REPORT 4

潘硕 PB24020526

2025 年 9 月 22 日

1 Question

$p'(x) = a\delta(x) + be^{-cx}, x \in [-1, 1], a \neq 0$. 讨论该分布函数的性质并给出抽样方法

2 Method

2.1 概率密度函数的计算

考虑 x 处的概率密度函数

$$p(x) = p(-1) + \int_{-1}^{x} p'(t)dt = \begin{cases} p(-1) + \frac{b}{c}(e^c - e^{-cx}), & x \leqslant 0 \\ p(-1) + a + \frac{b}{c}(e^c - e^{-cx}), & x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

概率分布函数满足归一化:

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = 1 \tag{2}$$

积分后可得

$$p(-1) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{c^2}\sinh c - \frac{b}{c}e^c \tag{3}$$

因此有:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{c^2}\sinh c - \frac{b}{c}e^{-cx}, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{c^2}\sinh c - \frac{b}{c}e^{-cx}, & x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

要求满足 $p(x) \geqslant 0, x \in [-1, 1]$

2.2 舍选法抽样

密度分布函数 $p(x)$ 有界且分布在有限区间 $[a, b]$. 设 M 为上界, 取

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2M}, & x \in [a, b], y \in [0, M] \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{5}$$

按照舍选法的一般步骤:

1. 先产生一对 $[0,1]$ 区间中均匀分布的随机抽样值 ξ_1,ξ_2, 由 $g(x,y)$ 得抽样表达式 $\xi_1=(\xi_x-a)/(b-a),\xi_2=\xi_y/M$
2. 若 $\xi_2\leqslant p(\xi_1)$, 则接受 ξ_1 作为抽样值, 否则舍弃, 重新回到第一步.

本题 $p(x)$ 存在尖峰形状, 舍选法抽样效率较低, 可以将 $y=M$ 直线改为已知形状且可以积分的函数, 形状与 $p(x)$ 类似但处处比 $p(x)$ 大. 常使用分段阶梯函数 $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}M_1, & x\in[a,x_1]\\ M_2, & x\in(x_1,x_2]\\ \dots\end{cases} \tag{6}$$

此时有:

$$\xi_1=\int_a^{\xi_x}F(x)dx/\int_b^a F(x)dx,\xi_y=\xi_2F(\xi_x) \tag{7}$$

本题中选取 $a=-1,b=1$,$F(x)$ 为分段阶梯函数:

$$F(x)=\begin{cases}M_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{c^2}\sinh c+|\dfrac{b}{c}|e^{|c|}, & x\in[-1,0]\\ M_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{c^2}\sinh c+|\dfrac{b}{c}|e^{|c|}, & x\in[0,1]\end{cases} \tag{8}$$

并有:

$$\xi_x=\begin{cases}(1+M_2/M_1)\xi_1-1, & x\in[-1,0]\\ (1+M_1/M_2)\xi_1-M_1/M_2, & x\in(0,1]\end{cases} \tag{9}$$

$$\xi_y=\begin{cases}\xi_2M_1, & x\in[-1,0]\\ \xi_2M_2, & x\in(0,1]\end{cases} \tag{10}$$

3 Experiment

输入 a,b,c, 先判断在 $[-1,1]$ 区间产生的概率密度函数 $p(x)$ 是否满足 $p(x)\geqslant 0$, 若不满足, 则重新输入.

根据 a,b,c 的值定义 $F(x)$.

用 16807 产生器产生 $[0,1]$ 区间均匀分布的随机数序列 (ξ_1,ξ_2), 共取点个数为 10^7 个, 按照舍选法的一般步骤进行判断.

选取 $p(x)$ 下方的点, 舍去其上方的点. 统计剩余点的 x 坐标, 绘制成概率密度函数的直方图并与 $p(x)$ 做对比:

根据图像, 舍取法抽样得到的曲线与实际的概率密度函数相接近, 可见抽样结果确实服从 $p(x)$ 代表的分布.

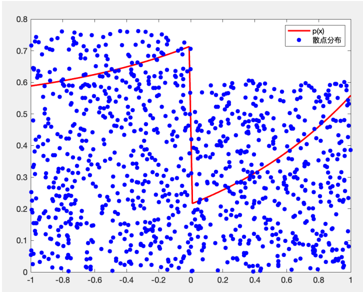

图 1: 阶段函数舍取法示意图

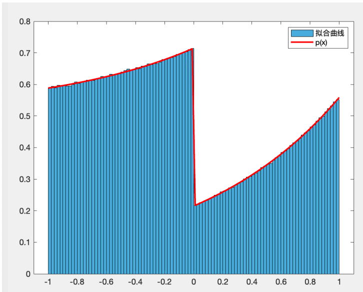

图 2: 概率密度函数拟合图

4 Summary

本题通过舍取法, 对满足 $p'(x) = a\delta(x) + be^{-cx}, x \in [-1, 1], a \neq 0$ 的概率分布函数得到了符合条件的抽样结果, 并通过分段函数法提高了运行效率.