Beräkningsvetenskap Projekt 1 - skalärt begynnelsevärdesproblem

Petter Byström, Tove Jonsson

October 30, 2023

1 Introduktion

Det här projektet behandlar begynelsevärdesproblemet $y_{tt} = ay_t + by + g(t)$. Vilket är en oridnarie differental ekvation av andra ordningen. Med hjälp av numeriska metoder, Rungekutta och symplectic integrator, kommer systemets olika egenskaper undersökas. Central är systemets stabilitet och energibevarande.

2 Problem

2.1 Problem 1

$$\begin{aligned} &y_{tt} = ay_t + by + g(t), t >= 0 \\ &y = f, y_t = 0,\ t = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

där

$$y_t = w; w_t = y_{tt} \tag{2}$$

Med hjälp av (2) kan (1) skrivas om till första ordningen vilket ger:

$$\begin{aligned} &w_t = aw + by + g(t), t >= 0 \\ &y = f, w = 0,\ t = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Linearisering ger:

$$\begin{aligned} &v_t = Av + G(t), t >= 0 \\ &v = [f; 0]\ t = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

där, A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}$, v= $\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}$.
För att hitta egenvärdena till A användes MatLabs funktion eig() Det gav egenvärdena:

$$\lambda_{12} = a/2 \pm \sqrt{a^2 + 4b}/2 \tag{5}$$

För att ODE ska vara stabil måste vissa villkor uppfyllas, I fallet där a och b är reela:
Re(λ_{ij}) $>= 0$
är sant då: $\lambda_1 : a < 0$ och $\sqrt{a^2 + 4b}/2 < a/2$ $\lambda_2 : a < 0$ och $\sqrt{a^2 + 4b}/2 > a/2$
för fallet där a är imaginärt och b reelt gäller för stabilitet: $\frac{a}{2} < \sqrt{|b|}$
Om $a = 0$ och $b < 0$ så har vi enbart imaginära egenvärden, dvs ett hamiltonskt system

2.2 Problem 2

$$\begin{aligned} &a = -2, b = -101 \\ &f = 1\ g(t) = sin(\pi t) \end{aligned} \tag{6}$$

För att hitta största k för numerisk stabilitet vid använding av RK4, så måste vi först hitta egenvärdena för de specifika värdena på a och b

med hjälp av MatLabs funktion eig() får vi: $\lambda_{12} = \pm\sqrt{202}$

stabilitetsområdet definieras som: $|k * \lambda| <= 2.8$

$$\begin{aligned} &|k * \lambda| <= 2.8 \\ &|\sqrt{202} * k| <= 2.8 \\ &|\sqrt{202} * k| <= 2.8 \\ &k <= 2.8/\sqrt{202} \\ &k <= 0.197 \end{aligned} \tag{7}$$

2.3 Problem 3

Konvergens undersöktes genom att betrakta den analytiska och numeriska lösningens slutpunkt på tids intervallet $0 < t < 1$ med tidsstegen 0.02 respektive 0.04

$$q = \frac{\log(\frac{|e_{N1}|}{|e_{N2}|})}{\log(\frac{k_1}{k_2})} \tag{8}$$

Där e_{N1} är felet för RK4 med $k1$ och e_{N2} är felet för RK4 med $k2$ Vilket ger $q = 3.75$, RK4 har noggranhetsordning 4 vilket stämmer bra överens med värdet på q. Se uträkningar i bifogad matlab fil: projekt1uppg3.m

2.4 Problem 4

För att härleda CD2 samt CD4 från system (1) gjordes följande beräkningar: Då $a = 0$ $g(t) = 0$ ges att system (1) kan skrivas som:

$$\begin{aligned} &y_{tt} = by, t >= 0 \\ &y = f, y_t = 0,\ t = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Omskrivning till CD2 ger:

$$\begin{aligned} &y_{tt} = \frac{y^{n+1} - 2*y^n + y^{n-1}}{k^2} = by, t >= 0 \\ &y^1 = f = y(0), \frac{y^2 - y^1}{k} = 0 = y_t,\ t = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Gör ett steg med Euler-Fram för y_t, börjar med att sätta in y(k):

$$(k) - y(o)k = N(k) \tag{11}$$

Taylorutveckling av $y(k)$ kring $y(0)$ ger:

$$y(k) = y(o) + k * y_t(0) + \frac{k^2}{2} * y_{tt}(0) + \mathcal{O}(k^3) \tag{12}$$

