REPORT 17

潘硕 PB24020526

2025 年 11 月 30 日

1 Question

以 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 为迭代方程进行迭代:

1. 画出系统状态随参数 λ 的变化图, 要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态;

2. 列出各个倍周期分叉处的 λ 值, 求相应的 Feigenbaum 常数.

2 Method

2.1 函数 y = sin x 的迭代方法

迭代函数 $y = \lambda \sin(\pi x)$ 为连续函数, 在 $x \in [0, \pi]$ 内有一个极大值, 取 $\lambda \in [0, 1]$.

对函数经过足够次数 N 的迭代后, 近似进入周期状态. 据此给出计算周期数 T 和迭代结果 x^* 的算法:

1. 取初值 x_0, 利用 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 迭代, 直至 $n = N + \Delta N$.

2. 计算周期数: 从 $i = N + 1$ 开始, 判断 $|x_i - x_N| < tol$ 是否成立.

3. 不等式成立,$T = i - N + 1, x^* = \{x_N, \cdots, x_i\}$, 停止, 跳出循环. 反之 $i = i + 1$, 返回步骤 2.

4. $i = \Delta N + N$ 时停止. 此时表明周期 $T > \Delta N$ 或进入混沌状态.

本题计算 Feigenbaum 常数时取 $x_0 = 0.5, N = 1000000, \Delta N = 200, tol = 1e-10$

3 Experiment

取 $\lambda = 0 : 0.001 : 1$, 计算 λ 对应的 x^*, 绘制 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 系统状态随时间演化图. (对计算精度要求不高, 可适当减小 N)

3.1 系统状态演化

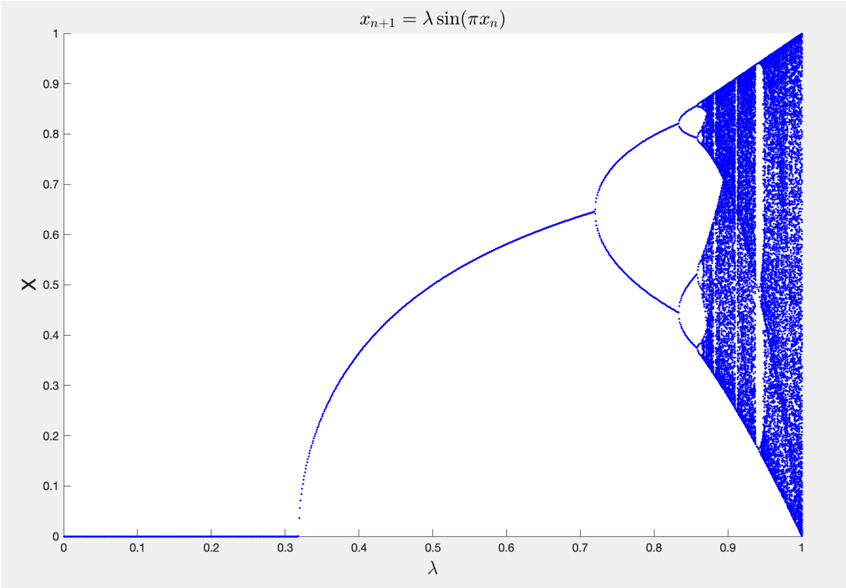

图 1: $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 系统状态演化图

图中可以看出, 系统在 $0 < \lambda < 0.32$ 处于绝灭状态,$0.32 < \lambda < 0.72$ 处于定态,$0.72 < \lambda < 0.87$ 为倍周期分叉,$0.87 < \lambda < 1$ 进入混沌, 同时存在周期窗口.

3.2 倍周期分叉与 Feigenbaum 常数

以下讨论系统在倍周期分叉区间的行为 (如下图), 并求解 Feigenbaum 常数.

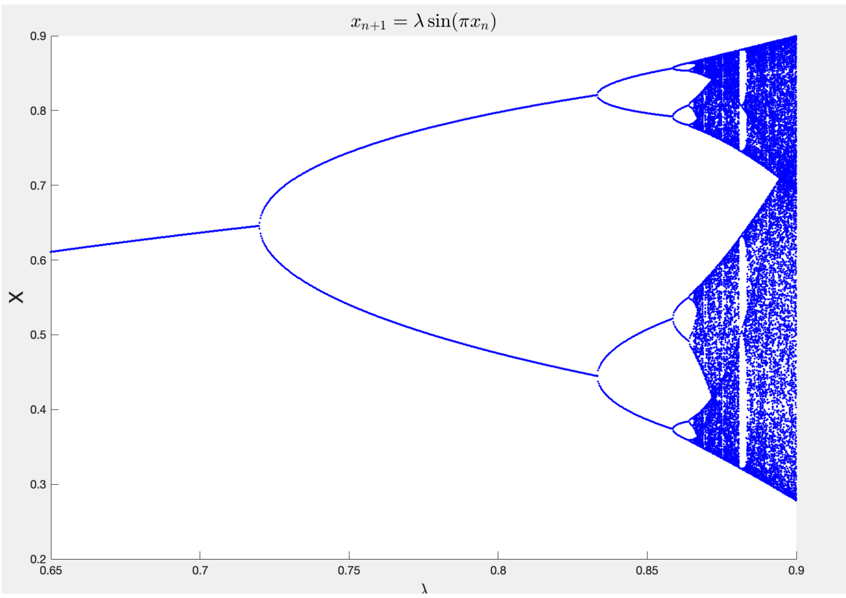

图 2: $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 倍周期分叉区域演化

计算各分叉点值如下所示:

表 1: 倍周期分叉点计算

分叉次数	λ_m	$(\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$
$1 \to 2$	0.719960	–
$2 \to 3$	0.833266	4.470874
$3 \to 4$	0.858609	4.628648
$4 \to 5$	0.864084	4.660417
$5 \to 6$	0.865259	4.667176
$6 \to 7$	0.865511	4.668532
$7 \to 8$	0.865565	4.668301
$8 \to 9$	0.865576	–

计算 $(\lambda_m - \lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$, 可见数值确实接近于常数 $\delta = 4.669201$
同理计算 d_m/d_{m+1}.

表 2: 纵轴方向倍周期分叉的标度行为

m	周期数	d_m	d_m/d_{m+1}
1	2	0.277734	2.590697
2	4	0.107204	2.521384
3	8	0.042518	2.506683
4	16	0.016962	2.503703
5	32	0.006775	2.503075
6	64	0.002707	2.502943
7	128	0.001081	–

计算结果 d_m/d_{m+1} 接近理论值 $\alpha = 2.502907$

4 Summary

1. 绘制 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 系统状态随 λ 的演化图, 分别观察到系统的定值状态、倍周期分叉和混沌状态.

2. 计算了本系统的 Feigenbaum 常数, 与理论值接近, 验证了 Feigenbaum 常数与具体的函数形式无关.

3. 考虑到浮点数的舍入误差, 本文未对更大周期数 Feigenbaum 常数进行计算.