобразувания, които приложихме върху разширената матрица на системата са:

$$\begin{array}{ll} \sim_1 & R_2 - 2R_1 \text{ и } R_3 - 3R_1, \text{ и } R_4 - 3R_1. \\ \sim_2 & R_1 + R_3 \text{ и } R_2 + 4R_3, \text{ и } R_4 - 4R_3. \\ \sim_3 & -\dfrac{1}{25}R_2 \\ \sim_4 & R_4 - R_2. \\ \sim_6 & R_1 + 5R_2 \text{ и } R_3 + 7R_2. \end{array}$$

На последната разширена матрица съотвества системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - x_4 = 7 \\ x_2 - x_4 = -1 \\ -x_3 - 4x_4 = 2 \end{array} \right. .$$

Тази система има същото множество от решения като първоначалната система, защото елементарните преобразувания по редове към разширената матрица не променят множеството от решения на системата.

Но сега имаме 4 неизвестни и 3 уравнения. Уравненията са повече от неизвестните, затова се налага да положим една от тях да бъде произволн параметър. В случая ще е най-удобно да положим $x_4 := p \in \mathbb{C}$ за произволен параметър. Откъдето изразяваме останалите като: $x_1 = 7 + p, \quad x_2 = p - 1, \quad x_3 = -2 - 4p$. Това означава,че решения на системата са всички наредени 4−ки от вида $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (p + 7, p - 1, -2 - 4p, p)$ за произволни стойности на параметъра p. Т.е. тази система има безкрайно много решения(значи е съвместима, но неопределена) и произволно от тях се дава за някоя стойност на p. Твърде често ще казваме, че $(p+7, p-1, -2-4p, p)$ е "Общо решение"на системата.

Задача 2.8. Да се определи вида на системата и да се намерят решенията, ако такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 14 & 32 & -14 & 7 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{7} & 16 & -7 & \frac{7}{2} \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 7 & 16 & -7 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -3 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Вторият ред е $(0\,0\,0\,0| - 5/2 \neq 0)$, и отговаря на уравнението уравнението $0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = -\frac{5}{2}$, което няма решение. Следователно системата е несъвместима.

Задача 2.9. Да се определи вида на системата и да се намерят решенията, ако такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5 \\ 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 13 \end{array}\right.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 3 & 13 \end{array}\right) \underset{R_4 - R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & -2 & 8 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}.R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_4 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{3}.R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right).$$

На тази разширена матрица отговаря системата:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - 7x_4 = 5 \\ x_2 + 6x_4 = -3 \\ x_3 + 7x_4 = -3 \end{array}\right.$$

и забелязваме, че отново имаме 4 неизвестни, а само 3 уавнения. Тоест необходимо е да положим една от променливите да бъде параметър. Тук най-удобно(от технически съобажения, може която поискате да положите) да положим $x_4 : q \in \mathbb{C}$. И така изразявайки от системата останалите чрез q получаваме общо решение: $(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$(7q+5, -3-6q, -3-7q, q)$. Тоест системата има безкрайно много решения и е съвместима, но неопределена.

За упражнение предлагаме следните примери:

Задача 2.10. Да се определи вида на системата и да се намерят решенията, ако такива съществуват.

$$(i)\left|\begin{array}{l} x_1+2x_2+5x_3=-9 \\ x_1-x_2+3x_3=2 \\ 3x_1-6x_2-x_3=25 \end{array}\right. . \quad (ii)\left|\begin{array}{l} x_1+x_2+2x_3=4 \\ x_1+x_3=2 \\ x_1+2x_2+3x_3=7 \end{array}\right. . \quad (iii)\left|\begin{array}{l} x_1-7x_2+2x_4=-11 \\ -x_1+11x_2+2x_3-4x_4=31 \\ 2x_1-12x_2-5x_3-x_4=-26 \\ 3x_1-17x_2-x_3+3x_4=-15 \end{array}\right. .$$

От вече решените задачи, навярно сте забелязали, че в процеса на довеждане на разширената матрица в Гаус-Жорданов вид, често се случваше да стигаме до нулев ред $(0\,0\ldots0|0)$ и да го изпускаме. Но съществeното беше, че за да стигнем до нулев ред, преди това той е бил кратен на някой друг ред от същата матрица.(например бил е два пъти някой ред от матрицата) И така вече можем да ползваме това и ако забележим, че ред(или няколко реда) са кратни , то запазваме само 1 от тях.

Задача 2.11. Да се определи вида на системата и да се намерят решенията, ако такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3+3x_4=8 \\ 6x_1+9x_2-7x_3+7x_4=18 \\ 4x_1+6x_2-12x_3+x_4=1 \end{array}\right. .$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & -7 & 7 & 18 \\ 4 & 6 & -12 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=2 \\ 2x_3+x_4=3 \end{array}\right. .$$

Сведохме системата до система от две уравнения с 4 неизвестни. Трябва да положим, толкова параметри, колкото е разликата между броя на неизвестните и броя на уравненията. Тук се налага да положим две от неизвестните. Нека например. $x_4 := q, \quad x_2 := p$. Сега изразяваме останалите чрез тях. От второто уравнение изразяваме $x_3 = \frac{3-q}{2}$. Заместваме го в първото и получаваме: $2x_1 + 3p - 5.\frac{3-q}{2} + q = 2$. Откъдето $x_1 = \frac{19-5q-6p}{4}$. И така общото решение на тази система е $\left(\frac{19-5q-6p}{4}, p, \frac{3-q}{2}, q\right)$. Системата има безкрайно много решения и е съвместима, но неопределена.

Задача 2.12. В зависимост от стойностите на участващите параметри определете вида на системата и намерете нейните решения, когато такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2+\lambda x_3=1 \\ x_1+\lambda x_3+x_3=1 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=1 \end{array}\right. .$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right).$$

Ако $\lambda = 1$, получаваме система от едно линейно уравнение: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, защото втори и трети ред се анулират. Имаме 3 неизвестни, а само 1 уравнение. Затова полагаме разликата , 2 параметри. Нека например $x_2 := p, \quad x_3 := q$. Тогава изразявайки $x_1 = -1 - p - q$ получаваме общото решение $(1-p-q, p, q)$. Тоест в случая $\lambda = 1$ системата е неопределена.(Т.е. има безкрайно много решения.) Преминаваме в другия случай. Т.е. $\lambda \neq 1 \Rightarrow 1 - \lambda \neq 0$ и можем да разделим ред 2 и ред 3 на $1 - \lambda$ в последната матрица и получаваме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right).$$

Сега, ако $\lambda = -2$, третия ред на тази система има вида R_3 $(0\,0\,0|\,1)$, тоест системата е несъвместима в случая $\lambda = -2$.

Преминаваме към следващия случай: $\lambda + 2 \neq 0$. Тогава имаме право да разделим ред 3 на $\lambda + 2$ и получаваме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+2} \end{array}\right)$$

И така получихме в този случай, че системата е определена и решението и е $\left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}\right)$.

Задача 2.13. В зависимост от стойностите на участващите параметри определете вида на системата и намерете нейните решения, когато такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{array}\right. .$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & \lambda(\lambda+3) \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda^2(\lambda+3) \\ \boxed{1} & 1 & 1+\lambda & \lambda^3(\lambda+3) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\lambda & 1-(\lambda+1)^2 & \lambda(\lambda+3)[1-\lambda^2(\lambda+1)] \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda^2(\lambda+3)(1-\lambda) \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^3(\lambda+3) \end{array}\right).$$

При $\lambda = 0$ получаваме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim (1\,1\,1|\,0),$$

т.е. системата е неопределена и като положим $x_3 : p, \quad x_4 = q \Rightarrow x_1 = -p-q$. Получаваме общо решение $(-p-q, p, q)$. Нека сега $\lambda \neq 0$. Тогава имаме право да разделим първи и втори ред на $\lambda \neq 0$. Правим това и получаваме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -(\lambda+2) & (\lambda+3)(1-\lambda^3-\lambda^2) \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \lambda(\lambda+3)(1-\lambda) \\ 1 & 1 & \lambda+1 & \lambda^3(\lambda+3) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -(\lambda+3) & (\lambda+3)(1-\lambda^3-2\lambda^2+\lambda) \\ 0 & 1 & -1 & \lambda(\lambda+3)(1-\lambda) \\ 1 & 0 & \lambda+2 & \lambda(\lambda+3)(\lambda^2+\lambda-1) \end{array}\right).$$

Ако $\lambda = -3$ получаваме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Полагаме една от променливите, понеже стигнахме до система с 2 уравнения и 3 неизвестни. Нека $x_3 := p$. Тогава $x_1 = p, \quad x_2 = p$. Затова общото решение е (p, p, p) и в този случай системата е неопределена. Нека сега $\lambda + 3 \neq 0$. Тогава имаме право да разделим първия ред на $-(\lambda+3) \neq 0$. Правим това и получаваме.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda(\lambda+3)(1-\lambda) \\ 1 & 0 & \lambda+2 & \lambda(\lambda+3)(\lambda^2+\lambda-1) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 & 2\lambda-1 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda^2 \end{array}\right).$$

И така, при $\lambda \neq 0, \quad \lambda \neq -3$ системата е определена и единственото и решение е $(2-\lambda^2, 2\lambda-1, \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)$.

Задача 2.14. В зависимост от стойностите на участващите параметри определете вида на системата и намерете нейните решения, когато такива съществуват.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_1 + x_4 = 6 \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8 \\ 10x_1 + 2x_2 + 8x_4 = \lambda \end{array}\right.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 11 & 11 & 4 & 8 & 8 \\ 10 & 2 & 0 & 8 & \lambda \end{array}\right) \underset{R_2-R_1,\ R_3-R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8-\lambda \\ 10 & 2 & 0 & 8 & \lambda \end{array}\right).$$

Ако $\lambda = 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 10 & 2 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim . \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 5 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & -1 & 9 & -2 \\ -44 & 0 & 4 & -36 & 8 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & -1 & 9 & -2 \\ 11 & 0 & -1 & 9 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & -1 & 9 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Достигнахме до 2 уравнения и 4 неизвестни. Налага се да положим две от променливите да бъдат параметри. Нека $x_1 := p$ и $x_4 := q$. Тогава изразяваме останалите и получаваме $x_2 = -5p - 4q, \quad x_3 = 11p + 9q + 2$. И така при $\lambda = 0$ системата е неопределена и общото и решение е $(p, -5p - 4q, 11p + 9q + 2, q)$.

Нека сега $\lambda \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8-\lambda \\ 10 & 2 & 0 & 8 & \lambda \end{array}\right) \underset{R_3 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \neq 0 \\ 10 & 2 & 0 & 8 & \lambda \end{array}\right).$$

Получихме ред от вида r_3 $(0\,0\,0\,0\,|-\lambda \neq 0)$, което значи, че системата е несъвместима в този случай.

Задача 2.15. В зависимост от стойностите на участващите параметри определете вида на системата и намерете нейните решения, когато такива съществуват.

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 7x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 5x_4 - 5x_5 = \lambda - 2 \\ 2x_1 - x_2 - \mu x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{array} \right. .$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & -10 & 5 & -5 & \lambda-2 \\ 2 & -1 & -\mu & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{R_2 + R_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & (-2-\mu) & 2 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & -10 & 5 & -5 & \lambda-2 \\ 2 & -1 & -\mu & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & (2-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -10 & 5 & -5 & \lambda-2 \\ 2 & -1 & -\mu & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ако $\mu = 2$, втори ред на горната матрица се анулира и го пропускаме.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 7 & 4 & -10 & 5 & -5 & \lambda-2 \\ 2 & -1 & -2 & \boxed{1} & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ \boxed{-1} & 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda+3}{3} \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 10 & -4 & 2 & -2 & \lambda+3 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda+3}{3} \\ 0 & 5 & -2 & 1 & -1 & \frac{2\lambda+3}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & -2 & 1 & -1 & \frac{\lambda+3}{2} \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda+3}{3} \\ 0 & 5 & -2 & 1 & -1 & \frac{2\lambda+3}{3} \end{array}\right) \underset{R_3 - R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & -2 & 1 & -1 & \frac{\lambda+3}{2} \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda+3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{6} \end{array}\right).$$

И веднага забелязваме, че в този случай($\mu = 2$), ако $\lambda \neq 3$ получаваме ред $(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0|\frac{\lambda-3}{6} \neq 0)$ т.е. при $\mu = 2$ и $\lambda \neq 3$ системата е несъвместима. Нека $\lambda = 3$. Последният ред на се анулира и го пропускаме. Получаваме.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Имаме 2 уравнения с 5 неизвестни. Полагаме 3 от неизвестните. Нека $x_2 := p, \quad x_3 := q, \quad x_4 := r$. Тогава $x_1 = 3p - 2, \quad x_5 = 5p - 2q + r - 3$. И така в случая $\mu = 2$ и $\lambda = 3$ системата е неопределена и общото и решение е $(3q, p, q, r, 5p - 2q + r - 3)$. Нека сега $\mu \neq 2$. Тогава имаме право да разделим втори ред на матрицата, която достигнахме преди да влезем във случая $\mu = 2$, $2 - \mu \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -10 & 5 & -5 & \lambda - 2 \\ 2 & -1 & -\mu & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & -5 & \lambda - 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{R_3 - 5R_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 3 \\ 2 & -1 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{3}R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda+3}{3} \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda-3}{3} \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

И така и в този случай $\mu \neq 2$ получихме, че при $\lambda \neq 3$ системата е несъвместима. Нека $\lambda = 3$, тогава в последната матрица трети ред се анулира и го изпускаме.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Имаме три уравнения с 5 неизвестни и параметрите са два. Първото уравнение $x_1 - 3x_3 = -2$ не позволява да изберем x_1 и x_2 за параметри. Нека $x_2 := p, \quad x_5 := q$. Тогава $x_1 = 3p - 2, x_3 = 0, x_4 = -5p + q + 3$ и общото решение е $(3p - 2, p, 0, -5p + q + 3, q)$.

В заключение. При $\lambda \neq 3$ системата е несъвместима. При $\mu = 2, \quad \lambda = 3$ системата е неопределена с общо решение $(3q, p, q, r, 5p - 2q + r - 3)$. При $\mu \neq 2, \quad \lambda = 3$ системата още веднъж е неопределена с общо решение $(p, q, 0, r - 2p - 1, r)$. Задачата е решена.

За самостоятелна работа на студентите предлагаме следната:

Задача 2.16. В зависимост от стойностите на участващите параметри определете вида на системата и намерете нейните решения, когато такива съществуват.

$$\left| \begin{array}{l} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = \lambda \end{array} \right. .$$

Ще споменем, че системи линейни уравнения, в които стълба на неизвестните, в разширената матрица е нулев се наричат хомогенни системи линейни уравнения. Те заемат важно място в линейната алгебра и с тях ще се занимаем подробно в следващите лекции и упражнения. Практически тяхното решаване по нищо не се различава от по-горе показания метод на Гаус-Жордан(съществуват и други методи), дори е по-лесно. За упражнение решете сами следните хомогенни системи линейни уравнения използвайки метода на Гаус-Жордан:

Задача 2.17. Да се реши хомогенната система:

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 0 \\ 9x_1 - 18x_2 + 19x_3 + 13x_4 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Задача 2.18. Да се реши хомогенната система:

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 19x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 0 \\ 10x_1 + 22x_2 - 36x_3 + 33x_4 + 23x_5 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 - 18x_3 + 11x_4 + 37x_5 = 0 \\ 2x_1 + 13x_2 - 9x_3 + 17x_4 + 14x_5 = 0 \end{array} \right. .$$

Забелязвате ли с просто око едно решение общо за всяка хомогенна система?

3 Детерминанти. Основни свойства на детерминантите. Развитие на детерминанта по ред или стълб. Детерминанта на горно и долно триъгълна матрица. Детерминанта от тип Пачи крак, три-диагонална детерминанта, детерминанта на Вандермонд.

Определихме детерминантата $\det(A)$ на квадратна матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ с елементи от поле $\mathbb{F}$ като

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{n,i_n},$$

където сумирането се извършва по всевъзможните пермутации $i_1, \ldots, i_n$ на числата $1, \ldots, n$. А с $[i_1, \ldots, i_n]$ означаваме четността на пермутацията $(i_1, \ldots i_n)-$ това е броят на инверсиите в тази пермутация. С други думи броят пъти, които срещаме нарушаване на естесвения ред на числата $1, \ldots, n$. Лесно се вижда с пример.

Пример 3.1. Нека е дадена пермутацията $(1, 2, 3, 9, 4, 5, 6, 8, 7)$ на числата $1, \ldots, 9$. Тук числата 9 и 4 са в инверсия, защото 9 се намира на трета позиция в тази пермутация, 4 се намира на четвърта позиция, а $9 > 4$. Аналогично 9 е в инверсия и с 5, защото $9 > 5$, а позицията на 9 е по-малка от позицията на 5, в пермутацията. По същите причини 9 е в инверсия и с $6, 8, 7$. Тоест 9 образува общо 5 инверсии в тази пермутация. По-нататък 8 и 7 образуват инверсия, защото $8 > 7$, докато позицията на 8 в пермутацията е по-малка от тази на 7. Тоест в тази пермутация има общо 6 инверсии и значи $[1, 2, 3, 9, 4, 5, 6, 8, 7] = 6$ и пермутацията е четна.

С определението за детерминанта дадено по-горе лесно следва формула за детерминанта 2×2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := \sum_{i_1,i_2} (-1)^{[i_1,i_2]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} = (-1)^{[1,2]} a_{1,1} a_{2,2} + (-1)^{[2,1]} a_{1,2} a_{2,1} =$$
$$= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}.$$

И това помним като комбинаторно правило за пресмятане на 2×2 детерминанта като произведението на главния диагонал плюс противоположното на произведението на вторичния диагонал.

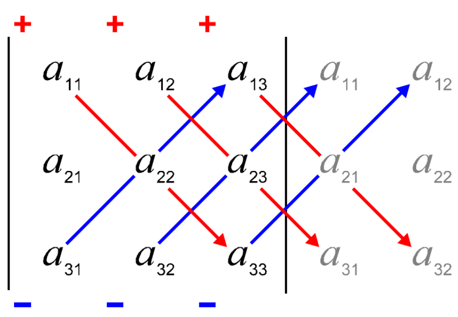
Задача 3.2. Пресметнете следната 2×2 детерминанта с вече изведената формула.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 3.6 - 2.(-1) = 18 + 2 = 20.$$

За детерминанта 3×3 събираемите в развитието на детермината по определението са $3! = 3.2.1 = 6$ - броят на пермутациите на числата $\{1, 2, 3\}$ и ще пресметнем и това, като ще дадем удобно правило, което студентите харесват за пресмятане на 3×3 детерминанта и често е удобно.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := \sum_{i_1,i_2,i_3} (-1)^{[i_1,i_2,i_3]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} =$$
$$= (-1)^{[1,2,3]} a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + (-1)^{[1,3,2]} a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + (-1)^{[2,1,3]} a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} + (-1)^{[2,3,1]} a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1}$$
$$+ (-1)^{[3,1,2]} a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} + (-1)^{[3,2,1]} a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} =$$
$$= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1}.$$

За да запомним това по-лесно. В помощ идва Правилото на Саарус, при което дописвате(мислено или на хартия) първите два стълба на детерминанта отдясно на нея и вземате 3-дългите произведения успоредни на главния диагонал, намиращи се над него, със знак плюс, а тези успоредни на вторичния диагонал, намиращи се под него, със знак минус както е показано на картинакта отдолу. Важно е, че това правило е валидно само за детерминанти 3×3, за други размерности не е вярно!



Задача 3.3. Да се пресметне следната 3×3 детерминанта с правилото на Саарус.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Посредством изведната формула, а в действителност си мислим правилото на Саарус пресметаме:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.0.1 + 3.3.3 + 1.(-1).2 - 3.0.1 - 2.3.2 - 1.(-1).3 = 27 - 2 - 12 + 3 = 16.$$

За по-големи размерности обаче определението за детерминанта не е практически удобно, защото например за 4×4 детерминанта в развитието на детерминантата по определението присъстват $4! = 4.3.2.1 = 24$ събираеми. Затова ще използваме други методи за практическото пресмятане на детерминанти от по-големи размерности.

Преди да преминем към други методи за пресмятане на детерминанти ще покажем още един пример, в който определението за детерминанта е удобно за извеждане на формула за пресмятането и.

Детерминанта от вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n},$$

наричаме триъгълни. По-точно горно-триъгълни. Сега понеже, за събираемо в пресмятането на Δ от вида $(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n}$ за всички пермутации на $1, \dots n$, за които $i_1 \geqq 2$ събираемото $(-1)^{i_1,\dots,i_n} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n} = (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} 0.a_{2,i_2}, \dots a_{n,i_n} = 0$ се анулира. Тоест единственото ненулево събираемо, в което участва $a_{1,i_1} \neq 0.$ е

$(-1)^{[1,i_2,\dots,i_n]} a_{1,1} a_{2,i_2}, \dots, a_{n,i_n}$. Тоест

$$\Delta = \sum_{i_2,\dots,i_n} (-1)^{[i_2\dots,i_n]} a_{1,1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n}.$$

Аналогично всяко събираемо от този вид, за което $3 \leqq i_2 \leqq n$, се анулира, т.к. $a_{2,i_2} = 0, \quad \forall 3 \leqq i_2 \leqq n$. И така единственото ненулево събиаремо, в което участва $a_{2,i_2} \neq 0$ е $(-1)^{[2,i_3,\dots,i_n]} a_{1,1} a_{2,2} a_{3,i_3} \dots a_{n,i_n}$. Затова

$$\Delta = \sum_{i_2,\dots,i_n} (-1)^{[i_2\dots,i_n]} a_{1,1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n} = \sum_{i_3,\dots,i_n} (-1)^{[2,i_3\dots,i_n]} a_{1,1} a_{2,2} a_{3,i_3} \dots a_{n,i_n}.$$

Продължавайки по същия начин, след краен брой стъпки заключаваме, че

$$\Delta = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

И така детерминанта от горно-триъгълен вид се пресмята като вземем произведението на елементите стоящи по главния диагонал.

Пример 3.4. Да пресметнем следната горно-триъгълна детерминанта с формуалта, която изведохме.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 92 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 23 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.3.2.1.1 = 6.$$

Забележете, че за разлика от правилото на Саарус, което е вярно само за 3×3 детерминанти, формулата която изведохме за горно-триъгълна детерминанта е валидна за произволна размерност $n \times n$.

На лекции е доказано, че транспонирането на една матрица, не оказва влияние на нейната детерминанта. Тоест ако сменим местата на редовете и стълбовете на една матрица, детерминантата и не се променя. По-точно Ако $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и $\det(A) = \det(A^t)$. Използвайки това и формулата, която изведохме за $\Delta-$ горно-триъгълна детерминанта, като транспонираме матрицата и получаваме:

$$\Delta^t = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n-1,1} & a_{n,1} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{n-1,2} & a_{n,2} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}.$$

Възниква въпрост, дали е валидна подобна формула, за диагонална детерминанта относно вторичния диагонал. Ще я наричаме вторично-диагонална, за да няма объркване. Отговорът е положителен и сега ще докажем това. Разглеждаме

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\dots a_{n,i_n}.$$

Сега с аналогични разсъждения на тези, които приведохме за диагоналната детерминанта. Понеже $a_{1,i_1} = 0, \quad \forall 1 \leqq i_1 \leqq n-1$, то единственото събираемо, в кото участва $a_{1,i_1} \neq 0$ е $(-1)^{[n,i_2,\dots,i_n]}a_{1,n}a_{2,i_2}\dots a_{n,i_n}$. Тоест

$$\mathcal{D} = \sum_{i_2,\dots,i_n} (-1)^{[n,i_2,\dots,i_n]} a_{1,n}a_{2,i_2}\dots a_{n,i_n}.$$

Сега, понеже $a_{2,i_2} = 0 \quad \forall 1 \leqq i_2 \leqq n-2$ и $i_2 \in \{1, \dots, n\} \backslash \{n\}$, то единственото събираемо, в което участва $a_{2,i_2} \neq 0$ е $(-1)^{[n,n-1,i_3,\dots,i_n]} a_{1,n} a_{2,n-1} a_{3,i_3} \dots a_{n,i_n} \neq 0$. Тоест получихме

$$\mathcal{D} = \sum_{i_3,\dots,i_n} (-1)^{[n,n-1,i_3,\dots,i_n]} a_{1,n} a_{2,n-1} a_{3,i_3} \dots a_{n,i_n}.$$

Продължавайки по този начин получаваме:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \sum_{i_n \in \{1,\dots,n\} \backslash \{n,n-1,\dots,3,2\}} (-1)^{[n,n-1,n-2,\dots,3,2,i_n]} a_{1,n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \dots a_{n-2,3} a_{n-1,2} a_{n,i_n} \\ &= (-1)^{[n,n-1,\dots,2,1]} a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n-1,2} a_{n,1}.\end{aligned}$$

И сведохме задачата, до изчисляване четността $[n, n-1, \dots, 2, 1]$ на пермутацията - числата от $1, \dots, n$ записани точно в обратен ред. Сега, съгласно това че n образува инверсия с всяко число стоящо отдясно на него в тази пермутация. Т.е. n образува $n-1$ инверсии, $n-1$ образува инверсия с всяко число стоящо отясно на него, т.е. $n-1$ образува $n-2$ инверсии, и т.н. 3 образува 2 инверсии, 2 образува 1 инверсия. Това доказа, че

$$[n, n-1, \dots, 3, 2, 1] = S = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1.$$

Сега ще подходим по следния начин:

Записваме сумата S:

$$\begin{aligned}S &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1, \\ S &= 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1).\end{aligned}$$

Събираме горните две равенства и получаваме:

$$\begin{aligned}2S &= [n-1+1] + [n-2+2] + \dots + [2+n-2] + [1+n-1] = \underbrace{n + \dots + n}_{n-1-\text{пъти}} \\ &= n(n-1).\end{aligned}$$

И накрая разделяме на две двете страни и получаваме

$$[n, n-1, \dots, 2, 1] = S = \frac{n(n-1)}{2}.$$

И така формуалта, която изведохме за вторично-диагонална матрица добива вида:

$$\mathcal{D} = (-1)^{[n,n-1,\dots,2,1]} a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n-1,2} a_{n,1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n-1,2} a_{n,1}.$$

Тоест отново вземаме произведението на вторично-диагоналните елементи, но този път трбява да ги вземем със знак $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Пример 3.5. Да се изчисли следната вторично-диагонална детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 32 \\ 0 & 1 & 32 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{5.(5-1)}{2}} 2.3.4.1.1 = 24.$$

И отново както при диагоналната матрица, транспонирайки полученото равенство показахме, че детерминантите на горно и долно триъгълна матрица съвпадат.

Аналогично и тук, щом веднъж имаме формула за вторично-горно-диагонална, то транспонирайки получаваме , че тази формула е валидна и за вторично-долно-диагонална. Тоест:

$$\mathcal{D}^t = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathcal{D} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n,1}.$$

Пример 3.6. Пресметнете следната вторично-долно-триъгълна детерминанта

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & -9 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{5(5-1)}{2}} 1.2.3.2.1 = 12.$$

Преминаваме към основните свойства на детерминантите. На лекции се доказа, че ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ с редове $r_s \in M_{1\times n}(\mathbb{F})$

$$\det \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p' + r_p'' \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p' \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p'' \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$$\det \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \lambda r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Умножението на ред със скалар и прибавянето му към друг ред не променя стойността на детерминантата. По-точно, ако умножим някой ред r_q, $\quad 1 \leqq p, q \leqq n$ с $\lambda \in \mathbb{F}$, и го прибавим към r_q-тия ред, то детерминантата няма да се промени.

$$\det \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p + \lambda r_q \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Детерминанта, в която има поне два пропорционални реда се анулира.

$$\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ \lambda r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = 0. \tag{12}$$

По-общо. Ако някой ред е линейна комбинация на останалите, детерминантата се анулира.

$$\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p = \sum\limits_{q\neq p} \lambda_q r_q \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = 0. \tag{13}$$

Размяната на два реда, единствено променя знака на детерминантата. По-точно, ако разменим редовете r_p и r_q, $\quad 1 \leqq p, q \leqq n$, то

$$\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Пример 3.7.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & 4 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & -5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & -3 \\ 0 & 4 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Пример 3.8.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 9 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 12 & 9 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 2.3.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \end{vmatrix}.$$

Пример 3.9.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & -6 \\ 0 & 18 & 29 & 44 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{38} & 98 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{38} & 98 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 38 & 98 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3.98}{38} \end{vmatrix} = 1.2.38.\frac{3.98}{38} = 2.3.98 = 3.196 = 588.$$

Пример 3.10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 2 \\ 14 & -8 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 3.11.

$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 28 & 4 & 1 & 23 \\ 1 & 5 & -2 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & 12 \\ 28 & 4 & 1 & 23 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Преминаваме към важното понятие за Адюнгирано количество.

Определение 3.12 (Адюнгирано количество.)**.** Нека $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Ако фиксираме произволен елемент на матрицата $a_{p,q} \in \mathbb{F}$, $1 \leqq p, q \leqq n$ и от всички събираеми на $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ кратни на $a_{p,q}$, изнесем пред скоби $a_{p,q}$, то това което остава в скобите наричаме Адюнгирано количество на $a_{p,q}$, бележим $A_{p,q}$.

На лекции е доказано, че

Твърдение 3.13. При означенията на Определение 1 е в сила равенството

$$A_{p,q} = (-1)^{p+q}\Delta_{p,q}, \tag{15}$$

където $\Delta_{p,q}$ е детерминантата на матрицата, получена при задраскването на реда и стълба на $a_{p,q}$ в матрицата $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

Също

Твърдение 3.14 (Развиване на детерминанта по ред или по стълб.)**.** Ако $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, а $1 \leqq p, q \leqq n$, то

$$(i)\ \sum_{s=1}^n a_{p,s}A_{p,s} = \det(a_{ij})_{i,j=1}^n \quad \text{(развиване на детерминанта по ред);}$$

$$(ii)\ \sum_{s=1}^n a_{s,q}A_{s,q} = \det(a_{ij})_{i,j=1}^n \quad \text{(развиване на детерминанта по стълб).}$$

Тук $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на $a_{ij} \in \mathbb{F}$.

Задача 3.15. Да се намери адюнгираното количество $A_{3,4}$ на Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,4} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 0 & \boxed{a_{3,4}} & 0 \\ a_{4,1} & 0 & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} A_{3,4} &= (-1)^{3+4}.\Delta_{3,4} = -\begin{vmatrix} \to \boxed{a_{1,1}} & 0 & 0 & a_{1,5} \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,3} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left[(-1)^{1+1}a_{1,1}.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,3} & a_{4,5} \\ 0 & a_{5,3} & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}a_{1,5}.\begin{vmatrix} a_{2,1} & 0 & 0 \\ a_{4,1} & 0 & a_{4,3} \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,3} \end{vmatrix}\right] \\ &= -\left[(-1)^{1+1}a_{1,1}.0 + (-1)^{1+4}a_{1,5}.0\right] = 0. \end{aligned}$$

Тук още на първото равенство можеше да заключим, че детерминантата е нула , т.к. имаме нулев стълб, но целтта беше да упражним развитие по ред/ стълб.

Както споменахме по-горе, в израза за пресмятането на детерминанта от ред n по определението присъстват $n!$ събираеми.

Споменахме също, че съществуват практически по-удобни методи. Един от тях вече изложихме - развиване на детерминанта по ред или по стълб. Както забелязвате, чрез него свеждаме пресмятането на детерминанта от ред n до пресмятането на n детерминанти от редове $n-1$. Което е значително по-лесно.

Задача 3.16. Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 3 \\ \to \boxed{1} & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{4+1}.1.\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}.3.\begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1.[(-3).1.3 + 2.9.1 + 1.1.(-1) - 1.1.1 - (-1).9.(-3) - 3.1.2] + \\ &\quad -3[6.1.3 + (-3).9.8 + 1.0.1 - 8.1.1 - 1.9.6 - 3.0.(-3)] = \\ &= -1[-9 + 18 - 1 - 1 - 27 - 6] - 3[18 - 216 - 8 - 54] = 26 + 780 = 806. \end{aligned}$$

Пример 3.17. Нека пресметнем следната детерминанта

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \\ -7 & 0 & -9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}.1. \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -7 & -9 \end{vmatrix} = -(9-49) = 40.$$

Като за първото равенство умножихме първия ред с (-3) и го прибавихме към втория и после умножихме първия с (-4) И го пирбавихме към третия, постигайки нули под единицата на първи ред и втори стълб.

Пример 3.18.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}.(-1). \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -((-3).0-1) = 1.$$

Като тук за първото равенство умножихме трети стълб с 2 И го прибавихме към втори стълб, после умножихме трети стълб с 4 и го прибавихме към първи стълб.

Пример 3.19.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}.1. \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 2.3 = 2.$$

Тук за първото равенствоумножихме третият стълб с (-2) и го прибавихме към втория.

Пример 3.20.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+1}.1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1}.1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1).(-1)^{2+1}.(-1). \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1.1+2) = -3.$$

Тук за първото равенство към първите три стълба последователно пирбавихме четвъртия. След това изкарахме общ множител 2 от първия стълб. По-нататък, развихме по четвъртия ред. И за да направим вторият ред на 3×3 детерминантата ,с единствен ненулев елемент към третия стълб прибавихме първия.

Пример 3.21. Сами пресметнете следните детерминанти

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{(отг. -9)}; \quad (ii) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} \text{отг. 17.}$$

Задача 3.22. Пресметнете следната $n \times n$ детерминанта, където $x, y \in \mathbb{F}$ са елементи от поле.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

Решение. Забелязваме, че това е детерминанта, която по главния диагонал има $x-$ове , а над него $y-$ци и всичко останало е нула...почти. Елементът на ред n и стълб 1 е y и той се отличава от другите(с позицията си). Естествено е да тръгнем да развиваме детерминантата по първи стълб. Нека направим това. Получаваме:

$$\Delta = (-1)^{1+1}x. \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}y. \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = (-1)^{1+1}x.\Delta'_{(n-1)\times(n-1)} + (-1)^{n+1}y.\Delta''_{(n-2)\times(n-2)}.$$

Където последнтие две детерминанти са съответно долно триъгълна и горно триъгълна от редове $n-1$. И така вече изведохме формула за този тип детерминанти - произведението на диагоналните елементи.

$$\Delta = x.x^{n-1} + (-1)^{n+1}.y.y^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

Задача 3.23. Пресметнете детерминантата от ред n.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

Решение. Използвайки Свойство (11)-умножение на ред с число и прибавяне към друг ред, не променят стойността на детерминантата! И така умножаваме първия ред с -1 и го прибавяме към всички останали. В резултат на всеки ред, различен от първия на местата, на които са се намирали единици сега стоят, нули. А по главния диагонал където преди имаше нули, сега има минус единици. По-точно:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

И сведохме $\Delta = (-1)^{n-1}$ до долно-триъгълна детерминанта.

Задача 3.24 (Детерминанта от тип Пачи крак)**.** Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са ненулеви числа. Разглеждаме детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Решение. За всяко $1 \leqq i \leqq n$, умножаваме $i-$тия ред с $-\frac{b_i}{a_i}$ и го прибавяме към първия ред.(За да направим нули на всички позиции на първи ред, без водещата.) В резултат получаваме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_i b_i}{a_i}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Последното е горно-триъгълна детерминанта и така пресмятаме:

$$\Delta = \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i b_i}{a_i}\right) \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Нека сега някое от $a_1, a_2, \dots, a_n$ е нула. Тоест $a_i = 0$, за някое $1 \leqq i \leqq n$.

$$\Delta_{|a_i=0} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_i & b_{i+1} & \dots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_i & 0 & 0 & \dots & \boxed{a_i = 0} & 0 & \dots & 0 \\ c_{i+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Развиваме по $i+1$-вия ред, като забележете че горната детерминанта е от ред $n+1$.

$$\Delta_{|a_i=0} = (-1)^{i+1+1} c_i \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_i & b_{i+1} & \dots & b_n \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Сега тази детерминанта от ред n развиваме по $i-$тия стълб.

$$\begin{aligned}
\Delta_{|a_i=0} &= (-1)^{i+1+1}c_i(-1)^{i+1}b_i \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2i+3}(b_ic_i) \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdots a_n \\
&= -a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{i-1} \cdot (b_ic_i) \cdot a_{i+1} \cdots a_n.
\end{aligned}$$

С което изведохме и формула за случая, в който някой от диагоналните елементи е нулев. Какво става, ако повече от един диагонален елемент(отново не броим водещия) е нулев?