Insättning av taylorutvecklingen (12) i (11) ger:

$$\frac{y(o) + k * y_t(0) + \frac{k^2}{2} * y_{tt}(0) + \mathcal{O}(k^3) - y(0)}{k} = N(k) \tag{13}$$

Varpå $y(0)$ tar ut varandra och $y_t(0) = 0$ enligt (9).

$$\frac{k}{2} * y_{tt}(0) + \mathcal{O}(k^2) = N(k) \tag{14}$$

Ekvation (14) har noggranhetsordning 1. För att förbättra Euler-Fram till nogrannhetsordning 2 görs tilläggning av N(k) i system (10).

$$\begin{gathered}\{y_{tt} = b * y \\ \frac{k}{2} * y_{tt}(0) = \frac{k}{2} * b * y(0) \\ y(0) = f \\ \frac{k}{2} * b * y(0) = \frac{k}{2} * b * f\end{gathered} \tag{15}$$

Det nya systemet för CD2 med noggrannhetsordning 2 blir då:

$$\begin{gathered}y_{tt} = \frac{y^{n+1} - 2 * y^n + y^{n-1}}{k^2} = by^n, t >= 0 \\ y^1 = f = y(0), \frac{y^2 - y^1}{k} = \frac{k}{2} * b * y^1,\ t = 0\end{gathered} \tag{16}$$

För att uppnå CD4 behövs förbättring av noggrannheten av CD2. Stoppar in $y(t)$ i CD2:

$$\frac{y(t_n + k) - 2 * y(t) + y(t_n - k)}{k^2} = b * y(t_n) + N(k) \tag{17}$$

Taylorutvecklar $y(t_n + -k)$ kring $y(t_n)$

$$y(t_n + -k) = 2 * y(t_n) + -k * y_t(t_n) + \frac{k^2}{2} * y_{tt}(t_n) + -\frac{k^3}{6} y_{ttt}(t_n) + \frac{k^4}{24} * y_{tttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^6) \tag{18}$$

Sätter in Taylorutveckling (18) i system (16). Varpå alla udda exponenter till k kommer att ta ut varandra och jämna kommer bli multiplicerade med 2.

$$\frac{2 * y(t_n) + k^2 * y_{tt}(t_n) + \frac{k^4}{12} y_{tttt}(t_n) - 2 * y(t_n) + \mathcal{O}(k^6)}{k^2} = b * y(t_n) + N(k) \tag{19}$$

$$y_{tt}(t_n) + \frac{k^2}{12} * y_{tttt}(t_n) + \mathcal{O}(k^4) - b * y(t_n) = N(k) \tag{20}$$

$$y_{tt} = b * y \rightarrow y_{tttt} = b^2 * y \tag{21}$$

$y_{tt}(t_n)$ kommer därför att ta ut $b * y(t_n)$

$$\frac{k^2}{12} * b^2 * y(t_n) + \mathcal{O}(k^4) = N(k) \tag{22}$$

Sätter in ekvation (22) i system (16) för att förbättra noggrannheten till 4 och får fram CD4

$$\begin{gathered}y_{tt} = \frac{y^{n+1} - 2 * y^n + y^{n-1}}{k^2} = by^n + \frac{k^2}{12} * b^2 * y^n, t >= 0 \\ y^1 = f = y(0), \frac{y^2 - y^1}{k} = \frac{k}{2} * b * y^1,\ t = 0\end{gathered} \tag{23}$$

