REPORT 9

潘硕 PB24020526

2025 年 10 月 12 日

1 Question

考虑泊松分布, 指数分布, 并再自设若干个随机分布 (它们有相同或不同的 μ 和 σ^2), 通过 Monte-Carlo 模拟, 验证中心极限定理成立 ($N = 2, 5, 10$).

2 Method

2.1 中心极限定理

设存在一个随机分布, 均值为 μ, 标准差为 σ, 当样本容量 n 足够大时, 该抽样分布将近似服从一个均值为 μ, 方差为 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ 的正态分布, 即:

$$P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}} < \beta) \to \Phi(\beta) \tag{1}$$

其中 $\Phi(x)$ 为 Gauss 正态分布

2.2 常见随机分布

2.2.1 均匀分布

随机变量 X 在有限区间 (a, b) 满足均匀分布 $(-\infty < a < b < \infty)$, 则概率密度函数满足:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x) \tag{2}$$

2.2.2 指数分布

随机变量 X 的密度函数服从参数为 λ 的指数分布, 记作 $X \sim Exp(\lambda)$, 满足:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x) \tag{3}$$

2.2.3 Possion 分布

随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$, 满足:

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}; k=0,1,\cdots;\lambda>0 \tag{4}$$

2.2.4 二项分布

随机变量 X 所有可能取值为 $0,1,\cdots,n, 0<p<1$, 其分布服从二项分布:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n \tag{5}$$

常记为 $X \sim B(n,p)$

本实验将采用以上随机分布进行验证.

3 Experiment

具体算法:

1. 生成满足不同随机分布的随机数序列
2. $N=2,5,10,50$, 计算该分布的 μ,σ, 做变换 $X' = \dfrac{X-\mu}{\sigma_f/\sqrt{N}}$
3. 绘制变换后的分布图像, 并与标准正态分布比较

得到的图像如下:

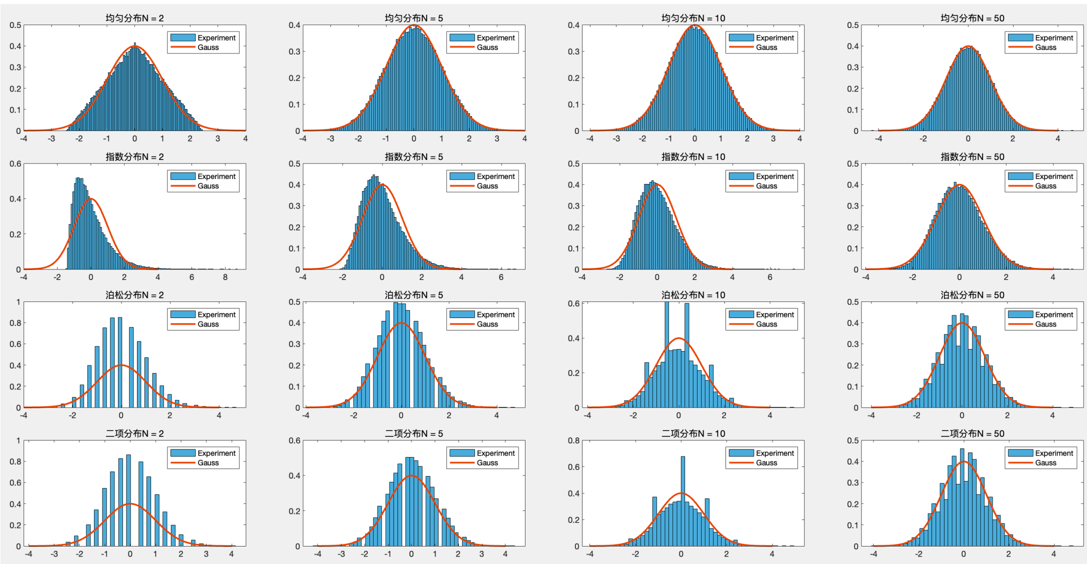

图 1: 中心极限定理的验证

4 Summary

由图像可以看出, 对于均匀分布、指数分布、泊松分布、二项分布,N 较大时, 得到的抽样分布都趋近于正态分布, 中心极限定理成立.

其中均匀分布和指数分布为连续分布, 趋近的速度较快; 泊松分布和二项分布为离散分布, 趋近的速度较慢.