Задача 3.25. Пресметнете детерминантата от ред n.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & \dots & 5 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 5 & 5 & \dots & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & \dots & 5 & 6 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Решение. Забелязваме, че много често се среща числото 5 в тази детерминанта и съответно можем да направим много нули - което винаги е добър подход. За целта умножаваме първия ред с -1 и го прибавяме към всички останали.

$$(R_2 - R_1),\ (R_3 - R_1),\ \dots,\ (R_{n-1} - R_1),\ (R_n - R_1).$$

И така получаваме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Това вече разпознаваме като детерминанта Пачи крак, която знаем как да изчислим. Умножаваме всеки ред R_i, $\forall 2 \leqq i \leqq n$ с -5 и го прибавяме към първият. (Виж общата постановка на задачата за детермината Пачи крак Задача 8.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n},$$

където

$$* := 5+(-2)\cdot(-5)+(-2)\cdot(-5)+\ldots+(-2)\cdot(-5) = 5+10\cdot(n-1) = 5(1+2n-2) = 5(2n-1).$$

Сега вече Δ е горно триъгълна (отн. главния диагонал) и следователно нейната стойност е произведението на диагоналните елементи.

$$\Delta = * \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = * = 5(2n-1).$$

Задача 3.26. Определете размерността на детерминантата намерете нейната стойност.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2n+1 \\ 4 & 6 & 5 & \dots & 2n-1 & 2n+1 \\ 6 & 3 & 10 & \dots & 2n-1 & 2n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2n & 3 & 5 & \dots & 4n-2 & 2n+1 \\ 2n+2 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 4n+2 \end{vmatrix}.$$

Решение. от първият ред е лесно да забележим, че тази детерминанта е от ред $n+1$, понеже

$$R_1\ (2k+1)_{k=0}^{n} = (1 \quad 3 \quad 5 \quad \dots \quad 2n-1 \quad 2n+1).$$

От втория ред изваждаме първия, от третия изваждаме първия, ... , от $n-$тия ред изваждаме първия и накрая от $n+1$-вия ред изваждаме първия:

$$(R_2 - R_1),\ (R_3 - R_1)\,, \dots, (R_n - R_1),\ \dots (R_{n+1} - R_1).$$

В резултат:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2n+1 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 0 & 0 & \dots & 2n-1 & 0 \\ 2n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2n+1 \end{vmatrix}.$$

Което отново разпознаваме като детерминанта Пачи крак. Или заместваме във вече изведената формула за Пачи крак или повтаряме елементарните преобразувания. Ще направим второто с цел да затвърдим общия начин за пресмятане на Пачи крак и не объркаме нещо в заместваенето.

$$(R_1 - R_2), (R_1 - R_5), \ldots, (R_1 - R_n), (R_1 - R_{n+1}).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} * & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 0 & 0 & \ldots & 2n-1 & 0 \\ 2n+1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2n+1 \end{vmatrix},$$

където

$$* := 1 - 3 - 5 - \ldots - (2n-1) - (2n+1) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(2k+1).$$

И значи

$$\Delta = \left(1 - \sum_{k=1}^{n}(2k+1)\right) \cdot \prod_{k=1}^{n}(2k+1).$$

Нека отделно пресметнем сумата $S = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)$.

$$S = 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1)$$
$$S = (2n+1) + (2n-1) + \ldots + 3 + 5.$$

Събирайки почленно двете равенства получаваме

$$2S = (2n+4) + (2n+4) + \ldots + (2n+4) + (2n+4) = n(2n+4).$$

И значи

$$S = n(n+2).$$

Накрая

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 - n(n+2)) \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1) \\ &= (1 - n(n+2)) \cdot (2n+1)!!. \end{aligned}$$

Тук с $k!!$ означаваме двоен факторел, вероятно познат от ДИС. Можете да си мислите, че двоен факториел е като факториела , но прескачат през две множителите. Или може да се определи с равенството:

$$k! = k!! \cdot (k-1)!!.$$

Понеже, ако k е четно, то $k!! := 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2l \cdots k$. А, ако k е нечетно, то $k!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1) \cdots k$. Аналогично може да се определи $m-$торен(повторен) факториел. В нашия случай $2n+1$ е нечетно число и значи.

$$(2n+1)!! := \frac{(2n+1)!}{(2n)!!}.$$

Тук също имаме $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n!$.

$$(2n+1)!! := \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

И накрая

$$\Delta = \frac{(1 - n(n+2)) \cdot (2n+1)!}{2^n \cdot n!}.$$

Задача 3.27. Да се пресметне детерминантата

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}.$$

Решение. От всеки ред вадим предишния, започвайки от $(n+1)-$вия и стигайки до втория. Това дава

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 - x & x - a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - x & x - a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x - a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - x & x - a_n \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавяме втори, трети и т.н., $(n+1)-$ви стълб към първия и получаваме

$$\Delta_{n+1} = \prod_{i=1}^{n}(x - a_n) \begin{vmatrix} x + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Сега развиваме по първи стълб и пресмятаме, че

$$\Delta_{n+1} = \left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \prod_{i=1}^{n}(x - a_n).$$

Задача 3.28. Да се пресметне детерминантата

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Решение. От всеки стълб изваждме предния, започвайки от последния и стигайки до втория

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Изваждането на първия ред от всички останали дава

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Умножаваме $i-$тия стълб с $\frac{n+1-i}{n}$ за всички $2 \leq i \leq n$ и прибавяме към първия стълб, за да сведем до

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{n}[1+2+\ldots+(n-1)] & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Развиваме по първи стълб и получаваме

$$\Delta_n = (-1)^{1+1}\left\{1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\right\}.\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\right\}.(-n)^{n-1}.(-1)^{[n-1,n-2,\dots,2,1]}$$

$$= \left\{1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\right\}.(-1)^{n-1}.(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.n^{n-1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.n^{n-1}.\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Често не можем да пресметнем някоя величина, без да сме пресметнали няколко предходни подобни на него. Такава зависимост между дадени величини се нарича рекурентна.

Задача 3.29. Нека Δ_n е детерминанта от ред n. Ако успеем да изразим

$$\Delta_n = \Delta_n(\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_2, \Delta_1),$$

като функция на тази детерминанта от по-малките редове $n-1, \dots, 2, 1$, то по този начин ще сме в състояние да намерим и самата Δ_n, при положение че можем да сметнем предходните. Тук ще разгледаме рекурентна зависимост от вида

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b\Delta_{n-2},$$

където a и b са константи независещи от n.

Решение. Да разгледаме квадратното уравнение $t^2 - at - b = 0$ с коефициенти a, b. И нека t_1, t_2 са неговите корени. Тогава от формулите на Виет знаем, че $t_1 + t_2 = a$ и $t_1t_2 = -b$. Следователно $\Delta_n = (t_1+t_2)\Delta_{n-1} - t_1t_2\Delta_{n-2}$. А значи за $1 \leqq i \neq j \leqq 2$ имаме

$$\Delta_n - t_i\Delta_{n-1} = t_j(\Delta_{n-1} - t_i\Delta_{n-2}). \tag{16}$$

Получихме рекурентна зависимост от която последователно изразяваме:

$$\Delta_{n-1} - t_i\Delta_{n-2} \to t_j(\Delta_{n-2} - t_i\Delta_{n-3}) \to t_j[t_j(\Delta_{n-3} - t_i\Delta_{n-4})] = t_j^2(\Delta_{n-3} - t_i\Delta_{n-4}) \to$$
$$\to t_j^2[t_j(\Delta_{n-4} - t_i\Delta_{n-5})] = t_j^3(\Delta_{n-4} - t_i\Delta_{n-5}) \to \dots \to t_j^{n-3}(\Delta_2 - t_i\Delta_1).$$

Т.е. $\Delta_{n-1} - t_i\Delta_{n-2} = t_j^{n-3}(\Delta_2 - t_i\Delta_1)$. Заместваме го в (16) и получаваме

$$\Delta_n - t_i\Delta_{n-1} = t_j[t_j^{n-3}(\Delta_2 - t_i\Delta_1)] = t_j^{n-2}(\Delta_2 - t_i\Delta_1), \quad \{i,j\} = \{1,2\}. \tag{17}$$

Тук получихме две уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \Delta_n - t_1\Delta_{n-1} = t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) \\ \Delta_n - t_2\Delta_{n-1} = t_1^{n-2}(\Delta_2 - t_2\Delta_1) \end{array} \right. .$$

Умножаваме второто уравнение по -1 и го прибавяме към първото.

$$(t_2 - t_1)\Delta_{n-1} = t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-2}(\Delta_2 - t_2\Delta_1).$$

$$\Rightarrow \Delta_{n-1} = \frac{t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-2}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1}.$$

Изразяваме $\Delta_n = t_1\Delta_{n-1} + t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1)$.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= t_1 \left[\frac{t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-2}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1} \right] + t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) \\ &= \frac{t_1 t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1) + (t_2 - t_1)t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1)[t_1 + t_2 - t_1] - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{t_2^{n-2}(\Delta_2 - t_1\Delta_1)t_2 - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1}. \end{aligned}$$

Така изразихме

$$\Delta_n = \frac{t_2^{n-1}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1}.$$

За удобство ще запишем като

$$\Delta_n = \frac{t_2^{n-1}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1} = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n,$$

където C_1, C_2 са константите

$$C_1 = \frac{t_2\Delta_1 - \Delta_2}{t_1(t_2 - t_1)}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2 - t_1\Delta_1}{t_2(t_2 - t_1)}.$$

и така намерихме начин(в случая, когато $t_1 \neq t_2$) да пресметнем Δ_n, само от корените на квадратното уравнение и константите ,които можем да пресметнем като изчислим детерминантата за малки размерност $n = 1, \quad n = 2.$).

Нека разгледаме случая, когато $t_1 = t_2 =: t_0$. В този случай (17) добива вида

$$\Delta_n - t_0\Delta_{n-1} = t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1). \tag{18}$$

Така от една страна получаваме

$$\sum_{k=2}^{n} t_0^{n-k}(\Delta_k - t_0\Delta_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1) = (n-1)t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1),$$

съгласно (от (18) изразяваме) $\Delta_k - t_0\Delta_{k-1} = t_0^{k-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1)$.

$$\Rightarrow t_0^{n-k}(\Delta_k - t_0\Delta_{k-1}) = t_0^{n-k+k-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1) = t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1).$$

От друга страна

$$\sum_{k=2}^{n} t_0^{n-k}(\Delta_k - t_0\Delta_{k-1}) = \Delta_n - t_0^{n-1}\Delta_1,$$

съгласно

$$\sum_{k=2}^{n} t_0^{n-k}(\Delta_k - t_0\Delta_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}\left(t_0^{n-k}\Delta_k - t_0^{n-k+1}\Delta_{k-1}\right) =$$
$$= (t_0^{n-2}\Delta_2 - t_0^{n-1}\Delta_1) + (t_0^{n-3}\Delta_3 - t_0^{n-2}\Delta_2) + (t_0^{n-4}\Delta_4 - t_0^{n-3}\Delta_3) + (t_0^{n-5}\Delta_5 - t_0^{n-4}\Delta_4) +$$
$$+ \ldots + (t_0\Delta_{n-1} - t_0^2\Delta_{n-2}) + (t_0\Delta_n - t_0\Delta_{n-1}) = \Delta_n - t_0^{n-1}\Delta_1.$$

Понеже сумата е "телескопична"и всички събираеми без първото и последното участват по два пъти с различни знаци и се съкращават. Сега получихме ,че

$$(n-1)t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1) = \sum_{k=2}^{n} t_0^{n-k}(\Delta_k - t_0\Delta_{k-1}) = \Delta_n - t_0^{n-1}\Delta_1.$$

$$\Rightarrow \Delta_n = (n-1)t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1) + t_0^{n-1}\Delta_1.$$

Остана да изберем константите

$$C_1 = \frac{2t_0\Delta_1 - \Delta_2}{t_0^2}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2 - t_0\Delta_1}{t_0^2}$$

така , че

$$\Delta_n = C_1 t_0^n + nC_2 t_0^n.$$

Ще илюстрираме това в следната

Задача 3.30. Пресметнете следната три-диагонална детерминанта от ред n.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Решение. Развиваме по първи ред.

$$\Delta_n = (-1)^{1+1}.2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{1+2}.1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Сега развиваме по първия стълб последната детерминанта и плучаваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}_{(n-2)} = \Delta_{n-2}.$$

Затова

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

И сега разглеждаме квадратното уравнение $t^2 - 2t + 1 = 0$.

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 = t_1 = t_2,$$

което има един двоен корен. От постановката на Задача 11, където изложихме общата теория, попадаме във втория случай в който $t_1 - t_2 = 0$ и значи имахме $\Delta_n = C_1 t_0^n + nC_2 t_0^n$. Тук, обаче $t_0 := t_1 = t_2 = 1$ и значи $\Delta_n = C_1 + nC_2$, където

$$C_1 = \frac{2t_0\Delta_1 - \Delta_2}{t_0^2} = 2\Delta_1 - \Delta_2, \quad C_2 = \frac{\Delta_2 - t_0\Delta_1}{t_0^2} = \Delta_2 - \Delta_1.$$

Пресмятаме $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 1.1. = 3$. И е ясно, че $\Delta_1 = |2| = 2$. Оттук

$C_1 = 2\Delta_1 - \Delta_2 = 2.2 - 3 = 1, \quad C_2 = \Delta_2 - \Delta_1 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \Delta_n = C_1 + nC_2 = 1 + n.1 = n + 1.$

Задача 3.31. Пресметнете следната детерминанта $n \times n$ като изведете рекурентна зависимост.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

Решение. Развиваме по първи ред

$$\Delta_n = (-1)^{1+1}.5 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{1+2}.1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= 5.\Delta_{n-1} - 1. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Последната детерминанта от ред $n-1$ развиваме по ръвия стълб и получаваме

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{1+1}.4.\Delta_{n-2}.$$

По този начин получихме рекурентната зависимост:

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 4\Delta_{n-2}.$$

Квадратното уравнение, което трябва да разглеждаме е

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Значи имаме два различни корена и попадаме в първия случай на Задача 11.

$$t_1 = 4 \neq 1 = t_2.$$

Тоест $\Delta_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n$, където

$$C_1 = \frac{t_2\Delta_1 - \Delta_2}{t_1(t_2 - t_1)}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2 - t_1\Delta_1}{t_2(t_2 - t_1)}.$$

Пресмятаме $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5.5. - 1.4 = 21$. Ясно е, че $\Delta_1 = |5| = 5$. И значи

$$C_1 = \frac{1.5 - 21}{4(1-4)} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}, \quad C_2 = -\frac{21 - 4.5}{1(1-4)} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \Delta_n = \frac{4}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} \cdot 1^n = \frac{4}{3} \cdot 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right).$$

Преминаваме към детерминанта на Вандермонд.

Задача 3.32 (Вандермонд).

$$W = W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решение. Правим нули под водещия елемент на първи ред(единицата) по следния начин:

$$\begin{aligned} R_n - x_1 R_{n-1} \\ R_{n-1} - x_1 R_{n-2} \\ \vdots \\ R_3 - x_1 R_2 \\ R_2 - x_1 R_1 \end{aligned}$$

Така постигаме

$$\begin{aligned} W(x_1, \ldots, x_n) &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2 x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 & \ldots & x_n^2 - x_n x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2} - x_2^{n-3} x_1 & x_3^{n-2} - x_3^{n-3} x_1 & \ldots & x_n^{n-2} - x_n^{n-3} x_1 \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 & x_3^{n-1} - x_3^{n-2} x_1 & \ldots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_4 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \cdot W(x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Но сега можем да повторим същото за $W(x_2, \ldots, x_n)$ и така получаваме на свой ред

$$W(x_2, \ldots, x_n) = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \ldots (x_n - x_2) \cdot W(x_3, \ldots, x_n).$$

По този начин индуктивно извеждаме

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i).$$

Задача 3.33. Пресметнете следната детерминанта от ред $n+1$

$$W(1, 2, 3, \ldots, n, n+1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \ldots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \ldots & (n+1)^n \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} W(1,2,\dots,n+1) = \prod_{1\leqq q<p\leqq n+1} (p-q) = \\ = \{[(n+1-1].[n+1-2]\dots[n+1-n+1].[n+1-n]\}\times \\ \times\{[n-1][n-2]\dots 2.1\}\cdots\{[3-2].[3-1]\}\cdot\{[2-1]\} = \\ = n!\cdot(n-1)!\cdots 2!\cdot 1!. \end{aligned}$$

4 Действия с матрици. Обратими матрици. Матрични уравнения.

Нека $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ са матрици с елементи от поле $\mathbb{F}$. Определяме събиране на матрици $+: M_{m\times n}(\mathbb{F})\times M_{m\times n}(\mathbb{F})\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ като

$$A+B=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}+(b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}:=(a_{ij}+b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).$$

Тоест

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пример 4.1. Ще съберем следните 3×4 матрици.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 5 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+1 & 2+0 & -1+3 & 6+6\\ 2+1 & 1+2 & 0+0 & 2+7\\ 3+0 & 2+1 & 5+5 & -1-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 12\\ 3 & 3 & 0 & 9\\ 3 & 3 & 10 & -2\end{pmatrix}.$$

Определяме умножение на матрица с число (по-общо елемент от поле). Нека $\lambda\in\mathbb{F}$. При горните означения, имаме

$$\lambda A:=(\lambda a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}.$$

Пример 4.2. Да умножим матрица с число.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 15 & 10 & -5 & 30 \\ 10 & 5 & 0 & 10 \\ 15 & 10 & 25 & -5 \end{pmatrix}.$$

Въвеждаме операция умножение на матрици $\cdot : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \times M_{n\times l}(\mathbb{F}) \to M_{m\times l}$.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times l} = C_{m\times l},$$

$$C := \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} \right)_{i,j=1}^{m,l} \in M_{m\times l}(\mathbb{F}).$$

Това се нарича правило "ред по стълб".

На лекции се установи, че матриците имат "хубави"свойства, но комутативността не е едно от тях. Това се вижда в следния

Пример 4.3. За $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Да пресметнем тяхното $E_{1,1}E_{2,1}$ и $E_{2,1}E_{1,1}$.

$$E_{1,1} \cdot E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 + 0.1 & 1.0 + 0.0 \\ 0.0 + 0.1 & 0.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докато

$$E_{2,1} \cdot E_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 + 0.0 & 0.0 + 0.0 \\ 1.1 + 0.0 & 1.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 4.4. Умножението на матрици не е комутативна операция.

Пример 4.5.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6 + 0.0 & 3.1 + 0.9 \\ (-1).6 + 2.0 & (-1).1 + 2.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ -6 & 17 \end{pmatrix},$$

докато

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.6.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1).1 + 1.1 & (-1).(-1) + 1.0 \\ 0.1 + 0.1 & 0.(-1) + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

докато

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.7.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 15 & 3 & 30 & 12 \\ 7 & 7 & 1 & 11 & 7 \\ -19 & -3 & -2 & -16 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.8. Да се повдигне на степен $n \in \mathbb{N}$ матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}^n \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}).$$

Решение. В случая е очевидно. Но общият подход , в случай че искаме да повдигнем матрица на степен е да умножим матрицата няколко пъти, докато забележим как би станал общия вид и да докажем по индукция правилото, което сме забелязали, че се повтаря.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Откъдето се вижда,че колкото и пъти да умножим тази матрица, тя не се променя. Формално, можем да докажем с индукция. За $n = 1$ базата вече показахме. Нека предположим, че е вярна хипотезата ни за $n - 1$. Трябва да покажем верността на хипотезата(индукционното предплложение) в общия случай - а именно в случая n. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Задачата е решена.

Задача 4.9. Повдигнете на степен $n \in \mathbb{N}$ матрицата.

$$\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}).$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & 2b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} b^2 & 2b \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^3 & 3b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

И така достатъчно бързо забелязваме, че $\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} b^n & nb^{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$. И сме готови да го докажем с индукция по $n \in \mathbb{N}$. Базата я показахме с първия ред на решението. Нека предположим, че зависимостта, която забелязахме издържа до $n - 1$. Т.е., че $\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} b^{n-1} & (n-1)b^{n-2} \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix}$.

Сега използвайки това(индукционното предположение) и умножавайки

$$\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} b^{n-1} & (n-1)b^{n-2} \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^n & nb^{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

По този начин можем да повдигнем матрицата на желана от нас изнапред избрана степен по тази формула, която по-горе доказахме.

Задача 4.10. Пресметнете

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

. и лесно забелязваме закономерността в този случай. И така с индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще докажем, че $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$. Отново базата на индукцията(твърдението при $n = 2$ е изпълнено. Да предположим, че горното равенство е в сила за $n-1$. С това трябва да докажем верността му за n. Действително

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & -\sin(n-1)\alpha \\ \sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos[(n-1)\alpha+\alpha] & -\sin[(n-1)\alpha+\alpha] \\ \sin[(n-1)\alpha+\alpha] & \cos[(n-1)\alpha+\alpha] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Задача 4.11. Пресметнете $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{31607}$.

Решение. Забелязваме, че

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

А значи съгласно Задача 3, имаме

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{31607} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}^{31607} = \begin{pmatrix} \cos\frac{31607\pi}{3} & -\sin\frac{31607\pi}{3} \\ \sin\frac{31607\pi}{3} & \cos\frac{31607\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Разделяме с частно и остатък $31607 = 6 \cdot 5267 + 5$. Сега

$$\cos\left(\frac{31607\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{[6\cdot 5267+5]\pi}{3}\right) = \cos\left(2\cdot 5267\pi + \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(2\cdot 5267\pi + \frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

И значи

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{31607} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Лема 4.12. Вярно е следното равенство за биномните кеофициенти

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}. \tag{19}$$

Доказателство. Директно пресмятане. $\square$

Теорема 4.13 (матрична биномна формула за комутиращи матрици)**.** Ако $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ са комутиращи помежду си матрици(умножението на матрици не е комутативно, но има конкретни матрици за които то може да бъде нарп. $A.E_n = E_n.A$) то е в сила равенството

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}, \tag{20}$$

където

$$\mathbb{N} \ni \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad 1 \leqq k \leqq n$$

са биномните коефициенти.

Доказателство. С индукция по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ е ясно. За $n = 2$, използвайки $AB = BA$ извеждаме

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

И виждаме, че биномната формула

$$(A+B)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} A^{n-k}B^k = \binom{2}{0} A^2 + \binom{2}{1} AB + \binom{2}{2} B^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

съгласно $0! := 1$. По индукционно предпложение формулата е валидна за n. Тогава пресмятаме

$$\begin{aligned}(A+B)^{n+1} = (A+B)^n(A+B) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k \right)(A+B) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k+1}B^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^{k+1}.\end{aligned}$$

Правим смяна индекса на сумиране, във втората от последните две суми, $s := k+1$ и така

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k+1}B^k + \sum_{s=1}^{n+1}\binom{n}{s-1}A^{n-s+1}B^s\\
&= \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}A^{n-s+1}B^s + \sum_{s=1}^{n+1}\binom{n}{s-1}A^{n-s+1}B^s\\
&= \binom{n}{0}A^{n+1} + \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}A^{n-s+1}B^s + \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s-1}A^{n-s+1}B^s + \binom{n}{n}B^{n+1}\\
&= A^{n+1} + \sum_{s=1}^{n}\left(\binom{n}{s}+\binom{n}{s-1}\right)A^{n-s+1}B^s + B^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{0}A^{n+1} + \sum_{s=1}^{n}\binom{n+1}{s}A^{n-s+1}B^s + \binom{n+1}{n+1}B^{n+1}\\
&= \sum_{s=0}^{n+1}\binom{n+1}{s}A^{n-s+1}B^s.
\end{aligned}
$$

Където се възползвахме от известното равенство на Паскал

$$\binom{n}{s}+\binom{n}{s-1}=\binom{n+1}{s}.$$

□

Преминаваме към важното понятие за обратими матрици.

Определение 4.14. Една квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ наричаме обратима, ако съществува квадратна матрица от същия ред $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, за която $AB = BA = E_n$, където E_n е единичната матрица. Тоест матрицата, която има единици по главния диагонал и нули на всички останали позиции. Формално написано $E_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$.

Тук използвахме символа на Кронекер

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ,\text{ако } i = j \\ 0 & ,\text{ако } i \neq j \end{cases}.$$

На лекции установихте, че ако една матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ е обратима, то нейната обратна $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ също е обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$.

Също така показахте, че ако $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ са обратими матрици, то $AB \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ е обратима с обратна $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Защото

$$(AB).(B^{-1}A^{-1}) = (ABB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

Както и

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}AB) = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n.$$

Използвахме, че умножението на матрици е асоциативна операция.

Определение 4.15. Една квадратна матрица наричаме особена, ако има нулева детерминанта и неособена, ако детерминантата и не е нулева.

Също доказахте, че една матрица е обратима точно тогава, когато е неособена. Тоест $A \in M_n(\mathbb{F})$ е обратима точно когато $\det A \neq 0$. Едната посока на доказателството беше кратка и ще я припомним. Ако $A \in M_n(\mathbb{F})$ е обратима, т.е. $\exists A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ с

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Но щом са изпълнени горните матрични равенства, то

$$\det(E_n) = \det(AA^{-1}).$$

Остана да се възползваме от Теоремата за умножение на детерминанти и получаваме, че

$$1 = \det(E_n) = \det(A).\det(A^{-1})$$

Което означава, че и двете числа $\det(A), \det(A^{-1}) \neq 0$ са ненулеви! И така установихме, че ако една матрица е обратима, тя обезателно е неособена(има ненулева детерминанта).

Припомнете си доказателството на обратната посока на тази теорема! Конструкцията, която се прави в него ни дава и практически начин за пресмятане на обратна на неособена матрица, което е доста удобно за малки размерности и ще го ползваме понякога.

В заключението от тази конструкция получаваме, че ако $A \in M_n(\mathbb{F}), \det(A) \neq 0$ е неособеена матрица, то нейната обратна матрица е

$$A^{-1} := \frac{1}{\det(A)} A^* \in M_n(\mathbb{F}), \tag{21}$$

където $A^* \in M_n(\mathbb{F})$ е транспонираната матрица от Адюнгираните количества на елементите на A. С други думи, ако $A_{j,i}$ е адюнгираното колчество на елемента $a_{j,i} \in A$, то $(A^*)_{i,j} = (A_{j,i})$ за всички $1 \leqq i, j \leqq n$.

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F})$. Е неособена. ($\det(A) \neq 0$.) За да се възползваме от (30) трябва да изчислим Адюнгираните количества $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$ съответно на елементите $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}$. Правим това:

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= (-1)^{1+1} a_{2,2} = a_{2,2}; \\
A_{1,2} &= (-1)^{1+2} a_{2,1} = -a_{2,1}; \\
A_{2,1} &= (-1)^{2+1} a_{1,2} = -a_{1,2}; \\
A_{2,2} &= (-1)^{2+2} a_{1,1} = a_{1,1}.
\end{aligned}$$

И значи от (30) получаваме

$$\begin{aligned}
A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}^t \\
&= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Като следствие за неособени матрици 2×2 получихме следното комбинаторно правило за пресмятане на обратната матрица. (Първо пресмятаме нейната детерминанта след което съставяме матрицата ,в която елементите по главния диагонал са си разменили местата, а елементите по вторичния диагонал са си сменили знаци и умножаваме тази матрица с реципрочното на детерминантата , която вече сме изчислили.

Пример 4.16. Да се докаже, че матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ е обратима и да се намери нейната обратна матрица.

Съгласно $\det(A) = 1.0 - 2.(-3) = 6 \neq 0$ тази матрица е неособена и значи обратима. И нейната обратна е

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

На лекции също се доказа следната

Теорема 4.17. Ако е дадена система и n линейни уравнения с n неизвестни

$$\left| \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right. .$$

С матрица от коефициенти $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{F})$, чиято детерминанта, нека тя е $\Delta := \det(A)$, е ненулева $\det(A) \neq 0$.

То тази система има единствено решение, което се дава по Формулите на Крамер

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right),$$

където Δ_i е детерминантата на матрицата A, от която сме заменили $i-$ тия стълб със стълба на свободните коефициенти $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$.

Тези формули(на Крамер) са важни в теоретични приложения, но практически са твърде неудобни за големи размерности. Следва пример, илюстриращ тези формули

Задача 4.18. Да се реши системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{array} \right. .$$

Решение. Пресмятаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -46, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -69.$$

И значи по формулите на Крамер получаваме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-23}{-23} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-46}{-23} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-69}{-23} = 3.$$

Значи решението на системата е

$$(1, 2, 3)\,.$$

Като сега, решавайки задачата по метода на Гаус-Жордан

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 - 2R_2 \\ \sim \\ R_3 - 3R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -1 & -13 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & -19 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 - 5R_1 \\ \sim \\ R_2 + R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -1 & -13 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & -19 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 + R_1 \\ \sim \\ R_3 - 5R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -1 & -13 \\ 1 & -4 & 0 & -7 \\ 0 & 23 & 0 & 46 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 : 23 \\ R_2 + R_3 \\ \sim \\ R_1 + 5R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1).R_1 \\ \sim \\ R_1 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

И отново получихме решението $(1, 2, 3)$, но със значително по-малко сметки отколкото са нужни за изчисляването на четирите детерминанти от ред 3.

След като видяхме как можем да намерим за 2×2, сега ще покажем как практически се намират обратните матрици на неособени матрици от по-големи размерности.

Нека е дадена неособена матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$. Искаме да решим задачата за намиране на нейната обратна матрица. Тоест матрицата $X \in M_n(\mathbb{F})$, за която $AX = XA = E_n$. Нека $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^n$. Всъщност решаваме матричното уравнение

$$AX = E_n.$$

Сега "долепяме"матриците $(A|E_n) \to (E_n|X)$, когато чрез елементарни преобразувания по редове вляво получим единичната матрица, то матрицата която сме получили вдясно е търсената матрица $X = A^{-1}$. Помислете защо това работи.

Задача 4.19. Намерете обратната на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Затова

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Задача 4.20. А по-общо, забелязвате ли на диагонална матрица D, обратната D^{-1} коя е?

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

А ако поискаме да повдигнем диагонална матрица на избрана от нас степен? Забележете и докажете сами, че за диагоналната матрица D от по-горе, че

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Задача 4.21. Намерете обратната на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 - R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 + 2R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 + 2R_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 - R_3 \\ \sim \\ R_1 - R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -2/9 & -2/9 & 1/9 \\ 0 & -1 & 0 & -2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right).$$

Умножаваме първи и втори ред с минус едно и свеждаме лявата матрица до единичната и значи обратната е

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.22. Намерете обратната на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1 - 3R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1 + R_3 \\ \sim \\ R_2 + 2R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

И така

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.23. Намерете обратната на матрицата

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 - R_4 \\ \sim \\ R_3 - R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1 - R_3 \\ \sim \\ R_4 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 - R_2 \\ \sim \\ R_4 + R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{3}R_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 + R_1 \\ \sim \\ R_3 + R_1 \\ R_4 + 2R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \overset{R_1 \leftrightarrow R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right).$$

Затова имаме

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.24. Да се намери обратната на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ \sim \\ R_4 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_4 - R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \leftrightarrow R_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 + R_4 \\ \sim \\ R_3 + R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 - R_3 \\ \sim \\ R_2 + 2R_3 \\ R_4 + 2R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{1}{2}R_2 \\ \frac{1}{2}R_4 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1 - R_4 \\ \sim \\ R_1 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Затова обратната матрица е

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При намирането на обратна на неособена матрица$A \in M_n(\mathbb{F}), \quad \det(A) \neq 0$, както и споменахме, в действителност решаваме матричното уравнеине $AX = E$, за единичната матрица E.

Възниква въпросът, ако имаме матрици $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, и $B \in M_{n\times r}$, можем ли да намерим матрица $X \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$, която да изпълнява матричното уравнение

$$AX = B. \tag{22}$$

Процесът в намирането на тази матрица се нарича решаване на матричното уравнение (22). Той не се различава много от метода, който изложихме за намиране на обратна матрица. Само, че вместо $(A \quad | \quad E_n) \rightarrow (E_n \quad | \quad A^{-1})$, ние ще прилагаме $(A \quad | \quad B) \rightarrow (B \quad | \quad X)$, ако това е възможно. Ако матрицата A има ненулева детерминанта ($\det(A) \neq 0$) , т.е. е неособена, то нашето матрично уравнение (22) има решение и то е $X = A^{-1}B$ и технически няма проблем да намерите матрицата A^{-1} по по-горе изложения метод и да умножите двете матрици $A^{-1}B = X$ получавайки търсената матрица X, но този метод е по-тромав. Затова по-добре е чрез елементарни преобразувания(само по редове) да сведете $(A|X) \rightarrow (E|X)$. Ако пък матричното уравнение е вида

$$XA = B, \tag{23}$$

можем да транспонираме двете му страни, получавайки

$$(XA)^t = B^t \Leftrightarrow A^t X^t = B^t.$$

И така свеждайки задачата до матричното уравнение от първия вид, където обаче ще намерим X^t, и е ясно че ако сме го направили , остава да транспонираме и получаваме търсената матрица X.

Тук е мястото да споменем, защо този метод за намиране на , съответно, обратна матрица или решаването на матрично уравнение $AX = B$ чрез записване $(A|E_n)$, съот $(A|B)$ и извършване на елементарни преобразувания по редове към двете матрици едновременно работи. Той се дължи на реализацията на елементарните преобразувания по редове към матрица, чрез леви умножения с подходящи неособени матрици. Ако тези матрици са $P_1, \dots, P_k$, то $P_k \dots P_1 A = E_n$ и значи $P_k \dots P_1 = A^{-1}$ т.е. матрицата, получена отдясно е $P_k \dots P_1 E_n = P_k \dots P_1 = A^{-1}$ или съответно $P_k \dots P_1 B = A^{-1}B$ и това доказва, че вдясно се получава търсената в задачата матрица.

Задача 4.25. Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{6}R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2+4R_3}{\overset{R_1-R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{5}R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{R_2-3R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3-R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\overset{(-1)R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

И значи

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.26. Да се реши матричното уравнение $AZ = B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2-3R_3}{\overset{R_1-R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -4 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & 14 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -4 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Последното показа, че A не е обратима. Но последното ни даде, че

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Което пък на свой ред доведе до системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} -4x_{21} + 7x_{31} = -2 \\ -4x_{22} + 7x_{32} = -1 \\ 0x_{11} + 0x_{21} + 0x_{31} = -3 \\ 0x_{12} + 0x_{22} + 0x_{33} = 3 \\ x_{11} + 5x_{21} + 5x_{31} = 3 \\ x_{12} + 5x_{22} + 5x_{32} = 0 \end{array} \right.,$$

която очевидно (от третото и четвъртото уравнение) е няма решение. Значи нашето матрично уравнение няма решение.