2.5 Problem 5

$$\begin{gathered}y^{n+1} - 2 * y^n + y^{n-1} = 0 \\ r^2 + 2 * \alpha * r + 1 = 0 \\ r_{12} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}\end{gathered} \tag{24}$$

om $\alpha^2 < 1$ där $\alpha = 1 + k^2/2 * b$ gäller $b < 0$ för stabilitet
vilket ger:

$$\begin{gathered}1 - k^2/2 * |b| > -1 \\ k^2 < 4/|b| \\ k <= \frac{2}{\sqrt{|b|}}\end{gathered} \tag{25}$$

Beräkningar leder till $k <= \frac{2}{\sqrt{|b|}}$

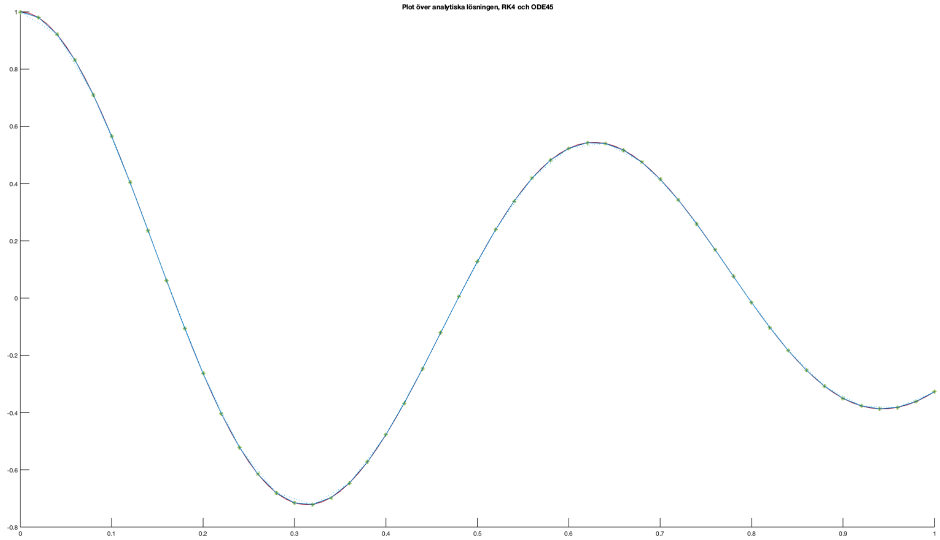

Figure 1: lösningarna för RK4, ODE 45 och den analytiska lösningen, där RK4 motsvarar '*', ODE45 ':' och analytiska '—'

2.6 Problem 6

Vid $b = -1$ blir det största k: $k = 2$. Figur 3 och 4 visar att steglängd större än 2 inte är stabil

I figur 2 simuleras flera olika steglängder för CD4 och vid k = 1.74 och större är metoden inte längre stabil. Nedan visas tabell över hur CD2 och CD4 påverkas av storleken på tidssteget k. Alla värden är uträknade med bifogad matlab fil projekt1uppg6.m.

k	$e1(CD2)/e1(CD4)$	$e2(CD2)/e2(CD4)$	$q(CD2)$	$q(CD4)$
1	0.3391/0.0087	0.0630/4.8999e-04	2.4275	4.1526
0.5	0.0630/4.8999e-04	0.0146/2.9790e-05	2.1146	4.0398
0.025	0.0146/2.9790e-05	0.0036/1.8490e-06	2.0292	4.0100

