

# REPORT 18

潘硕 PB24020526

2025 年 12 月 8 日

## 1 Question

进行单中心 DLA 模型的模拟 (可以用圆形边界, 也可以用正方形边界), 并用两种方法计算模拟得到的 DLA 图形的分形维数, 求分形维数时需要作出双对数图.

## 2 Method

### 2.1 DLA 模拟

1. 在原点上放置一个种子粒子作为 DLA 的起点;
2. 设集团粒子到原点的最大距离为  $r_{max}$ , 以原点为圆心,  $R = \max\{r_{max} + 5, 20\}$  为半径的圆周上随机选取一点作为新粒子起始位置;
3. 新粒子随机游走, 直至粒子与集团粒子粘连, 停止运动加入集团; 或者粒子距离原点超过  $\sqrt{3}R$ , 取消该粒子.
4. 重复步骤 2-3, 直至集团粒子数目达到预设值.

### 2.2 SandBox 计数法

对于单周期分形图形, 以中心为圆心, 半径  $r$  的圆内, 粒子数目  $N(r)$  满足:

$$N(r) \sim r^D \quad (1)$$

$$\log(N(r))/\log(r) \sim D \quad (2)$$

据此给出计算分形维数  $D$  的算法:

1. 以原点为圆心, 以半径  $r_0$  画圆, 统计圆内的粒子数目  $N(r)$ ;
2. 以等幂次  $\alpha$  增加  $r$  的值, 计算  $N(r)$ ;
3. 作出  $\log(N(r))$  对  $\log(r)$  的双对数图, 拟合直线, 斜率即为分形维数  $D$ .

## 2.3 密度-密度相关函数法

平面上分形图形的密度-密度相关函数定义为:

$$C(\mathbf{r}) \equiv \left\langle \sum \frac{\rho(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}' + \mathbf{r})}{N} \right\rangle \sim r^{-\alpha} \quad (3)$$

$\rho(\mathbf{r}')$  是图形的密度函数, 有集团粒子时为 1, 否则为 0;  $N$  为集团粒子总数.  $C(\mathbf{r})$  表示原始图形和平移  $\mathbf{r}$  后图形的重合程度.

将  $C(\mathbf{r})$  在回转半径  $R$  内积分,  $R$  足够大时, 积分值与集团粒子总数成正比, 即:

$$\int_0^R C(r) d^d r \propto N \implies N \propto R^{d-\alpha} \implies D = d - \alpha \quad (4)$$

$d$  为欧氏空间维数, 对于平面图形, 满足  $d = 2$ . 算法如下:

1. 原图形沿  $X, Y$  方向平移  $\pm r_0$ , 计算重合粒子数目, 在四个方向取平均得  $N(r)$ ;
2. 等幂次  $\alpha$  增加并取整得到  $r$  的值, 计算  $N(r)$ ;
3. 作出  $\log(N(r))$  与  $\log(r)$  的双对数图, 拟合直线得到斜率  $-\alpha$
4. 计算分形维数:  $D = d - \alpha$ .

## 3 Experiment

DLA 模拟生成  $N = 5000$  的粒子集团, 如下图所示:

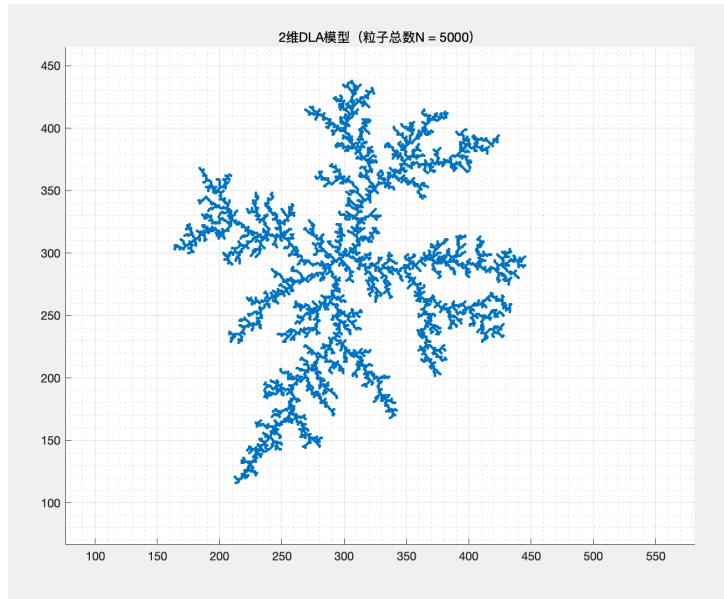


图 1: 集团粒子 ( $N = 5000$ )