Задача 4.27. Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.28. Да се реши матричното уравнение $XA = B$

$$X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение. Ще се възползваме от следното. Транспонирайки равенството $XA = B$ имаме $(XA)^t = B^t \Leftrightarrow A^t X^t = B^t$. Сега решаваме матричното уравнение

$$A^t X^t = B^t.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 6 & 0 & 18 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 0 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 + 2R_2 \\ \sim \\ R_3 + 3R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 7 & 7 & 14 & 0 & 42 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 8 & 16 & 0 & 48 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{7}R_1 \\ \sim \\ \frac{1}{8}R_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 - R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Последното дава, че A^t не е обратима. Но все пак последното ни помогна да сведем даденото матрично уравнение до:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Което е еквивалентно на следната система линейни уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} -x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} = 4 \\ x_{12} + x_{13} = 2 \\ -x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} = 0 \\ x_{22} + x_{23} = 0 \\ -x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} = 12 \\ x_{32} + x_{33} = 6 \end{array} \right. .$$

Полагаме $x_{12} := p, x_{22} := q, x_{32} := s$ и получаваме $x_{13} = 2-p, x_{11} = 2-p, x_{23} = -q, x_{21} = -q, x_{33} = 6 - s, x_{31} = 6 - s$. Тоест

$$X = \begin{pmatrix} 2-p & p & 2-p \\ -q & q & -q \\ 6-s & s & 6-s \end{pmatrix}.$$

Забележете и в тази и в предната задача с елементарни преобразувания установихме, че лявата матрица е особена, но в първата от тези споменати задачи(Задача 13) видяхме, че матричното уравнение няма решение, докато в тази задача(Задача 15) показахме, даже, че има безкрайно много такива. (за всевъзможните $p, q, s \in \mathbb{C}$ от горепосочения вид и понеже $|\mathbb{C}| = \infty$.

5 Линейни пространства - въведение.

Линейно пространство наричаме непразно множество $\emptyset \neq V$, в което сме въвели една бинарна операция, която наричаме сума на вектори

$$+ : V \times V \longrightarrow V,\ (u, v) \mapsto u + v \in V.$$

Както и една унарна операция, която наричаме произведение на вектор със скалар

$$. : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V,\ (\lambda, v) \mapsto \lambda v \in V,$$

където $\mathbb{F}$ е поле, изпълняващи следните аксиоми:

1. Събирането на вектори е асоциативно $\forall u, v, w \in V$, имаме $(u+v)+w = u+(v+w)$;
2. Събирането на вектори е комутативно $\forall u, v \in V(u + v = v + u)$;
3. Съществува вектор, който е неутрален относно събирането на вектори, наричаме го нулев вектор $\mathcal{O} \in V$, за който $\forall v \in V(v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v)$;
4. За всеки ненулев вектор съществува негов противоположен. Формално $\forall v \in V$, $\exists(-u) \in V : u + (-u) = \mathcal{O}$;
5. В сила е дистрибутивният закон над скаларен множител $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и за $\forall v \in V((\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v)$;
6. В сила е дистрибутивният закон над векторен множеител. Формално $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ за $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ и $\forall u, v \in \mathbb{F}$;
7. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ за $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и $u \in V$;
8. $1_{\mathbb{F}}.u = u$ за $\forall u \in V$ и единицата на полето $1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$.

Пример 5.1. Всяко поле $\mathbb{F}$ е линейно пространство над себе си относно въведените в полето операции събиране и умножение.

Пример 5.2. Декартовото произведение $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F} =: \mathbb{F}^n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i \in \mathbb{F}\}$,заедно с покомпонентно определените операции събиране на вектори наредени $n-$орки и умножение на $n-$орка с число, е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Това линейно пространство се нарича линейно пространство на наредените $n-$орки от елементи на полето и играе важна роля, не само в алгебрата , но и в другите математически дисциплини.

Оказва се, че от осемте аксиоми, които изброихме по-горе, за линейно пространство, една не е необходимо да предполагаме за даденост , а следва от останалите. По-точно в сила е следното твърдение:

Твърдение 5.3. Ако V е непразно множество, удовлетворяващо всичките седем аксиоми без аксиомата за комутативност на събирането на вектори(аксиома 2.), то V линейно пространство над полеtо $\mathbb{F}$.. Еквивалентно. Твърдим, че аксиомата за комутативност на събирането на вектори в линейно пространство следва от останалите.

Доказателство. Първо да покажем, че $0.a = \mathcal{O}$ за $a \in V$ и нулата на полето $\mathbb{F}$. Действително $a + 0.a = (1 + 0).a = 1.a = a$ и оттук $-a + a + 0.a = -a + a$ откъдето $\mathcal{O} + 0.a = \mathcal{O}$ и значи $0.a = \mathcal{O}$. По-нататък от $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1-1)a = 0a = \mathcal{O}$ извеждаме $(-1)a = -a$. Накрая от $(a + b) + (-b) = a + (b - b) = a$ заключваме, че $(a + b) + (-b) + (-a) = \mathcal{O}$ и следователно $(a + b) + (-1)(b + a) = \mathcal{O}$ т.е. $a + b = b + a$. $\square$

Доказва се също, че за линейно пространство V нулевият вектор $V \ni \mathcal{O}$ е единствен. На всеки вектор противоположният е единствен и че $\lambda\mathcal{O} = \mathcal{O}$.

Определение 5.4. Ако V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. И $b_1, \ldots, b_n \in V$ са вектори, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ са скалари, то векторът

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \in V$$

наричаме линейна комбинация на векторите $b_i \in V$ с коефициенти $\alpha_i \in \mathbb{F}$.

Определение 5.5. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$, а $\emptyset \neq W \subseteqq V$ е непразно подмножество на V. Тогава W ще наричаме линейно подпространство на V, този факт отбелязваме с $W \leqq V$, ако заедно с всички свои вектори $w_1, \ldots, w_n \in W$, W съдържа всички техни линейни комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \in W$ с коефициенти от полето $\alpha_i \in \mathbb{F}$.

Доказва се(едната посока е тривиално изпълнена, а другата следва по индукция), че при означенията на Определение 2, $\emptyset \neq W \subseteqq V$ е подпространство тогава и само тогава, когато за произволни $w_1, w_2 \in W$ и $\alpha \in \mathbb{F}$ е в сила[1] $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$. Което е един много удобен критерий за проверка, дали дадено подмножество е подпространство.

Следствие 5.6. При означенията от горните две определения. Ако $W \leqq V$, то W съдържа нулевият вектор на V и за всеки вектор $w \in W$, W съдържа неговият противоположен $-w \in W$. В частност едно подмножество е линейно пространство точно тогава, когато е линейно пространство относно операциите събиране на вектори и умножение на вектор със скалар, наследени от "голямото"пространство.

[1]Еквивалентно е с $w_1 - w_2 \in W$ за всички $w_1, w_2 \in W$. Тук сме въвели "изваждане"на вектори по следния начин: $w_1 - w_2 := w_1 + (-w_2)$.

Определение 5.7. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Линейна обвивка [2] $\ell(S)$ на $\emptyset \neq S \subseteq V$ наричаме множеството от всевъзможните линейни комбинации на вектори от S с коефициенти от $\mathbb{F}$.

$$\ell(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad : \quad \alpha_i \in \mathbb{F}, u_i \in S \right\} = span(S).$$

Пример 5.8. Нека разгледаме линейното пространство $\mathbb{R}^2$ над $\mathbb{R}$ с покомпонентно определените събиране на вектори и умножение на вектор с реално число(е линейно пространство).

За произволни $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ асоциативността на покомпонентното събиране е наследена от асоциативността на събирането на реални числа

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = \\ = ([x_1 + x_2] + x_3, [y_1 + y_2] + y_3) &= (x_1 + [x_2 + x_3], y_1 + [y_2 + y_3]) = \\ = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) &= (x_1 + y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)]. \end{aligned}$$

Комутативността[3] на събирането на наредени двойки реални числа, също се наследява от комутативността на събирането на реални числа

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1 + y_1).$$

Съществува нулев вектор. А именно $\mathcal{O} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, съгласно

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) = (0, 0) + (x, y) = (x + 0, y + 0) = (x, y),$$

използвайки вече доказаната комутативност на събирането на вектори.

А всяка наредена двойка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, наредената двойка $(-x, -y) \in \mathbb{R}^2$ е нейна противоположна, съгласно

$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = \mathcal{O}.$$

Дистрибутивният закон над скаларен множител($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) = \\ = (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y). \end{aligned}$$

Дистрибутивният закон над векторен множител

$$\begin{aligned} \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = \\ = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2). \end{aligned}$$

[2] На английски "span"/обхват/.

[3] Въпреки, че показвахме в началото на текущия файл, че не е нужно да я проверяваме.

Седмата аксиома е изпълнена, съгласно

$$(\alpha\beta)(x,y) = (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) = \alpha(\beta x, \beta y) = \alpha[\beta(x,y)].$$

Последната аксиома $1(x,y) = (1x, 1y) = (x,y)$ за реалното число 1. (единицата на полето $\mathbb{R}$.)

След като доказахме, че $\mathbb{R}^2$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Нека вземем два конкретни вектора , за да имаме състоятелен пример за линейна обвивка. Нека например $b_1 = (1,2), b_2 = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Линейната обвивка на b_1, по определение е множеството

$$\ell(b_1) = \{\lambda b_1 \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Това геометрично представялява правата,минаваща през началото и през вектора $b_1 \in \mathbb{R}^2$.

Линейната обвивка на b_1 и b_2. Т.е. на $S = \{b_1, b_2\}$, но вместо $\ell(S)$ вече ще пишем $\ell(b_1, b_2)$ е множеството

$$\ell(b_1, b_2) = \{\lambda b_1 + \mu b_2 \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Това множество геометрично представлява равнината, минаваща през началото през векторите b_1 и b_2. Забележете, ако b_1 и $b_2 \in \mathbb{R}^2$ лежат на една и съща права в равнината, то линейната им обвивка , вместо равнина е само права, т.е. в случая когато b_1 лежи на правата породена от b_2, имаме следното равенство на линейни обвивки $\ell(b_1) = \ell(b_1, b_2)$. Вярно е по-общо наблюдение, което ще изясним по-нататък.

Задача 5.9. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Докажете, че множеството $\{\mathcal{O}_V\}$, състоящо се само от нулевият вектор на линейното пространство V е негово подпространство. Наричаме нулево подпространство.

Задача 5.10. Да се докаже, че сечение на произволна фамилия от подпространства, на линейното пространство V над полето $\mathbb{F}$, също е негово подпространство.

Доказателство. Нека $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ е фамилия[4] от подпространства $U_\alpha \leqq V$ за всички $\alpha \in I$. Където I е някакво индексно множество. Твърдим, че $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \leqq V$ е подпространство. Действително. Нека $b_1, b_2 \in \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$. Това означава, че $b_1, b_2 \in U_\alpha$ за всички $\alpha \in I$. Но всяко едно от тези U_α е линейно подпространство и значи $b_1 + b_2 \in U_\alpha$ за всички $\alpha \in I$ или точно $b_1 + b_2 \in \bigcap_{\alpha \in I.} U_\alpha$. Аналогично следва, че $\lambda b_1 \in U_\alpha$ за всички $\alpha \in I$ и произволен скалар $\lambda \in \mathbb{F}$. Което точно означава, че $b_1 \in \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ и значи, стига сечението да не е празно , доказахме че то е подпространство. □

Задача 5.11. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Да се докаже, че обединение на две подпространства $U, W \leqq V$ е подпространство точно тогава, когато едното се съдържа в другото.

[4] Това понятие е ново за Вас, затова ще отделим време да го изясним тук. Фамилия е крайно, безкрайно или дори неизброимо множество от множества, споделящи общо свойство. Например множеството $W = \{(x, \rho y) \ : \ \rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$. Тази фамилия не само не е крайна, но е и неизброима, защото ирационалните числа не са изброими...не можем да ги подредим в редичка.

Доказателство. Нека предположим, че $U \cup W \subseteqq V$ е подпространство. Трябва да покажем, че $U \subseteqq W$ или $W \subseteqq W$. Нека допуснем противното. Т.е. $U \cup W \leqq V$ е подпространство, но $U \nsubseteqq W$ и $W \nsubseteqq U$. Тогава съществува вектор $b \in a \in U \setminus W$ и вектор $b \in W \setminus U$. От определението за обединение следва, че $a, b \in U \cup W$. И по предположение $U \cup W$ е линейно подпространство, значи е длъжно да съдържа тяхната сума $a + b \in U \cup W$. Но това означава, че $a + b \in U$ или $a + b \in W$. Но сега от $a + b \in U$ и $a \in U$ следва, че $b \in U$, което е противоречи на нашия избор. Ако пък $a + b \in W$. Комбинирайки го с $b \in W$ следва, че a също е длъжно да е от W, т.е. $a \in W$ и пак получаваме противоречие с нашия избор за b. Тези противоречия доказаха, че не е възможно $U \cup W$ да бъде линейно подпространство, а $U \nsubseteqq W$ и $W \nsubseteqq U$.

Обратно. Сега трябва да покажем, че ако $U, W \subseteqq V$ са подпространства, то от $U \subseteqq W$ или $W \subseteqq U$ следва, че $U \cup W \leqq V$ също е подпространство. Но това е очевидно, при това в този случай $U \leqq W \leqq V$ или $W \leqq U \leqq V$. □

Задача 5.12. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Нека също $X \subseteqq V$. Да се докаже, че:

1. $\ell(X) \subseteqq V$ е подпространство на V, съдържащо A;
2. $\ell(X) = X$ точно тогава, когато $X \leqq V$ е подпространство. В частност $\ell(V) = V$, понеже всяко пространство е свое тривиално (несобствено) подпространство;
3. Линейната обвивка на X е най-малкото подпространство на V, съдържащо X.

Т.е.

$$\ell(X) = \bigcap_{\substack{U \leqq V \\ X \subseteqq U}} U.$$

Доказателство. За това, че $\ell(X)$ е подпространство на V. Това се вижда директно от дефиницията за линейно пространство. Също ще покажем, че 2. следва от 3. И така нека докажем 3. Ясно е, че $X \subseteqq \ell(X)$, понеже за произволен вектор $x \in X$ тривиално се представя като линейна комбинация $x = 1.x \in \ell(X)$. И така $\ell(X)$ е подпространство на V, съдържащо X. Но това означава, че $\ell(X)$ участва в сечението на всички подпространства с това свойство(да съдържат X), което пък гарантира[5], че

$$\ell(X) \supseteqq \bigcap_{\substack{U \leqq V \\ X \subseteqq U}} U.$$

За обратното включване трябва да покажем, че произволна линейна комбинация на вектори от X със скалари от $\mathbb{F}$ се съдържа едновременно във всички подпространства на V, съдържащи X. Но това следва само от дефиницията за линейно пространство. Действително от $b_1, \ldots, b_n \in X \subseteqq U \leqq V$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Тогава $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in U$ за всяко

[5] Само от определението за сечение на множества.

$U \leqq V$, съдържащо A, понеже линейното подпространство U съдържа всички линейни комбинации на свои вектори. Това доказа включването

$$\ell(X) \subseteqq \bigcap_{\substack{U \leqq V \\ X \subseteqq U}} U.$$

И така двете включвания доказват точно съвпадението на линейната обвивка на X и сечението на всички подпространства, съдържащи X. Сега като сме доказали 3. ще покажем как 2. е негово следствие. Ако $X \leqq V$ то X е едно подпространство на V, което тривиално съдържа X и значи X участва в сечението, т.е. го съдържа

$$X \supseteqq \bigcap_{\substack{U \leqq V \\ X \subseteqq U}} U = \ell(X).$$

За обратното включване вече споменахме, че е ясно че линейната обвивка на множество, тривиално съдържа това множество и значи $\ell(X) = X$, ако $X \leqq V$. Обратно. Ако $X = \ell(X)$, то твърдим че $X \leqq V$ е подпространство, което очевидно следва от факта, че $\ell(X)$ е подпространство. $\square$

Задача 5.13. Нека $V = \mathbb{R}^{\geq 0}$. Въвеждаме бинарната операция $\oplus : V \times V \to V$,която ще наричаме отново събиране на вектори(неотрицателни реални числа) по следния начин: За всеки $a, b \in V = \mathbb{R}^{\geq 0}$, определяме $a \oplus b := ab \in V = \mathbb{R}^{\geq 0}$. И унарната операция $\otimes : \mathbb{F} = \mathbb{R} \times V \to V$, която ще наричаме умножение на вектор със скалар от полето $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ по следния начин: за $\lambda \in \mathbb{R}$ и $a \in V$ определяме $\lambda \odot a := a^{\lambda} \in V$. Да се докаже, че с така въведените операции V е линейно пространство.

Задача 5.14. Да се намерят подпространствата на линейните пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Какъв е геометричният им смисъл?

Задача 5.15. Докажете, че множеството

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) := \{a + \sqrt{3}b \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

е линейно пространство над $\mathbb{Q}$.

Задача 5.16. Да се докаже, че множеството $V = \{f | f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ е линейно пространство над $\mathbb{C}$ относно поточково определените: събиране

$$(f + g)(z) := f(z) + g(z)$$

и умножение $(\lambda f)(z) := \lambda f(z)$ за $f, g \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Задача 5.17. Нека V е линейното пространство от горната задача. Кои от следните подмножества на V са негови подпространства?

1. $W_1 = \{f \in V | f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 0\}$;
2. $W_2 = \{f \in V | f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 1\}$;

3. $W_3 = \{f \in V | f^2(0) + f(0) = 0\}$.

Решение. 1. Нека $f, g \in W_1$. Питаме се, дали $f+g \in W_1$? От определените операции имаме

$$\begin{aligned}(f+g)(1) + 2(f+g)(2) + 3(f+g)(3) = \\ = f(1) + g(1) + 2[f(2) + g(2)] + 3[f(3) + g(3)] = \\ = [f(1) + 2f(2) + 3f(3)] + [g(1) + 2g(2) + 3g(3)] = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Това доказа, че $f + g \in W_1$. Нека сега $\lambda \in \mathbb{C}$ и $f \in W_1$. Тогава

$$\begin{aligned}(\lambda f)(1) + 2(\lambda f)(2) + 3(\lambda f)(3) = \\ \lambda f(1) + 2[\lambda f(2)] + 3[\lambda f(3)] = \lambda[f(1) + 2f(2) + 3f(3)] = \lambda.0 = 0.\end{aligned}$$

Което пък доказа, че $\lambda f \in W_1$. От двете правим заключението, че $W_1 \leqq V$ е подпространство.

2. Нека $f, g \in W_2$. Сега

$$\begin{aligned}(f+g)(1) + 2(f+g)(2) + 3(f+g)(3) = \\ = [f(1) + 2f(2) + 3f(3)] + [g(1) + 2g(2) + 3g(3)] = 1 + 1 = 2 \neq 1\end{aligned}$$

т.е. $f + g \notin W_2$ и значи W_2 не е подпространство.

Самостоятелно проверете, дали W_3 е подпространство.

Задача 5.18. Кои от следните подмножества на $\mathbb{R}^4$ са негови подпространства?

1. $W_1 = \{(x_1, x_2, 2x_1 - x_2 + x_4, x_4 \ : \ x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$;

2. $W_2 = \{(x_1, x_1^2, x_3, x_4) \ : \ x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$;

3. $W_3 = \{(x_1, 2x_1 + 3x_4, 5x_1 - 6x_4, x_4) \ : \ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

Отговор. $W_1, W_3 \leqq V$, докато $W_2 \nleqq V$.

Определение 5.19. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Векторите $b_1, \ldots, b_n \in$ наричаме линейно зависими, ако съществува тяхна линейна комбинация, различна от нулевата , даваща нулевият вектор. Формално. Ако съществуват $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$: $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, за които

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mathcal{O}.$$

Определение 5.20. Системата вектори $b_1, \ldots, b_n \in V$ е линейно независима, ако не е линейно зависима. Т.е. всяка линейна комбинация, различна от нулевата, е различна от нулевия вектор. Формално. За всички $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ с $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ имаме

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \neq \mathcal{O}.$$

Задача 5.21. Да се определи дали следните вектори са линейно зависими или линейно независими. $b_1 = (1, 2, 3), b_2 = (0, 1, 6), b_3 = (0, 0, 5) \in \mathbb{R}^3$.

Решение. Използвайки хубавите свойства на детерминантите можем да наредим по редове или по стълбове в матрица въпросните вектори и да пресметнем нейната детерминанта. Ако тя е нула, то векторите са линейно зависими, ако тя е различна от нула векторите са линейно независими. Това се дължи на факта, че търсим линейна комбинация да тези вектори даваща нулевият вектор. Или, което е същото някой от векторите се израява като като линейна комбинация на останалите - сравнете точно с това, че детерминантата се анулира, ако някой ред е линейна комбинация на останалите. И така

$$\det \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.1.5 = 5 \neq 0.$$

И следователно векторите b_1, b_2 и b_3 са линейно независими.

Проблемът на този метод е, че работи само за n вектора в n мерно линейно пространство. Затова ще дадем по-общ метод,основаващ се на следния факт: Ако

$$A = \left(\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_m \end{array} \right),$$

то елементарните преобразувания по редове към A не променят $\ell(r_1, \dots r_m)$. Нека $L := \ell(r_1, \dots r_m)$. Ако A' се получава от A чрез елементарно преобразувание по редове R и L' е линейната обвивка на вектор-редовете на A', достатъчно е да проверим, че

$$L' \subseteq L,$$

защото елементарните преобразувания по редове се обръщат с елементарни преобразувания по редове и разменяйки ролите на A и A', а оттам и на L и L' имаме $L \subseteq L'$, откъдето и $L = L'$.

Ако $R = R_{i,j}(q)$ е умножение на j-ти ред с $q \in F$ и прибавяне към i-ти ред за $i \neq j$, то $L' = \ell(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i + qr_j, r_{i+1}, \dots, r_m) \subseteq L = \ell(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i, \dots, r_j, \dots, r_m)$, защото $r_i + qr_j \in \ell(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_m)$.

Ако $R = R_i(p)$ е умножение на i-ти ред с $p \in F \setminus \{0\}$, то

$$L' = \ell(r_1, \dots, r_{i-1}, pr_i, r_{i+1}, \dots, r_m) \subseteq L = \ell(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, \dots, r_m),$$

защото $pr_i \in \ell(r_1, \dots, r_i, \dots, r_m) = L$.

Ако R_{ij} е размяната на i-ти и j-ти ред, то

$$\begin{aligned} L' = \ell(r_1, \dots r_{i-1}, r_j, r_{i+1}, \dots, r_{j-1}, r_i, r_{j+1}, \dots, r_m) = \\ = \ell(r_1, \dots, r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, \dots r_{j-1}, r_j, \dots, r_m) = L. \end{aligned}$$

И така използвайки това можем да наредим векторите по редове в матрица и да извършваме елементарни преобразувания, без да се променя линената им обвивка. Тоест започвайки със векторите записани по редове в матрица и интерпретирайки я като линейна обвивка и извършвайки елементарни преобразувания започвайки с една линейна обвивка стигаме до същата. Ако в преобразуването някой ред се анулира, това означава че този вектор ред е в линейнат аобвивка на останалите и значи векторите са линейно зависими, ако няма анулиращи се редове , векторите са линейно независими.

Задача 5.22. Да се определи, дали следните вектори са линейно зависими или линейно независими. $b_1 = (1,2,3,4), b_2 = (0,1,0,3), b_3 = (0,1,1,4)$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_2 \\ \sim \\ R_3 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 - 3R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Т.е. не е възможно да получим нулев ред и значи дадената система вектори с линейно независима. Нещо повече от горното получаваме, че

$$\ell(\{b_1, b_2, b_3\}) = \ell(\{(1,0,0,-5),(0,1,0,3),(0,0,1,1)\}).$$

Тази линейна обвивка представлява тримерно подпространство на $\mathbb{R}^4$.

Задача 5.23. Да се определи, дали следните вектори са линейно зависими или линейно независими. $b_1 = (1,2,3,4), b_2 = (0,1,0,3), b_3 = (0,1,1,4), b_4 = (1,1,1,1)$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Зад. 12} \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_4 - R_2 \\ \sim \\ R_4 - R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_4 \\ \sim \\ -\frac{1}{2}R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - 3R_1 \\ R_2 - R_1 \\ \sim \\ R_4 + 3R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т.е. отново векторите са линейно независими. И от това можем да кажем, че

$$\ell(b_1, b_2, b_3, b_4) = \ell(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

където $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$.

Задача 5.24. Да се провери, дали следните вектори са линейно зависими или линейно независими. $b_1 = (1,1,1), b_2 = (1,1,2), b_3 = (0,0,0)$.

Решение. Линейно зависими са понеже са надсистема на нулевия вектор.

Задача 5.25. Нека имаме $a_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^n$. Възниква въпросът можем ли и по колко начини, ако да, да представим даден вектор $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ като тяхна линейна комбинация. С други думи, търсим скалари $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{F}$ т.че

$$b = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i,$$

т.е.

$$
\begin{aligned}
(b_1, \dots, b_n) &= \sum_{i=1}^{m} x_i (a_{i1}, \dots, a_{in}) = \sum_{i=1}^{m} (x_i a_{i1}, \dots, x_i a_{in}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{m} x_i a_{in} \right) \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Тоест получаваме системата линейни уравнения

$$
\left| \ \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ik} = b_k, \ 1 \leqq k \leqq n. \right.
$$

с разширена матрица

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{m1} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right).
$$

Или в матричен запис

$$
x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.
$$

Търсим решенията на тази система и всяко едно от тях дава коефициентите на една линейна комбинация на векторите $a_1, \dots, a_m$ даваща векторът b.

Задача 5.26. Представя ли се векторът b като линейна комбинация на векторите a_i и по колко начина,ако:

1. $b = (3, 6, 9), a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (-1, 0, 2), a_3 = (1, 4, 8)$;

2. $b = (6, -4, 3, -0), a_1 = (1, -1, 2, 0), a_2 = (-1, 3, -1, 2)$,
   $a_3 = (1, 1, 0, 1), a_4 = (2, 1, -1, -3)$;

3. $b = (-3, 4, 9), a_1 = (-2, 1, 1), a_2 = (1, 0, 1), a_3 = (-1, 2, 5)$.

6 Базис на крайномерно линейно пространство. Допълване линейно независима система до базис. Смяна на базиса. Трансформация на координатите при смяна на базиса.

В предната тема се запознахме с понятието линейно пространство. Разгледахме и конкретни примери за линейни пространства както и линейни подпространства. Разгледахме линейните пространства $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ над $\mathbb{R}$, както и дадохме геометрична интуиция за техните подпространства. Следва понятието базис на крайномерно линейно пространство.

Но преди да го дадем формално ще се опитаме да мотивираме тези разглеждания. Разгледайки, равнината например, осъзнаваме че имаме "две степени на свобода, в

$\mathbb{R}^3$ степените на свобода стават три и т.н. Възниква въпросът за формализиране на това засега само интуитивно от геометричната интерпретация понятие за размерност на дадено пространство - броят на степените на свобода. Затова първо , даваме

Определение 6.1. Нека е дадено линейно пространство V над полето $\mathbb{F}$. Системата от вектори $\emptyset \neq B \subseteqq V \neq \{\mathcal{O}\}$ ще наричаме базис на това линейно пространство, ако

1. $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ е линейно независима система вектори от V;

2. Линейната обвивка на тази система вектори $\ell(B) = V$ съвпада с цялото пространство.

Доказва се, че броят на векторите в произволни два базиса на крайномерно[6] линейно пространство V е един и същ. В такъв случай можем да говорим за размерност на пространството V. Броят на векторите от произволен базис на линейното пространство V наричаме размерност на V. Този факт отбелязваме с

$$\dim V = n = |B|.$$

Пример 6.2. Линейното пространство $\mathbb{F}^n$ на наредените $n-$орки от елементи на полето $\mathbb{F}$ над $\mathbb{F}$ заедно с покомпонентните операции събиране и умножение със скалар е линейно пространство с размерност $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n = n$, това се дължи на факта, че системата вектори

$$B = \{e_i = (0, \ldots, 1_{\mathbb{F}}, 0, \ldots, 0) \ : \ 1 \leqq i \leqq n\}$$

е базис на $V = \mathbb{F}^n$.

Пример 6.3. За линейното пространство $\mathbb{F}^{\leqq(n-1)}[x]$ на полиномите на x от степен ненадминаваща $n-1$ и коефициенти от полето $\mathbb{F}$, заедно с обичайните операции събиране на полиноми и умножение на полином със скалар, има базис системата

$$\{1 = x^0, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\} \subset \mathbb{F}^{\leqq(n-1)}[x]$$

от мономите на x до степен $n-1$.

А значи $\dim \mathbb{F}^{\leqq(n-1)}[x] = n$.

Пример 6.4. За линейното пространство $\mathbb{F}[x]$ на всевъзможните полиноми на x с коефициенти от полето $\mathbb{F}$,заедно с обичайните операции събиране на полиноми и умножение на полином със скалар, системата(безкрайна) на всевъзможните мономи на x

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\} \subset \mathbb{F}[x]$$

образува базис на $\mathbb{F}[x]$. Като в този случай, понеже тази система не е крайна $\dim \mathbb{F}[x] = \infty$ и пространстовото е безкрайномерно.

Твърдение 6.5. Едно крайномерно линейно пространство V има размерност $\dim V = n$ точно тогава, когато съществуват n линейно независими вектора от това линейно пространство и всеки $n+1$ вектора от V вече са линейно зависими.

[6]тоест $V = \{\mathcal{O}\}$ или V има краен базис $b_1, \ldots, b_n$.

Твърдение 6.6. Ако V е $n-$мерно линейно пространство над полето $\mathbb{F}$, а W е негово подпространство, то $\dim W \leqq \dim V$ с равенство точно когато W съвпада с V.

Задача 6.7. Нека V е множеството от матрици

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

и $U = \{A \in V \mid x + y + 2z = 0\}$.

1. Да се докаже, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно обичайното събиране на матрици и умножение на матрица с число;

2. Да се докаже, че U е линейно подпространство на V;

3. Да се намерят базиси на V и на U.

Решение. 1. Самостоятелно. За да докажем 2. Нека $A, B \in U$ са произволни и $\lambda \in \mathbb{R}$.

От условието за принадлежност към U имаме, че за $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix},$$

при това $x_i + y_i + 2z_i = 0, \; i \in \{1, 2\}$. Питаме се , дали $A + B, \lambda A \in U$. Съгласно

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & (x_1 + x_2) \\ (y_1 + y_2) & (z_1 + z_2) \end{pmatrix} \in U$$

и

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x_1 \\ \lambda y_1 & \lambda z_1 \end{pmatrix} \in U,$$

понеже

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + 2z_1) + (x_2 + y_2 + 2z_2) = 0 + 0 = 0.$$
$$(\lambda x_1) + (\lambda y_1) + (\lambda z_1) = (x_1 + y_1 + 2z_1) = \lambda.0 = 0.$$

Тогава имаме $A + B \in U$ и $\lambda A \in U$ Това доказа $U \leqq V$.

Един базис на V са матричните единици $E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2} \in V$. Тоест матриците

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

съгласно:

1. Очевидно от начина, по който събираме матрици и умножавме матрица с число системата $\{E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ е линейно независима система.

   Наистина, ако
   $$\lambda E_{1,2} + \mu E_{2,1} + \eta E_{2,2} = \mathcal{O} := \mathbb{O},$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Извършвайки действията с матрици вляво на последното

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

изисква $\lambda = \mu = \eta = 0$, т.е. не съществува линейна комбинация на $E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ с неедновременно нулеви коефициенти $(\lambda, \mu, \eta) \neq (0, 0, 0)$, даваща нулевата матрица. Което, пък на свой ред, доказа линейната им независимост.

2. Линейната им обвивка $\ell(E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) = V$ съвпада с цялото пространство V. Действително. Съгласно $\ell(E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) \subseteqq V$ е достатъчно да докажем обратното включване. Тоест, че всеки вектор от V е линейна комбинация на посочените матрични единици. И това следва лесно. Нека $V \ni A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$. Тогава

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = xE_{1,2} + yE_{2,1} + zE_{2,2}.$$

Това доказва, че $\ell(E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) = V$.

Остана да намерим базис на U. От условието за принадлежност в U, а именно $x+y+2z = 0$, изразяваме[7] $z = -\frac{1}{2}(x+y)$. Можем да вземем[8] $x = 1, y = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$ и матрицата $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in U$. Сега, ако вземем $x = 0, y = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$, получаваме матрицата $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in U$. Твърдим, че системата вектори $\{C_1, C_2\}$ образува базис на U. Действително.

1. Системата $\{C_1, C_2\} \subset U$ е линейно независима. Нека $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогава $\lambda C_1 + \mu C_2 = \mathcal{O} := \mathbb{O}$ дава

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & -\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

изисква $\lambda = 0, \mu = 0$.

2. Твърдим, че $\ell(C_1, C_2) = U$. Трябва да покажем, че всеки вектор от U се представя като линейна комбинация на C_1и C_2. Вземаме $B = \begin{pmatrix} 0 & x_0 \\ y_0 & -\frac{1}{2}(x_0 + y_0) \end{pmatrix} \in U$. Т.е.

[7]Забележете още тук виждаме, че $z = z(x, y)$ е зависима променлива от x, y. Докато x, y са независими променливи. Това ни подсказва ,че пространството е двумерно(защото две са независимите компоненти) и то алгебрически не е различимо от наредените двойки реални числа.

[8]Просто даваме "линейно независими стойности"на решенията на линейното уравнение от условието за принадлжeност.

$x_0 + y_0 + 2z_0 = 0$. Търсим $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, за които

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_0 \\ y_0 & -\frac{1}{2}(x_0 + y_0) \end{pmatrix} = \lambda C_1 + \mu C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & -\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \end{pmatrix}.$$

От което очевидно вземаме $\lambda := x_0, \mu = y_0$ и от условието за принадлежност получаваме точно, че $z_0 = -\frac{1}{2}(\lambda + \mu)$. Това доказа, че $B \in \ell(C_1, C_2)$. А значи и C_1, C_2 е базис на $U \leqq V$.

По този начин U е двумерно подпространство на тримерното пространство V. И задачата е решена.

Да направим следната забележка към Задача 1. Важните моменти в нейното решаване бяха да забележим какво ни дава условието за принадлежност във V. А именно хомогенното уравнение $x+y+2z = 0$. От него видяхме, че за наредените тройки (x, y, z), които всъщност са важният носител на информация за матриците от V, третата координата няма нужда да избираме , защото е зависима от първите две. $z = -\frac{1}{2}(x+y)$. Така избираме само (x, y) и от тях пресмятаме и третата компонента. С тези съображения, трябва да вземем (x, y) така, че да са базис на $\mathbb{R}^2$.

Тоест на произволна наредена двойка (x, y), съответства единствено z, и избираме такива тройки (x, y, z), чиито проекции (x, y) върху първите две координати на $\mathbb{R}^3$ образуват базис на $\mathbb{R}^2 \simeq \{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Задача 6.8. Нека V е множеството от матрици

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

В предната задача доказахме, че то е линейно пространство относно обичайните операции събиране на матрици и умножение на матрица с число. Дадено е подмножеството

$$U = \{A \in V | x + 4y + 8z = 0\}.$$

Докажете, че U е линейно подпространство на V. Намерете базиси на U и V.

Задача 6.9. В пространството $\mathbb{R}^4$ на наредените четвордки $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ реални числа са дадени подмножествата

$$U = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = -x_4, x_2 = 2x_3\}$$

и

$$V = \{x + y | x \in U, y = (y_1, y_2, y_3, y_4), y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0\}.$$

1. Да се докаже, че U и V са подпространства на $\mathbb{R}^4$;

2. Да се намерят техни базиси.

Решение. Директно от условието за принадлежност в U виждаме, че две от четирите компоненти са независими. Избираме, например x_1 и x_2(може и x_4 и x_3 също са независими помежду си) и изразявайки останалите чрез тях, получаваме че в явен вид U е

$$U = \{(x_1, 2x_3, x_3, -x_1) \in \mathbb{R}^4 | x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

И така , сега понеже всяка наредена четворка от вида $(x_1, 2x_3, x_3, -x_1)$ еднозначно се определя от избора само на x_1 и x_3, то проектираме върху две координатни оси тази наредена четворка(върху първата и третата) и разглеждаме проекцията $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2$. Тук вече лесно избираме стандартния базис $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ на $\mathbb{R}^2$. Тоест,последователно, правим следното:

$$(x_1, x_3) := (1, 0),$$
$$(x_1, x_3) := (0, 1).$$

Фактическ просто, първо, избрахме $x_1 := 1$ и $x_2 := 0$ и после $x_1 := 0$ и $x_2 := 1$.

