

REPORT 2

潘硕 PB24020526

2025 年 9 月 20 日

1 Question

用 16807 产生器测试随机数序列中满足关系 $X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的比重. 讨论 Fibonacci 延迟产生器中出现这种关系的比重.

2 Method

2.1 16807 产生器

16807 产生器基于线性同余法产生随机数序列, 其递推关系为:

$$I_{n+1} = (aI_n + b) \mod m \quad (1)$$

其中 $a = 16807, b = 0, m = 2^{31} - 1 = 2147483647$.

可以用 Schrage 方法来避免溢出, 即:

$$I_{n+1} = \begin{cases} a(I_n \mod q) - r \lfloor I_n/q \rfloor, & \text{if } \geq 0 \\ a(I_n \mod q) - r \lfloor I_n/q \rfloor + m, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

其中取 $q = 127773, r = 2836$.

2.2 Fibonacci 延迟产生器

Fibonacci 延迟产生器的思想是用序列中两个整数进行操作得到后续的整数, 其递推关系为:

$$I_n = (I_{n-j} + I_{n-k}) \mod m \quad (3)$$

其中 j 和 k 是两个延迟参数, m 是模数.

常见的参数选择有 $(j, k) = (24, 55), (37, 100)$ 等.

更一般的表达式为:

$$I_n = (I_{n-j} \otimes I_{n-k}) \mod m \quad (4)$$

其中 \otimes 可以是加, 减, 乘或 XOR.

相较于线性同余法, Fibonacci 延迟产生器的优势在于它的周期非常长, 32 位机上的最大周期为 $(2^p - 1)2^{31} (p > q)$

更复杂一点的例子: 待载减法产生器:

$$I_n = (I_{n-22} - I_{n-43} - C) \quad (5)$$

$$\begin{cases} C = 0, & \text{if } I_n \geq 0 \\ C = 1, I_n = I_n + 2^{32} - 5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以及待载减法 Weyl 产生器:

$$J_n = (J_{n-22} - J_{n-43} - C) \quad (6)$$

$$\begin{cases} C = 0, & \text{if } J_n \geq 0 \\ C = 1, J_n = J_n + 2^{32} - 5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_n = (K_{n-1} - 362436069) \mod 2^{32}$$

$$I_n = J_n - K_n \mod 2^{32}$$

本实验将基于 (3) 式进行测试, 其中 $(j, k) = (24, 55)$.

3 Experiment

先通过 16807 产生器生成随机数序列, 取前面 55 个数作为 Fibonacci 延迟产生器的种子, 利用 (3) 式生成随机数.

分别统计统计 16807 产生器和 Fibonacci 延迟产生器满足关系 $X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的比重.

理论值为: $P(X_{n-1} > X_{n+1} > X_n) = \frac{1}{6} \approx 0.16667$

代码中取点个数为 $N = 10000000$, 用计算机当前时间生成种子值. 一共取 10 次, 计算平均值. 结果如下:

```
seeding = 1564086015 p1 = 0.16668 p2 = 0.16671
seeding = 1670094855 p1 = 0.16659 p2 = 0.16656
seeding = 1776103695 p1 = 0.16647 p2 = 0.16666
seeding = 1882112535 p1 = 0.16655 p2 = 0.16675
seeding = 1988121375 p1 = 0.16668 p2 = 0.16670
seeding = 2058793935 p1 = 0.16668 p2 = 0.16675
seeding = 45224895 p1 = 0.16677 p2 = 0.16665
seeding = 151233735 p1 = 0.16648 p2 = 0.16647
seeding = 257242575 p1 = 0.16679 p2 = 0.16660
seeding = 363251415 p1 = 0.16667 p2 = 0.16687
average:
16807:0.16664
Fibonacci: 0.16667
```

图 1: 两组随机数满足关系 $X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的比重

计算得到 16807 产生器满足关系 $X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的占比为 0.16664, Fibonacci 延迟产生器占比为 0.16667, 均接近理论值 $\frac{1}{6} \approx 0.16667$.

4 Summary

本实验使用 16807 产生器和 Fibonacci 延迟产生器生成随机数序列, 并统计满足关系 $X_{n-1} > X_{n+1} > X_n$ 的比重. 结果均接近理论值 $\frac{1}{6}$, 说明两种方法均能较好地生成随机数.