$e1$ är felet för k, $e2$ är felet för $k/2$

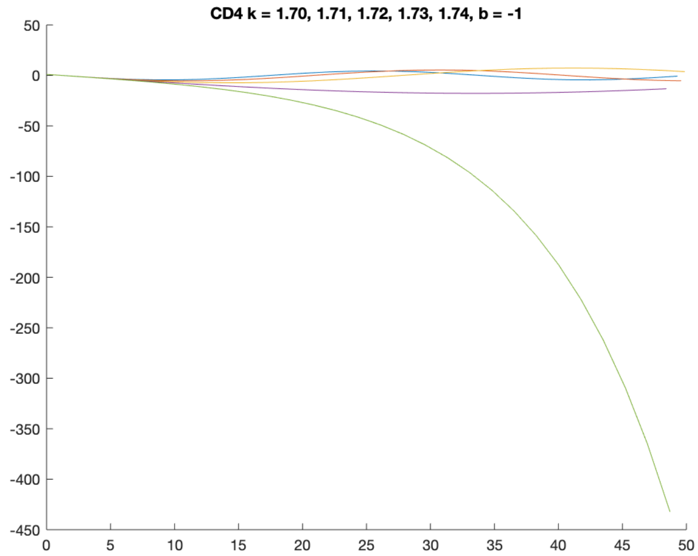

Figure 2: simulation för högsta steglängd CD4

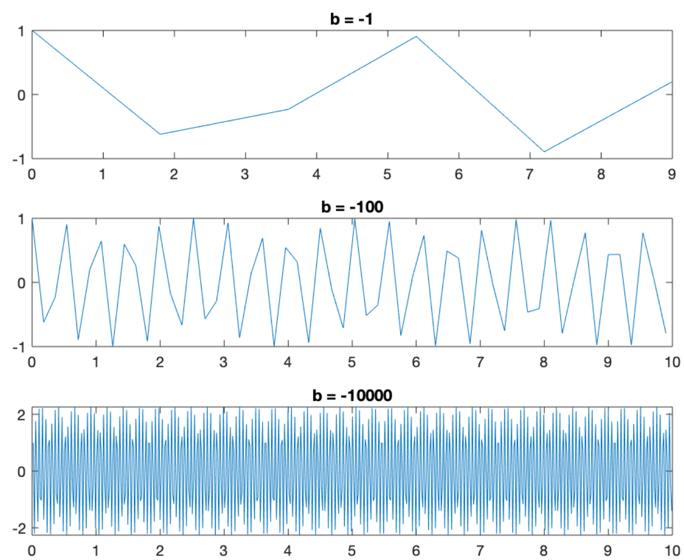

Figure 3: $k = 0.9 * (\frac{2}{\sqrt{|b|}})$ för b = -1, -100, -10000

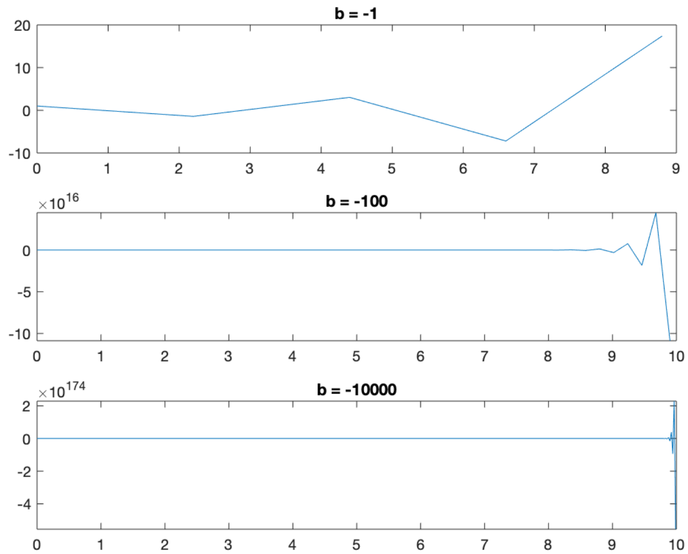

Figure 4: k = 1.1 $* (\frac{2}{\sqrt{|b|}}$ för b = -1, -100, -10000)

2.7 Problem 7

För beräkning av den diskreta energin E_n användes följande ekvationer:

$$D_0 y^n = \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2k} \to E_n \simeq (D_0 y^n)^2 - b(y^n)^2 \tag{26}$$

Ovanstående ekvation användes för att beräkna E_n för CD4 metoden.Där y^n är lösningsvektorn till CD4.

$$E_n \simeq (w^n)^2 - b(y^n)^2 \tag{27}$$

Ovanstående ekvation användes för att beräkna E_n för RK4 metoden. Där w^n är vektorn $y^t(n)$. Med bifogat matlab fil projekt1uppg7.m beräknades och plottades E_n för respektive metod. Se figur 5 till 12.