Сега повдигаме стандартния базис на $\mathbb{R}^2$ до векторите:

$$(x_1, x_3) := (1, 0) \longmapsto (x_1, 2x_3, x_3, -x_1) = (1, 0, 0, -1) \in U,$$
$$(x_2, x_3) := (0, 1) \longmapsto (x_1, 2x_3, x_3, -x_1) = (0, 2, 1, 0) \in U.$$

По този начин, от повдигането на стандарния базис , получихме векторите $u_1 = (1, 0, 0, -1) \in U$ и $u_2 = (0, 2, 1, 0) \in U$. Те са линейно независими по построение. Остана да докаже, че тяхната линейна обвивка съвпада с U. За целта, вземаме произволен вектор $w \in U$, а значи w е от вида $w = (y_1, 2y_3, y_3, -y_1) \in U$ и търсим линейна комбинация на u_1 и u_2, даваща w. Т.е. търсим $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ такива, че $\lambda u_1 + \mu u_2 = w$. Това е еквивалентно на

$$(\lambda, 0, 0, -\lambda) + (0, 2\mu, \mu, 0) = (y_1, 2y_3, y_3, -y_1)$$
$$(\lambda, 2\mu, \mu, -\lambda) = (y_1, 2y_3, y_3, -y_1).$$

Приравнявайки, съответно, четирите компоненти получаваме, че трябва да изберем $\lambda := y_1$ и $\mu = y_3$. И така, установихме, че

$$\forall w = (y_1, 2y_3, y_3, -y_1) \in U \Rightarrow w = y_1.\mathbf{u_1} + y_3.\mathbf{u_2}.$$

Последното показва, че $w \in \ell(u_1, u_2)$ и $U = \ell(u_1, u_2)$. Така доказахме, че u_1 и u_2 са базис на U и по този начин U е двумерно подпространство на $\mathbb{R}^4$.

Преминаваме към намирането на базис на V. От вида на V имамче, че то е сума на пространствата $U + W = V$, където $W = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) | y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0\}$ е подпространство на $\mathbb{R}^4$. Изразявайки $y_4 = -y_1 - y_2 - y_3$, получаваме W в явен вид:

$$W = \{(y_1, y_2, y_3, -y_1 - y_2 - y_3)) \mid y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Тоест независимите компоненти на векторите от W са три и те са y_1, y_2 и y_3. Тоест по аналогичен начин, както при U, можем да покажем, че $\dim W = 3$. Сега $V = U + V$ с $\dim U = 2$ и $\dim V = 3$. И сега $\dim V = (U + W) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$, откъдето се подсещаме, че $\dim V = 4$ и значи $V = \mathbb{R}^4$. За да докажем това, за произволен вектор

$z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$, търсим вектори $x \in U$ и $y \in W$, за които $V \ni (u + w) = z \in \mathbb{R}^4$, което би доказало, че $V \subseteqq \mathbb{R}^4$ и $V = \mathbb{R}^4$. Т.е. $x + y = z$, което дава

$$\begin{aligned}
x + y &= (x_1, 2x_3, x_3, -x_1) + (y_1, y_2, y_3, -y_1 - y_2 - y_3) \\
&= ((x_1 + y_1), (2x_3 + y_3), (x_3 + y_3), -(x_1 + y_1 + y_2 + y_3)) \\
&= (z_1, z_2, z_3, z_4).
\end{aligned}$$

Тук сме фиксирали $z \in \mathbb{R}^4$, т.е. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}$ са ни известни, а търсим $x_1, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ какви да изберем, че да е в сила горното равенство. И така приравнявайки компонентите на втория ред на горното равенство с третия, получаваме системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} z_1 = x_1 + y_2 \\ z_2 = 2x_3 + y_2 \\ z_3 = x_3 + y_3 \\ z_4 = -x_1 - y_1 - y_2 - y_3 \end{array} \right. , \tag{24}$$

която трябва да решим относно x_1, x_3, y_1, y_2, y_3. Така имаме четири уравнения и пет неизвестни и ще се наложи да положим едно от неизвестните(някое от x_1, x_3, y_1, y_2, y_3 като параметър). Тази система можете да решите директно с полагане сега и изразяване. За да е по-видно какво правим образуваме разширената матрица на системата(първи стълб отговаря на коефициентите на уравненията, пред x_1, вторият на тези пред x_3, третият на тези пред y_1, и т.н. до y_3.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & z_1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & z_3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & z_4 \end{array} \right) \begin{array}{c} R_4 + R_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & z_1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & z_1 + z_4 \end{array} \right).$$

Сега полагаме $y_3 := p \in \mathbb{C}$ и изразяваме последователно:

$$\begin{aligned}
&y_1 = -z_1 - z_4 - p, \quad x_3 = z_3 - p \\
&y_2 = z_2 - 2x_3 = z_2 - 2z_3 + 2p \\
&x_1 = z_1 - y_2 = z_1 - z_2 + 2z_3 - 2p, \quad y_3 := p.
\end{aligned}$$

На нас ни е необходимо само едно решение и затова даваме стойност $p = 1$ и получаваме, че трябва да изберем

$$\begin{aligned}
x_1 &:= z_1 - z_2 + 2z_3 - 2 \\
x_3 &:= z_3 - 1 \\
y_1 &:= -z_1 - z_4 - 1 \\
y_2 &:= z_2 - 2z_3 + 2 \\
y_3 &:= 1
\end{aligned}$$

Тоест за този избор на x_1, x_3, y_1, y_2 и y_3 имаме

$$\begin{aligned}
&x = (x_1, 2x_3, x_3, -x_1) = ((z_1 - z_2 + 2z_3 - 2), 2(z_3 - 1), -(z_1 - z_2 + 2z_3 - 2)) \in U \\
&y = (y_1, y_2, y_3, -y_1 - y_2 - y_3) = \\
&= ((-z_1 - z_4 - 1), (z_2 - 2z_3 + 2), 1, -(-z_1 - z_4 - 1) - (z_2 - 2z_3 + 2) - 1) \in W,
\end{aligned}$$

са такива, че $U + V = V \ni x + y = z \in \mathbb{R}^4$. Това доказва, че $V \supseteqq \mathbb{R}^4$ и значи $V = \mathbb{R}^4$. И базис на V е стандартният базис $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$ на $\mathbb{R}^4$. Задачата е решена.

Нека отбележим следното към първата част на горната задача. Наредените $4-$ки от подпростарнството $U < \mathbb{R}^4$ се разбиват на "независими"и "зависими"компоненти,в зависимост от представянията на съответните хомогенни линейни уравнения на подпространството. Ако имаме k независими компоненти $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, проектираме върху $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$ и избираме векторите $u_1, \ldots, u_k \in U$, чиито проекции образуват стандартния базис на $\mathbb{R}^k$. После проверяваме, че $u_1, \ldots, u_k$ е базис на U.

Нещо повече разглежданата проекция е биективна, т.к. за произволни стойности на $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, стойностите на x_j за $j \in \{1, \ldots, 4\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ са еднозначно определени. Затова базис на $\mathbb{R}^k$ се повдига еднозначно до базис на U.

Пример 6.10. Много лесно се вижда горното в следния пример. Ако вземем подпространството $W = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ на $\mathbb{R}^3$ и искаме да му намерим базис. Това е един много прост случай, защото тук очевидно от трите компоненти независими са само първите две... а третата даже е винаги нула. И така проектираме върху първите две координатни оси и търсим базис там. Фактически в $\mathbb{R}^2$. Е сега вземаме стандартния базис $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$ на $\mathbb{R}^2$ и го повдигаме[9] до

$$(1,0) \to (1,0,0)$$
$$(0,1) \to (0,1,0)$$

базис на нашето W. Т.е. $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ е базис на W.

Нека към горния пример още отбележим, че в действителност въпреки, че $\mathbb{R}^2$ не е дори подмножество[10] на $\mathbb{R}^3$, ние можем точно по тази причина[11] да го отъждествяваме[12] с подпространството W на $\mathbb{R}^3$. По-този начин $\mathbb{R}^2$ може да считаме , че е подпространство на $\mathbb{R}^3$.

Задача 6.11. В пространството $\mathbb{C}[x]^{(\leqq 3)}$ от полиномите от степен ненадминаваща 3 с комплексни коефициенти, заедно с поточково определените опеарции събиране и умножение с комплексно число, е дадено подмножеството

$$U = \{f(x) \in \mathbb{C}[x]^{(\leqq 3)} | f(3) + f(-3) = 0\}.$$

Да се докаже, че U е подпространство на $\mathbb{C}[x]^{(\leqq n-1)}$ и да се намери базис на U.

Решение. Миналото упражнение доказахме, че това това е линейно пространство. Нека сега докажем, че U е негово подпространство. За целта трябва да вземем два

[9]в смисъл на неговата размерност

[10]просто двете имат различна "природа".

[11]горните разсъждения

[12]Изображението $\varphi : W \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^2$, дефинирано с $\varphi((x, y, 0)) := (x, y)$ е биекция, при това $\varphi((x, y, 0) + (z, s, 0)) = \varphi(x, y, 0) + \varphi(z, s, 0)$ и $\varphi(\lambda(x, y, 0)) = \lambda\varphi((x, y, 0))$. Когато такова изображение съществува , двете линейни пространства , между които е то, са неразличими от алгебрична гледна точка.

произволн полинома $f, g \in U$, както и комплексен скала $\lambda \in \mathbb{C}$ и да проверим ,че $f+g \in U$ и $\lambda f \in U$. Наистина, от $f(3)+f(-3)=0$ и $g(3)+g(-3)=0$ следва, че

$$
\begin{aligned}
(f+g)(3)+(f+g)(-3) := f(3)+g(3)+[f(-3)+g(-3)] = \\
= [f(3)+f(-3)]+[g(3)+g(-3)] = 0+0 = 0.
\end{aligned}
$$

Така проверихме, че $f+g \in U$. Аналогично

$$
(\lambda f)(3)+(\lambda f)(-3) := \lambda f(3)+\lambda f(-3) = \lambda[f(3)+f(-3)] = \lambda.0 = 0.
$$

С което проверихме, че $\lambda f \in U$. И така доказахме, че $U \leqq \mathbb{C}[x]^{(\leqq 3)}$ За да намерим базис на U си спомняме какво е условието полином f да принадлежи на U. А именно $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \in U$, точно когато $f(3)+f(-3)=0$, т.е.

$$
[a_0.3^3 + a_1.3^2 + a_2.3 + a_3] + [a_0.(-3)^3 + a_1.(-3)^2 + a_2.(-3) + a_3] = 0.
$$

Горното е еквивалентно на $18a_1 + 2a_3 = 0$ или $a_3 = -9a_1$. И така ако отъждествим полином $f \in U$ с наредена четворка $(a_0, a_1, a_2, a_3 = -9a_1) \in \mathbb{C}^4$ то виждаме, че тук a_3 зависи от a_1(или съответно обратното), докато a_0 и a_2 са независими. И така независими са (a_0, a_2, a_3) и тази наредена тройка еднозначно определя наредената четворка (a_0, a_1, a_2, a_3). И така сега избирайки

$$
\begin{aligned}
&(a_0, a_2, a_3) = (1,0,0) \to (a_0, a_1, a_2, a_3) = (1,0,0,0);\\
&(a_0, a_2, a_3) = (0,1,0) \to (a_0, a_1, a_2, a_3) = (0,0,1,0);\\
&(a_0, a_2, a_3) = (0,0,1) \to (0, -\frac{1}{9}, 0, 1).
\end{aligned}
$$

И така получаваме, че полиномите отговарящи на тези наредени четворки са базси на U. Това са полиномите

$$
\begin{aligned}
&(1,0,0,0) \to f_1(x) = x^3;\\
&(0,0,1,0) \to f_2(x) = x;\\
&(0, -\frac{1}{9}, 0, 1) \to f_3(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Наистина по построение тази система вектори(полиномите f_1, f_2, f_3) е линейно независима. Остава да проверим, че $\ell(f_1, f_2, f_3) = U$. За целта вземаме произволен $h \in U$ и проверяваме, че $h(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + (-9c_1) \in \ell(f_1, f_2, f_3)$. Търсим $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ такива,че: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = h(x)$. Еквивалентно

$$
(\lambda_1, 0, 0, 0) + (0, 0, \lambda_2, 0) + (0, -\frac{1}{9}\lambda_3, 0, \lambda_3) = (\lambda_1, -9\lambda_3, \lambda_2, \lambda_3) = (c_0, c_1, c_2, -\frac{1}{9}c_1).
$$

Приравнявайки четирите компоненти, получаваме,че трябва да изберем

$$
\lambda_1 := c_0,\ \lambda_2 := c_2,\ \lambda_3 = -\frac{1}{9}c_3.
$$

Задачата е решена.

Задача 6.12. В пространството $\mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ на полиномите на x от степен ненадминаваща 3 с реални коефициенти е дадено подмножеството

$$U = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)} \mid f(4) + f(3) = 0\}.$$

Да се докаже, че U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$ и да се намери базис на U.

Решение. Ако $f, g \in U$, то $f(4) + f(3) = 0$, $g(4) + g(3) = 0$, откъдето

$$(f+g)(4)+(f+g)(3) = [f(4)+g(4)]+[f(3)+g(3)] = [f(4)+f(3)]+[g(4)+g(3)] = 0+0 = 0$$

и $f + g \in U$. За произволни $f \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ е в сила

$$(\lambda f)(4) + (\lambda f)(3) = [\lambda.f(4)] + [\lambda.f(3)] = \lambda.[f(4) + f(3)] = \lambda.0 = 0,$$

така че $\lambda f \in U$ и U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$.

За да намерим базис на U да забележим,че полином

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 3)}$$

принадлежи на U тогава и само тогава, когато

$$0 = f(4)+f(3) = [a_0+4a_1+16a_2+64a_3]+[a_0+3a_1+9a_2+27a_3] = 2a_0+7a_1+25a_2+91a_3.$$

Последното равенство е еквивалентно на

$$a_0 = -\frac{7}{2}a_1 - \frac{25}{2}a_2 - \frac{91}{2}a_3. \tag{25}$$

Ако изберем $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 0$, то трябва $a_0 = -7$ и

$$f_1(x) := 2x - 7 \in U.$$

За $a_2 = 2$, $a_1 = a_3 = 0$ от (25) пресмятаме, че трябва $a_0 = -25$ и намираме втори полином

$$f_2(x) := 2x^2 - 25 \in U.$$

Накрая, за $a_3 = 2$, $a_1 = a_2 = 0$ е необходимо $a_0 = -91$ и

$$f_3(x) := 2x^3 - 91 \in U.$$

Съгласно (25), всеки полином $f(x) \in U$ може да се представи във вида

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-\frac{7}{2}a_1 - \frac{25}{2}a_2 - \frac{91}{2}a_3\right) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \\ &= \frac{a_1}{2}(2x-7) + \frac{a_2}{2}(2x^2-25) + \frac{a_3}{2}(2x^3-91) = \\ &= \frac{a_1}{2}f_1(x) + \frac{a_2}{2}f_2(x) + \frac{a_3}{2}f_3(x) \in l(f_1, f_2, f_3), \end{aligned}$$

така че линейната обвивка $l(f_1, f_2, f_3) = U$ на построените полиноми съвпада с U. Ако линейна комбинация $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) \equiv 0$ на $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in U$ е тъждествено нулевият полином, то сравнявайки коефициентите в

$$\begin{aligned} 0 \equiv \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = \lambda_1(2x - 7) + \lambda_2(2x^2 - 25) + \lambda_3(2x^3 - 91) = \\ = -(7\lambda_1 + 25\lambda_2 + 91\lambda_3) + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x^2 + 2\lambda_3 x^3 \end{aligned}$$

получаваме, че $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Това доказва, че полиномите

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in U = l(f_1, f_2, f_3)$$

са линейно независими, а оттам и базис на U.

Задача 6.13. Да се докаже, че системата вектори е линейно независима и да се допълни тази система до базис на $\mathbb{R}^4$.

1. $a_1 = (-1, 2, 3, -2), a_2 = (2, 1, -4, -3), a_3 = (1, 3, -2, -3)$.

Решение. От предното упражнение обясних как и защо и сега подреждаме векторите по редове с матрица и опростяваме[13] максимално линейната обвивка чрез елементарни преобразувания по редове.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2R_3 \\ \sim \\ R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 + 3R_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & -2 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 + 2R_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{5} \end{pmatrix}.$$

Оттук виждаме, че системата вектори е линейно независима. Нещо повече, ако $v_1 = (0, 0, 1, -2), v_2 = (0, -1, 0, \frac{3}{5}), v_3 = (1, 0, 0, -\frac{26}{5})$, то:

$$\ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(v_1, v_2, v_3).$$

За да допълним системата a_1, a_2, a_3 до базис на $\mathbb{R}^4$, търсим вектор $a_4 \notin \ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(v_1, v_2, v_3)$. От последната матрица се вижда, че $a_4 = (0, 0, 0, 1)$ е вектор, който е извън линейната обвивка на дадените 3 вектора, защото ако го добавим в последната матрица, ще сме в състояние да получим единичната матрица. Наистина

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + 2R_4 \\ R_2 - 3/5R_4 \\ \sim \\ R_3 + 26/5R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значи $\ell(a_1, a_2, a_3, a_4) = \ell(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$, където $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Задачата е решена.

[13] И разкриваме линейна независимост или зависимост.

Задача 6.14. Да се докаже, че системата вектори е линейно независима и да се допълни тази система до базис на $\mathbb{R}^4$.

1. $$a_1 = (1, -1, 2, 3), a_2 = (2, -2, 1, 1);$$

2. $$a_1 = (1, 2, -1, 3), a_2 = (-1, -2, 1, 1).$$

Преминаваме към понятието координати на вектор спрямо фиксиран базис. Ако е дадено крайномерно пространство V над полето $\mathbb{F}$ с базис $e_1, \dots, e_n$. Фактът, че $\ell(e_1, \dots, e_n) = V$ означава, че всеки вектор $V \ni v$ се представя като линейна комбинация на базистните вектори. Тост $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Коефициентите $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}$ наричаме координати на вектора $x \in V$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ на V.

Определение 6.15. Ако $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$ са базиси на линейното пространство V над полето $\mathbb{F}$, то матрицата

$$T_{e\to f} = (f_1, \dots, f_n) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}),$$

образувана по стълбове от координатите на $f_1, \dots, f_n$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$. Т.е.

$$\begin{aligned} f_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n \\ f_2 &= t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{2n}e_n \\ &\vdots \\ f_n &= t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2 + \ldots t_{nn}e_n, \end{aligned}$$

се нарича матрица на прехода от базиса e към базиса f. Т.е. $T_{e\to f}$ е единствената матрица[14], за която

$$f = eT.$$

Задача 6.16. Намерете матрицата на прехода от базиса e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^4$, към базиса f_1, f_2, f_3, ако векторите от втория базис се изразяват чрез тези от втория като

$$\begin{aligned} f_1 &= 2e_1 + \ +3e_3 \\ f_2 &= \ e_2 + e_3 \\ f_3 &= -e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

[14]доказва се ,че тя е неособена т.е. $\det T \neq 0$. Нещо повече неособеността и не е само необходимост , а и достатъчност. Тоест и всяка неособена матрица се реализира като матрица на подходяща смяна на базиса.

Решение. Нареждаме координатите на векторите от втория базис по стълбове

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Възниква въпросът, има ли връзка между координатите на фиксиран вектор от линейно пространство преди и след смяната на базиса. Отговорът е положителен и се дават от следното:

Твърдение 6.17. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$, а $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$ са два базиса на V. Фиксираме произволен вектор $v \in V$. Нека $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, т.е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

са координатите на v спрямо базиса е. И нека също $v = y_1f_1 + \dots + y_nf_n$, т.е.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

са координатите на същия вектор спрямо базиса f. Тогава връзката между "старите"(x) и "новите"(y) координати се дава с

$$x = Ty \tag{26}$$

където T е матрицата на прехода от e към f.

Забележете, "старите координати "се получават като "пропуснем(умножим)"отляво с матрицата на прехода $T_{e\to f}$, т.е. матрицата на прехода действа не точно както очакваме за координатите на векторите- а наобратно [15] Оттук получаваме, след ляво умн ожение на (30) с T^{-1} [16]

$$y_{\text{нови}} = T^{-1}x_{\text{стари}}.$$

И така един начин за намиране на новите координати $y_{\text{нови}}$ е с ляво умножение с обратната на матрицата на прехода $T_{e\to f}$, но се оказва,че практически по-малко изчисления са необходими[17] , ако просто решим матричното уравнение $Ty = x$, относно неизвестният координатен стълб $y \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$.

Илюстрираме това в следната:

Задача 6.18. Нека V е тримерно линейно пространство над полето $\mathbb{R}$ с базис e_1, e_2, e_3. Докажете, че векторите f_1, f_2, f_3 също образуват базис на V и намерете координатите на вектора $v = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$ спрямо този базис, където:

[15] странно на пръв поглед, но факт .

[16] матрицата на прехода е неособена и значи е обратима!

[17] Както беше и при решаването на матричните уравнения - а точно това и правим тук.

1. $f_1 = e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_1 + e_2 + 2e_3, f_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3;$

2. $f_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3, f_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3, f_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3;$

3. $f_1 = e_1 + 5e_2 + 3e_3, f_2 = 2e_1 + 7e_2 + 3e_3, f_3 = 3e_1 + 9e_2 + 4e_3.$

Решение. Намирайки новите координати на f_1, f_2, f_3 ние ще покажем, че тези вектори са базис на V. 1. Нека намерим координатите на v спрямо базиса f, които ще наричаме "нови."Дадено е, че

$$v = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

Тоест "старите"кординати ги имаме и те са

$$x_{\text{стари}} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Търсим

$$y_{\text{нови}} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

$$v = (f_1, f_2, f_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3.$$

Съгласно горните разсъжения , имамче че за неособената , матрица на прехода $T_{e\to f}$

$$y = T^{-1}x.$$

Затова първо: Намираме матрицата на прехода $e \to f$, T.

$$T_{e\to f} = (f_1, f_2, f_2) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Търсим нейната обратна T^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right).$$

Така намерихме

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -2 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

и значи

$$y_{\text{нови}} = T^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Т.е. $v = 2f_1 + 0f_2 + 0f_3 = 2f_1$.

Нека сега походим с решаване на матричното уравнение $Ty = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Трябва да сведем $(T|x)$ към $(E_3|y)$ с елементарни преобразувания по редове. Когато сме направили това, веднага получавме съществуване на неособени матрици,реализиращи тези елементарни преобразувания чрез леви умножения. Ако тези матрици са $P_1, \ldots, P_k$ то от $(T|x)$ сме стигнали до $(E_3|y)$ със следните уможения $P_k \ldots P_1 T = E_3$, и значи $T^{-1} = P_k \ldots P_1$ съществува така T е обратима и значи($f = eT$) f_1, f_2, f_3 е базис.(виж 5 под чертата на страница 7)

В нашата задача имаме да решим $Ty = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 - R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 - R_2 \\ \sim \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 - R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

И отново получихме(но със значително по-малко усилия)

$$y = y_{\text{нови}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Самостоятелно решете 2. и 3.

7 Ранг на система вектори, ранг на матрица. Фундаментална система решения(ФСР) на хомогенна система линейни уравнения.

Задача 7.1. Да се намери ранга на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}3&1&-1&0&2\\6&2&-2&0&4\\1&1&3&1&0\\4&2&2&1&2\end{pmatrix}\overset{R_2-2R_1}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&-1&0&2\\0&0&0&0&0\\1&1&3&1&0\\4&2&2&1&2\end{pmatrix}\overset{R_4-3R_1}{\sim}\begin{pmatrix}3&1&-1&0&2\\0&0&0&0&0\\1&1&3&1&0\\3&1&-1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&1&-1&0&2\\0&0&0&0&0\\1&1&3&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&-1&0&2\\1&1&3&1&0\end{pmatrix}.$$

Оттук получаваме, че $rk(A)=2$.

Задача 7.2. Намерете ранга на матрицата

$$B=\begin{pmatrix}-1&4&-3&-2\\3&-7&5&3\\3&-2&1&0\\-4&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}-1&4&-3&-2\\3&-7&5&3\\3&-2&1&0\\-4&1&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2+3R_1\\R_3+3R_1\\\sim\\R_4-4R_1\end{matrix}\begin{pmatrix}-1&4&-3&-2\\0&5&-4&-3\\0&10&-8&-6\\0&-15&12&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\frac{1}{2}R_3\\\sim\\-\frac{1}{3}R_4\end{matrix}\begin{pmatrix}-1&4&-3&-2\\0&5&-4&-3\\0&5&-4&-3\\0&5&-4&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&4&-3&-2\\0&5&-4&-3\end{pmatrix}.$$

Това ни дава, че $rk(B)=2$.

Задача 7.3. Спрямо стойностите на параметъра $\lambda\in\mathbb{C}$, намерете ранга на матрицата

$$C=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\-1&2&1&1\\1&1&4&2\\3&-3&2&\lambda\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\-1&2&1&1\\1&1&4&2\\3&-3&2&\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}R_1-2R_3\\R_2+R_3\\\sim\\R_4-3R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-3&-5&-3\\0&3&5&3\\1&1&4&2\\0&-6&-10&(\lambda-6)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&3&5&3\\1&1&4&2\\0&-6&-10&(\lambda-6)\end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3+2R_1}{\sim}\begin{pmatrix}0&3&5&3\\1&1&4&2\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}.$$

1. Ако $\lambda=0$, то веднага правим заключението, че $rk(C)=2$.

2. Ако $\lambda \neq 0$, делим третият ред ,от последната матрица, на $\lambda \neq 0$ и с получената единица правим нули над нея.[18]

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{\lambda}R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2-2R_2}{\overset{R_1-3R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значи в този случай,$\lambda \neq 0$, имаме $rk(C) = 3$.

Задача 7.4. Спрямо стойностите на параметъра $\lambda \in \mathbb{C}$, намерете ранга на матрицата

$$D = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{R_4-R_1}{\overset{\substack{R_2-(1-\lambda)R_1 \\ R_3+R_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ \lambda(2-\lambda) & 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

1. При $\lambda = 2$, получаваме $D \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, и в този случай $rk(D) = 1$.

2. При $\lambda \neq 2$, а значи $\lambda - 2 \neq 0$, можем да разделим на $2-\lambda$ втори, трети и четвърти ред на последната матрица, получена в решението. Правим това и получаваме

$$D \underset{\frac{1}{2-\lambda}R_4}{\overset{\substack{\frac{1}{2-\lambda}R_2 \\ \frac{1}{2-\lambda}R_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3+R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -2$, получаваме $rk(D) = 3$.

При $\lambda \neq \pm 2$, получаваме $rk(D) = 4$.(пълен ранг).

Самостоятелно решете следните задачи:

Задача 7.5. Намерете ранга на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[18] Въпреки, че още оттук се вижда, че в този случай трите реда на матрицата са линейно независими.

Задача 7.6. Спрямо, стойностите на параметъра $\lambda \in \mathbb{C}$, намерете ранга на матрицата

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -7 & 4 \\ 7 & -9 & -11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.7. Да се намери ранга на системата вектори

$$a_1 = (5,4,7,3), \quad a_2 = (3,8,2,1)$$
$$a_3 = (2,5,1,-1), \quad a_4 = (0,3,-2,-1).$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + 3R_4 \\ R_2 + R_4 \\ \sim \\ R_3 - R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 13 & 1 & 0 \\ \boxed{3} & 11 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 + \frac{13}{3}R_2 \\ \sim \\ 3/32R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 13 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 10 & 29 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1/3R_2 \\ R-1-5R_2 \\ \sim \\ R_4 - 10R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получихме, че рангът, $rk(a_1, a_2, a_3, a_4) = rk(A) = 4$, на системата от четири вектора е четири. Тоест системата има пълен ранг или, което е същото, система е линейно независима.

Задача 7.8. Да се намери ранга на системата от вектори

$$a_1 = (1,1,2), \quad a_2 = (-2,-2,-4), \quad a_3 = (0,3,5),$$
$$a_4 = (4,1,3), \quad a_5 = (-2,-5,-9), \quad a_6 = (6,6,12).$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & -9 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 + 2R_1 \\ \sim \\ R_6 - 6R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 - 4R_1 \\ \sim \\ R_4 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Последното показа, че нашата система от шест вектора има ранг две.

$$rk(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 2.$$

Самостоятелно решете следните

Задача 7.9. Намерете ранга на системата вектори

$$a_1 = (3, 5, -13, 11), \quad a_2 = (3, -1, 3, -3)$$
$$a_3 = (3, 2, -5, 4), \quad a_4 = (3, 8, -21, 18).$$

Задача 7.10. Намерете ранга на системата вектори

$$a_1 = (0, 6, 6, 1, 0), \quad a_2 = (3, 1, 1, 0, 0), \quad a_3 = (1, -1, 3, 1, -2)$$
$$a_4 = (-2, 3, 1, 0, 1), \quad a_5 = (2, 3, 5, 1, -1), \quad a_6 = (1, -6, 4, 2, -5).$$

Задача 7.11. Намерете ранга на матрицата

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(n-1) & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В последната матрица ще постъпим по следния начин: Умножаваме всчки ред с минус едно, започвайки от последния, и го прибавяме към "горния". С други думи за всички $2 \leq i \leq n$, извършваме елемнтарното преобразувание $R_{i-1} - R_i$, като първо го прилагаме за $i = n$, после за $i = n-1$, и т.н. до $i = 2$. Това дава

$$A_{n\times n} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -(\lambda-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(n-1) & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. При $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$, получаваме $rk(A_{n\times n}) = n-1$.
2. При $\lambda \neq 1, 2, \dots, n-1$, получаваме $rk(A_{n\times n}) = n$.[19]

Задача 7.12. В зависимост от параметъра $\lambda \in \mathbb{C}$, намерете ранга на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+8 & 4 & 2 & -11 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & \lambda+1 & -2 \\ 9 & 6 & \lambda+3 & -15 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[19] В този случай рангът на $A_{n\times n}$ е пълен.

Отг.

1. При $\lambda = -3\left(\frac{\lambda-6}{3} = -3\right) \to rk(A) = 3$.

2. При $\frac{3-\lambda}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$, имаме $rk(A) = 4$.

3. При $\lambda \neq 1, \lambda \neq -3$ рангът е пълен, т.е. $rk(A) = 5$.

Преминаваме към понятието Фундаментална система от решения на хомогенна сисистема от линейни уравнения.

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. . \tag{27}$$

Всяка хомогенна линейна система уравнения (30), има поне едно (нулевото) решение и значи е съвместима. Нещо повече множеството решенията на хомогенната система линейни уравнения образува линейно пространтво.

Твърдение 7.13. Нека A е матрицата от коефициенти на (30) и $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

1. Ако $rk(A) < n$, системата (30) има безброй много решения.

2. Ако $rk(A) = n$, то (30) има единствено нулевото решение.

Твърдение 7.14. В горните означения, нека U е пространството от решения на (30). Това , ако $rk(A) = r$, то $\dim U = n - r$.

Определение 7.15. Всеки базис на пространството от решения на системата (30) се нарича Фундаментална система решения (ФСР).

Задача 7.16. Да се намери ФСР на следната хомогенна система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получихме, че $rk(A) = 3$. Рангът е пълен и единственото решение е нулевото.

Задача 7.17. Намерете ФСР на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 + 0x_5 = 0 \end{array} \right. .$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 10 & -2 & 14 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получихме, че $rk(A) = 3 < 4 = \#\{\text{броят на неизвестните}\}$. Това означава, че системата има безброй много решения и линейното пространство от решенията на система е $\dim U = 4 - rk(A) = 5 - 3 = 2-$мерно подпростарнство на $\mathbb{R}^5$.

Полагаме $x_3 := p$, $x_4 := q$ и получаваме $x_1 = 0, x_5 = 4p, x_2 = 7p - q$. Тоест общото решение има вида

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 7p - q, p, q, 4p).$$

Сега за да намерим базис на пространството ,от решения на хомогенната система U, трябва измежду всички решения да изберем $\dim u = 2$ линейно независими такива.

За да направим това е достатъчно да дадем линейно незвисими стойности на (p, q). Най-често даваме , така че да получим стандартният базис. Или както в темата за базис на крайномерно пространство. От вида на общото решения се вижда, че то изцяло зависи от p, q. Тоест тук броят независими компоненти е две и проектираме върху две оси (p, q). Избираме стандартен базис $(p_1, q_1) := (1, 0)$, $(p_2, q_2) = (0, 1)$ на $\mathbb{R}^2$ и го издигаме до базис на U.

$$(p_1, q_1) := (1, 0) \longmapsto (0, 7, 1, 0, 4) =: u_1$$
$$(p_2, q_2) := (0, 1) \longmapsto (0, -1, 0, 1, 0) =: u_2.$$

По този начин векторите $u_1, u_2 \in U$ са линейно независими(по построение) решения и от това, че $\dim U = 2$, то те са базис на U. Така една фундаментална система от решения е

$$\{u_1, u_2\} = \{(0, 7, 1, 0, 4), (0, -1, 0, 1, 0)\}.$$

Задача 7.18. Намерете ФСР на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Задача 7.19. Намерете ФСР на хомогенната система линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_5 = 0 \end{array}\right. .$$

Задача 7.20. Намерете ФСР на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти:

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -10 & 5 \\ 6 & 7 & -5 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.21. За кои стойности на параметъра λ, хомогенната система линейни уравнения има и ненулево решение? За тези стойности на λ да се намери ФСР.

$$\left|\begin{array}{l} \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2-\lambda & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1. При $\lambda = 2$, получаваме че $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Полагаме $x_3 := p, x_4 := q, x_2 := t \Rightarrow x_1 = -t - p - q$. Общото решение на хомогенната система линейни уравнения е
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-t - p - q, t, p, q).$$

$$\begin{aligned} (t_1, p_1, q_1) &:= (1, 0, 0) \longmapsto c_1 = (-1, 1, 0, 0) \\ (t_2, p_2, q_2) &:= (0, 1, 0) \longmapsto c_2 = (-1, 0, 1, 0) \\ (t_3, p_3, q_3) &:= (0, 0, 1) \longmapsto c_3 = (-1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Построените вектори c_1, c_2, c_3 са ФСР на пространството от решения на ХСЛУ, в случая $\lambda = 2$.

2. При $\lambda \neq 2$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2-\lambda & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сега, ако $\lambda \neq -6$, то $rk(A) = 4$, откъдето $\dim U = n - rk(A) = 4 - 4 = 0$ и единственото решение е нулевото.

Ако $\lambda = -6$, то $rk(A) = 3$, значи $\dim U = n - rk(A) = 4 - 3 = 1$. Полагаме $x_1 := p$ и получаваме $x_2 = x_3 = x_4 = p$, а значи в този случай общото решение е (p, p, p, p). Вземаме, например, $c_1 = (1, 1, 1, 1)$, който е ФСР на пространството U от решения на ХСЛУ.

Сега ще се занимаем , в някакъв смисъл , с обратната задача на намиране на ФСР на хомогенна система линейни уравнения. Това е именно, да се намери хомогенна система линейни уравнения , чието пространство от решения съвпада с дадено $M = \ell(a_1, \dots, a_n)$. С други думи използваме, че не само множеството от решения на ХСЛУ е крайномерно линейно пространство. Освен това всяко крайномерно простарнство може да бъде реализирано като пространство от решения на някоя хомогенна система линейни уравнения.

