

# REPORT 10

潘硕 PB24020526

2025 年 10 月 19 日

## 1 Question

Monte-Carlo 方法研究二维平面上荷电粒子在正弦外电场 ( $\sim \sin wt$ ) 中的随机行走. 推导速度自相关函数的表达式, 它随时间的变化是怎样的行为? 能否模拟得到该自相关函数的曲线? 是的话与理论曲线进行比较, 否的话讨论理由.

## 2 Method

### 2.1 运动方程

运动方程:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma \mathbf{v} + \mathbf{F}(t) + q\mathbf{E}_0 \sin wt \quad (1)$$

其中  $\mathbf{v}$  为粒子速度,  $\mathbf{F}(t)$  为随机力,  $\mathbf{E}_0 \sin wt$  为外电场, 不妨设外电场沿  $x$  方向, 方程改写为:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{\tau} + A_x(t) + \frac{qE_0}{m} \sin wt \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v_y}{\tau} + A_y(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\tau = m/\gamma$ ,  $A(t) = F(t)/m$ .

对该微分方程进行求解, 有:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(0)e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \int_0^t e^{t'/\tau} (A_x(t') + \frac{qE_0}{m} \sin wt') dt' \\ v_y(t) = v_y(0)e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \int_0^t e^{t'/\tau} A_y(t') dt' \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2 速度自相关函数

速度自相关函数:

$$C(t) = \langle \mathbf{v}(t)\mathbf{v}(0) \rangle - \langle \mathbf{v}(0) \rangle^2 \quad (4)$$

代入 2.1 中的计算结果:

$$C(t) = \langle v_x(t)v_x(0) + v_y(t)v_y(0) \rangle - \langle \mathbf{v}(0) \rangle^2 \quad (5)$$

$$= \langle v_x(0)^2 e^{-t/\tau} + v_y(0)^2 e^{-t/\tau} \rangle - \langle \mathbf{v}(0) \rangle^2 \quad (6)$$

$$= \langle v(0)^2 \rangle e^{-t/\tau} + \frac{\langle v_x(0) \rangle f_E}{\frac{1}{\tau^2} + w^2} \left( \frac{1}{\tau} \sin wt - w \cos wt + we^{-t/\tau} \right) \quad (7)$$

当电场力  $f_E = 0$  时,  $C(t) = \langle v(0)^2 \rangle e^{-t/\tau}$  退化为经典布朗热运动.

$f_E \neq 0$  且  $\langle v_x(0) \rangle \neq 0$  时,  $C(t)$  中有随时间振荡的项. 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $C(t) \rightarrow \frac{\langle v_x(0) \rangle f_E}{\frac{1}{\tau^2} + w^2} \left( \frac{1}{\tau^2} \sin wt - w \cos wt \right)$ .

## 2.3 算法

### 2.3.1 参数选取

1. 粒子总数  $N = 10000$ ;
2. 初始速度  $v_x, v_y$  满足二维 Gauss 分布, 标准差  $\sigma = 1/\sqrt{2}$ , 此时速度自相关函数  $C(0)$  理论值为 1;
3. 弛豫时间  $\tau = \frac{\gamma}{m} = 1$ ;
4. 电场力  $f_E = 1$ (弱),  $f_E = 10$ (强);
5. 电场变化频率  $w = 0.5\pi$ (缓变),  $w = 5 * \pi$ (快变);
6. 总时间  $t = 5\tau$ , 步长  $\Delta t = \min(\tau/100, \pi/(50w))$ ;
7. 随机力  $A$  满足 gauss 分布, 标准差  $\sigma_A = \sigma/\sqrt{\Delta t}$ ;

### 2.3.2 计算公式

使用四阶 Runge-Kutta 方法. 对于微分方程  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ , 取步长  $h$ , 有:

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (8)$$

$$k_2 = hf(t_n + h/2, y_n + k_1/2) \quad (9)$$

$$k_3 = hf(t_n + h/2, y_n + k_2/2) \quad (10)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (11)$$

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad (12)$$

### 3 Experiment

#### 3.1 速度自相关函数

对低频弱电场 ( $f_E = 1, w_E = 0.5\pi$ ), 高频弱电场 ( $f_E = 1, w_E = 5\pi$ ), 低频强电场 ( $f_E = 10, w_E = 0.5\pi$ ), 高频强电场 ( $f_E = 10, w_E = 5\pi$ ) 分别进行模拟计算, 模拟结果与实验结果如下:

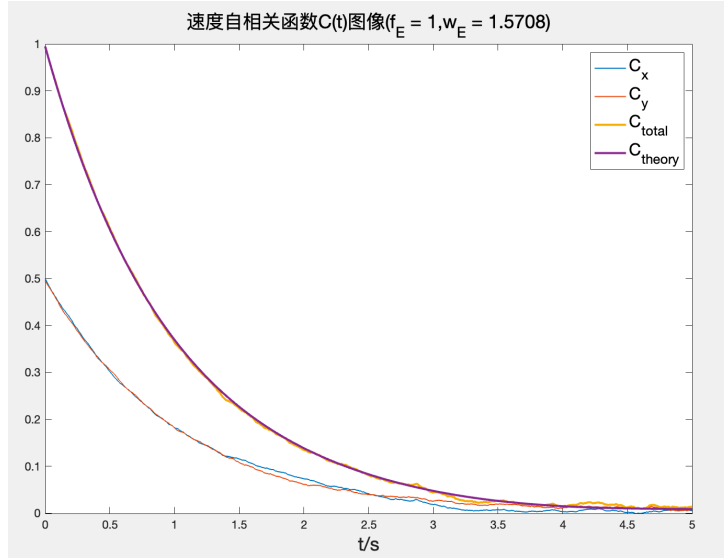


图 1: 低频弱电场自相关函数

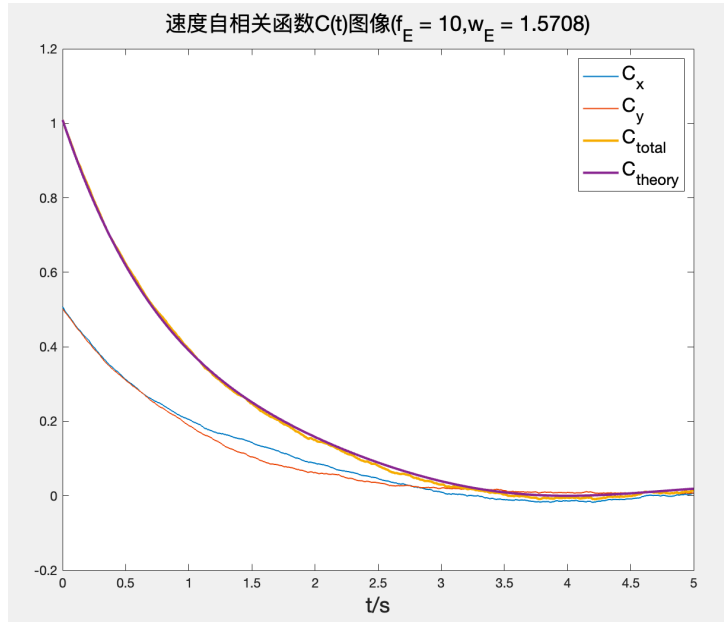


图 2: 低频强电场自相关函数

图像中理论与实验拟合程度良好. 电场较弱时, 自相关函数曲线指数下降; 电场较强时, 因样本点数量较少, 初始条件下  $\langle v_x(0) \rangle \neq 0$ , 使自相关函数曲线出现明显波动. 若样

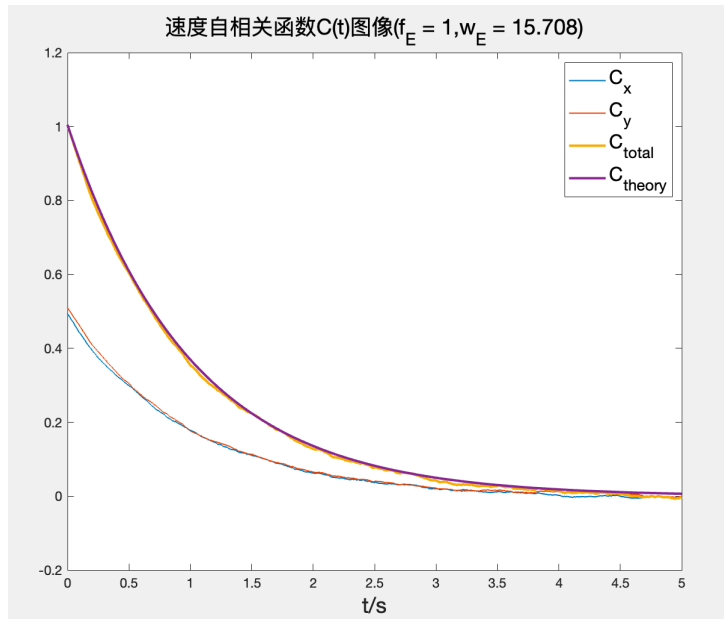


图 3: 高频弱电场自相关函数

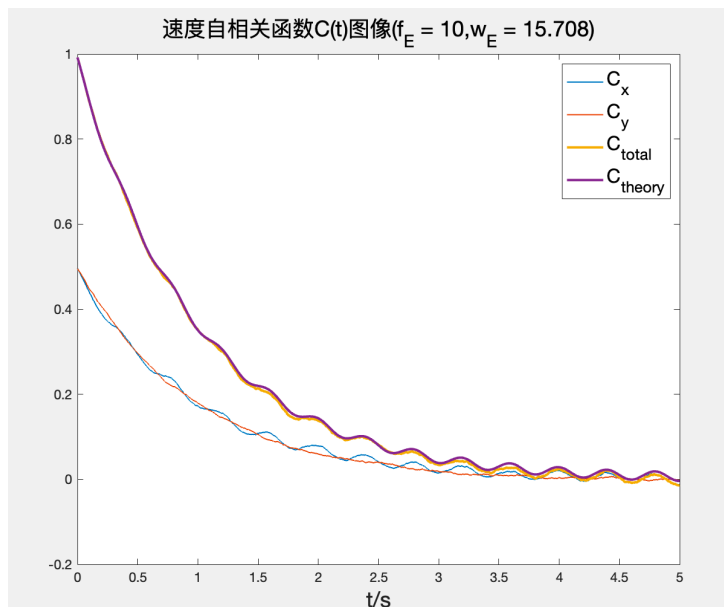


图 4: 高频强电场自相关函数

本点数量足够大, 使  $\langle v_x(0) \rangle = 0$ , 则波动现象将减弱.

## 4 Summary

本实验通过 Monte-Carlo 方法研究二维平面上带电粒子在外电场中的随机游走, 得到速度自相关函数, 并与理论值相比较, 较为吻合.

实验结果表明, 在弱电场下, 带电粒子的自相关函数以指数形式下降; 当粒子初始速度  $\langle v_x(0) \rangle \neq 0$  时, 在强电场下, 自相关函数最终将出现波动.