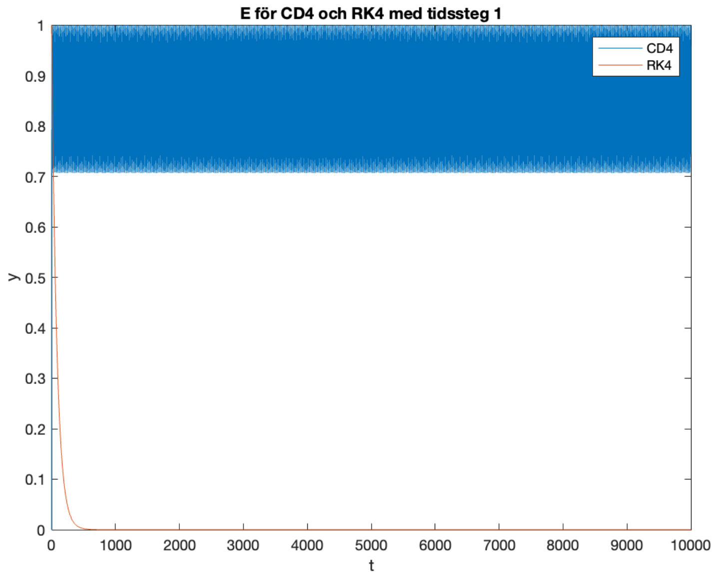

Figure 5: E-CD4-RK4-K=1

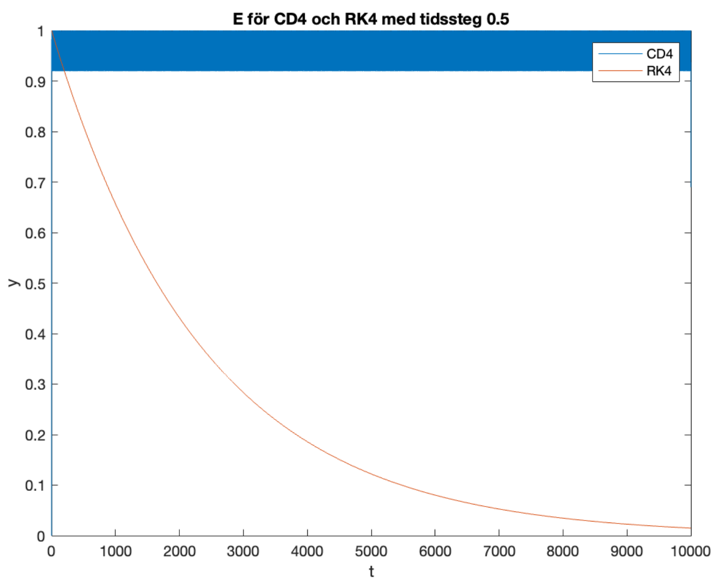

Figure 6: E-CD4-RK4-K=0.5

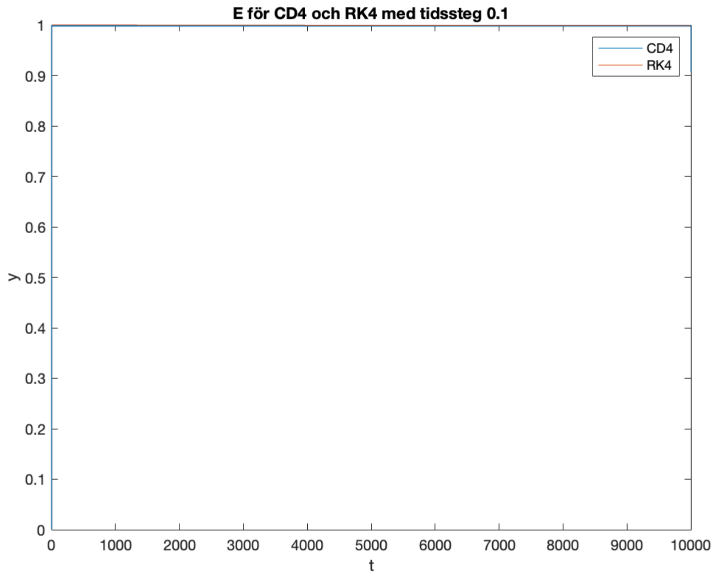

Figure 7: E-CD4-RK4-K=0.1

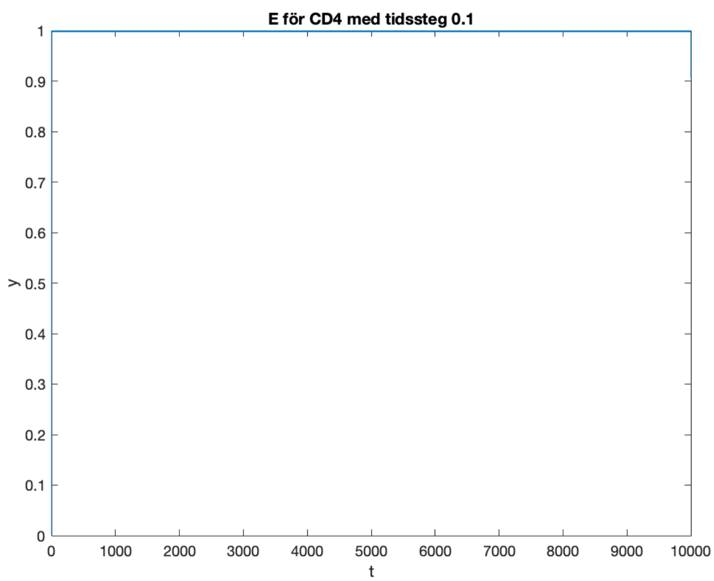

Figure 8: E-CD4-k=0.1

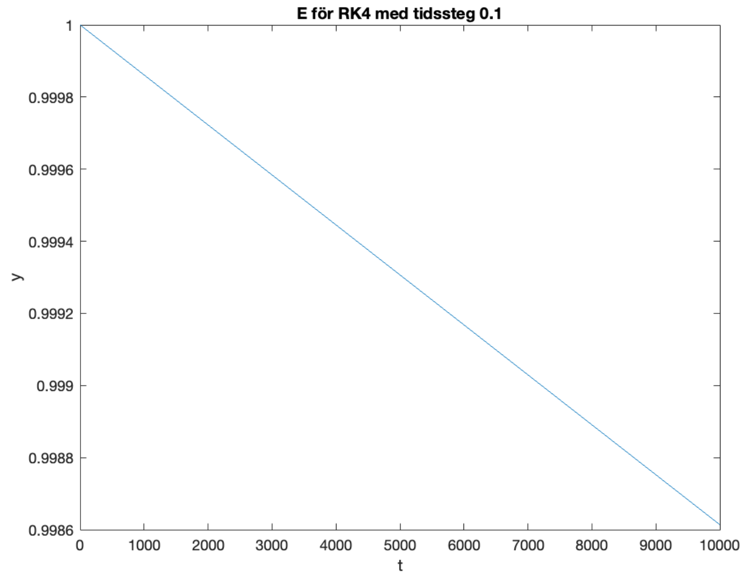