Задача 7.22. Да се намери ХСМЛУ, чието пространство от решения съвпада с $M = \ell(a_1, \dots, a_n)$.

$$a_1 = (2, 1, -1, 3), \quad a_2 = (3, 1, 2, 1), a_3 = (1, 1, -4, 5).$$

Решение. Интерпретираме координатите на векторите като коефициенти на ХСЛУ и намираме нейна ФСР:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 14 & -14 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 & -7 \\ 0 & -1 & 7 & -7 \\ 1 & -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получихме $rk(a_1, a_2, a_3) = 2$. Полагаме $x_3 := p, x_4 := q$ и намираме $x_2 = 7p - 7q$ и $x_1 = 2q - 3p$. Така общото решение е

$$(2q - 3p, 7p - 7q, p, q).$$

$$\begin{aligned} (p_1, q_1) &:= (1, 0) \longmapsto c_1 = (-3, 7, 1, 0), \\ (p_2, q_2) &:= (0, 1) \longmapsto c_2 = (2, -7, 0, 1). \end{aligned}$$

До тук намерихме ФСР $= \{c_1, c_2\} = \{(-3, 7, 1, 0), (2, -7, 0, 1)\}$. И финално, коефициентите на векторите, които са ФСР на ХСЛУ, с коефициенти координатите на векторите от линейната обвивка , която се опитваме да реализираме като пространство на решения на ХСЛУ , интерпретираме като коефициенти на нова ХСЛУ, а именно

$$\left| \begin{array}{l} -3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Именно това е системата, чието пространство от решения е $M = \ell(a_1, a_2, a_3)$.

Самостоялно решете следната

Задача 7.23. Намерете хомогенна система линейни уравнения, чието пространство от решения съвпада с $M = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$, където

1. $$a_1 = (1, 1, -2, 2), \quad a_2 = (2, 1, 3, -2) \quad a_3 = (3, 4, 5, 6), \quad a_4 = (3, 6, 9, 12).$$

2. $$a_1 = (1, 2, -1, 1), \quad a_2 = (-3, -5, 2, 1), \quad a_3 = (1, 2, 3, 4), \quad a_4 = (1, 3, 6, 11).$$

Задача 7.24. Да се намери система хомогенни линейни уравнения, чието пространство от решения съвпада с $\ell(b_1, b_2)$, където $b_1 = (1, 1, 2, 2), b_2 = (1, -1, 2, 8)$.

Решение. Ще решим задачата по два начина. Единият е показаният вече метод, с който можем , посредством една фундаментална система решения да преминаваме от линейна обвивка към хомогенна система и обратно. И така, интерпретираме координатите на векторите като коефициенти на хомгоенна система и намираме една нейна фундаментална система от решения.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3 := p, x_4 := q$ и намираме $x_1 = -2p - 5q, x_2 = 3q$. Общото решение е

$$(-2p - 5q, 3q, p, q),$$

от което вземаме два линейно независими вектора, които представляват една фундаментална система от решения.

$$\begin{aligned} (p, q) = (1, 0) &\longmapsto (-2, 0, 1, 0) \\ (p, q) = (0, 1) &\longmapsto (-5, 3, 0, 1). \end{aligned}$$

И така коефициентите на тези вектори от фундаменталната система, която сме намерили интерпретираме като коефициенти на хомогенна система линейни уравнения(по редове) и значи търсената система е

$$\left| \begin{array}{l} -2x_1 + x_3 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Нека отбележим, че този метод, за намиране на хомогенна система линейни уравнения, чието пространство от решения е изнапред зададена линейна обвивка, не е единствен но изчислително е по-ефективен.

Друг метод, който ние вече използвахме в предишното упражнение за намиране на даден вектор като линейни комбинации на дадена система вектори. А именно: (2 начин): Искаме да намерим условия върху произволен $x = (x_1, \ldots, x_n)$ така, че $x \in \ell(b_1, b_2)$. Расписвайки покомпоненто

$$(\lambda, \lambda, 2\lambda, 2\lambda) + (\mu, -\mu, 2\mu, 8\mu) = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

както вече наприхме извода в предното упражнение в по-обща постановка, трябва да наредим координатите на b_1, b_2 по стълбове в матрица , а към разширеният стълб координатите на вектора, който искаме да получим като тяхна линейна комбинация, след което решаваме една линейна система

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \\ 2 & 8 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 6 & x_1 - 2x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x_1 - x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}2x_1 \\ 2 & 0 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}(x_4 - 2x_1) \end{array}\right).$$

Сега по смисъла на задачата искаме тази система да не е несъвместима. Тоест

$$\left| \begin{array}{l} \left(1 + \frac{2}{3}\right) x_1 - x_2 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -5x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right. .$$

И отново получихме търсената хомогенна система с пространство от решения дадената линейна обвивка.

8 Сума на подпространства. Директна сума на подпространства. Базис на сума и сечение на крайномерни подпространства на $\mathbb{F}^n$.

Ако са дадени две линейни пространства V_1 и V_2 над поле $\mathbb{F}$, можем да говорим за тяхната сума, определена като

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}.$$

Не е вярно, че сума на линейни пространства , винаги е линейно пространство. По-общо, разбира се за $V_1, \ldots, V_n$ линейни пространства над поле $\mathbb{F}$, определяме тяхната сума като

$$V_1 + \ldots + V_n = \{v_1 + \ldots v_n | v_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Оказва, се че сума на линейни пространства е линейната обвивка на обединението им. По-точно в сила е следното

Твърдение 8.1. Нека $V_1, \ldots, V_n$ са линейни подпространства на линейното пространство V. Тогава тяхната сума съвпада с линейната обвивка на тяхното обединение

$$V_1 + \ldots + V_n = \ell(V_1 \cup \ldots \cup V_n).$$

В часност $V_1 + \ldots + V_n$ също е подпространство на V и то минималното подпространство на V, съдържащо $\bigcup_{i=1}^n V_i$.

Твърдение 8.2. Нека U и W са крайномерни линейни подпространства на линейното пространство V. Тогава $U + W$ и $U \cap W$ също са крайномерни линейни подпространства на V и е в сила

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Въвеждаме важното понятие *директна сума* на подпространства.

Определение 8.3. Една сума на подпространства $V_1, \dots, V_n \leq V$ на линейно пространство V, $V_1 + \dots + V_n$, наричаме директна сума, ако всеки вектор от сумата има единствено представяне $v = v_1 + \dots + v_n$, като сума на вектори $v_i \in V$. Този факт бележим с

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i.$$

Едно необходимо и достатъчно условие сума на подпространства, да бъде директна сума се дава в следното:

Твърдение 8.4. Сума на подпространства $V_1 + \dots V_n$, е директна тогава и само тогава, когато за всяко $1 \leq i \leq n$ е в сила

$$V_i \cap \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} V_j \right) = \{\mathcal{O}\}.$$

Един пример за директна сума е, факта че равнината $\mathbb{R}^2$ е директна сума на абсцисната ос и ординатната ос:

$$\mathbb{R}^2 = Ox \oplus Oy,$$

където $Ox = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \;\; Oy = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$. Това е така , защото, както вече видяхме в предишните упражнения, $Ox, Oy \leq \mathbb{R}^2$ са подпространства на $\mathbb{R}^2$, комбинирайки с необходимото и достатъчно условие за директност на сумата им и факта, че $Ox \cap Oy = \{\mathcal{O} = (0, 0)\}$, следва че тяхната сума е диреквна и нещо повече $\dim(Ox + Oy) = \dim(Ox) + \dim(Oy) - \dim(Ox \cap Oy) = 1 + 1 - 0 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, което доказва разлагането на $\mathbb{R}^2$ в директна сума на своите две координатни оси.

По-общо $n-$мерното пространство $\mathbb{R}^n$ е директна сума на своите $n-$координатни оси:

$$\mathbb{R}^n = Ox_1 \oplus Ox_2 \oplus \dots \oplus Ox_n = \bigoplus_{i=1}^{n} Ox_i,$$

където

$$Ox_i = \{(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) | x_i \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}.$$

Твърдение 8.5. Нека V е ненулево линейно пространство над поле $\mathbb{F}$. Тогава е в сила:

1. Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на V, то за всяко $1 \leq k \leq n - 1$, можем да разложим в директна сума
$$V = \ell(e_1, \dots, e_k) \oplus \ell(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

2. Ако $V = U \oplus W$ е директна сума на ненулеви подпространства U и W, $e_1, \dots, e_k$ е базис на U и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на W, то $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на V.

Твърдение 8.6. Нека V е $n-$мерно линейно пространство, а U е $k-$мерно подпространство на V за някои естествени $k < n$. Тогава съществува $(n - k)-$мерно подпространство W на V, така ,че $V = U \oplus W$. Всяко такова подпространство W се нарича допълнение на U до V.

Важно е , че допълнението на това подпространство, не е единствено. Например, ако разглеждаме $\mathbb{R}^3$, а U е произволна права през началото, то всяка равнина W, през началото, не съдържаща въпросната права, е нейно допълнение до тримерното пространство $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Основната цел на това упражнение е да дадем и обясним метод, който позволява да решим задачата за намиране на базис на сума и сечение на подпространства на крайномерно пространство.

Общо казано, в постановките на задачите по въпроса, е дадена система вектори и линейно пространство, което е зададено като тяхната линейна обвивка. И освен това е дадено друго пространство, което обаче, е задаено като пространството от решенията на хомогенна система линейни уравнения.

За да намерим тяхната сума, а и по-общо произволна сума на крайномерни пространства, най-лесно е да знаем тяхно преставяне като линейна обвивка. Защото тогава, ако $U = \ell(c_1, \ldots, c_n), W = \ell(d_1, \ldots, d_n)$, то

$$U + W = \ell(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n),$$

съгласно Твърдение 1. Въпросът за сечението на тези пространства $U \cap W$ се решава полесно като имаме представяния на U и W като пространства от решения на хомогенни системи линейни уравнения. Защото, ако имаме

$$U : \left|\ A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbb{O}_{m\times 1}\right. \ , \qquad W : \left|\ B_{k\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbb{O}_{k\times 1}\right. \ ,$$

то тяхното сечение можем да намерим като решим системата хомогенни уравнения, съставена от системите линейни уравнения за U и W, т.е. $U \cap W$ е пространството от решения на

$$\begin{pmatrix} A_{m\times n} \\ B_{k\times n} \end{pmatrix} \mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbb{O}_{(m+k)\times 1}.$$

Т.е. броят на стълбовете на A и B трябва да е един и същи и равен на броят на неизвестните n. Броят на уравненията в двете системи е произволен.

$$U \cap W : \left| \begin{array}{l} A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbb{O}_{m\times 1} \\ B_{k\times m}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbb{O}_{k\times 1} \end{array} \right. .$$

Задача 8.7. Нека $U = \ell(a_1, a_2, a_3) \leq \mathbb{R}^4$ е линейното подпространство на $\mathbb{R}^4$, зададено като линейната обивка на векторите

$$a_1 = (1, 2, 1, 1), \quad a_2 = (1, 0, -1, -1), \quad a_3 = (3, 4, 1, 1).$$

Нека освен това е дадено подпространството W на $\mathbb{R}^4$, зададено като пространството от решения на хомогенна система линейни уравнения:

$$W : \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на $U + W$ и $U \cap W$.

Решение. Първо ще намерим базис на U. От $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$ и метода на линейните обвивки(елементарните преобразувания по редове, върху матрицата , наредена по редове от векторите в линейната обвивка , я запазват) пресмятаме, че

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получихме, че $U = \ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(b_1, b_2)$, където

$$b_1 = (1, 1, 0, 0), \quad b_2 = (1, 0, -1, -1).$$

И така $U = \ell(b_1, b_2)$ и от горното b_1, b_2 са линейно независими, комбинирано с това, че тогава тази линейна обвивка е двумерно подпространство на $\mathbb{R}^4$, следва, че b_1 и b_2 са един базис на U. Нека сега, намерим представянето на U като пространството от решения на хомогенна система линейни уравнения.[20] Интерпретираме координатите на векторите b_1, b_2,(които се разбрахме, че са базис на U) като коефициенти на хомогенна система:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Полагайки $x_1 := p$ и $x_4 := q$, намираме $x_2 := -p$ и $x_3 = p - q$. Така общото решение на тази хомогенна система е

$$(p, -p, p - q, q),$$

за всички $p, q \in \mathbb{C}$. Сега ,обаче, ни трябва една фундаментална система от решения. За целта даваме линейно независими стойности на p и q. Например

$$(p, q) = e_1 = (1, 0) \longmapsto (1, -1, 1, 0) = d_1,$$
$$(p, q) = e_2 = (0, 1) \longmapsto (0, 0, -1, 1) = d_2.$$

Получихме ФСР $= \{d_1, d_2\}$. И сега коефициентите на векторите, d_1, d_2 от фундаменталната система, която намерихме , интерпретираме като коефициенти в хомогенна система линейни уравнения

$$U : \left|\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Това е търсената система, която има за пространтво от решения $U = \ell(b_1, b_2)$. Така вече имаме U, представено като линейна обвивка и като пространството от решенията на хомогеннна система.

От техническата част, остана само да намерим предсавяния за W като пространството от решенията на хомогенна система и като линейна обвивка. Това, обаче, няма да е толкова трудно, защото W вече е представено като хомоенна система. Ние, обаче, можем да я опростим.

$$W : \left|\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

[20] Виж от предното упражнение намирахме , по дадено пространство, намирахме хомогенна система , чието решение е това пространство - и го тази задача нарекохме "обратна на намирането на ФСР".

По-точно, работейки с матрицата от коефициенти на хомогенната система на W, пресмятаме

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тъй като линейните системи се запазват от елементарните преобразувания , получихме че

$$W : \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. ,$$

както и , че ако положим $x := p$, то намираме $x_1 = p$ и $x_3 = 0, x_4 = 0$. Така общото решение на тази система е

$$(p, p, 0, 0).$$

Тоест $W = \{(p, p, 0, 0) | p \in \mathbb{C}\} \leq \mathbb{R}^4$. За да намерим базис на W, даваме линейно независима стойност[21] на p, например $p = 1$ и получаваме $(1, 1, 0, 0) = w_1$, който е един базисн а W. По този начин, вече имаме и W зададено по два начина(чрез хомогенна система и чрез линейна обвивка), понеже $W = \ell(w_1)$.

Теническата част свърши. Препоръчвам първо да намирате представяния на двете пространства, чиято сума и сечение търсите , по два начина - като хомогенна система и като линейна обвивка , и после да направите следното:

Сега за Базис на $U + W = \ell(b_1, b_2) + \ell(w_1) = \ell(b_1, b_2, w_1)$. Да проверим, дали тези три вектора са линейно независими:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Получихме, че b_1, b_2, w_1 са линейно зависими и

$$U + W = \ell(b_1, b_2, w_1) = \ell(b_1, b_2).$$

Тоест b_1, b_2 са базис на $U + W$.

За да намерим базис на $U \cap W$, "долепяме двете системи, с които се представят U и W и решаваме получената система.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\sim 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_1 := m \in \mathbb{C}$ и намираме $x_2 = m, x_3 = 0, x_4 = 0$. Така тази система има общо решение

$$(m, m, 0, 0)$$

[21]Всяка, която не анулира целия вектор, защото един вектор е линейно зависим точно когато е нулевият.

и например $(1,1,0,0)$ е една нейна фундаментална система от решения.

Т.е. получихме, че$(1,1,0,0)$ е един базис на U и $U \cap W = \ell((1,1,0,0))$. Задачата е решена.

Задача 8.8. Да се намери базис на $U+W$ и $U \cap W$, където U е зададено като линейна обвивка на система вектори, а $W-$ като пространство от решенията на хомогенна система.

1. $$U = \ell(a_1, a_2); \quad a_1 = (1,1,2,2), a_2 = (1,-1,2,-2);$$
$$W : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

2. $U = \ell(a_1, a_2, a_3); a_1 = (1,2,1,2), a_2 = (2,1,2,1), a_3 = (1,2,3,4);$
$$W : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x - 3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

3. $U = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4); a_1 = (2,8,-3,14), a_2 = (-1,2,3,5), a_3 = (-1,14,6,29), a_4 = (0,12,3,24);$
$$W : \left| \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 - 7x_4 = 0 \end{array} \right.$$

4. $U = \ell(a_1, a_2, a_3), a_1 = (1,2,1,1), a_2 = (2,3,1,0), a_3 = (3,1,1,-2);$
$$W : \left| \; 28x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \right. .$$

Задача 8.9. Да се намери базис на $U_1 + U_2$ и $(U_1 + U_2) \cap U_3$, където

$$U_1 : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right. , \qquad U_2 : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. ;$$

$U_3 = \ell(a_1, a_2, a_3), a_1 = (1,1,1,-1), a_2 = (1,-1,1,1), a_3 = (1,0,1,0).$

Решение. Първо ще намерим базис на $U_1 + U_2$. Започваме с решаването на хомогената система, чрез която U_1 е зададено.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_3 := p$ и намираме $x_1 = 2p, x_2 = -p, x_4 = 2p$. Т.е. общото решение на системата[22] е
$$(2p, -p, p, 2p).$$

[22] А значи $U_1 = \{(2p, -p, p, 2p) | p \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^4$.

И така, давайки например , $p = 1$ получаваме, че $b_1 = (2, -1, 1, 2)$ е една фундаменатлна система на тази хомогенна система, т.е. е базис на пространството от решенията(U_1) и $U_1 = \ell(b_1) = \ell(2, -1, 1, 2)$.

Сега аналогично решаваме системата за U_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_2 := s, x_3 := t$ и намираме, $x_1 = -s - t, x_4 = -s - t$. Така[23] общото решение на тази хомогенна система е

$$(-s - t, s, t, -s - t).$$

Сега даваме линейно независими стойности на s, t, например като

$$(s, t) = e_1 = (1, 0) \longmapsto (-1, 1, 0, -1) = c_1,$$
$$(s, t) = e_2 = (0, 1) \longmapsto (-1, 0, 1, -1) = c_2.$$

Т.е. c_1 и c_2 са една фундаментална система от решеня и значи базис на U_2. Намерихме

$$U_2 = \ell(c_1, c_2) = \ell((-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, -1)).$$

Сега имаме U_1, U_2 представени като линейни обвивки и значи можем лесно да намерим базис на тяхната сума $U_1 + U_2$, съгласно

$$U_1 + U_2 = \ell(b_1) + \ell(c_1, c_2) = \ell(b_1, c_1, c_2).$$

Отново, нареждаме b_1, c_1, c_2 по редове в матрица(нарекохме - метод на линейните обвивки) за да проверим , дали са линейно независими.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Това ни дава, че b_1, c_1, c_2 са линейно независими, т.е. $\dim \ell(b_1, c_1, c_2) = 3$ и самите те са един базис на това подпространство. Горното ни учи и че, ако $d_1 = (1, 0, 0, 1), d_2 = (0, 1, 0, 0), d_3 = (0, 0, 1, 0)$, то

$$U_1 + U_2 = \ell(b_1, c_1, c_2) = \ell(d_1, d_2, d_3).$$

И значи $\{d_1, d_2, d_3\}$ са един малко по-симпатичен базис на $U_1 + U_2$.

Сега за да намерим базис на $(U_1 + U_2) \cap U_3$, са ни необходими представяния на $(U_1 + U_2)$ и U_3 като пространства от решения на хомогенни системи. Първо за $U_1 + U_2 = \ell(d_1, d_2, d_3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[23]Значи $U_2 = \{(-s - t, s, t, -s - t) | s, t \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^4$.

Полагаме $x_4 = r$ и намираме общото решение

$$(-r, 0, 0, r),$$

оттук давайки $r = -1$, получаваме че вектора $(1, 0, 0, -1)$ е една фундаментална система решения на и значи

$$(U_1 + U_2) : |x_1 - x_4 = 0.$$

Сега за $U_3 = \ell(a_1, a_2, a_3)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Горното ни учи, че $U_3 = \ell(\alpha_1, \alpha_2)$, където $\alpha_1 = (0, -1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$. Сега търсим хомогенна система, чието пространство от решения да съвпада с $U_3 = \ell(\alpha_1, \alpha_2)$. За целта интерпретираме координатите на α_1, α_2 като коефициенти на хомогенна система, нейната матрица е последната матрица е по-горе. Полагаме $x_3 := p, x_4 := q$ и изразяваме $x_1 = -p, x_2 = q$. Общото решение е

$$(-p, q, p, q).$$

Даваме линейно независими стойности

$$\begin{aligned} (p, q) &= (-1, 0) \longmapsto (1, 0, -1, 0) \\ (p, q) &= (0, 1) \longmapsto (0, 1, 0, 1). \end{aligned}$$

Така това е една фундаментална система решения и координатите на векторите и интерпретираме като коефициенти на хомогенна система. Това е търсената хомогенна система, чието пространство е $U_3 = \ell(\alpha_1, \alpha_2)$.

$$U_3 : \left| \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Окончателно за да намерим базис на $(U_1 + U_2) \cap U_3$, "долепяме"системите хомогенни уравнения , които са предсатавяния на $U_1 + U_2$ и U_3 и решаваме новата система. Това е хомогенната система с матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагайки $x_1 = m$, изразяваме $x_4 = m, x_3 = m, x_2 = -m$, т.е. общото решение е

$$(m, -m, m, m).$$

Даваме, например, стойност $m = 1$ И получаваме вектора $(1, -1, 1, 1)$. Той е една фундаментална система от решения на хомогенната система за $(U_1 + U_2) \cap U_3$ и значи е един базис на $(U_1 + U_2) \cap U_3$. Т.е. $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \ell((1, -1, 1, 1))$.

Остаме за самостоятелна работа следните задачи

Задача 8.10. Да се състави система линейни хомогенни уравнения, множеството от решенията на която съвпада с линейната обвивка на векторите:

1.

$$a_1 = (2, -3, 0, 1, -2), a_2 = (3, 0, 1, -1, 2), a_3 = (7, -6, 1, 1, -2);$$

2.

$$a_1 = (2, -1, 0, 3, 1), a_2 = (3, 1, 1, -2, 1), a_3 = (1, -3, -1, 8, 1), a_4 = (4, 3, 2, -7, 1);$$

3.

$$a_1 = (1, 2, -1), a_2 = (0, -1, 2), a_3 = (1, 1, 0).$$

Задача 8.11. Да се намерят базис на сумата и сечението на пространствата $U_1 = \ell(a_1, a_2, a_3), U_2 = \ell(b_1, b_2, b_3)$, зададени като линейни обвивки на векторите

1.

$$a_1 = (1, -1, 0, 2, 0), a_2 = (0, 1, -2, 0, 0), a_3 = (2, 1, 0, 0, 1);$$
$$b_1 = (1, 0, -2, 2, 0), b_2 = (2, -1, -2, 4, 0), b_3 = (1, 2, 1, 0, 1);$$

2.

$$a_1 = (1, -1, 3, 0), a_2 = (2, 0, -1, 1), a_3 = (1, 1, -0, -2);$$
$$b_1 = (1, 1, -4, 1), b_2 = (1, 3, -11, 2), b_3 = (3, 5, -19, 4);$$

3.

$$a_1 = (1, 1, 0, -2), a_2 = (0, 1, -1, 3), a_3 = (2, 1, 1, -7)$$
$$b_1 = (1, 2, 1, 2), b_2 = (0, 1, 1, 1), b_3 = (3, 5, 2, 5);$$

4.

$$a_1 = (1, 1, 0, 2), a_2 = (1, 1, -1, 3), a_3 = (2, 1, 1, -7);$$
$$b_1 = (2, 1, 2, 0), b_2 = (2, 3, 1, -5), b_3 = (2, 4, 1, -3);$$

5.

$$a_1 = (1, 2, 0, 1, 2), a_2 = (0, 2, 2, 1, -1), a_3 = (1, 0, 4, 0, 1)$$
$$b_1 = (1, 2, -2, 4, 3), b_2 = (0, 2, -3, 4, 1), b_3 = (1, 2, 0, 1, 2).$$

Задача 8.12. Да се намерят базиси на смуата и сечението на пространствата U и W, ако

1. $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където

$$a_1 = (5,1,2,0), a_2 = (2,1,-1,1), a_3 = (1,-1,4,-2).$$

$$W : \left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Отг. Базис на $U + W$ са например векторите a_2, a_3 и $(1,0,1,0)$. Сечението $U \cap W$ има базис a_2.

2. $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където

$$a_1 = (1,-1,2,0), a_2 = (-1,0,-2,1), a_3 = (1,-2,2,1).$$

$$W : \left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Отг. Базис на сумата $U+W$ са например векторите a_1, a_2 и $(0,0,1,1)$, а сечението $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$.

3.
$$U : \left| \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad W : |3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0.$$

Отг.$U + W = \mathbb{R}^4$, а $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$, т.е. сумата $U \oplus W$ е директна.

4.
$$U : \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \quad W : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Отг.Един базис на $U + W$ е $(1,0,-1,0)$ и $(0,1,0,1)$. Сечението $U \cap W$ е едномерно и се поражда например от вектора $(1,1,-1,1)$.

За пълнота ще изложим и решение на Задача 6. 2.
Решение. Имаме $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където

$$a_1 = (1,-1,2,0), a_2 = (-1,0,-2,1), a_3 = (1,-2,2,1).$$

Нека намерим представяне на W като линейна обвивка. За целта решаваме хомогенната система за W

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагаме $x_4 = p$ и изразяваме $x_4 = p, x_1 = x_2 = 0$. Общото решение е

$$(0, 0, p, p).$$

Така например една фундаментална система решения е $b_1 = (0, 0, 1, 1)$. Т.е. $W = \ell(b_1)$ и $\dim W = 1$. Това ни учи също и, че[24]

$$W : \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0. \end{array} \right. .$$

Преминаваме към разглеждането на $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$. Нека опростим представителите, пораждащи тази линейна обвивка. Нареждаме a_1, a_2, a_3 по редове в матрица и прилагаме елементарни преобразувания по редовете и.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Това ни показва, че $U = \ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(\alpha_1, \alpha_2)$, където

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, -1), \quad \alpha_2 = (0, -1, 0, 1).$$

И $\dim U = 2$.

Нека намерим представяне на $U = \ell(\alpha_1, \alpha_2)$ като хомогенна система. Намираме една фундаментална система на хомогенната система с матрица от коефициенти последно написаната матрица от по-горе. Полагаме $x_1 = p$ и $x_4 = q$ и намираме $x_3 = \frac{1}{2}(q-p), x_2 = q$. Общото решение е

$$(p, q, \frac{1}{2}(q-p), q).$$

За да намерим едно ФСР даваме линейно независими стойности

$$(p, q) = (1, 0) \longmapsto (1, 0, -\frac{1}{2}, 0) = \xi_1;$$
$$(p, q) = (0, 1) \longmapsto (0, 1, \frac{1}{2}, 1) = \xi_2.$$

Така едно ФСР е $\{\xi_1, \xi_2\}$ и сега чрез ФСР-то преминаваме от линейна обвивка в хомогенна система с(коефициенти координатите на векторите от ФСР-то)

$$U : \left| \begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow U : \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Вече имаме представяния на U и W по два начина - като линейна обвивка и като пространството от решения на хомогенна система линейни уравнения.

За сумата $U + W$ имаме

$$U + W = \ell(\alpha_1, \alpha_2) + \ell(b_1) = \ell(\alpha_1, \alpha_2, b_1).$$

[24] една по-проста, но еквивалента на първоначаланта система за W.

Проверяваме дали тази линейна обвивка е тримерно пространство или някой от векторите в нея е излишен, всмисъл на пораждането и. И така нареждаме α_1, α_2, b_1 по редове в матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицата е в Гаусов Вид още в самото и записваме и значи(нейният ранг е 3) $\dim \ell(\alpha_1, \alpha_2, b_1) = 3$. Т.е. един базис на $U + W = \ell(\alpha_1, \alpha_2, b_1)$ е например[25] α_1, α_2 и b_1.

Сега за сечението можем директно от

$$\begin{aligned} \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) &\Leftrightarrow 3 = 2 + 1 - \dim(U \cap W) \\ &\Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \cap W = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow U \oplus W. \end{aligned}$$

Или също може да се види и с: За $U \cap W$ "долепяме"представянията на U и W като хомогенни системи и решаваме пполучената система. Тази хомогенна система е с матрица от коефициенти:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim E_4.$$

Тоест хомогенната система за $U \cap W$ има единствено нулевото решение и $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$. Това пък ни учи, че $U \oplus W$ е директна сума.

Наблюдение: Нека имаме една система линейни уравнения $Ax = b$, където $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, а $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ и $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{F})$. Ако знаем общото решение на хомогенната система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$, нека то е $z_{\text{homogeneus}} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ и знаем едно решение $x_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, то общото решение на нехомогенната система е

$$x = z_{\text{homogeneus}} + x_0.$$

Действително, от $Ax = b$ и $Ay = b$ за две решения $x, y \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, то тяхната разлика $x - y \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ е решение на хомогенната система $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$, съгласно

$$Ax = b,\ Ay = b \Leftrightarrow A(x-y) = Ax - Ay = \mathbb{O}_{m\times 1} - \mathbb{O}_{m\times 1} = \mathbb{O}_{m\times 1}.$$

Затова всяко решение $z_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ на хомогенната система има вида

$$z_0 = x_0 - y_0,$$

където $x_0, y_0 \in M_{n\times 1}$ са някакви решения на нехомогенната система.

[25]По построение $\ell(\alpha_1, \alpha_2) = \ell(a_1, a_2)$ и значи друг базис на $U + W$ е и $a_1, a_2, b_1 = (0, 0, 1, 1)$.

9 Линейни изображения. Проверка на линейност на изображение. Задаване на линейно изображение чрез образите на базис.

Изображение $\varphi : \Omega \longrightarrow M$ от множеството Ω в множеството M, наричаме всяко правило φ, което на произволно $x \in \Omega$ съпоставя елемент $\varphi(x) \in M$.

Изображения можем да построим всякакви, между всякакви множества. С единственото условие, обаче те да са разумно определени. Затова идва въпросът за коректност на изображение.

Казваме, че изображението $\varphi : \Omega \longrightarrow M$ е коректно определено, ако

$$\forall x, x' \in \Omega (x = x') \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x').$$

С други думи и много свободно изказно, ако два обекта имат различни имена, но са равни , то не трябва да се различават образите им.

Коректност на изображение се проверява, когато има даден елемент, притежаващ, различни представители. Например, ако $\Omega = \mathbb{Q}$. Едно рационално число, например $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ има цял клас от представители - в случая всички числа от вида $\frac{k}{2k}$, за $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. И така за изображение, което строим с дефиниционна област $\mathbb{Q}$ трябва да осигурим, независимост от представителите. Т.е.

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{2}{4}\right) = \ldots = \varphi\left(\frac{k}{2k}\right).$$

Определение 9.1. Изображение $\varphi : \Omega \longrightarrow M$ между две множества Ω и M, наричаме инективно, ако

$$\forall x, x' \in \Omega (x \neq x') \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(x').$$

С други думи, едно изображение е инективно, ако образите на различни елементи са различни.

Инективните изображения наричаме влагания[26].

Често, това, че изображението $\varphi : \Omega \longrightarrow M$ е влагане се отбелязва с $\varphi : \Omega \hookrightarrow M$.

Често е удобно, проверката за инективност да се извършва с контра-положителното на условието за инективност. От чисто логически причини, ако от твърдението A следва B, то от неB следва неA. Записано формално $A \to B \Rightarrow$ не$B \to$ неA. Например А="Днес ще вали , В="Навън ще бъде мокро."Тук $A \to B$. Защото от това, че днес ще вали следва, че навън ще бъде мокро. И значи, ако знаем, че навън няма да бъде мокро, то разбира се, че днес няма да вали. Т.е. проверката за инективност може да стане и така:

$$\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow x = x'.$$

Да не се бърка с проверката за коректност, която е обратната импликация на горното, разбира се , има изображения които са коректни но не са инективни.

[26] От английски "embeddings".

Определение 9.2. Едно изображение $\varphi : \Omega \longrightarrow M$, наричаме сюрективно, ако

$$\forall y \in M \exists x \in \Omega(\varphi(x) = y).$$

С други думи, едно изображение е сюрективно, ако всеки елемент от множеството, в което изображнието изпраща образите, е образ на някой елемент от дефиниционната област.

Сюрективните изображения се наричат още изображения "върху".

Често това, че $\varphi : \Omega \longrightarrow M$ е сюрективно се отбелязва с $\varphi : \Omega \twoheadrightarrow M$.

Определение 9.3. Изображенията $\varphi : \Omega \longrightarrow M$, които са едновременно инективни и сюрективни се наричат биективни.

Тоест биекция е изображение, което е инекция и сюрекция.

Често това, че изображение е биективно се отбелязва с $\varphi : \Omega \xrightarrow{\simeq} M$.

В линейната алгебра интерес представляват изображения между линейни пространства , които запазват алгебричната структура на пространствата. Такива изображения наричаме линейни. А множеството от всички линейни изображения $\psi : U \to V$, над линейни пространства U, V над поле $\mathbb{F}$ се отбелязва с $Hom(U, V)$.

Едно изображение $\varphi : U \to V$ наричаме линейно, ако

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(u_i).$$

За всички $\lambda_i \in \mathbb{F}, u_i \in U$.

По-компактно , но еквивалентно на горното(индуктивно) е, че $\varphi : U \to V$ е линейно, ако за произволни $u_1, u_2 \in U$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, е в сила

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2), \quad \varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1).$$

В такъв случай записваме $\varphi \in Hom(U, V)$.

Ако между две линейни пространства U и V над поле $\mathbb{F}$ има линейно изображение $\varphi : U \to V$, което при това е биекция, то това изображение наричаме изоморфизъм, а линейните пространства - изоморфни. Това записваме с $U \simeq V$. Когато две линейни пространства са изоморфни, те на практика са неразличими от алгебрична гледна точка. Затова в алгебрата често се разглеждат различни структури с точност до изоморфизъм. Така например с точност до изоморфизъм има точно едно $n-$ мерно линейно пространство - пространството на наредените $n-$торки $\mathbb{F}^n$.

Линейните изображения $\varphi : V \to V, \varphi \in Hom(V)$ от линейно пространство в себе си се наричат линейни оператори.

За V линейно пространство с базис $e_1, \ldots, e_n$, а φ е линеен оператор. Матрицата A_φ съставена по стълбове от координатите на образите на базисните вектори $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$, се нарича матрица на φ спрямо този базис. По-точно и с по-голяма общност:

Определение 9.4. Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение между крайномерни линейни пространства над поле $\mathbb{F}, e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на U, а $f = (f_1, \ldots, f_m)$ е базис на V. Матрицата

$$A := \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

образувана по стълбове от координатите на векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V$ спрямо базиса $f_1, \dots, f_m$ на V, се нарича матрица на φ спрямо базисите e и f.

В матричен запис

$$\varphi(\mathbf{e}) = \mathbf{f}A.$$

В горната дефиниция, ако $U = V$, т.е. $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, а $e_1, \dots, e_n$ е базис на V, то матрицата $A \in M_n(\mathbb{F})$ на φ, съставена по стълбове от координатите на образите на базисните вектори спрямо $e_1, \dots, e_n$ се нарича матрица на φ.

Еквивалентно.

$$\varphi(e) := (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = eA = (e_1, \dots, e_n)A.$$

Ако $f_1, \dots, f_n$ е друг базис на V, а $T = T_{e\to f}$ е матрицата на прехода от първия базис към втория, то матрицата B_φ на оператора φ спрямо базиса $f_1, \dots, f_n$ се получава като

$$B_\varphi^f = T^{-1}A_\varphi^e T.$$

За всеки оператор в линейно пространство с фиксиран базис има еднозначно определена матрица. Обратното също е вярно. Всяка квадратна матрица е матрицата на някой линеен оператор. Това е така, защото произволен базис $e_1, \dots, e_n$ на V и произволна матрица $A = M_n(\mathbb{F})$ с $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ съществува[27] линеен оператор $\varphi : V \to V$ с

$$\varphi(e_j) := a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_n, \quad \text{за} \quad 1 \leq j \leq n.$$

И матрицата на този оператор спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ е точно матрицата A. В следствие от това е в сила изоморфизмът $HomV \simeq M_n(\mathbb{F})$.

И така, ако имаме един вектор $v = x_1e_1 + \dots x_ne_n$ с координатен стълб $\mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,
и имаме матрицата A_φ на оператора φ. Ние вместо със самия вектор v, можем да работим с неговите координати. Като:

$$\{\varphi \in HomV, \quad \varphi(v)\} \simeq \{A_\varphi \in M_n(\mathbb{F}), \quad A_\varphi \mathbf{x}_v\}.$$

За да получим координатите на образа на вектора φ спрямо фиксирания базис e, е достатъчно да "пропуснем"координатите на вектора v спрямо този базис през матрицата на φ, т.е. да умножавайки матрицата на φ Отдясно със стълба от координатите на v, получаваме координатите на вектора $\varphi(v)$.