### 3.1 SandBox 计数法

设生成的集团粒子到原点最大距离为  $R_{max}$ , 取  $r$  为  $R_{max}/20$  到  $0.8R_{max}$  的等比数列, 项数 20, 计算  $N(r)$ , 绘制曲线如下图所示:

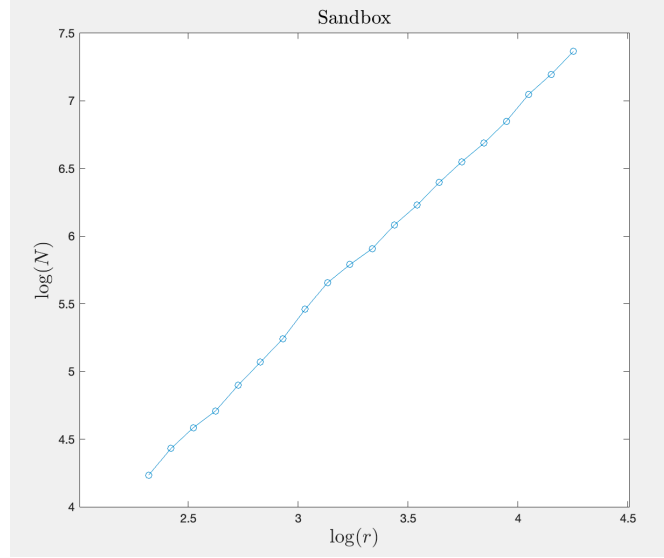


图 2: SandBox 法 ( $N = 5000$ )

拟合斜率  $k = D = 1.6087$ ,  $R_{sq} = 0.998$ , 接近 DLA 模型分形维数  $1.6 - 1.7$ .

### 3.2 密度-密度相关函数法

取  $M = \max\{|X|, |Y|\}$ , 取  $r$  为  $M/20$  到  $0.9M$  的等比数列, 项数 20, 计算  $N(r)$ , 绘制曲线如下:

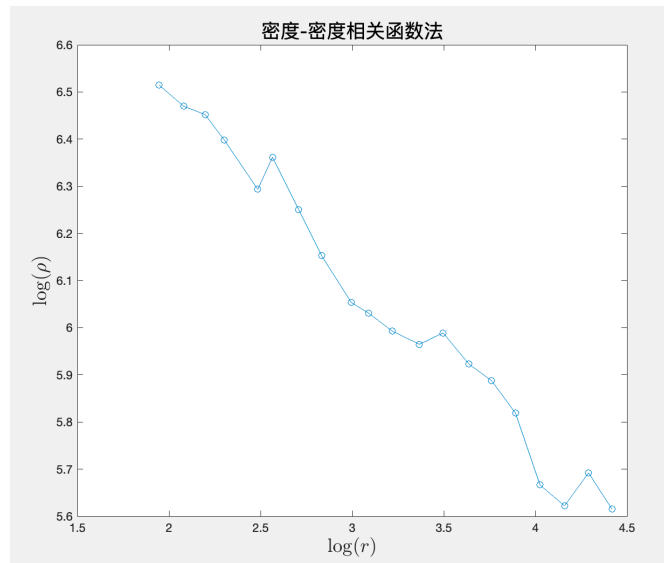


图 3: 密度-密度相关函数法 ( $N = 5000$ )

拟合斜率  $k = -0.3754$ , 分形维数  $D = 2 - k = 1.6246$ ,  $R_{sq} = 0.998$ , 接近理论值  $1.6 - 1.7$ .

## 4 Summary

本题使用 SandBox 法和密度-密度相关函数法计算单中心 DLA 模型的分形维数, 计算结果分别为 1.6087 和 1.6246, 结果均符合理论值 1.6-1.7 的预期. 为  $1.6 - 1.7$  的预期.