Figure 9: E-RK4-k=0.1

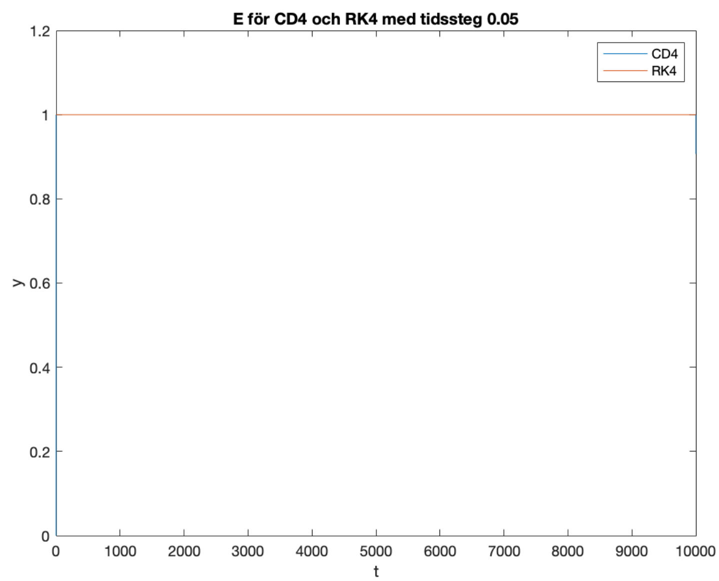

Figure 10: E-CD4-RK4-K=0.05

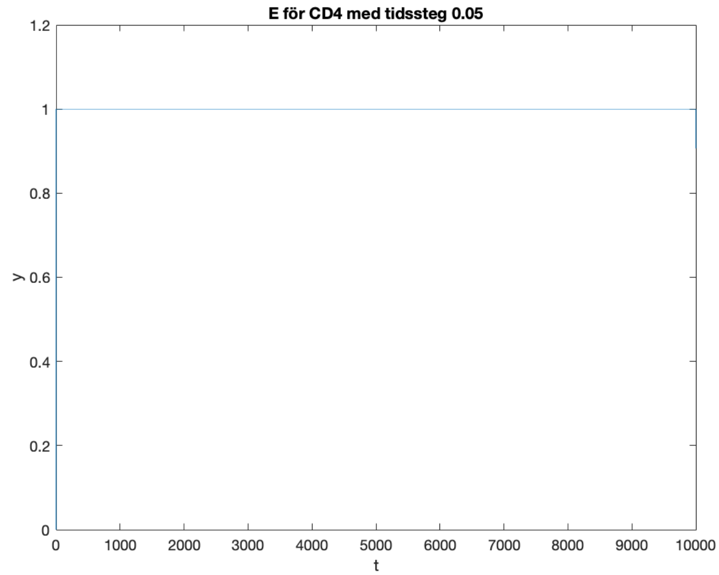

Figure 11: E-CD4-K=0.05

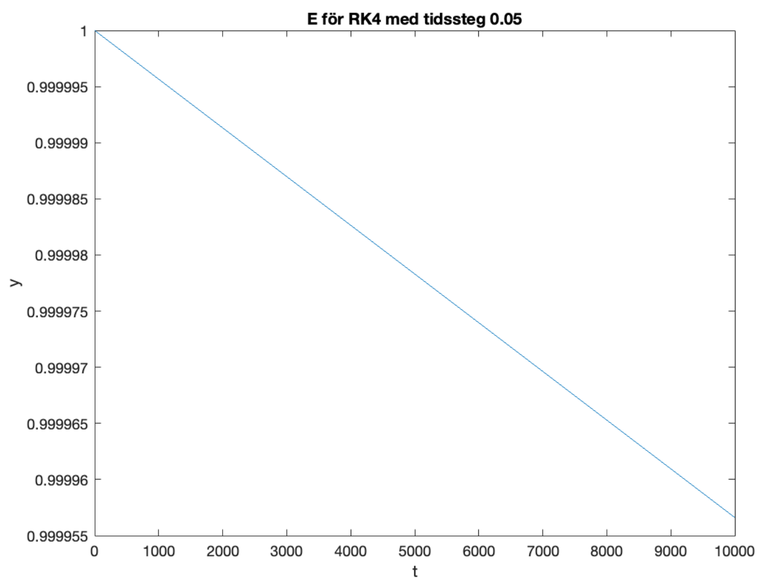

Figure 12: E-RK4-K=0.05

3 Slutsats

Efter att ha först tagit reda på systemets egenvärde, har vi kunnat maximala tidsteget för olika värden på konstanter a och b. Dessutom har vi kunnat påvisat konvergensen för både RK4 och, CD2 och CD4 som har överstämt med den teoretiska noggranhetsordningen. Även de olika metodernas energibevarande har undersökts, där vi har visat att RK4 inte är enegibevarande medan CD4 är det.