По-точно в сила е следното

[27]Защото ние така го определяме, а това определяне е еднозначно(коректно), защото е зададен с образите на базис. Т.е. защото базис може да изобрази произволни n вектора от V.

Твърдение 9.5. Нека V линейно пространство над поле $\mathbb{F}$ и $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е негов базис.Нека освен това е даден линейният оператор $\varphi : V \to V$. Тогава за произволен фиксиран вектор $v \in V$, с координатен стълб $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, т.е.

$$v = ex,$$

следва, че φ трансформира координатинят стълб $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ на вектора φ в координатният стълб $Ax \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ на вектора $\varphi(v) \in V$. Т.е.

$$\varphi(v) = e(Ax).$$

Доказателство. Нека

$$\begin{aligned}
&\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n;\\
&\varphi(e_2) = a_{12}e_2 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n;\\
&\vdots\\
&\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Тогава матрицата на φ по определение е $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{F})$. Сега разглеждаме $v = ex \in V$, където $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ е координатния стълб на v. Нека разгледаме стълба $Ax \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$.

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

И значи

$$e(Ax) = (e_1, \ldots, e_n). \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i a_{ki} e_k. \tag{28}$$

Но сега от линейността на $\varphi \in HomV$, имаме

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i).$$

Остана да си спомним, че $\varphi(e_i) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}e_k$, заместваме го в горното и извеждаме

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i a_{ki} e_k \overset{(1)}{=} e(Ax).$$

□

Вярно е и по-голяма общност, и може да се докаже по същия начин, че ако вместо оператор в горното твърдение имаме линейно изображение $\varphi : U \to V$ с матрица $A \in M_{m\times n}$ в крайномерни пространства U с базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и V с базис $f = (f_1, \ldots, f_m)$, то ако $v = ex$, има координатен стълб $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, то $\varphi(v) = f(Ax)$ има координатен стълб $Ax \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$.

Лема 9.6 (Матричен запис на линейността на изображение)**.** Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение,$u = (u_1, \ldots, u_m)$ е наредена $m-$торка от вектори $u_1, \ldots, u_m \in U$ и $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ е матрицата. Тогава

$$\varphi(uA) = \varphi(u)A.$$

за

$$v_j := (u_1, u_2, \ldots, u_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i,$$

$$\varphi(uA) = \varphi(v_1, \ldots, v_n) = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) \text{ и } \varphi(u) = \varphi(u) = (\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)).$$

Доказателство. Достатъчно е да забележим ,че за всяко $1 \leq j \leq n$ е в сила равенството

$$\varphi(v_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varphi(u_i) = (\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_m)) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

на $j-$тия стълб на $\varphi(uA)$ с $j-$тия стълб на $\varphi(u)A$. □

С тази лема е техническа и ни позволява значително по-лесно да докажем някои твърдение, като за да унагледя доказах твърдение 5 без помощта на тази техническа лема, а сега с нея ще докажа Твърдение 5 в по-голяма общност.

Твърдение 9.7. Нека е даден линеен оператор $\varphi : U \to V$ над U с базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и V с базис $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Нека освен това $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ е матрицата на φ. Тогава за вектор $u \in U$ с координатен стълб $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, т.е. $v = ex$, следва ,че $\varphi(u) = f(Ax)$. Т.е. векторът $\varphi(u) \in V$ има координатен стълб $Ax \in M_{m\times 1}(\mathbb{F})$ спрямо базиса f във V.

Доказателство. По определението за матрица на линейно изображение имаме $\varphi(e) = fA$.

Сега

$$\varphi(u) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (fA)x = f(Ax).$$

Ако $y \in M_{m\times 1}(\mathbb{F})$ е координатния стълб на $\varphi(u) = fy$, то сега

$$fy = \varphi(u) = f(Ax).$$

Следоватлено $f(y - Ax) = \mathcal{O}_V$ и $y - Ax = \mathbb{O}_{n\times 1}$ по лемата за матричен запис на линейната независимост на вектори.(Лема 16.2) Това доказа, че

$$y = Ax.$$

□

Нека докажем и формулата, която вече формулирахме по-горе.

Твърдение 9.8. Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица A спрямо базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на $V, e' = eT$ е друг базис на U с матрица на прехода $T = T_{e\to e'}$ и $f' = fS$ е друг базис на V с матрица на прехода $S = S_{f\to f'}$. Тогава матрицата на φ спрямо базиса e' на U и базиса f' на V е

$$B_{\varphi}^{e',f'} = B = S^{-1}AT.$$

Доказателство. По определението за матрица на линейно изображение имаме $\varphi(e) = fA$ и $\varphi(e') = f'B$. Сега пък по определенито за матрица на прехода имаме $e' = eT, f' = fS$. Прилагаме Лема 1 и асоциативността на матричното умножение и получаваме

$$f(AT) = (fA)T = \varphi(e)T = \varphi(eT) = \varphi(e') = f'B = (fS)B = f(SB).$$

Базисът $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V се състои от линейно независими вектори, така че от

$$f(AT - SB) = (\mathcal{O}_V, \dots, \mathcal{O}_V) \in M_{1\times n}.$$

следва $AT - SB = \mathbb{O}_{m\times n}$ по Лемата за матричен запис на линенейната независимст на вектори. Оттук, $AT = SB$ и $B = S^{-1}AT$, съгласно обратимостта на матрицата S в качеството си на матрица на преход между два базиса на V. □

Задача 9.9. Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

спрямо базис $e = (e_1, e_2, e_3)$ на U и базис $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ на V. Да се намери матрицата $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ на φ спрямо базиса

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad e'_2 = e_2 + 2e_3, \quad e'_3 = e_3.$$

на U и базиса

$$f'_1 = f_1, \quad f'_2 = 2f_1 + f_2, \quad f'_3 = 3f_1 + 2f_2 + f_3, \quad f'_4 = 4f_1 + 3f_2 + 2f_3 + f_4$$

на V.

Решение. Матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ към базиса $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ на U е

$$T_{e\to e'} = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), a$$

а матрицата на прехода от базиса $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ към базиса $f' = (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4)$ на V е

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Намираме обратната на S

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Т.е.

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

И така матрицата на φ спрямо e' и f' е

$$B = S^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задачата е решена.

Нека споменем, че ако имаме $\varphi : U \to U$ линеен оператор с матрица A спрямо базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и $e' = eT$ е друг базис на U, то матрицата на φ спрямо e' е $B = T^{-1}AT$. Което е директно следва от вече доказания за по-широка общност резултат.

Задача 9.10. Нека $V = M_n(\mathbb{F})$, а $A, B \in V$ са две фиксирани матрици. Да се докаже, че изображението $\varphi : V \to V$ е линеен оператор.

1. $\varphi(X) = X^t$;

2. $\varphi(X) = AXB$;

3. $\varphi(X) = AX + XB$.

При $n = 2$ да се напише матрицата на φ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ където $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. $\varphi(X + Y) := (X + Y)^t = X^t + Y^t = \varphi(X) + \varphi(Y)$ за произволни $X, Y \in V$. Също така за произволен скалар $\lambda \in \mathbb{F}$ е в сила $\varphi(\lambda X) := (\lambda X)^t = \lambda X^t = \lambda\varphi(X)$. Това доказа, че $\varphi \in HomV$ е линеен оператор. За да напишем матрицата на φ спрямо базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, трябва да подредим координатите на образите $\varphi(E_{11}), \varphi(E_{12}), \varphi(E_{21}), \varphi(E_{22})$ базисните вектори по стълбове в матрица. За целта първо ги изчисляваме

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{11}) &:= E_{11}^t = E_{11} = 1.E_{11} + 0.E_{12} + 0.E_{21} + 0E_{22}; \\
\varphi(E_{12}) &:= E_{12}^t = E_{21} = 0.E_{11} + 0.E_{12} + 1.E_{21} + 0.E_{22}; \\
\varphi(E_{21}) &:= E_{21}^t = E_{12} = 0.E_{11} + 1.E_{12} + 0.E_{21} + 0.E_{22}; \\
\varphi(E_{22}) &:= E_{22}^t = E_{22} = 0.E_{11} + 0.E_{12} + 0.E_{21} + 1.E_{22}.
\end{aligned}$$

Т.е.

$$\varphi(E_{11}) \simeq (1, 0, 0, 0), \varphi(E_{12}) \simeq (0, 0, 1, 0), \varphi(E_{21}) \simeq (0, 1, 0, 0), \varphi(E_{22}) \simeq (0, 0, 0, 1).$$

Нареждайки по стълбове

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) & \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{aligned}
&\varphi(X + Y) := A(X + Y)B = (AX + AY)B = AXB + AYB = \varphi(X) + \varphi(Y); \\
&\varphi(\lambda X) := A(\lambda X)B = \lambda[AXB] = \lambda\varphi(X)
\end{aligned}$$

за произволни $X, Y \in V$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Това доказва линейността на φ. Т.е. доказахме, че $\varphi \in HomV$ е линеен оператор. За да напишем матрицата на φ спрямо базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ отново ще намерим координатите на образите на базисните вектори.

$$\varphi(E_{11}) := AE_{11}B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix};$$
$$\varphi(E_{12}) := AE_{12}B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 6 & -6\end{pmatrix};$$
$$\varphi(E_{21}) := AE_{21}B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix};$$
$$\varphi(E_{22}) := AE_{22}B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}.$$

Това ни учи, че

$$\begin{aligned}\varphi(E_{11}) &\simeq (1,1,3,3), \quad \varphi(E_{12}) \simeq (2,-2,6,-6)\\ \varphi(E_{21}) &\simeq (2,2,4,4), \quad \varphi(E_{22}) \simeq (4,-2,8,-4),\end{aligned}$$

защото от по-горното виждаме, че

$$\begin{aligned}\varphi(E_{11}) &= 1.E_{11} + 1.E_{12} + 3.E_{21} + 3.E_{22};\\ \varphi(E_{12}) &= 2.E_{11} + (-2).E_{12} + 6.E_{21} + (-6).E_{22};\\ \varphi(E_{21}) &= 2.E_{11} + 2E_{12} + 4.E_{21} + 4.E_{22};\\ \varphi(E_{22}) &= 4E_{11} + (-2).E_{12} + 8.E_{21} + (-4).E_{22}.\end{aligned}$$

И така матрицата на линейният оператор φ спрямо стандартният базис от матричните единици е:

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) & \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 2 & -2\\ 3 & 6 & 4 & 8\\ 3 & -6 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned}\varphi(X+Y) &:= A(X+Y) + (X+Y)B = AX + AY + XB + YB =\\ &= [AX + XA] + [AY + YB] = \varphi(X) + \varphi(Y);\end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda X) = A(\lambda X) + (\lambda X)B = \lambda(AX + XB) = \lambda\varphi(X),$$

за произволни $X, Y \in V$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Това доказа линейността на φ. Отново за да намерим натрицата на φ спрямо стандартния базис от матричните единици в

$M_2(\mathbb{F})$ пресмятаме образите на базисните вектори.

$$\varphi(E_{11}) := AE_{11} + E_{11}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\varphi(E_{12}) := AE_{12} + E_{12}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$
$$\varphi(E_{21}) := AE_{21} + E_{21}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$
$$\varphi(E_{22}) := AE_{22} + E_{22}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Т.е. получихме, че

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{11}) &= 2.E_{11} + 1.E_{12} + 3.E_{21} + 0.E_{22};\\
\varphi(E_{12}) &= 2.E_{11} + 0.E_{12} + 0.E_{21} + 3.E_{22};\\
\varphi(E_{21}) &= 2.E_{11} + 0.E_{12} + 5.E_{21} + 1.E_{22};\\
\varphi(E_{22}) &= 0.E_{11} + 2.E_{12} + 2.E_{21} + 3.E_{22}.
\end{aligned}$$

Затова матрицата на φ спрямо стандартния базис от матричните единици в $M_2(\mathbb{F})$ е

$$C_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \varphi(E_{11}) & \varphi(E_{12}) & \varphi(E_{21}) & \varphi(E_{22}) \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.11. Намерете сами матрицата на φ от предната задача и на подточки 2. и 3. , където обаче $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 9.12. Нека $V = \mathbb{F}[x]^{\leq(n+1)}$. Да се докаже, че изображението $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, където:

$$\varphi(f)(x) := f(ax+b), \quad a, b \in \mathbb{F}, a \neq 0.$$

Да се напише матрицата на φ в базиса $1, 2, x^2, \ldots, x^n$ на V.

Решение. Нека $f, g \in \mathbb{F}[x]^{\leq(n-1)}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$ са произволни. Тогава

$$\begin{aligned}
&\varphi(f+g)(x) := (f+g)(ax+b) = f(ax+b) + g(ax+b) = \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x);\\
&\varphi(\lambda f)(x) := (ax+b) = \lambda\varphi(f)(x).
\end{aligned}$$

Това доказа, че φ е линеен оператор. Пресмятаме образите на базстните вектори

$$\begin{aligned}
&\varphi(1)(x) := 1 = 1.1 + 0.x + \ldots + 0.x^n \simeq (1, 0, \ldots, 0);\\
&\varphi(x)(x) := ax + b = b.1 + a.x + 0.x^2 + \ldots + 0.x^n \simeq (b, a, 0, \ldots, 0);\\
&\varphi(x^2)(x) := (ax+b)^2 = b^2.1 + 2ab.x + a^2.x^2 + 0.x^3 + \ldots + 0.x^n \simeq (b^2, 2ab, a^2, 0, \ldots, 0);\\
&\vdots\\
&\varphi(x^n)(x) := (ax+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^{n-k} b^k.
\end{aligned}$$

Затова

$$\varphi(x^n)(x) \simeq \left(\binom{n}{n} b^n, \binom{n}{n-1} ab^{n-1}, \ldots, \binom{n}{1} a^{n-1} b, \binom{n}{0} a^n \right).$$

Така матрицата на оператора φ спрямо стандартният базис - на мономите на $x-$ $1, x, \ldots, x^n$ е

$$A_\varphi = \begin{pmatrix}
1 & b & b^2 & \ldots & \binom{n}{n} b^n \\
0 & a & 2ab & \ldots & \binom{n}{n-1} ab^{n-1} \\
0 & 0 & a^2 & \ldots & \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{1} a^{n-1} b \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{0} a^n
\end{pmatrix}.$$

Задача 9.13. Нека при условието на горната Задача 3 е зададено изображението $\varphi : V \to V$ като

$$\varphi(f)(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{където } h \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\} \text{е фиксиран ненулев елемент.}$$

Да се напише матрицата на φ в базиса $1, x, x^2, \ldots, x^n$ на $V = \mathbb{F}[x]^{\leq (n+1)}$.

Задача 9.14. Да се докаже ,че изображението

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{F}[x]^{\leq (n+1)} \longrightarrow \mathbb{F}[x]^{\leq (n+1)},$$

което на всеки полином $f \in \mathbb{F}[x]^{\leq (n+1)}$ съпоставя производната му f', е линеен оператора (оператор на диференциране) и да се запише матрицата на $\frac{d}{dx}$ в базиса:

1. $1, x, x^2, \ldots, x^n$;
2. $1, (x-c), \frac{(x-c)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-c)^n}{n!}, c \in \mathbb{F}$.

Задача 9.15. В пространството $M_2(\mathbb{F})$ е дадено изображението $\varphi(X) = AX$, където $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Да се докаже, че φ е линейно изображение и да се намери матрицата му спрямо базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

За едно линейно изображение $\varphi : U \longrightarrow V$ между линейните пространства U и V над полето $\mathbb{F}$, можем да разглеждаме "ядро на φ е множеството от всички вектори от U, които φ "смачква"в нулевия вектор на V. Т.е.

$$\ker \varphi := \{u \in U \mid \varphi(u) = \mathcal{O}_V\} \subseteq U.$$

Освен, че ядрото $\ker \varphi \subseteq U$ е подмножество на U, то е подпространство. Т.е. $\ker \varphi \leq U$.

Освен това можем да разглеждаме и "образ на φ". Бележим $im\varphi$ или $\varphi(U) \subseteq V$. Т.е.

$$im\varphi = \{v \in V \mid \exists u \in U : \varphi(u) = v\} \subseteq V.$$

Освен, че $im\varphi$ е подмножество на V, образът е и негово подпространство $im\varphi \leq V$.

Ако разглеждаме $\varphi : V \to V$ да е линеен оператор на $n-$мерното линейно пространство V в себе си с базис $e_1, \ldots, e_n$, то образът на φ е подпространството на V, породено от образите на базистните вектори:

$$im\varphi = \ell(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Размерността на ядрото $\dim \ker \varphi =: d(\varphi)$ наричаме дефект[28] на линейното изображение φ.

Размерността на образа $\dim im\varphi =: rk(\varphi)$ наричаме ранг[29] на линейното изображение φ.

Когато $\varphi : V \to V$ е линеен оператор на V в себе си с $\dim V = n$. То рангът на φ съвпада с ранга матрицата на φ спрямо произволен базис. Тогава се доказва(Теорема за ранга и дефекта на оператора $\varphi \in HomV$), че е в сила

$$rk(\varphi) + d(\varphi) = \dim V = n.$$

Задача 9.16. Да се докаже, че изображението "проектиране на вектор от двумерната ревнина върху абсцисната ос"е линейно. Да се намерят ядрото, образът и матрицата му спрямо базисът $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.

Отг. $\ker \pi = \ell(e_2)$. Т.е. ядрото е ординатната ос. $im\pi = \ell(e_1)$. Т.е. образът на φ е абсцисната ос. Матрицата е $A_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 9.17. Нека e_1, e_2 е базис на V и $\varphi \in HomV$, действа по правилото

$$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) := \xi_1 e_1 + (-\xi_1 + 2\xi_2)e_2.$$

Да се намерят матрицата на φ в базиса

$$f_1 := e_1 + e_2, \quad f_2 := -2e_1 - e_2$$

и координатите на образа на вектора вектора $v = 2f_1 + 3f_2$ спрямо този базис.

[28]Защото за всички вектори от ядрото $\ker \varphi$, φ губи информацията за тях пренасяйки ги във V.

[29]Всички праобрази $\varphi^{-1}(\varphi(u)) = u + \ker \varphi$ са изоморфни като множества на ядрото на φ, а оттам и изоморфни помежду си. Всеки вектор $\varphi(u) \in im\varphi$ е определен с точност до събираемо от ядрото $\ker \varphi$. Затова, ако ядрото не е тривиално, т.е. $\ker \varphi \neq \{\mathcal{O}\}$, то векторите $\varphi(v)$ не можем еднозначно да "върнем."Което пък отговаря на факта, че в този случай, изображението не е инективно.

Решение.

$$\varphi(e_1) = \varphi(1.e_1 + 0.e_2) := 1.e_1 + (-1 + 2.0)e_2 = e_1 - e_2 \simeq (1, -1);$$
$$\varphi(e_2) = \varphi(0e_1 + 1.e_2) = 0.e_1 + (-0 + 2.1)e_2 = 2e_2 \simeq (0, 2).$$

Затова матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2 е $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Матрицата на прехода $T_{e\to f}$, съставяме по стълбове от координатите на втория базис спрямо първия. Т.е. $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Сега матрицата на φ в базиса f_1, f_2 на V е получава от

$$B_\varphi^f = T^{-1} A_\varphi^e T.$$

Затова намираме T^{-1} като $T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. И така

$$\begin{aligned} B_\varphi^f = T^{-1} A_\varphi^e T &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сега за да намерим координатите $\mathbf{x}_{\varphi(v)}$ на вектора $\varphi(v) = \varphi(2f_1 + 3f_2)$, пропускаме координатите на вектора v през матрицата B_φ на φ спрямо f_1, f_2.

$$\mathbf{x}_{\varphi(v)} = B_\varphi \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Т.е. получихме, че $\varphi(v) = -4f_1$.

Задача 9.18. Нека e_1, e_2, e_3 е базис на V и $\varphi \in HomV$, действа по правилото

$$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + e_3 e_3) := (\xi_1 + \xi_2)e_1 + (3\xi_1 - \xi_3)e_2 + (\xi_2 - \xi_3)e_3.$$

Да се намерят матрицата на φ в базиса

$$f_1 = -3e_1 + e_2, \quad f_2 = e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2 - e_3.$$

и координатите на образа на вектора $v = 2f_2$ спрямо този базис.

Отг.$B_\varphi^f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ -28 & -4 & 16 \\ -29 & -3 & 14 \end{pmatrix}$ и $\varphi(v) = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Нека са дадени два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ на линейното пространство V. Нека освен това $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in V$ е произволна система от вектори. И нека знаем координатите на векторите от втория базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и координатите на $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ спрямо първия базис $e_1, \ldots, e_n$. И това са:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots a_{n1}e_n;\\
&\mathbf{a}_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n;\\
&\vdots\\
&\mathbf{a}_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_1 = b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + \ldots + b_{n1}e_n;\\
&\mathbf{b}_2 = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + \ldots + b_{n2}e_n;\\
&\vdots\\
&\mathbf{b}_n = b_{1n}e_1 + b_{2n}e_2 + \ldots b_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Т.е. матриците $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ са наредените по стълбове координати съответно на векторите $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$. Т.е. матриците A и B са матрици на съответно някакви оператори $\tau, \sigma \in HomV$. По условие $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i, 1 \leq i \leq n$. Но както предположихме, че A е матрицата на оператора $\tau \in HomV$ и по построение координатите на $\mathbf{a}_i$ е точно $i-$тия стълб на A_τ и значи $\tau(e_i) = \mathbf{a}_i$ по определението за матрица на оператор. Аналогично понеже координатите на $\mathbf{b}_i$ са $i-$тия стълб на B_σ и сме предположили, че B е матрицата на оператора σ, то е в сила $\sigma(e_i) = \mathbf{b}_i, 1 \leq i \leq n$. И така от $\tau(e_i) = \mathbf{a}_i, \sigma(e_i) = \mathbf{b}_i$ и $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$. Получаваме

$$\varphi(\tau(e_i)) = \sigma(\mathbf{b}_i).$$

Т.е. $\varphi \circ \tau = \sigma$. Прилагайки[30] τ^{-1} от двете страни на последното равенство , получаваме $\varphi = \sigma \circ \tau^{-1}$. Но тогава е вярно съответното равенство и за матриците им

$$C_\varphi = B_\sigma A_{\tau^{-1}}^{-1} = BA^{-1}.$$

Показахме, че в такъв случай матрицата на φ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$ е $C_\varphi = BA^{-1}$.

Тук използвахме, засега само интуитивното, което ще докажете по-нататък в курса твърдение, че матрицата на оператор, който е композиция на два оператора е произведението от матриците на двата оператора.

За целта ето още един начин да разглеждаме задачата:

Да забележим, че $a = eA$ и $b = eB$, за $a = (a_1, \ldots, a_n), e = (e_1, \ldots, e_n), b = (b_1, \ldots, b_n)$. Сега, ако $M_\varphi \in M_n(\mathbb{F})$ е матрицата на φ в базиса e, то $\varphi(e) = eM$. Тогава

$$\varphi(a) = \varphi(eA) = \varphi(e)A.$$

Сега

$$eB = b = \varphi(a) = \varphi(e)A = (eM)A = e(MA),$$

[30]Забележете, че понеже $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са базис, то матрицата A, която се състои от координатите на този базис наредени по стълбове, е неособена и обратима и е обратим и оператора τ - отговарящ на нея.

откъдето по Лема 16.2 (Матрична форма на линейната независимост) следва,че

$$B = MA,$$

и така търсената матрица

$$M = BA^{-1}.$$

Задача 9.19. Нека e_1, e_2, e_3 е базис на V и $\varphi \in HomV$ изобразява векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ съответно във векторите $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Докажете, че векторите a_1, a_2 и a_3 са базис на V. Да се намери матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3, ако:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad \mathbf{a}_2 = 2e_1 + e_3, \quad \mathbf{a}_3 = e_1 + e_3; \\
&\mathbf{b}_1 = 4e_1 + 2e_2 + 5e_3, \quad \mathbf{b}_2 = e_1 + e_2, \quad \mathbf{b}_3 = e_3.
\end{aligned}$$

Решение. Да отбележим първо, че задачата е коректно зададена, понеже операторът е зададен чрез образите на три вектора само , ако тези вектори също образуват базис. И така съгласно вече доказаното , имаме $A^e_\varphi = BA^{-1}$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Намираме A^{-1} като:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/2 & 2 \end{array}\right).$$

Т.е. получихме $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$. И окончателно получаваме

$$C_\varphi = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Изчислително по-ефикасен начин, отново е подхода с матричните уравнения. Т.е. ние можем да постъпим по следния начин. Вместо да намираме първо A^{-1} и после да умножаваме две матрици $BA^{-1} = C_\varphi$, ние можем да решаваме матричното уравнение $XA = B$ относно $X = C_\varphi$.

А всъщност решаваме $A^t X^t = B^t$ и после транспонираме. Като да забележим, че е съществено след като решим матриното уравнение $A^t X^t = B^t$ и с елементарни преобразувания по редове сведем A^t към E_n, то това ни дава, че A^t е обратима или, еквивалентно неособена. Следователно A е неособена или обратима, а оттам и матрица на прехода от базиса e към базиса a. Тоава доказва, че $a = (a_1, a_2, a_3)$ е базис на пространството.

В случая Имаме
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}4 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2\end{array}\right).$$

Оттук получихме, че $X^t = C_\varphi^t = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Оттук транспонирайки, отново получаваме търсената матрица със значително по-малко изчисления
$$C_\varphi = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Задача 9.20. По условието на Задача 11 имаме:
$$\mathbf{a}_1 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \quad \mathbf{a}_2 = e_2 + 2e_3, \quad a_3 = e_1;$$
$$\mathbf{b}_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad \mathbf{b}_2 = e_1 + e_2, \quad \mathbf{b}_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

Отг. $\begin{pmatrix}2 & -11 & 6\\ 1 & -7 & 4\\ 2 & -6 & 3\end{pmatrix}$.

10 Действия с линейни изображения и техните матрици. Ядро и образ на линейно изображение. Намиране базис на ядрото и образа на линейно изображение.

Нека напомним, че ако имаме две линейни изображения $\varphi : U \to V$ и $\psi : U \to V$ над линейни пространства над полет $\mathbb{F}$, а $\lambda \in \mathbb{F}$ е скалар, то определихме тяхната сума и произвдение на φ с λ поточково. А именно
$$\varphi + \psi : U \to V, (\varphi + \psi)(u) := \varphi(u) + \psi(u), \quad \forall u \in U.$$
$$\lambda\varphi : U \to V, (\lambda\varphi)(u) := \lambda\varphi(u), \quad \forall u \in U.$$

Вече сте доказали, че от $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, следва,че тяхната сума също $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ е линейно изображение, както и $\lambda\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$.

Ще споменем, но без да проверяваме това, ако U и V са линейни пространства над поле $\mathbb{F}$, множеството $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ на линейните изображения от $U \to V$ е линейно пространство над $\mathbb{F}$ относно поточково определените операции събиране на линейни изображения и умножение на линейно изображение с число, които определихме погоре.

Вярно е, следното

Твърдение 10.1. Нека U е линейно пространство над $\mathbb{F}$ с размерност $\dim U = n$, а V е линейно пространство над $\mathbb{F}$ с $\dim V = m$. Тогава пространството $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ на линейните изображения от U във V е изоморфно на матричното пространство $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Т.е.

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V), +, \cdot_{\mathbb{F}}) \simeq (M_{m\times n}(\mathbb{F}), +, \cdot_{\mathbb{F}}).$$

Като при всеки избор на базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V, изображението

$$\mathcal{A} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{F}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \ni \varphi \longmapsto \mathcal{A}(\varphi) := \mathcal{A}_\varphi \in M_{m\times n}(\mathbb{F}),$$

което на всяко линейно изображение $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, съпоставя неговата матрица $\mathcal{A}_\varphi \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ спрямо базисите e и f е изоморфизъм на линейни пространства.

Доказателство. Първо нека отбележим, че в този случай не е нужно да провеяваме за коректност дефиницията на линейното изображние, понеже в пространството $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ няма различни представители за едно и също линейно изображение, при фиксиран базис, и по този начин е ясна коректността.

По-нататък, за това, че $\mathcal{A}$ е инективно, е очевидно понеже матрицата $\mathcal{A}(\varphi) := \mathcal{A}_\varphi \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ на φ спрямо базисите e и f е еднозначно определя $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$.

За това, че $\mathcal{A}$ е сюрективно. Произволно избрана матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ е матрица[31] на някое линейно изображение $U \to V$ спрямо въпросните фиксирани базиси.

Показахме, че $\mathcal{A}$ е биекция. Нека покажем, че това изображение е изоморфизъм на линейни пространства, като покаже, че то запазва операциите. Т.е. трябва да проверим, че

$$\begin{tikzcd}
M_{m\times n}(\mathbb{F}) \times M_{m\times n}(\mathbb{F}) \arrow[r, "+_{M_{m\times n}(\mathbb{F})}"] \arrow[d, "\simeq\mathcal{A}"] & M_{m\times n}(\mathbb{F}) \arrow[d, "\simeq\mathcal{A}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \arrow[r, "+_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V)}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \times M_{m\times n}(\mathbb{F}) \arrow[r, "\cdot_{\mathbb{F}}"] \arrow[d, "\simeq\mathcal{A}"] & M_{m\times n}(\mathbb{F}) \arrow[d, "\simeq\mathcal{A}"] \\
\mathbb{F} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \arrow[r, "\cdot_{\mathbb{F}}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)
\end{tikzcd} .$$

[31] Както вече споменахме в миналото упражнение.

Наистина, за произволни $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, от определението за матрица на $\mathcal{A}_{\varphi+\psi}$ на линейното изображение $\varphi + \psi$ следва, че

$$\begin{aligned} f\mathcal{A}_{\varphi+\psi} &= ((\varphi+\psi)(e)) = ((\varphi+\psi)(e_1), \dots, (\varphi+\psi)(e_n)) \\ &= ([\varphi(e_1) + \psi(e_1)], \dots, [\varphi(e_n) + \psi(e_n)]) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= \varphi(e) + \psi(e) = f\mathcal{A}_{\varphi} + f\mathcal{A}_{\psi} = f(\mathcal{A}_{\varphi} + \mathcal{A}_{\psi}). \end{aligned}$$

Остана да се възползваме от Лемата за матричен записн а линейната независимост на изображение и това,че базиса $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V е линейно независима система вектори, за да изведем:

$$f[\mathcal{A}_{\varphi+\psi} - (\mathcal{A}_{\varphi} + \mathcal{A}_{\psi})] = f\mathcal{A}_{\varphi+\psi} - f(\mathcal{A}_{\varphi} + \mathcal{A}_{\psi}) = (\mathcal{O}_V, \dots, \mathcal{O}_V) \in M_{1\times n}(V).$$

Което доказа, че

$$\mathcal{A}_{\varphi+\psi} = \mathcal{A}_{\varphi} + \mathcal{A}_{\psi}.$$

Аналогично, за произволни $\lambda \in \mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$, определението за матрица $\mathcal{A}_{\lambda\varphi}$ дава

$$\begin{aligned} f\mathcal{A}_{\lambda\varphi} &= (\lambda\varphi)(e) = ((\lambda\varphi)(e_1), \dots, (\lambda\varphi)(e_n)) = (\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_n)) \\ &= \lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \lambda\varphi(e) = \lambda(f\mathcal{A}_{\varphi}) = f(\lambda\mathcal{A}_{\varphi}). \end{aligned}$$

В резултат

$$f[\mathcal{A}_{\lambda\varphi} - (\lambda\mathcal{A}_{\varphi})] = f\mathcal{A}_{\lambda\varphi} - f(\lambda\mathcal{A}_{\varphi}) = (\mathcal{O}_V, \dots, \mathcal{O}_V) \in M_{1\times n}(V).$$

И отново по въпросната лема и линейната независимост на базиса $f = (f_1, \dots, f_m) \in M_{1\times n}(V)$, това доказа

$$\mathcal{A}_{\lambda\varphi} = \lambda\mathcal{A}_{\varphi}.$$

Така, освен че $\mathcal{A}$ е биекция, то е и линейно изображение, което го прави линеен изоморфизъм и твърдението е доказано. □

Аналогично вярно е и че

Твърдение 10.2. Ако $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$ са линейни изображения на пространства над полет $\mathbb{F}$, то

$$\psi\varphi : U \to W, \quad (\psi\varphi)(u) := \psi(\varphi(u)), \quad \forall u \in U$$

е линейно изображение, което се нарича произведение на φ и psi.

Доказателство. Проверката е директна и остава за упражнение. □

Известно е, че произведението на линейни изображения е асоциативно, в сила са дистрибутивните закони свързващи го със , вече определената поточково, сума на линейни изображения.

В сила е и следното много важно

Твърдение 10.3. Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица $\mathcal{A}_\varphi$ спрямо базис $e \in M_{1\times n}(U)$ на U и базис $f \in M_{1\times m}(V)$ на V, а $\psi : V \to W$ е линейно изображение с матрица $\mathcal{A}_\psi$ спрямо базиса f на V и базиса $g \in M_{1\times k}(W)$ на W, то матрицата на $\psi\varphi$ спрямо базиса e на U и базиса g на W е:

$$\mathcal{A}_{\psi\varphi} = \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_\varphi.$$

Доказателство.

$$\begin{array}{ccc} M_{m\times n}(\mathbb{F}) \times M_{n\times k}(\mathbb{F}) & \xrightarrow{\cdot_{M(\mathbb{F})}} & M_{m\times k}(\mathbb{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle \simeq\mathcal{A}} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq\mathcal{A}} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U,W) & \xrightarrow{\circ_{\mathrm{Hom}}} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W) \end{array}$$

От определенията на матриците $\mathcal{A}_{\psi\varphi}, \mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_\psi$, Лематата за матричен запис на линейността на изображение(Лема 21.1 от лекции) и асоциативността на матричното умножение следва

$$\begin{aligned} g\mathcal{A}_{\psi\varphi} &= (\psi\varphi)(e) = ((\psi\varphi)(e_1), \ldots, (\psi\varphi)(e_n)) = (\psi(\varphi(e_1)), \ldots, \psi(\varphi(e_n))) \\ &= \psi(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \psi(\varphi(e)) = \psi(f\mathcal{A}_\varphi) = \psi(f)\mathcal{A}_\varphi = (g\mathcal{A}_\psi)\mathcal{A}_\varphi = g(\mathcal{A}_\psi\mathcal{A}_\varphi). \end{aligned}$$

Остана да приложим Лемата за матричен запис на линейната независимост на вектори (Лема 16.2 от лекции) към линейно независимата система вектори $g = (g_1, , g_k) \in M_{1\times k}(W)$ и получаваме

$$\mathcal{A}_{\psi\varphi} = \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_\varphi.$$

□

Всъщност това е и причината да умножаваме матрици по начина, по който го правим. Това е просто композиция(умножение) на линейните оператори с тези матрици.

Пример 10.4. Нека сме фиксирали някакви базиси на линейните пространства U, V, W. Ако е дадено линейно изображение $\varphi : U \to V$ с матрица $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ както и линейно изображение $\psi : V \to W$ с матрица $B_\psi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{F})$, то изображението $\psi\varphi : V \to W$ е линейно и спрямо тези фиксирани базиси има матрица

$$C_{\psi\varphi} = B_\psi A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 21 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Тук φ действа от $3-$мерното U в $3-$мерното V. Докато ψ действа от $3-$мерното V в $2-$мерното W.

Задача 10.5. Нека e_1, e_2 е базис на V и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ е линеен оператор с матрица $A_\varphi^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ спрямо базиса $a_1 = 3e_1 + e_2, \quad a_2 = -e_1 + e_2$ на V. Нека освен това $\psi \in \operatorname{Hom} V$ е с матрица $B_\psi^b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ спрямо базиса $b_1 = 5e_1 - e_2, \quad b_2 = e_1 + 3e_2$.

Намерете матрицата на линейния оператор $\varphi\psi$ в базиса $e = (e_1, e_2) \in M_{1\times 2}(V)$.

