REPORT 12

潘硕 PB24020526

2025 年 11 月 4 日

1 Question

推导正方格子点阵上键逾渗的重整化群变换表达式 $p' = R(p)$, 求临界点 p_c 与临界指数 ν, 与正确值相比较。

2 method

2.1 键逾渗模型

逾渗模型是研究无序介质中流体流动的数学模型. 点阵上的逾渗过程有两种基本类型: 座逾渗与键逾渗. 对于键逾渗, 相邻格点的连线 (键) 连接或断开, 连接的概率为 p.

以二维方形点阵为例 (忽略边界效应), 存在一个临界概率 p_c, 当 $p > p_c$ 时, 逾渗通路出现, 则称 p_c 为正方形点阵上键逾渗的临界点.

再考察逾渗在临界点附近的行为. 定义跨越长度 ξ 为集团中两条键中心的最大间距, 即

$$\xi = \langle \max\{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|_{(i,j)\in cluster}\}\rangle \tag{1}$$

在 p 接近 p_c 时, 有:

$$\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\nu} \tag{2}$$

ν 为描述平均跨越长度的临界指数.

2.2 重整化群

重整化群的一般思路是将描写一个物理问题的参数用另外一组更为简单的参数表示出来. 在临界问题中, 我们感兴趣的是体系的长程行为, 因此将短程自由度不断做粗粒平均.

对二维格点的键逾渗模型, 我们可以将格子点阵区域分成小块 (元胞), 每个元胞包括数个格子和键. 若元胞内部上下连通, 可以重整化为通路; 反之则不通.

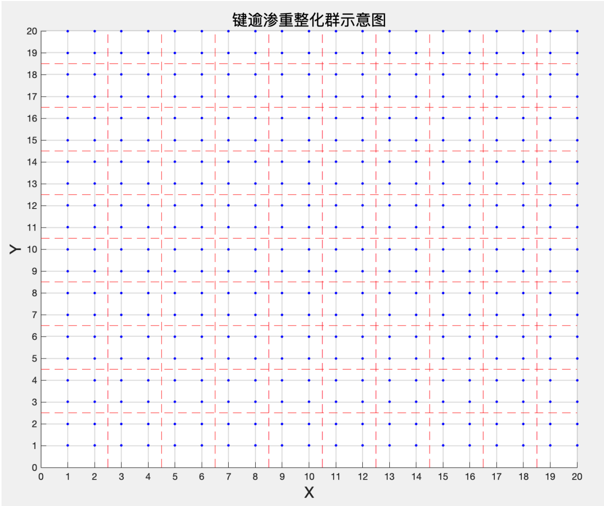

图 1: 二维平面正方格点键逾渗示意图

假设元胞的边长为 b. 重整化后通路概率 $p' = R(p)$. 对于临界点, 其经过标度变换,p 应保持不变

$$p_c = R(p_c) \tag{3}$$

对于临界指数, 考虑到重整化格子点阵中所有长度应缩小 b 倍, 满足

$$|p' - p_c|^{-\nu} = b^{-1}|p - p_c|^{-\nu} \tag{4}$$

将上式在 p_c 附近做 Taylor 展开:$p' - p_c = R(p) - R(p_c) \approx \lambda(p - p_c)$.
联立两式, 可得临界指数表达式:

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda} = \frac{\ln b}{\ln \left.(dp'/dp)\right|_{p=p_c}} \tag{5}$$

3 Experiment

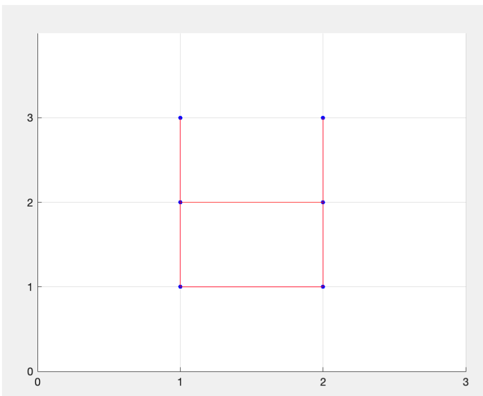

图 2: $b = 2$ 键逾渗元胞示意图

取 $b=2$, 每个元胞有 6 条键 (包括图 1 分块区域内部 4 条键及与上方格点相连的 2 条键). 下面两格点与上面两格点有通路时, 重整化为通路.

记 n 为元胞内通路数量,$0\leqslant n\leqslant 6$,$K(n)$ 为通路数 n 对应的连通方式数目.

易得 $K(0)=K(1)=0, K(5)=6, k(6)=1$. 对于 $n=2,3,4$, 可以通过枚举得到: $K(2)=2, K(3)=10, K(4)=13$. 枚举结果如下图所示, 其中红色为通路, 黑色为断路.

