REPORT 8

潘硕 PB24020526

2025 年 10 月 12 日

1 Question

用 Monte-Carlo 方法计算如下定积分并讨论有效数字位数

1. $\int_0^5 \sqrt{x^2+2\sqrt{x}}dx$
2. $\int_0^{7/10} dx \int_0^{4/7} dy \int_0^{9/10} dz \int_0^2 du \int_0^{13/11} dv (5+x^2-y^2+3xy-z^2+u^3-v^3)$

2 Method

待积函数为 $f(x)$, 积分区间 $[a,b]$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间的最大值为 M.
常用 Monte-Carlo 积分方法包括: 掷石法, 平均值法, 重要抽样法.

2.1 掷石法

在 $[a,b]\times[0,M]$ 范围内均匀撒点 N 个, 计算掷入 $f(x)$ 下方的点数 n, 则有:

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{n}{N}M(b-a) \tag{1}$$

每个点投中的概率为 $p=\dfrac{I}{(b-a)M}$, 投掷 N 个点相当于进行 N 次伯努利试验, 方差满足:

$$Var_1=\frac{p(1-p)V^2}{N}=\frac{I(V-I)}{N} \tag{2}$$

其中 $V=(b-a)M$.

2.2 平均值法

在区间 $[a,b]$ 内均匀取点 x_i, 计算平均值 $\langle f\rangle=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(x_i)$. 有:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\langle f\rangle \tag{3}$$

方差:

$$Var_2 = \frac{(b-a)^2}{N} Var(f) \tag{4}$$

其中 $Var(f) = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$.
该抽样方法的效率高于掷石法.

2.3 重要抽样法

设存在几率分布 $g(x)$ 与 $f(x)$ 形状相似,$f(x)/g(x) \sim 1, \int_a^b g(x)dx = 1$, 使 x 在 $[a,b]$ 内按照几率分布 $g(x)$ 抽样, 则积分可以写为:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x)dx = \langle \frac{f(x)}{g(x)} \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{g(x_i)} \tag{5}$$

该抽样方法的方差:

$$Var_3 = \frac{1}{N} \int_a^b (\frac{f(x)}{g(x)} - I)^2 g(x)dx \tag{6}$$

选取合适的 $g(x)$ 可以显著降低方差.
对于高维积分, 以上三种方法同样适用.

3 Experiment

3.1 积分 1

分别使用掷石法, 平均值法, 重要抽样法计算积分

$$I_1 = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x}} dx \tag{7}$$

函数 $f(x)$ 的最大值在 $x = 5$ 处取得, 大小 $M = \sqrt{25 + 2\sqrt{5}}$. 重要抽样法中, 取 $g(x) = x^{1/4}/(4 \times 5^{1/4})$. 取不同数量 N 的点进行抽样计算, 结果及有效位数如下图所示:

```
N = 100
掷石法:    I1 = 16.8294    标准差1.3175    有效数字位数: 2
平均值法:   I2 = 17.373    标准差0.65294    有效数字位数: 3
重要抽样法: I3 = 16.541    标准差0.3746    有效数字位数: 3
N = 1000
掷石法:    I1 = 15.6893    标准差0.42393    有效数字位数: 3
平均值法:   I2 = 15.5544    标准差0.20812    有效数字位数: 3
重要抽样法: I3 = 15.5205    标准差0.12049    有效数字位数: 3
N = 10000
掷石法:    I1 = 15.73    标准差0.13399    有效数字位数: 3
平均值法:   I2 = 15.5669    标准差0.066448    有效数字位数: 4
重要抽样法: I3 = 15.5143    标准差0.038552    有效数字位数: 4
N = 100000
掷石法:    I1 = 15.4265    标准差0.042516    有效数字位数: 4
平均值法:   I2 = 15.4256    标准差0.021117    有效数字位数: 4
重要抽样法: I3 = 15.4304    标准差0.012263    有效数字位数: 4
N = 1000000
掷石法:    I1 = 15.4417    标准差0.013443    有效数字位数: 4
平均值法:   I2 = 15.4371    标准差0.0066727    有效数字位数: 5
重要抽样法: I3 = 15.4378    标准差0.0038752    有效数字位数: 5
N = 10000000
掷石法:    I1 = 15.4386    标准差0.0042511    有效数字位数: 5
平均值法:   I2 = 15.4398    标准差0.0021093    有效数字位数: 5
重要抽样法: I3 = 15.4395    标准差0.001225    有效数字位数: 5
```

图 1: 积分式 1 计算结果及有效位数

随着 N 的增大, 计算的标准差逐渐减少, 有效位数上升, 且 N 每增加 2, 有效位数增加 1 位, 符合理论 $\sigma \propto 1/\sqrt{N}$ 的计算.

3.2 积分 2

$$I_2 = \int_0^{7/10} dx \int_0^{4/7} dy \int_0^{9/10} dz \int_0^{2} du \int_0^{13/11} dv (5 + x^2 - y^2 + 3xy - z^2 + u^3 - v^3) \quad (8)$$

积分区域 $V = [0, 7/10] \times [0, 4/7] \times [0, 9/10] \times [0, 2] \times [0, 13/11]$, 使用平均值法进行计算, 结果如下所示:

```
N : 100    I = 5.6534    标准差0.18916    有效数字位数: 2
N : 1000    I = 5.7976    标准差0.064556    有效数字位数: 3
N : 10000    I = 5.6596    标准差0.019952    有效数字位数: 3
N : 100000    I = 5.6857    标准差0.0063327    有效数字位数: 4
N : 1000000    I = 5.675    标准差0.0020019    有效数字位数: 4
N : 10000000    I = 5.6765    标准差0.00063316    有效数字位数: 5
```

图 2: 积分式 1 计算结果及有效位数

随着 N 的增大, 有效位数增多, 且 N 增加 100 倍时, 有效位数上升一位.

4 Summary

本实验使用蒙特卡洛方法计算定积分, 分别使用了掷石法, 平均值法, 重要抽样法进行计算. 计算表明, 撒点数 N 的增加可以增大计算结果的有效位数, 且 N 增加 100 倍, 有效位数增加 1 位,

对三种抽样方法, 掷石法的精度最低, 平均值法次之, 重要抽样法最高. 若能选取合适的 $g(x)$, 可以进一步提高计算精度.