Решение. Матрицата на прехода от базиса e в базиса a е $T = T_{e\to a} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрицата на прехода от базиса e в базиса b на V е $S = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Затова матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2 на V е

$$A_\varphi^a = T^{-1} A_\varphi^e T \Rightarrow A_\varphi^e = T A_\varphi^a T^{-1}.$$

Затова

$$\begin{aligned} A_\varphi^e = T A_\varphi^a T^1 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицата на ψ спрямо базиса e_1, e_2 на V е Имаме, че за матрицата на прехода $S = S_{e\to b}$ от базиса e към базиса b, е в сила $B_\psi^b = S^{-1} B_\psi^e S$, откъдето след последователно ляво умножение с S и дясно умножение с S^{-1},дава $B_\psi^e = S B_\psi^b S^{-1}$. Затова

$$\begin{aligned} B_\psi^e = S B_\psi^b S^{-1} &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 13 & -15 \\ 55 & 35 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Затова и матрицата на $\varphi\psi \in \operatorname{Hom} V$ спрямо базиса e е

$$\mathcal{A}_{\varphi\psi}^e = A_\varphi^e B_\psi^e = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -15 \\ 55 & 35 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -42 & -50 \\ 110 & 70 \end{pmatrix}.$$

Задача 10.6. В тримерно простраснство V са дадени два базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ и $f = (f_1, f_2, f_3)$, като

$$f_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad f_2 = e_1 - e_2, \quad f_3 = e_1.$$

Дадени са още $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, зададен с образите на базсните вектори като

$$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3) = (\xi_1 + 2\xi_3)e_1 + (-\xi_1 + 2\xi_2 - 4\xi_3)e_2 + (\xi_1 + 4\xi_3)e_3,$$

и оператор $\psi \in \operatorname{Hom} V$ с матрица $B_\psi^f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ спрямо базиса f_1, f_2, f_3 на V.

Да се намери

1. Матрицата на оператора $\varphi\psi$ в базиса e_1, e_2, e_3 на V.

2. $(\varphi+\psi)(x)$, където $x = 2f_1 + f_2 + 2f_3$.

Решение. Първо ще намерим матрицата на φ спрямо базиса e. За целта пресмятаме орбазите на базисните вектори.

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= e_1 - e_2 + e_3 \simeq (1, -1, 1);\\
\varphi(e_2) &= 2e_2 \simeq (0, 2, 0);\\
\varphi(e_3) &= 2e_1 - 4e_2 + 4e_3 \simeq (2, -4, 4).
\end{aligned}$$

Сега, матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на V е матрицата, съставена по стълбове от координатите на образите на базисните вектори.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

По-нататък. Матрицата на прехода $T = T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Намираме нейната обратна

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Т.е.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

За да намерим матрицата B^e_ψ, ще постъпим така. От равенството $B^f_\psi = T^{-1}B^e_\psi T$ след ляво умножение на двете страни T и дясно умножение с T^{-1} извеждаме, че

$$\begin{aligned}
B^e_\psi = TB^f_\psi T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Накрая пресмятаме матрицата на $\varphi\psi$ в базиса е като произведенниeто на матриците съответно на φ и ψ.

$$\mathcal{A}^e_{\varphi\psi} = A^e_\varphi B^e_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -7 & 10 & -7 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Относно втората подточка. Ние търсим $(\varphi+\psi)(x)$, където $x = 2f_1 + f_2 + 2f_3$.

Вече имаме матриците на φ и ψ в базиса e. Затова е по-удобно, просто да пресметнем вектора x в базиса e.

$$x = 2f_1 + f_2 + 2f_3 = [2e_1 + 2e_2 - 2e_3] + [e_1 - e_2] + [2e_1] = 5e_1 + e_2 - 2e_3.$$

Матрицата на $\varphi+\psi \in \operatorname{Hom} V$, спрямо базиса e, е сумата на матриците на φ и φ, в базиса e. Съгласно вече доказаното. Така

$$\mathcal{C}^e_{(\varphi+\psi)} = A^e_\varphi + B^e_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

И така, ако $\varphi(ex) = ey$, то

$$y = \mathcal{C}^e_{(\varphi+\psi)}.x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Т.е. получихме $(\varphi+\psi)(x) = 10e_1 + 2e_2 - 4e_3$. За да получим координатите на този вектор спрямо базиса f, умножаваме отдясно T^{-1} с координатния стълб на $(\varphi+\psi)(x)$ спрямо базиса e.

$$T^{-1}z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Т.е. $(\varphi+\psi)(x) = 4f_1 + 2f_2 + 4f_3$.

За всяко линейно изображение $\varphi : U \to V$, можем да разглеждаме неговото ядро

$$\ker\varphi := \{u \in U \quad | \quad \varphi(u) = \mathcal{O}_V\} \subseteq U.$$

Ядрото е множеството от вектори $v \in V$, чиито координатни стълбове $x_v \in M_{1\times m}(\mathbb{F})$ решават матричното уравнение $A_\varphi x = \mathbb{O}_{n\times 1}$. Т.е. ядрото е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти, матрицата на линейното изображение.

Също така и неговият образ

$$\operatorname{im}\varphi := \{v \in V \quad | \quad \exists u \in U : \varphi(u) = v\} \subseteq V.$$

Образът е линейното подпространство на V, породено от $\operatorname{im}\varphi = \ell(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$.

Това е така, защото произволен вектор $\varphi(v) \in \operatorname{im}\varphi$, е образ на $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, т.е.

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i)$$

е линейна комбинация на образите на базисните вектори на U.

Всички праобрази $\varphi^{-1}(\varphi(u)) = u + \ker\varphi$ са изоморфни като множества на ядрото на φ, а оттам и изоморфни помежду си. Всеки вектор $\varphi(u) \in im\varphi$ е определен с точност до събираемо от ядрото $\ker\varphi$. Затова, ако ядрото не е тривиално, т.е. $\ker\varphi \neq \{\mathcal{O}\}$, то векторите $\varphi(v)$ не можем еднозначно да "върнем."Което пък отговаря на факта, че в този случай, изображението не е инективно. За да се изясни по-добре, нека определим следните понятия:

Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с образ $\varphi(U) \subseteq V$. Сега всеки вектор от образа е от вида $\varphi(u) \in \varphi(U)$, за поне един, но не задължително единствен, вектор $u \in V$. Определяме слой на $\varphi(u) \in V$ чрез φ като множеството

$$\varphi^{-1}(\varphi(u)) := \{u' \in U | \varphi(u') = \varphi(u)\} \subset U.$$

Т.е. множеството от всички вектори на U, които φ изпраща във фиксирания разглеждан вектор $\varphi(u) \in \varphi(U)$.

Но по този начин всеки вектор на U принадлежи точно на един слой. Затова U се разбива в непресичащо се обединение

$$U = \coprod_{\varphi(u) \in V} \varphi^{-1}(\varphi(u))$$

на всевъзможните слове чрез φ.

Важно е , че слоя чрез φ, на нулевия вектор е точно ядрото на φ.

$$\varphi^{-1}(\mathcal{O}_V) := \{u' \in U | \varphi(u') = \mathcal{O}_V\} = \ker\varphi.$$

Вярно е , че $u + \ker\varphi = \varphi^{-1}(\varphi(u))$. Действително. Понеже за всеки вектор $w \in \ker\varphi$ от ядрото

$$\varphi(u + w) = \varphi(u) + \varphi(w) = \varphi(u) + \mathcal{O}_V = \varphi(u).$$

Това доказа, че $u + w \in \varphi^{-1}(\varphi(u))$. Т.е. $u + \ker\varphi \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(u))$.

Обратно. Нека $v \in \varphi^{-1}(\varphi(u))$. От равенството $\varphi(v) = \varphi(u)$ следва $\varphi(v - u) = \varphi(v) - \varphi(u) = \mathcal{O}_V$. Но това означава, че $w := v - u \in \ker\varphi$. Тогава $v = u + w \in u + \ker\varphi$. Затова $\varphi^{-1}(\varphi(u)) \subseteq u + \ker\varphi$.

Определение 10.7. Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то размерността $d(\varphi) = \dim\ker\varphi$ на ядрото на φ се нарича дефект на φ, а размерността $rk(\varphi) = \dim im\varphi$ на образа на φ се нарича ранг на φ.

Теорема 10.8 (Теорема за ранга и дефекта на линейно изображение.)**.** Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на $n-$ мерно пространство U в произволно линейно пространство V. Тогава рангът $rk\varphi$ и дефектът $d(\varphi)$ на φ изпълняват равенството

$$rk(\varphi) + d(\varphi) = n.$$

Задача 10.9. Докажете, че за едно линейно изображение $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$. Неговото ядро е подпространство на U, а неговият образ е подпространство на V.

Нека напомним, че едно изображение $\varphi : U \to V$ е инективно, ако $u_1 \neq u_2 \Rightarrow \varphi(u_1) \neq \varphi(u_2)$.

Задача 10.10. Докажете, че едно линейно изображение $\varphi : U \to V$ е инективно точно тогава, когато неговото ядро е тривиално, т.е. е съставено само от нулевия вектор $\ker \varphi = \{\mathcal{O}_U\}$.

Задача 10.11 (Лема на Фитинг)**.** Нека V е крайномерно линейно пространство над поле $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}} V$. Да се докаже, че съществува естествено число $m \in \mathbb{N}$, такова че пространството се разлага в директна сума

$$V = \ker \varphi^m \oplus \mathrm{im}\, \varphi^m.$$

Задача 10.12. Нека e_1, e_2, e_3, e_4 е базис на V, а $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V)$. Нека освен това матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3, e_4 е

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят базиси на подпространствата $\ker \varphi, \mathrm{im}\, \varphi, \ker \varphi \cap \mathrm{im}\, \varphi, \ker \varphi + \mathrm{im}\, \varphi \leq V$.

Решение. Понеже е дадена матрицата на φ в базиса e, то нейните стълбове са координатите на образите на базисните вектори и можем да кажем, че за

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) = a_1 = (-1, 0, 1, -1), \quad \varphi(e_2) = a_2 = (-2, 0, 2, -2) \\ \varphi(e_2) = a_3 = (-3, 1, 2, -2), \quad \varphi(e_4) = a_4 = (-2, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

имаме

$$\varphi(V) = \mathrm{im}\, \varphi = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Прилагаме метода на линейните обвивки

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Това показа, че $(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$, т.е. произволна система от 3 вектора от $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ е линейно независима.[32] Затова един базис[33] на $\mathrm{im}\, \varphi$ е a_1, a_2, a_3. Т.е

$$\mathrm{im}\, \varphi = \ell(a_1, a_2, a_3) = \ell((-1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

[32] Всяка такава система се нарича максимална линейно независима подсистема.

[33] Или пък $(-1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$.

За да намерим базис на $\ker\varphi$ решаваме хомогенната система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{4\times 1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Така

$$\ker\varphi : \left| \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Полагаме $x_2 := p$ и получаваме $x_1 = -2p, x_3 = 0, x_4 = 0$. Т.е. въпросната система хомогенни линейни уравнения има общо решение

$$(-2p, p, 0, 0).$$

Вземаме една линейно независима стойност, която в случая е всяка стойност на $p \in \mathbb{C}$, издигаща ненулев вектор. Например

$$p = 1 \longmapsto (-2, 1, 0, 0).$$

И така $\ker\varphi = \ell(-2, 1, 0, 0)$. Също намираме представяне на образа като хомогенна система, чрез едно ФСР от общото решение, което по-горе намерихме.

$$\operatorname{im}\varphi : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Остана да намерим базиси на $\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi$ и $\ker\varphi + \operatorname{im}\varphi$. Което е вече задача , която сме решавали, т.к. намерихме ядрото и образа в явен вид.

Намираме базис на сечението $\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi$ като долепим хомогенните системи за $\ker\varphi$ и $\operatorname{im}\varphi$ и решим новополучената хомогенна система. Една нейна фундаменатална система от решения е базис на това сечение.

$$\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi : \left| \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

Затова

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim (E_4 | \mathbb{O}_{4\times 1}).$$

Т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ и сечението е нулевото пространство. Така получихме, че дефекта на φ е $d(\varphi) = \dim \ker \varphi = 1$ и теоремата за ранга и дефекта получаваме, че

$$d(\varphi) + rk(\varphi) = \dim(V) = 4 \Rightarrow (\varphi) = \dim \operatorname{im} \varphi = 4 - 1 = 3.$$

$$\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi = \{\mathcal{O}\}.$$

Сечението е нулевото пространство и това означава, че сумата $\ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi = V$ е директна и дава цялото пространство V.

Задача 10.13. Нека при условията на Задача 6 , линейният оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}} V$ има матрица спрямо базиса e.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отг.Ядрото се поражда, например от векторите $(-2, 1, 0, 0)$ и $(1, 0, -1, 1)$, а образа се поражда от $(1, 0, -1, 1)$ и $(0, 1, -1, 1)$. Базис на сечението $\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi$ е например векторът $(2, -1, -2, 1)$. А на сумата $\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi-$ векторите $(1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, 2)$ и $(0, 0, -1, 1)$.

Задача 10.14. По усовието на същата задача

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отг.Базис на $\ker \varphi$ е например векторът $(-2, 1, 0, 0)$, а на $\operatorname{im} \varphi-$ векторите

$$(-1, 1, -1, 1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 2).$$

Сечението е $\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi = \{\mathcal{O}\}$. А сумата $\ker \varphi + \operatorname{im} \varphi = V$.

Задача 10.15. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}} V$ е линеен оператор , такъв че $\varphi^2 = \varphi$. Докажете, че в този случай

$$\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi = \{\mathcal{O}\} \quad \text{и} \quad \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi = V.$$

Решение. Нека заебелжим първо, че от $\forall v \in V$ имаме представянето $v = \varphi(v) + (v - \varphi(v))$ и следователно $V = \ker \varphi + \operatorname{im} \varphi$, съгласно

$$\varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(\varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = \mathcal{O}, \quad \text{следователно} \quad v - \varphi(v) \in \ker \varphi.$$

Използвахме,че $\varphi^2 = \varphi$.

За всеки $v \in \ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi$ имаме $v = \varphi(w)$, за някой вектор $w \in V$.

Тогава

$$\varphi(v) = \varphi(\varphi(w)) = \varphi^2(w) = \varphi(w) = v, \quad \text{но} \quad \varphi(v) = \mathcal{O} \quad \text{следователно} \quad v = \mathcal{O}.$$

Оттук $\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi = \{\mathcal{O}\}$ и значи сумата е директна $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$.

Нещо повече, горната проверка че за всяко $v \in V$ е изпълнено $\varphi(v) = v$ показва също,че $\varphi_{|\operatorname{im}\varphi} = \mathrm{id}_V$. И също така, че $\operatorname{im}\varphi = \ker(\varphi - \mathrm{id}_V)$. Оттук

$$V = \ker\varphi \oplus \ker(\varphi - \mathrm{id}).$$

Да забележим,че горната сума ни дава, че матрицата на φ е диагонализируема.

Това е така, съгласно $A = \begin{pmatrix} \varphi_{|\ker\varphi} & 0 \\ 0 & \varphi_{|(\ker(\varphi-\mathrm{id}))} \end{pmatrix}$ е диагонална с нули ($\dim\ker\varphi$ на брой) и единици($\dim\ker(\varphi - \mathrm{id})$ на брой). Съществено изпозлвахме, че $\ker\varphi, \ker(\varphi - \mathrm{id})$ са $\varphi-$инвариантни, което е очевидно.

Задача 10.16. Докажете,че ако $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ са такива,че $A^2 = A, B^2 = B$ и $AB = BA$, то A и B са едновременно диагонализируеми(диагонални в един и същи базис).

Определение 10.17. Линейните изоморфизми $\varphi : U \to U$ на линейно пространство U над полето $\mathbb{F}$ в себе си, се наричат обратими линейни оператори.

Ако φ е обратим линеен оператор, то неговия обратен φ^{-1} също е обратим с обратен $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.

11 Характеристичен полином на квадратна матрица и на линеен оператор. Собствени вектори и собствени стойности. Диагонализация на матрица с прост спектър.

Задача 11.1. Да се намерят неособена матрица T и диагонална матрица D, такива че $T^{-1}AT = D$, където A е матрицата:

1. A$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; Отг. 1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

2. A $= \begin{pmatrix} -4 & -12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; Отг. 2. $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. A$= \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$; Отг. 3. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4. A $= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; Отг. 4. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5. A $= \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; Отг. 5. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; Отг. 1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

Задача 11.2. В линейното пространство V над полето $\mathbb{R}$ с базис e_1, e_2, e_3, e_4 е даден линеен оператор φ чрез матрицата си спрямо този базис

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на φ. Да се провери, че подпространството $M = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където $a_1 = e_1 - e_3, a_2 = e_2 + e_4, a_3 = e_1 - 3e_3 - 4e_4$ е $\varphi-$инвариантно.

12 Линейни пространства с метрика. Евклидови и унитарни пространства. Метод на Грам-Шмид

Определение 12.1. Нека V е линейно пространство над $\mathbb{F}$, като $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Скаларно произведение наричаме всяко изображение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{F},$$

изпълняващо следните свойства

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \quad \forall u, v \in V$;
2. $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle, \quad \forall u_1, u_2, v \in V$;
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v, \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$;
4. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad \forall v \in V$ с $\langle v, v \rangle = 0 \in \mathbb{F}$ точно когато $v = \mathcal{O}_V \in V$.

Нека направим забележката, че последното $\langle v, v \rangle$ се нарича скаларен квадрат на вектора v.

Да отбележим, че по-общо въпреки, че няма да се впускаме в подробности. В момента, в който въведем скаларно произведение в някое пространство, ние вече имаме представа за близост. С други думи можем да говорим за разстояние между вектори.

Определение 12.2. Линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ се нарича евклидово, ако в него е определено скаларно произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.

Множеството $\mathrm{C}^{\infty}((a,b), \mathbb{R})$ на всички безкрайно гладки функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Т.е. функциите, които $\forall n \in \mathbb{N}$ $n-$тата и производна $f^{(n)}$ е диференцируема в (a, b), а $f^{(n+1)}$ е непрекъсната в (a, b). Множеството $\mathrm{C}^{\infty}((a,b), \mathbb{R})$, снабдено с поточковите операции

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad f, g \in \mathrm{C}^{\infty}((a,b), \mathbb{R}),$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathrm{C}^{\infty}((a,b), \mathbb{R})$$

се превръща в линейно пространство $(\mathrm{C}^\infty((a,b),\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Проверката на аксиомите остава за упражнение на студентите.

За произволно фиксирано $m\in\mathbb{N}$, множеството $\mathrm{C}^m((a,b),\mathbb{R})$ на $m-$кратно гладките функции. Т.е функциите $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, за които $f',f'',\ldots,f^{(m-1)}$ са диференцируеми в (a,b), а $f^{(m)}$ е непрекъсната в (a,b), е подпрострстанство на $\mathrm{C}^\infty((a,b),\mathbb{R})$.

Горният индекс m се нарича степен на гладкост на функцията f в интервала (a,b). Например отбелязваме с $\mathrm{C}^1((a,b),\mathbb{R})$ множеството на енократно гладките функции, т.е. функциите $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, които са диференцируеми в (a,b) и производната им f' е непрекъсната в (a,b).

Отбелязваме с $C((a,b),\mathbb{R})$ множеството от непрекъснатите функции $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ в (a,b). В сила са включванията на подпространства

$$\mathrm{C}(a,b)\subset\mathrm{C}^1(a,b)\subset\mathrm{C}^2(a,b)\subset\ldots\subset\mathrm{C}^n(a,b)\subset\ldots\subset\mathrm{C}^\infty(a,b).$$

Ако допълнително снабдим пространството $\mathrm{C}^\infty((a,b),\mathbb{R})$ със скаларно произведение

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathrm{C}^\infty((a,b),\mathbb{R})\times\mathrm{C}^\infty((a,b),\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R},$$

то се превръща в линейно пространство с метрика. Едно, и в интерес на истината най-често използваното, скаларно произведение в това пространство е

$$\langle f,g\rangle:=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx.$$

Очевидно е, че

$$\langle f,g\rangle:=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=\langle g,f\rangle\,.$$

От линейността на определения риманов интеграл следва и линейността на това скаларно произведение по първия му аргумент

$$\langle f_1+f_2,g\rangle:=\int\limits_a^b[f_1(x)+f_2(x)]g(x)dx=\int\limits_a^b f_1(x)g(x)dx+\int\limits_a^b f_2(x)g(x)dx=\langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle\,.$$

$$\langle\lambda f,g\rangle:=\int\limits_a^b\lambda f(x)g(x)dx=\lambda\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=\lambda\,\langle f,g\rangle\,.$$

Позитивността на скаларния квадрат на това скаларно произвдение следва от свойстовото позитивност на определения риманов интеграл

$$\langle f,f\rangle:=\int\limits_a^b[f(x)]^2dx\geq 0,$$

при това равенство е изпълнено точно, когато $f(x)=0,\quad\forall x\in(a,b)$.

Задача 12.3. Кои от следните равенства задават скаларно произведение в пространството $\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$ на непрекъснатите в $[a,b]$ реалнозначни функции.

1.
$$\varphi(f,g) := f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

2.
$$\psi(f,g) := \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} f(q)g(q).$$

Решение. За първата формула са изпълнени всички аксими за скаларно произведение, без позитивността на "скаларния квадрат". Наистина.

$$\varphi(f,g) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi(g,f),$$

за произволни $f, g \in \mathrm{C}[a,b]$. Линейността относно първия аргумент също е налице

$$\begin{aligned}\varphi(f_1+f_2,g) :&= \left[f_1\left(\frac{a+b}{2}\right) + f_2\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &= f_1\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) + f_2\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &= \varphi(f_1,g) + \varphi(f_2,g).\end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda f,g) := \lambda f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \lambda\varphi(f,g).$$

Тук $\lambda \in \mathbb{R}, f, f_1, f_2, g \in \mathrm{C}[a,b]$ бяха произволни фиксирани. Обаче, при

$$\varphi(f,f) = \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

е вярно, че винаги е положително, но не е вярно ,че обезателно трябва f да тъждествно нулевата функция, за да бъде нулев скаларния квадрат по-горе. Действително. Например функцията

$$f(x) := \begin{cases} 0, \quad \text{ако} \quad x = \frac{a+b}{2} \\ |x| - \left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \text{ако} \quad x \neq \frac{a+b}{2} \end{cases}.$$

Тази функция не е тъждествно нулевата функция и е непкреъсната. Обаче нейният скаларен квадрат, по φ, е нулев. Т.е. φ не може да се нарече скаларно произвдение.

Относно ψ. Отново тривиално се проверява, че ψ изпълнява:

$$\psi(f,g) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} f(q)g(q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} g(q)f(q) = \psi(g,f).$$

Линейността на ψ по първия аргумент също е очевидна.

$$\psi(f_1+f_2,g) := \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} [f_1(q)+f_2(q)]g(q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} f_1(q)g(q) + \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} f_2(q)g(q)$$
$$= \psi(f_1,g)+\psi(f_2,g).$$

$$\psi(\lambda f,g) := \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} \lambda f(q)g(q) = \lambda \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} f(q)g(q) = \lambda\psi(f,g).$$

Интересно е да помислим за позитивността на "скаларния квадрат"чрез ψ.

$$\psi(f,f) := \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} [f(q)]^2 > 0.$$

Отново е очевидно, че тази величина е положителна. Тук, обаче не е възможно $\psi(f,f) = 0$ да бъде нула, а f да не бъде тъждествно нулевата функция. Това е така защото рационалните, както и ирационалните, числа с гъсти в $\mathbb{R}$, а и в $[a,b]$. По този начин за да бъде величината $(f,f) = 0$, то функцията $f(x)$ трябва да бъде нула за всяко $q \in \mathbb{Q}\cap[a,b]$ рационално число в интервала $[a,b]$. Т.е. от $\psi(f,f) = 0$ обезателно следва, че $f(x) = 0$ в гъсто множество. Но това означава, че ако f приема стойност, различна от нула в $[a,b]$, то f ще има прекъсване в тази стойност.

Наистина, да предположим, че например

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad x\in[a,b] \\ x_0\neq 0, & \text{ако} \quad x = x_0 \in [a,b]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$

Тогава бързо се убеждаваме, че f има прекъсване в x_0.

Вижда се например като вземем произволен отворен интервал с център x_0. Колкото и да е малък този интервал в него има гъсто множество от рационални числа. И така f приема стойност нула в него, но в неговия център функцията приема стойност $x_0 \neq 0$. Т.е. $f(x)$ не клони към $f(x_0)$, когато x клони към x_0. Така се убедихме, че функцита трябва да бъде прекъсната за да е възможно $\psi(f,f) = 0$ с $f\neq 0$ в $[a,b]$. Затова $\psi(f,f) \geq 0$ за всяка $f \in \mathrm{C}[a,b]$, при това равенство се постига точно когато f е тъждествено нулевата функция. Доказахме, че ψ задава скаларно произведение в $\mathrm{C}[a,b]$.

Връщаме се в доброто старо пространство $\mathbb{R}^n$, което всички обичаме и познаваме. В него скаларно произведение , можем да въведем като

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n, \quad \langle x,y\rangle = \langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{29}$$

Горното е естествено продължение на скаларното произведение, което сте използвали в геометрията и определили като

$$\langle a,b\rangle := |a|.proj_a b = |a|.|b|\cos\angle(a,b).$$

Определение 12.4. Норма в $\mathbb{R}^n$ наричаме всяка функция

$$||\cdot|| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty),$$

изпълняваща:

1. Позитивност $||x|| \geq 0$ с равенство точно , когато $x = \mathcal{O}$ е нулевият вектор;
2. $||\lambda x|| = \lambda ||x||$;
3. Нервенство на триъгълника $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Въвеждаме нормата, която често се нарича "Евклидова норма"с равенството

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Заедно със скаларното произведение определено с 30, линейнотото пространство $\mathbb{R}^n$ се превръща в евклидово пространство.

При даден вектор $v \in \mathbb{R}^n$, вектора $\frac{v}{||v||} \in \mathbb{R}^n$ има норма

$$||\frac{v}{||v||}|| = \frac{1}{||v||}.||v|| = 1.$$

Този вектор има същото направление и посока като вектора v, но има дължина едно. Когато сме направили това, казваме че сме нормирали вектора v.

Пример 12.5. Вектора $v = (3, 1, 6, 0, 7) \in \mathbb{R}^5$ има норма $||v|| = \sqrt{9 + 1 + 36 + 49} = \sqrt{95}$. Затова нормирането дава вектора $w := \frac{1}{\sqrt{95}}v$. Т.е. вектора $w = \left(\frac{3}{\sqrt{95}}, \frac{1}{\sqrt{95}}, \frac{6}{\sqrt{95}}, 0, \frac{7}{\sqrt{95}}\right)$ има дължина едно и посоката същата, както посоката на v и съвпадащо направление.

Твърдение 12.6. Произволни $v_1, \dots, v_n \in V$ ортогонални вектори от евклидово или унитарно пространство V са линейно независими.

Определение 12.7. Нека V е евклидово или унитаро пространство. Ако $b_1, \dots, b_n \in V$ Казваме, че векторите са ортогонални, ако $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ всеки път когато $1 \leq i \neq j \leq n$. Т.е. два по два векторите са ортогонални.

Съществува алгоритъм, който по дадени $a_1, \dots, a_n \in V$ линейнонезависими вектори,от евклидово или унитарно пространство V, построява $b_1, \dots, b_n \in V$, които са ортогонални $\langle b_i, b_j \rangle = 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$, със същата линейна обвивка $\ell(a_1, \dots, a_n) = \ell(b_1, \dots, b_n)$.

И така. Полагаме първият вектор да бъде някой от първоначалните, например $b_1 := a_1$, след което грубо казано "изправяме останалите по него". По-точно търсим вектор $b_2 := a_2 + \lambda b_1$, със свойството $\langle b_2, b_1 \rangle = 0$.

$$0 = \langle b_2, b_1 \rangle = \langle a_2 + \lambda b_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_1 \rangle + \lambda \langle b_1, b_1 \rangle.$$

От последното намираме $\lambda = -\frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$. После търсим скалари μ, ν, за които $b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2$ със свойството $\langle b_3, b_1 \rangle = 0$ и $\langle b_3, b_2 \rangle = 0$. От

$$0 = \langle b_3, b_1 \rangle = \langle a_3, b_1 \rangle + \mu \langle b_1, b_1 \rangle + \nu \underbrace{\langle b_2, b_1 \rangle}_{=0}.$$

Намираме
$$\mu = -\frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}.$$
От
$$0 = \langle b_3, b_2 \rangle = \langle a_3, b_2 \rangle + \mu \underbrace{\langle b_1, b_2 \rangle}_{=0} + \nu \langle b_2, b_2 \rangle .$$
Намираме
$$\nu = -\frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}.$$
И така нататък. А за последния вектор
$$b_n = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{n,i} b_i,$$
така че $\langle b_n, b_j \rangle = 0, \forall 1 \leq j < n$. Откъдето пък намираме
$$\lambda_{n,j} = -\frac{\langle a_n, b_j \rangle}{b_j, b_j}, \quad \forall 1 \leq j < n.$$

Задача 12.8. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейно независимите вектори a_1, a_2, a_3 с техните координати спрямо ортонормиран базис. По метода на Грам-Шмид да се намери ортогонален базис на $\ell(a_1, a_2, a_3)$, ако:

1. $a_1 = (1, -1, 0, 2), \quad a_2 = (4, -2, -1, 3), \quad a_3 = (-2, 0, 4, -2);$
2. $a_1 = (1, -1, 3, -1), \quad a_2 = (-2, 5, -12, 5), \quad a_3 = (3, 1, 3, -1).$

Решение. 1. Полагаме $b_1 := a_1$. Търсим вектор $b_2 = a_2 + \lambda b_1$, т.че
$$0 = \langle b_2, b_1 \rangle = \langle a_2, b_1 \rangle + \lambda \langle b_1, b_1 \rangle ,$$
откъдето намираме
$$\lambda = -\frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}.$$
Пресмятаме
$$\langle a_2, b_1 \rangle = \langle (4, -2, -1, 3), (1, -1, 0, 2) \rangle = 4 + 2 + 6 = 12;$$
$$\langle b_1, b_1 \rangle = \langle (1, -1, 0, 2), (1, -1, 0, 2) \rangle = 1 + 1 + 4 = 6.$$
И така $\lambda = \frac{-12}{6} = -2$. Откъдето $b_2 = a_2 - 2b_1$. Откъдето пресмятаме
$$b_2 = a_2 - 2b_1 = (4, -2, -1, 3) - 2(1, -1, 0, 2) = (4, -2, -1, 3) + (-2, 2, 0, -4) = (2, 0, -1, -1).$$
По-нататък, търсим $b_3 = a_3 + \lambda b_1 + \mu b_2$, т.че $0 = \langle b_3, b_1 \rangle$ и $0 = \langle b_3, b_2 \rangle$. От условието
$$0 = \langle b_3, b_1 \rangle = \langle a_3, b_1 \rangle + \lambda \langle b_1, b_1 \rangle + \mu \underbrace{\langle b_2, b_1 \rangle}_{=0} .$$

Значи
$$\lambda = -\frac{\langle a_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}.$$
Пресмятаме
$$\langle a_3, b_1\rangle = \langle(-2,0,4,-2),(1,-1,0,2)\rangle = -2-4 = -6.$$
С което получаваме $\lambda = \frac{6}{6} = 1$. От условието
$$0 = \langle b_3, b_2\rangle = \langle a_3, b_2\rangle + 1.\underbrace{\langle b_1, b_2\rangle}_{=0} + \mu\langle b_2, b_2\rangle.$$
Което ни дава, че
$$\lambda = -\frac{\langle a_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle}.$$
Пресмятаме
$$\langle a_3, b_2\rangle = \langle(-2,0,4,-2),(2,0,-1,-1)\rangle = -4-4+2 = -6;$$
$$\langle b_2, b_2\rangle = \langle(2,0,-1,-1),(2,0,-1,-1)\rangle = 4+1+1 = 6.$$
Получихме $\mu = 1$. Затова
$$b_3 = a_3+b_1+b_2 = (-2,0,4,-2)+(1,-1,0,2)+(2,0,-1,-1) = (-1,-1,4,0)+(2,0,-1,-1).$$
Така получихме $b_3 = (1,-1,3,-1)$.

Решение. 2. Полагаме $b_1 = a_1 = (1,-1,3,-1)$ и търсим $b_2 = a_2+\lambda b_1$, т.че $\langle b_2, b_1\rangle = 0$.
$$0 = \langle b_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_1\rangle + \lambda\langle b_1, b_1\rangle.$$
И така
$$\lambda = -\frac{\langle a_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} = \frac{48}{12} = 4.$$
Получихме вектора $b_2 = a_2 + 4b_1$. Откъдето $b_2 = (-2,5,-12,5) + 4(1,-1,3-1) = (2,1,0,1)$. Търсим $b_3 = a_3 + \lambda b_1 + \mu b_2$, т.че $0 = \langle b_1, b_1\rangle, 0 = \langle b_3, b_2\rangle$. Намираме $\lambda = -1, \mu = -1$ следователно
$$\begin{aligned} b_3 = a_3 - b_1 - b_2 &= (3,1,3,-1) - (1,-1,3,-1) - (2,1,0,1) \\ &= (3,1,3,-1) - (3,0,3,0) = (0,1,0,-1). \end{aligned}$$

Задача 12.9. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени векторите

(i) $a_1 = (1,-1,1,-1)$, $a_2 = (-2,1,-5,4)$, $a_3 = (0,-1,5,-2)$;

(ii) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,4,0,-2)$, $a_3 = (1,-3,5,9)$.

Да се ортогонализират a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид и да се определи размерността на линейната обвивка $\ell(a_1, a_2, a_3)$.

Решение. (i) Полагаме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че

$$0 = \langle b_2, b_1 \rangle = \langle a_2, b_1 \rangle + \lambda \langle b_1, b_1 \rangle .$$

Оттук $\lambda = -\frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = -\frac{(-12)}{4} = 3$ и

$$b_2 = a_2 + 3b_1 = (1, -2, -2, 1).$$

На следващата стъпка полагаме $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ и определяме $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ от равенствата

$$0 = \langle b_3, b_1 \rangle = \langle a_3, b_1 \rangle + \alpha \langle b_1, b_1 \rangle ,$$

$$0 = \langle b_3, b_2 \rangle = \langle a_3, b_2 \rangle + \beta \langle b_2, b_2 \rangle ,$$

вземайки предвид $(b_1, b_2) = 0$. Пресмятаме

$$\alpha = -\frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = -\frac{8}{4} = -2, \quad \beta = -\frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} = -\frac{(-10)}{10} = 1$$

и намираме

$$b_3 = a_3 - 2b_1 + b_2 = (-1, -1, 1, 1).$$

Ненулевите ортогонални вектори b_1, b_2, b_3 са линейно независими, така че подпространството $\ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(b_1, b_2, b_3)$ е тримерно.

(ii) Избираме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че $0 = \langle b_2, b_1 \rangle = \langle a_2, b_1 \rangle + \lambda \langle b_1, b_1 \rangle$. По-точно, $\lambda = -\frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = -\frac{4}{4} = -1$ и

$$b_2 = a_2 - b_1 = (1, 3, -1, -3).$$

Сега $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ има коефициенти

$$\alpha = -\frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = -\frac{12}{4} = -3, \quad \beta = -\frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} = -\frac{(-40)}{20} = 2$$

и

$$b_3 = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (0, 0, 0, 0).$$

При ортогонализация на a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид получихме ненулеви ортогонални b_1, b_2 и $b_3 = \mathcal{O}$. Следователно a_1, a_2 са линейно независими, а $a_3 \in \ell(a_1, a_2)$, така че $\dim \ell(a_1, a_2, a_3) = \dim \ell(a_1, a_2) = 2$.

