REPORT 5

潘硕 PB24020526

2025 年 9 月 23 日

1 Question

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在 (x, y) 平面上投影的概率分布函数。并由此验证 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, , y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1-2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样.

2 Method

2.1 (x,y) 概率密度函数的计算

点在球面上均匀分布, 用球坐标 (R, θ, φ) 表示, 设球半径为 R, 概率密度函数满足:

1. $P(R, \theta, \varphi)$ 可分离变量, 即 $P(R, \theta, \varphi) = \Theta(\theta)\mathit{\Phi}(\varphi)$
2. $\Theta(\theta) = C_1 \sin\theta, \mathit{\Phi}(\varphi) = C_2$
3. 满足归一化条件:$\int_0^\pi \Theta(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \mathit{\Phi}(\varphi)d\varphi = 1$

联立可以解出:

$$P(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}sin\theta \tag{1}$$

在 (x, y) 平面内做投影, 坐标之间的对应关系有:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \end{cases} \tag{2}$$

概率密度函数满足 $P_2(x, y)dxdy = P(R, \theta, \varphi)d\theta d\varphi$, 从而有:

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2\pi R\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \tag{3}$$

2.2 三维球面分布的 Marsaglia 方法

方法的一般步骤为:

1. 随机抽样一对均匀分布的随机数,$(u,v) \in [-1,1]$
2. 计算 $r^2 = u^2 + v^2$, 若 $r > 1$ 则重新抽样直至 $r^2 \leqslant 1$
3. 得到 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1-2r^2$

3 Experiment

用 16807 产生器产生 N 对随机数 (u,v), 计算 $u^2+v^2 \leqslant 1$ 是否成立. 将符合条件的点做变换 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1-2r^2$, 并在三维图上绘制图像:

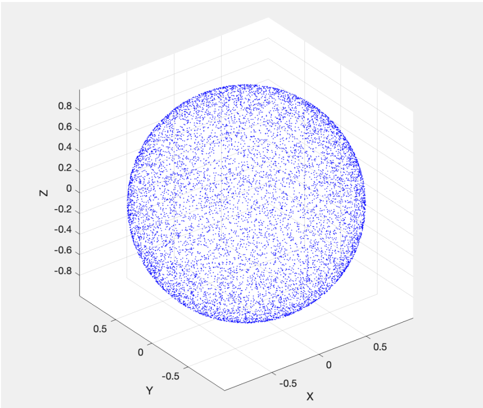

图 1: 球面散点分布图

统计散点在 (x,y) 的概率密度分布条状图, 并计算概率密度函数相对误差, 绘制图像如下图所示:

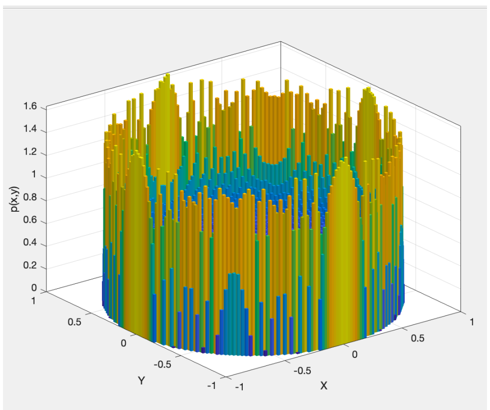

图 2: 抽样概率密度函数拟合图

计算出来的概率密度函数平均相对误差为 3.6%, 可见抽样结果在球面上近似为均匀分布. 并观察到 r 接近于 1 时, 相对误差较大, 与 $P_2(x,y) \to \infty (x^2+y^2 \to 1)$ 有关.

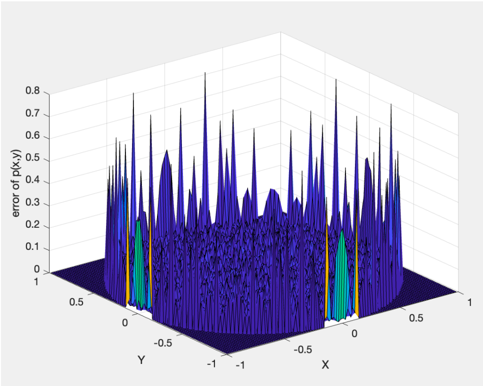

图 3: 抽样概率密度函数相对误差图

4 Summary

本题对于球面上均匀分布的点, 先计算了其在 (x, y) 平面上的概率分布函数, 再通过 Marsaglia 抽样方法, 产生球面均匀分布的随机点, 并将抽样结果与理论值相比较, 相对误差仅为 3.6%, 故 Marsaglia 抽样方法确满足条件.