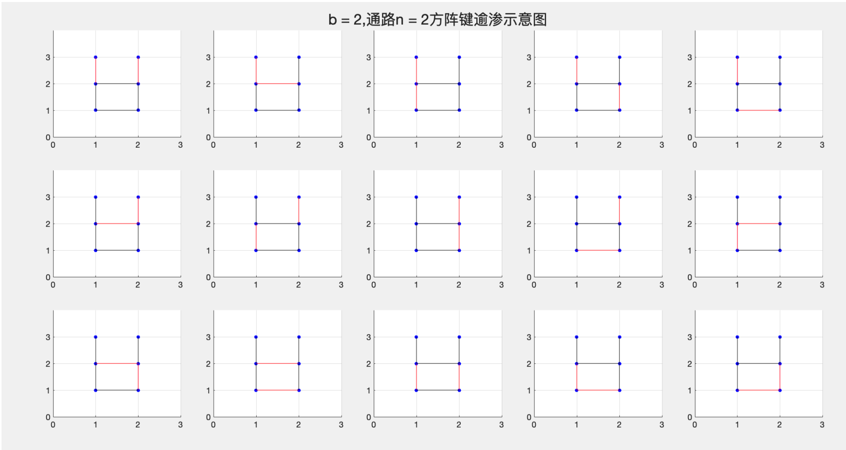

图 3: $b=2, n=2$ 键逾渗示意图

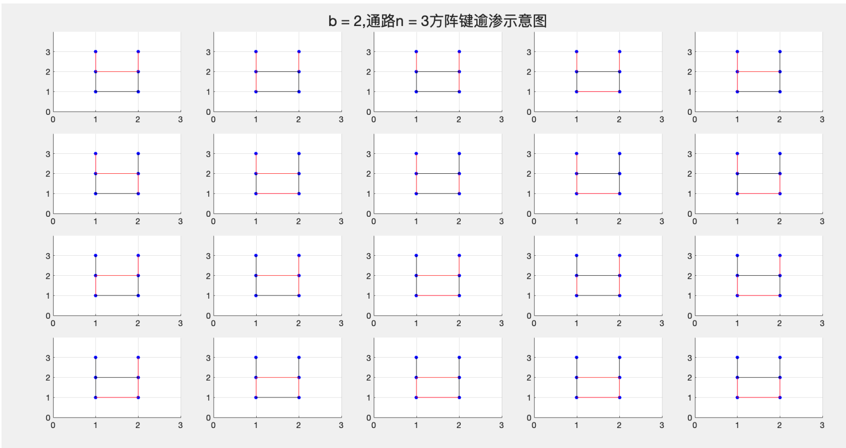

图 4: $b=2, n=3$ 键逾渗示意图

则重整化变换表达式为:

$$R(p)=2p^2(1-p)^4+10p^3(1-p)^3+13p^4(1-p)^2+6p^5(1-p)+p^6=\left(2\,p^5-5\,p^4+2\,p^3+2p^2\right) \tag{6}$$

求解方程 $R(p)=p$ 易得 $p=0.5$(舍去解 $p=0,1$).

标度指数计算:

$$\nu=\frac{\ln b}{\ln\left(dR(p)/dp\right)|_{p=p_c}}\approx 1.4277 \tag{7}$$

对于精确解,$p_c^*=0.5, \nu^*=4/3\approx 1.333$. 可见对于 $b=2$ 的简单情况而言, 近似结果已相当不错.

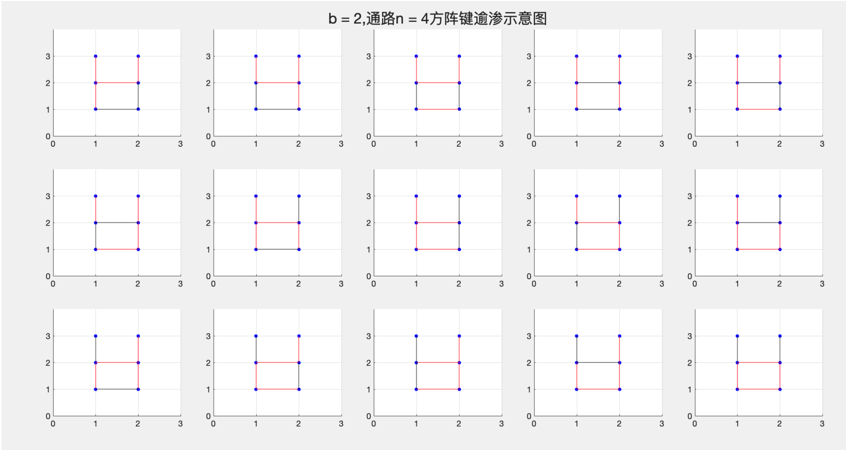

图 5: $b=2, n=4$ 键逾渗示意图

4 Summary

本题通过重整化群方法计算了正方格点上键逾渗的临界点 p_c 临界指数 ν. 计算结果 $p_c=0.5, \nu \approx 1.4277$, 与精确值 $p_c=0.5, \nu=4/3$ 相接近. 若要追求更精确的结果, 可以选择更大的 b 进行计算.