Задача 12.10. Ако векторите $a_1, \ldots, a_k$ са линейно независими и $a_{k+1} \in \ell(a_1, \ldots, a_k)$, то при ортогонализацията по Грам-Шмид, последният от получените вектори $b_{k+1} = \mathcal{O}$ е нулев.

Доказателство. От $\ell(a_1, \ldots, a_k) = \ell(b_1, \ldots, b_k)$ можем да изразим

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i.$$

Ако $b_{k+1} = a_{k+1} + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$, то

$$\lambda_i = -\frac{\langle b_i, a_{k+1}\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} = -\mu_i.$$

Следователно $b_{k+1} = a_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i b_i = \mathcal{O}$. $\square$

Определение 12.11. Нека V е евклидово или унитарно линейно пространство над $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. И нека $U \leq V$ е негово подпространство. Тогава множеството

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \leq V$$

е подпространство на V И се нарича ортогонално допълнение на u до V.

Доказва се, че $U \oplus U^{\perp} = V$. По този начин всеки вектор $v \in V$ се представя по единствен начин като сума $v = v_1 + h_1$, където $v_1 \in U$ се нарича ортогонална проекция на вектора v върху пространството U, а вектора $h_1 = v - v_1 \in U^{\perp}$ се нарича перпендикуляр от вектора v, спуснат към U.

Задача 12.12. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите

$$a_1 = (1, 2, -1, 0), \quad a_2 = (-1, -5, 1, 1), \quad a_3 = (0, 9, 0, 1)$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(а) ортогонални базиси на подпространството U и на ортогоналното му допълнение $U^{\perp}$;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение. (а) Прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид към векторите a_1, a_2, a_3 и получаваме ортогонален базис

$$b_1 = a_1 = (1, 2, -1, 0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 = a_2 + 2b_1 = (1, -1, -1, 1),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (-1, 1, 1, 3)$$

на подпространството U.

Ако x е стълб от четири числа, то умножението на матрици $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x$ съвпада със скаларното произведение спрямо ортонормиран базис, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \langle a_1, x\rangle \\ \langle a_2, x\rangle \\ \langle a_3, x\rangle \end{pmatrix}$. Затова ортогоналното допълнение $U^\perp$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & & =0 \\ x_1 & +5x_2 & -x_3 & -x_4 & =0 \\ & 9x_2 & & +x_4 & =0 \end{array} \right. ,$$

чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от координатите на a_1, a_2, a_3. Използвайки $\ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(b_1, b_2, b_3)$, можем да зададем $U^\perp$ като пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & & =0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_3 & =0 \end{array} \right. .$$

Общото решение на тази система е $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4 = 0$ и $U^\perp = l(c)$ за $c = (1, 0, 1, 0)$.

(б) Търсим вектор $v_1 = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 \in U$ с реални x_1, x_2, x_3, така че $v - v_1$ да принадлежи на ортогоналното допълнение $U^\perp$. За $U = \ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(b_1, b_2, b_3)$ условието $v - v_1 \in U^\perp$ е еквивалентно на $0 = \langle v - v_1, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - x_i \langle b_i, b_i \rangle$ за $1 \leq i \leq 3$. Оттук

$$x_1 = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{\langle v, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} = 0, \quad x_3 = \frac{\langle v, b_3 \rangle}{\langle b_3, b_3 \rangle} = \frac{1}{3}$$

или

$$v_1 = \frac{1}{3} b_1 + \frac{1}{3} b_3 = (0, 1, 0, 1), \quad h_1 = v - v_1 = (1, 0, 1, 0).$$

По друг начин, търсим перпендикуляра $h_1 = xc \in U^\perp$, така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^\perp)^\perp$. С други думи, $0 = \langle v_1, c \rangle = \langle v, c \rangle - x \langle c, c \rangle$ или $x = \frac{\langle v, c \rangle}{\langle c, c \rangle} = 1$ и

$$h_1 = c, \quad v_1 = v - c = (0, 1, 0, 1).$$

Задача 12.13. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(а) ортогонален базис на подпространството U;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U;

Решение: (а) Пространството от решения U на хомогенна линейна система с ранг 1 в $\mathbb{R}^4$ е тримерно. Избираме $c_1 = (1, 0, 0, 1)$. Търсим c_2 като ненулево решение на

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & =0 \\ x_1 & & & +x_4 & =0 \end{array} \right. .$$

Например, $c_2 = (0, 2, 1, 0) \in U$. Накрая определяме вектора $c_3 \in U$, ортогонален на c_1 и c_2 като ненулево решение на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & =0 \\ x_1 & & & +x_4 & =0 \\ & 2x_2 & +x_3 & & =0 \end{array} \right. .$$

С точност до пропорционалност $c_3 = (5, -2, 4, -5)$. Векторите c_1, c_2, c_3 образуват ортогонален базис на U.

(б) Ортогоналната проекция $v_1 = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 \in U$, така че $v - v_1 \in U^{\perp}$ или $0 = \langle v - v_1, c_i \rangle = \langle v, c_i \rangle - x_i \langle c_i, c_i \rangle$ за $1 \leq i \leq 3$. Пресмятаме

$$x_1 = \frac{\langle v, c_1 \rangle}{\langle c_1, c_1 \rangle} = 1, \quad x_2 = \frac{\langle v, c_2 \rangle}{\langle c_2, c_2 \rangle} = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{\langle v, c_3 \rangle}{\langle c_3, c_3 \rangle} = \frac{1}{35}$$

и получаваме

$$v_1 = c_1 + \frac{3}{5}c_2 + \frac{1}{35}c_3 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad h = v - v_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

По друг начин, $U^{\perp} =)$ за $c = (1, 1, -2, -1)$ и търсим $h_1 = xc$ така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^{\perp})^{\perp}$. Еквивалентно, $0 = \langle v_1, c \rangle = \langle v, c \rangle - x \langle c, c \rangle$ и $x = \frac{\langle v,c \rangle}{\langle c,c \rangle} = -\frac{1}{7}$. В резултат,

$$h_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right), \quad v_1 = v - h_1 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Задача 12.14. Нека $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ са векторно значни функции

$$\begin{aligned} \varphi(t) &: = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \quad t \in [a, b] \\ \psi(t) &: = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Определяме, че производната на такава - векторно значна функция, например на φ е

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) := (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_n(t)).$$

. Тогава за функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, определена като

$$f(t) := \langle \varphi(t), \psi(t) \rangle,$$

намерете нейната производна $f'(t)$.

Задача 12.15. За матриците

$$I = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

да се проверят тъждествата

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E_2, \quad IJ = -JI, \quad JK = -KJ, \quad KI = -IK.$$

Нарича се матрична реализация на кватернионите.

13 Допълнителени материали.

Навярно за пръв път сте се срещали с Билинейни и квадратични форми в Аналитичната геометрия. Когато сте разглеждадали криви и повърхнини , както и техните канонизации. Сега ще разгледаме от гледна точка на линейната алгебра и ще обощим техния вид и свойсва.

Определение 13.1. Нека $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$ и φ е изображение от декартовия квадрат на линейното простово в реалните числа.

$$\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ще казваме, че φ е Билинейна форма във $\mathbb{V}$, ако е линейно по двата си аргумента, тоест:

$$\begin{aligned}
&\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v),\\
&\varphi(\lambda u, v) = \lambda \varphi(u, v).\\
&\varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2),\\
&\varphi(u, \lambda v) = \lambda \varphi(u, v).
\end{aligned}$$

за всички $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ и произволно реално число $\lambda \in \mathbb{R}$.

Забележка: Ако в Определение 1 допълнително е изпълнено , че $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$, то билинейната форма φ се нарича симетрична.

Пример 13.2. Познат пример за билинейна симетрична форма е скаларното произведение. Наистина нека $\mathbb{V}$ е крайномерно линейно пространство оборудвано със скаларно произведение над $\mathbb{R}$(т.е. крайномерно евклидово пространство) с $\dim \mathbb{V} = n < \infty$. И нека $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ е базис на $\mathbb{V}$. Тогава, ако $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ са координатите спрямо този базис съответно на $u, v \in \mathbb{V}$. Имаме:

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle = \langle v, u \rangle .$$

и както знаем, скаларното произведение

$$\langle ., . \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Е линейно изображение изпълняващо необходимите свойства от Определение 1.

Определение 13.3. Матрицата $A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=1}^{n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ се нарича матрица на билинейната форма φ спрямо базиса $e = (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$.[34]

[34]Записвам с горен индекс, за да не стане объркане с обичайният долен индекс, показващ номера на координатата в $n-$мерния вектор. По този начин $e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0), \dots e^{(n)} = (0, 0, \dots, 1)$.

По този начин всяка Билинейна форма се определя еднозначно със своята матрица, при фиксиран базис. И обратно, всяка матрица определя точно една Билинейна форма.

Както знаем всяко крайномерно линейно пространство $V \simeq \mathbb{R}^n$,затова навсякъде по-надолу можем да се ограничим до изучаването на Билинейните форми в $\mathbb{R}^n$. По този начин в Определение 1 , в $\mathbb{R}^n$. За произволни вектори $u = ex, v = ey \in \mathbb{R}^n, \quad x, y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ (записани в координатни стълбове) и Билинейна форма $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\varphi(ex, ey) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n e^{(i)}x_i, \sum_{i=1}^n e^{(i)}y_i\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\varphi(e^{(i)}, e^{(j)})y_j$$

$$= (x_1, \ldots, x_n). \left((\varphi(e^{(i)}, e^{(j)}))_{i,j=1}^n\right). \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Вземайки предвид обичайното умножение "ред по стълб."Така извеждаме:

$$x^t.A.y = (x_1, \ldots, x_n). \begin{pmatrix} \varphi(e^{(1)}, e^{(1)}) & \ldots & \varphi(e^{(1)}, e^{(j)}) & \ldots & \varphi(e^{(1)}, e^{(n)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(e^{(i)}, e^{(1)}) & \ldots & \varphi(e^{(i)}, e^{(j)}) & \ldots & \varphi(e^{(i)}, e^{(n)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(e^{(n)}, e^{(1)}) & \ldots & \varphi(e^{(n)}, e^{(j)}) & \ldots & \varphi(e^{(n)}, e^{(n)}) \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, \ldots, x_n). \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \varphi(e^{(1)}, e^{(j)})y_j \\ \sum_{j=1}^n \varphi(e^{(2)}, e^{(j)})y_j \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^n \varphi(e^{(i)}, e^{(j)})y_j \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^n \varphi(e^{(n)}, e^{(j)})y_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\varphi(e^{(i)}, e^{(j)})y_j.$$

Което потвърждава тъждеството

$$\varphi(u, v) = \varphi(ex, ey) = x^tAy \in M_{1\times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \tag{30}$$

Нека сега $f = (f^{(n)}, \ldots, f^{(n)})$ е друг базис, с матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ от $e \xrightarrow{T} f$. Тоест

$$f = eT.$$

Нека вземем произволни два вектора спрямо този нов базис $u', v' \in \mathbb{R}^n, u' = f\xi, v' = f\zeta$. Където $\xi, \zeta \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ са координатните стълбове на u', v' спрямо f. Или в първоначалния базис $u' = eT\xi, v' = eT\zeta$. Така $T\xi, T\zeta \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ са координатните стълбове на $u', v' \in \mathbb{R}^n$ спрямо e. Прилагайки φ, извеждаме:

$$\varphi(u', v') = \varphi(f\xi, f\zeta) = \varphi(eT\xi, eT\zeta) = (T\xi)^tA(T\zeta) = \xi^t(T^tAT)\zeta,$$

вземайки предвид (30). Тоест матрицата на φ в базиса $f = eT$ е $B_{(f)} = T^t A^t_{(e)} T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Твърдение 13.4. Билинейната форма $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е симетрична, точно когато матрицата и спрямо произволен базис е симетрична.

Доказателство. Нека φ е симетрична Билинейна форма с матрица $A = (\varphi(e^{(i)}, e^{(j)})^n_{i,j=1}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ спрямо произволен фиксиран базис e. Тогава и матрицата и също е симетрична. Наистина, съгласно

$$y^t Ax = \varphi(ey, ex) = \varphi(ex, ey) = x^t Ay = (x^t Ay)^t = y^t A^t x,$$

за произволни $x, y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, ни дава $A = A^t$ и доказва,че ако Билинейната форма е симетрична, то матрицата и спрямо, произволен базис също е симетрична.

Обратно. Нека матрицата на Билинейната форма φ е симетрична, т.е. $A^t = A$.

$$\varphi(ey, ex) = y^t Ax = (y^t Ax)^t = x^t A^t y = x^t Ay = \varphi(ex, ey),$$

за произволни $ey, ex \in \mathbb{R}^n$. Което доказва,че ако матрицата на Билинейна форма е симетрична, то и Билинейната форма също е симетрична. □

Определение 13.5. Нека $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е симетрична Билинейна форма, тогава изображението

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \widetilde{\varphi}(u) = \varphi(u, u), \ \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

наричаме квадратична форма, асоциирана с φ. От билинейността на $\varphi(\cdot, \cdot)$ и определението на $\widetilde{\varphi}$, следва че $\widetilde{\varphi}(\cdot)$ е линейно изображение на $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Даваме еднозначната връзка между симетрична Билинейна форма и нейната квадратична форма. Използвайки симетричността извеждаме:

$$\varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + 2\varphi(u, v) + \varphi(v, v).$$

Тогава:

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(\widetilde{\varphi}(u + v) - \widetilde{\varphi}(u) - \widetilde{\varphi}(v)), \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Директно от определението за матрица на изображение, следва, че матрицата на симетричната квадратичната форма $\widetilde{\varphi}$ асоциирана с билинейната форма φ съвпада с матрицата на билинейната форма φ. И е в сила:

$$\widetilde{\varphi}(ax) = \varphi(ax, ax) = x^t Ax, \ \forall ax \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 13.6. Казваме, че квадратичната форма $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ спрямо базиса $= (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ е в каноничен вид, ако матрицата на $\widetilde{\varphi}$ спрямо този базис е диагонална $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Еквивалентно, за произволен вектор $u \in \mathbb{R}^n$. Квадратичната форма има вида

$$\widetilde{\varphi}(u) = \lambda_1 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^n, \;\; u = e\xi, \xi \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Преди да дадем следващата Теорема отнасяща се до съществуването на базис, в който квадратичната форма да бъде в каноничен вид, ще припомни важни Определения и Теореми(които ще наречем Леми за нашите цели по-надолу), които ще използваме и навярно са Ви познати от Теорията за диагонализиране на матрици.

Определение 13.7. Ортогонално допълнение на подпространство U на евклидово пространство V наричаме множеството

$$U^{\perp} = \{v \in V | \left\langle u, v \right\rangle = 0, \;\; \forall u \in U\},$$

съдържащо всички вектори, ортогонални на произволен вектор от U. С други думи формално написано $\left\langle U, U^{\perp} \right\rangle = 0$.

Лема 13.8. Ортогоналното допълнение $U^{\perp} \subset V$ на подпространство $U \subset V$ на евклидово пространство е подпространство на същото евклидово пространство $U^{\perp} < V$.

Доказателство. За произволни $v_1, v_2 \in U^{\perp}, u \in U < V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имаме

$$\left\langle u, v_1 + v_2 \right\rangle = \left\langle u, v_1 \right\rangle + \left\langle u, v_2 \right\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Което доказва, че $v_1 + v_2 \in U^{\perp}$. Освен това

$$\left\langle u, \lambda v_1 \right\rangle = \overline{\lambda} \left\langle u, v_1 \right\rangle = \lambda \left\langle u, v_1 \right\rangle = \lambda.0 = 0.$$

Което пък доказва, че $\lambda v_1 \in U^{\perp}$. Затова заключваме, че $U^{\perp} < V$ е подпространство на V. □

Лема 13.9. Нека V е $n-$мерно евклидово пространство, а $U < V$ е негово подпространство. Тогава е изпълнено, че

$$U \oplus U^{\perp} = V.$$

Доказателство. Избираем ортонормиран базис $e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}$ на U и го допълваме до ортонормиран базис $e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}, e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}$ на V. Сега имаме представянето

$$\begin{aligned} V = \ell(e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}, e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}) &= \ell(e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}) \oplus \ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}) \\ &= U \oplus \ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}). \end{aligned}$$

Ще докажем, че $\ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}) = U^{\perp}$ с което ще сме доказали лемата.

За включването $\ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}) \subseteq U^{\perp}$ наистина. Нека

$$v = \sum_{j=k+1}^{n} e^{(j)} y_j \in \ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}).$$

А $u = \sum_{i=1}^{k} e_i x_i \in U$. са произволни вектори съответно от $\ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)})$ и $U^{\perp}$, тогава[35]

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} e^{(i)} x_i, \sum_{j=k+1}^{n} e^{(j)} y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} x_i \overline{y_j} \left\langle e^{(i)}, e^{(j)} \right\rangle = 0,$$

доказва, че $\ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}) \subseteq U^{\perp}$. За обратното включване. Нека вземем произволен вектор $v = \sum_{j=1}^{n} e^{(j)} y_j \in U^{\perp}$, за всички $1 \leq i \leq k$ векторът $e^{(i)} \in U$. Затова имаме:

$$0 = \left\langle e^{(i)}, v = \sum_{j=1}^{n} e^{(j)} y_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} \left\langle e^{(i)}, e^{(j)} \right\rangle = \overline{y_i}, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

С което доказахме, че всеки вектор от $U^{\perp}$ се представя като $v = \sum_{j=k+1}^{n} e^{(j)} y_j$. Което доказва, че $U^{\perp} \subseteq \ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)})$. И доказва твърдението на лемата. Тоест имаме:

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

□

Определение 13.10. Оператор $\varphi : V \to V$, наричаме симетричен, ако

$$\langle \varphi(u), u \rangle = \langle u, \varphi(u) \rangle .$$

Лема 13.11. Собствените стойности на симетричен оператор $\varphi : V \to V$,в крайномерно евклидово пространство, са реални числа.

Доказателство. Нека v е собствен вектор,отговарящ на собствена стойност λ, на симетричния оператор φ тогава:

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle .$$

Откъдето[36]

$$(\lambda - \overline{\lambda})||v|| = 0, \ \ ||v|| > 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Определение 13.12. Нека $\varphi : V \to V$, а $U < V$ е негово подпространство. Тогава U наричаме φ инвариантно, ако $\varphi(U) \subset U$. Ако това е вярно имаме основание да разглеждаме линейният оператор само над това инвариантно подпространство, като ограничението на $\varphi_{|U}$ върху U. Тоест $\varphi : U \to U$.

Лема 13.13. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор. Ортогоналното допълнение $U^{\perp} < V$ на φ инвариантно подпространство $U < V$ също е инвариантно. В частност вземайки предвид, че $U \oplus U^{\perp} = V$. Получаваме, че ако $\varphi_{|U}$ има матрица A_1 спрямо

[35]Използваме факта, че $\ell(e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}) \oplus \ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)})$, а следователно и $\ell(e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}) \cap \ell(e^{(k+1)}, \ldots, e^{(n)}) = \mathcal{O}$.

[36]Всеки собствен вектор е ненулев по определение! Затова ||v||>0.

ортонормиран базис на U. А $\varphi_{|U^\perp}$ има матрица A_2 спрямо ортонормиран базис на $U^\perp$. То φ има матрица

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & A_2 \end{pmatrix},$$

спрямо обединението на двата ортонормирани базиса съответно на U и $U^\perp$, което е базис на $V = U \oplus U^\perp$.

Лема 13.14. Нека V е крайномерно линейно пространство над $\mathbb{R}$. И нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в него. Тогава φ има едномерно или двумерно φ инвариантно подпространство. Нещо повече, ако φ има реална собствена стойност(реален характеристичен корен), то φ има едномерно инвариантно подпространство - правата породена от собсвен вектор, отговарящ на тази реална собствена стойност. Ако пък се случи така, че φ да няма реален характеристичен корен, то φ има двумерно инвариантно подпространство.

Доказателство. Оставяме на читателя да си припомни това важно доказателство, което е правено в началото на курса. $\square$

Теорема 13.15. За всяка квадратична форма $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,съществува базис $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ в който $\widetilde{\varphi}$ е в каноничен вид. Нещо повече, всеки път когато сме над Евклидово пространство, съществува ортонормиран базис , спрямо който е изпълнено това.

Доказателство. Понеже матрицата $A = ((\varphi(e^{(i)}, e^{(j)})_{i,j=1}^n)) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ на φ спрямо произволен базис $e = (e^{(1)}, \ldots, e^{(n)})$ е симетрична $A^t = A$. То съществува ортогонална матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, така че $D = T^{-1}AT = T^tAT$ е диагонална. Наистина. От Лема 3 следва, че характеристичните корени на симетричната матрица $A^t = A$ са реални числа. По-нататък. Нека $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е линейният оператор със симетрична матрица A спрямо ортонормиран базис $a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$ на $\mathbb{R}^n$. Тогава Ψ е симетричен оператор. Ще докажем, че съществува ортонормиран базис $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ на $\mathbb{R}^n$, в който матрицата на Ψ е диагонална. С индукция по $\dim \mathbb{R}^n = n$. За $n = 1$ е ясно, че 1×1 матрица е диагонална. В общия случай, понеже характеристичните корени на Ψ(или всеедно на A) са реални числа, а следователно от Лема 5 съществува едномерно Ψ инвариантно подпространство $\ell(f^{(1)}) < \mathbb{R}^n$ породено от единичен собствен вектор $f^{(1)} \in \mathbb{R}$ на Ψ, отговарящ на собствена стойност $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Сега簡 вземайки предвид Лема 4 , имаме че ортогоналното допълнение $\ell(f^{(1)}) \subset \mathbb{R}^n$ е $n-1$ мерно Ψ инвариантно подпространство. И по индукционно предположение можем да считаме, че съществува ортонормиран базис $(f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$ на $\ell(f^{(1)})^\perp$, в който матрицата на $\Psi_{|\ell(f^{(1)})^\perp}$ диагонална матрица $D' \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$,

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Но тогава $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ е ортонормиран базис на $\ell(f^{(1)}) \cup \ell(f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}) = \mathbb{R}^n$, в който(като вземем предвид Лема 4 още веднъж) матрицата на $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е $D \in$

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$ диагонална:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & D' \end{pmatrix}.$$

Сега матрицата на прехода T от ортонормирания базис $a = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \xrightarrow{T} f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ е ортогонална. И нещо повече $D = T^{-1}AT = T^tAT$ и $\widetilde{\varphi}$ е в каноничен вид. □

Ще изложим твърдение, познато като "Закон за инерцията според който: bроят на положителните, броят на отрицателните и броят на нулевите коефициенти във всеки каноничен вид на една квадратична форма е равен. За целта първо ще разгледаме следната

Лема 13.16 (Инвариантност на ранга на матрица.)**.** За произволна матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ и произволна неособена матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е в сила

$$rk(A) = rk(T^tAT).$$

Доказателство. Нека $\theta : U \to W$ е линейно изображение с матрица A спрямо базис $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})$ на U и базис $w = (w^{(1)}, \ldots, w^{(n)})$ на W. Спрямо базиса $u' = uT$ на U и базиса $w' = w(T^t)^{-1}$ на W, матрицата на θ е $[(T^t)^{-1}]^{-1}AT = T^tAT$. Следователно

$$\mathrm{rk}(A) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(\theta) = \mathrm{rk}(T^tAT).$$

□

Определение 13.17. Ранг на квадратичната форма $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ще наричаме ранга на матрицата на φ спрямо произволен базис на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 13.18 (Закон за инерцията.)**.** Нека $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в квадратична форма в каноничен вид $\varphi(ex) = \lambda_1x_1^2 + \ldots + \lambda_nx_n^2$ спрямо базис $e = (e^{(1)}, \ldots, e^{(n)})$ на $\mathbb{R}^n$ и $\widetilde{\varphi}(fy) = \mu_1y_1^2 + \ldots + \mu_ny_n^2$ спрямо базис $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ на $\mathbb{R}^n$. Тогава броят на положителните, отрицателни и нулевите елементи на $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ съвпада съотвено с броя на положителните, отрицателните и нулевите елементи на $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$.

Доказателство. Броят на нулевите елементи на $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ е равен на ранга r на $\widetilde{\varphi}$. И съвпада с броят на ненулевите елементи от $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. (Виж Лема 6) Нека с p и q означим съответно броят на положителните λ_i и μ_i и да допуснем противното - тоест $p \neq q$. Като нека за определеност считаме, че $p > q$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$ първите p от тях са положителни(ако не са просто ще пермутираме индексите и можем да считаме , че първите p от тях са положителни.) Аналогично и $\mu_1, \ldots, \mu_q > 0$. Сега $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r < 0$(всички останали, ненулеви са отрицателни) и $\mu_{q+1}, \ldots, \mu_r < 0$. Сега подпространствата $U = \ell(e^{(1)}, \ldots, e^{(p)})$ и $W = \ell(f^{(q+1)}, \ldots, f^{(n)})$ имат ненулево сечение $U \cap W \neq \{\mathcal{O}\}$. Това е така, защото ако допуснем ,че

$$U + W = U \oplus W \subseteq \mathbb{R}^n,$$

дава

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \geq (U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) = p + (n - q) = n + p - q > n,$$

противоречие доказващо, че $p > q$ не е възможно, а следователно $p = q$. □

Определение 13.19. Квадратичната форма $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е положително определена, ако $\widetilde{\varphi}(u) > 0$ за всички $u \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$.

Вземайки предвид това и определението за скаларно произведение забелязваме. Симетрична Билинейна форма $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ отговаря на положително орпеделена квадратична форма $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, точно когато φ е скаларно произведение.

Твърдение 13.20. Квадратична форма $\widetilde{\varphi}$ е положително определена тогава и само тогава, когато матрицата всяка квадратичната форма в каноничен вид $\widetilde{\varphi}(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ има $n-$на брой положителни диагонални елементи $\{\lambda_i\}_{i=1}^n > 0$.

Доказателство. Нека $\widetilde{\varphi}(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ в каноничен вид на $\widetilde{\varphi}$ спрямо произволен базис $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ на $\mathbb{R}^n$. И е изпълнено, че $\{\lambda_i\}_{i=1}^n > 0$. Тогава квадратичната форма е положително определена. Наистина нека $u = \sum_{i=1}^n y_i f^{(i)} \in \mathbb{R}^n$, то очевидно имаме

$$\widetilde{\varphi}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0,$$

с равенство $\widetilde{\varphi}(u) = 0$ само когато $u = \mathcal{O}$. Това доказва,че квадратичната форма е положително определена. Обратно. Нека квадратичната форма е положително определена. Ще докажем, че тогава диагоналните елементи са положителни. Нека допуснем, че съществува каноничен вид $\widetilde{\varphi}(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ с поне едно $\lambda_i \leq 0$ спрямо базис $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ на $\mathbb{R}^n$. Но тогава бихме имали $\widetilde{\varphi}(f^{(i)}) = \lambda_i \leq 0$. Което противоречи на допускането, че $\widetilde{\varphi}$ е положително определена и доказва твърдението. □

Теорема 13.21. Нека $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Като едната от тях, нека за определеност считаме, че $\widetilde{\psi}$ е положително определена. Товага съществува базис на $\mathbb{R}^n$, в който и двете форми са в каноничен вид.

Доказателство. Както споменахме по-горе положително определена квадратична форма изпълнява всички условя за скаларно произведение. Затова полагаме $\psi(u, v) := \langle u, v \rangle$, където ψ е билинейната форма асоциирана с $\widetilde{\psi}$. Според Теорема 1 съществува ортонормиран базис $e = (e^{(1)}, \ldots, e^{(n)})$, спрямо това скаларно произведение , в който квадратичната форма $\widetilde{\varphi}$ е в каноничен вид. От друга страна от ортонормираността на базиса имаме, че ако $u = \sum_{i=1}^n y_i e^{(i)} \in \mathbb{R}^n$, то $\widetilde{\psi}(u) = \psi(u, u) = \langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n y_i^2$, затова квадратичната форма $\widetilde{\psi}$ също е в каноничен вид[37] , с което твърдението на теоремата е доказано. □

Определение 13.22. Главен минор наричаме всеки минор, който се намира в горния ляв ъгъл. По-точно, ако $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

наричаме главен минор.

[37] Използваме, че $\left\langle e^{(i)}, e^{(j)} \right\rangle = \delta_{i,j}$.

Теорема 13.23 (Метод на Якоби.)**.** Нека $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е квадратична форма. И нека $A = (\varphi(e^{(i)}, e^{(j)}))_{i,j=1}^n := (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е нейната матрица в $e = (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ базис на $\mathbb{R}^n$. Тогава, ако главните минори на матрицата са различни от нула, т.е $\Delta_k \neq 0, \forall 0 \leq k \leq n$,(където $\Delta_0 := 1$) то съществува базис $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$ на $\mathbb{R}^n$, в който квадратичната форма има вида(каноничен вид)

$$\widetilde{\varphi}(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} y_i^2, \qquad u = \sum_{i=1}^{n} y_i f^{(i)} \in V. \tag{31}$$

Доказателство. (Положили сме $\varphi(e^{(i)}, e^{(j)}) =: a_{i,j}$) За $1 \leq j \leq n$. Да разгледаме системата линейни уравнения

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i-1} & a_{i,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Тази система има единствено решение, понеже детерминантата на матрицата от коефициенти е различна от нула(по предположение всеки главен минор е ненулев). Нека това решение е[38]

$$\widetilde{c}^{[i]} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1^{[i]} \\ \dots \\ \widetilde{c}_i^{[i]} \end{pmatrix} \in M_{i\times 1}(\mathbb{R}), \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

За всяко $1 \leq j \leq i$ уравненията на тази система са:

$$\sum_{s=1}^{i} \varphi(e^{(j)}, e^{(s)}) \widetilde{c}_s^{\,[i]} = \sum_{s=1}^{i} a_{j,s} \widetilde{c}_s^{[i]} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , npu \quad 1 \leq j \leq i-1, \\ 1 & , npu \quad j = i. \end{cases} \tag{33}$$

Защото стълбът $\widetilde{c}^{[i]}$ удовлетворява уравненията на (32). Случаят, когато $i = 1$ имаме $a_{1,1}\widetilde{c}_1^{[1]} = 1 \Rightarrow \widetilde{c}_1^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1}$. За останалите $2 \leq i \leq n$, по формулите на Крамер извеждаме

$$\widetilde{c}_i^{[i]} = \frac{1}{\Delta_i} det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i-1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,i-1} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i-1} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

За всяко $1 \leq i \leq n$, полагаме

$$c^{[i]} := \begin{pmatrix} \widetilde{c}^{[i]} \\ \mathbb{O}_{(n-i)\times 1} \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

[38]С $[i]$ ще означаваме просто горен индекс за нашите цели.

Да забележим сега, че матрицата

$$T = \begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ c^{[1]} & c^{[2]} & \dots & c^{[n-1]} & c^{[n]} \\ | & | & & | & | \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Със стълбове $c^{[i]} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}), \forall 1 \le i \le n$ е не неособена матрица($\det(T) \neq 0$) понеже тя е горно триъгълна. И има детерминанта

$$\det(T) = \widetilde{c}_1^{[1]}.\widetilde{c}_2^{[2]} \dots \widetilde{c}_n^{[n]} = \frac{1}{\Delta_1}.\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \dots \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n} \neq 0.$$

Достатъчно е да проверим, че матрицата на $\tilde{\varphi}$ спрямо базиса $f = eT$ е

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta_{i-2}}{\Delta_{i-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \end{pmatrix},$$

от което директно ще следва (31). Отново от правилото ред по стълб получаваме

$$f^{(i)} = ec^{[i]} = (e^{(1)} \dots, e^{(i)}, e^{(i+1)}, \dots, e^{(n)}) \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1^{[i]} \\ \widetilde{c}_2^{[i]} \\ \dots \\ \widetilde{c}_i^{[i]} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} e^{(s)}, \quad \forall 1 \le i \le n.$$

Затова елементът на $(i,j)-$та позиция в матрицата на $\widetilde{\varphi}$ спрямо базиса $f = eT$ е:

$$D_{i,j} = \varphi(f^{(i)}, f^{(j)}) = \varphi\left(\sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} e^{(s)}, \sum_{t=1}^{j} \widetilde{c}_t^{[j]} e^{(t)}\right) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{t=1}^{j} \widetilde{c}_s^{[i]} \widetilde{c}_t^{[j]} \varphi(e^{(s)}, e^{(t)}),$$
$$= \sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s{}^{[i]} \left(\sum_{t=1}^{j} \widetilde{c}_t^{[j]} \varphi(e^{(s)}, e^{(t)})\right).$$

Ако $1 \le s \le i < j$, то

$$\sum_{t=1}^{j} \varphi(e^{(s)}, e^{(t)}) \widetilde{c}_t^{[j]} = \delta_{s,j} = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad 1 \le s \le j-1, \\ 1 & s = j. \end{cases}$$

вземайки предвид (33).

Затова $D_{i,j} = \sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} \delta_{s,j} = 0$. За всички $i < j$. Понеже матрицата на квадратичната форма $\tilde{\varphi}$ спрямо базиса $f = eT$ е симетрична, имаме и $D_{i,j} = D_{j,i} = 0, \forall i > j$. Сега да разгледаме диагоналните елементи на въпросната матрица

$$D_{i,i} = \varphi\left(\sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} e^{(s)}, \sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} e^{(s)}\right) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]}\widetilde{c}_s^{[i]} \varphi(e^{(s)}, e^{(s)})$$
$$= \sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} \left(\sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} \varphi(e^{(s)}, e^{(e)})\right) = \sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} \delta_{s,i} = \underbrace{0 + \ldots + 0}_{i-1} + \widetilde{c}_i^{[i]}.$$

$$D_{i,i} = \sum_{s=1}^{i} \widetilde{c}_s^{[i]} \delta_{s,i} = \underbrace{0 + \ldots 0}_{i-1} + \widetilde{c}_i^{[i]} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_1}, & \text{за} \quad i = 1, \\ \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, & \text{за} \quad 2 \le i \le n. \end{cases}$$

С което доказахме, че квадратичната форма има диагонална матрица D и (31) твърдението е доказано. □

Като следствие получаваме следното

Твърдение 13.24 (критерий на Силвестър.)**.** Една квадратична форма в крайномерно пространство V е положително определена точно когато, главните минори на матрицата и във всеки базис на V са положителни числа.

Доказателство. Нека $\widetilde{\varphi}$ е квадратична форма от V и главните минори на матрицата и във произволен базис на V са положителни числа. Тогава тя има каноничен вид посочен в Теорема 4(Метод на Якоби), който при направеното предположение дава, че тя е положително определена. Обратно, нека $\widetilde{\varphi}$ е положително определена и φ е асоциираната и симетрична билинейна форма. Нека $e = (e^{(1)}, \ldots, e^{(n)})$ е произволен базис на V, и $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ е матрицата на $\widetilde{\varphi}$ в този базис. Въвеждаме скаларно произведение като $\varphi(u, v) := \langle u, v\rangle$. Тогава $a_{ij} = \varphi(e^{(i)}, e^{(j)}) = \left\langle e^{(i)}, e^{(j)}\right\rangle$. Но тогава за главните минори $\Delta_k, 1 \le k \le n$ на A имаме

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left\langle e^{(1)}, e^{(1)}\right\rangle & \ldots & \left\langle e^{(1)}, e^{(k)}\right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \left\langle e^{(k)}, e^{(1)}\right\rangle & \ldots & \left\langle e^{(k)}, e^{(k)}\right\rangle \end{vmatrix} = \Gamma(e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}).$$

И сега е ясно, че от линейната независимост на $e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}$ следва $\Gamma(e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}) > 0, \forall 1 \le k \le n$, тоест $\Delta_k > 0, \forall 1 \le k \le n$. □

Литература

[1] Лекционните бележки на проф. А. Каспарян , "Билинейни и квадратични форми. Положително определени квадратични форми."

[2] "Записки по алгебра. Линейна алгебра."К. Чакърян, П. Сидеров.

[3] "Задачи по алгебра. Линейна алгебра."А. Божилов, П. Кошлуков, П. Сидеров.

[4] "Сборник по Линейна алгебра и аналитична геометрия."Богдан Александров, Азнив Каспарян, Диана Левченко.