

Квадратични В-сплайнове с контролни точки на де Бор: Подробно математическо обяснение и имплементация на С

Петър Баджаков, Ф.Н. 4МІ3400199

08.07.2023

Това е документацията за проекта, качен на GitHub.

1 Въведение

Този документ засяга математическите концепции, стоящи зад създаването на квадратични В-сплайни с помощта на контролни точки на де Бор, и съответната имплементация на С с използването на библиотеката Simple DirectMedia Layer (SDL) за графичния интерфейс.

2 Квадратични В-сплайни

В-сплайните са полиномиални функции, дефинирани по части, и принадлежат към семейството на кривите на Безие. Степента на полинома определя гладкостта и гъвкавостта на кривата. Квадратичните В-сплайни, които са от степен 2, са параболични секции, свързани по такъв начин, че да се гарантира непрекъснатост и гладкост.

За даден набор от контролни точки, $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, крива на В-сплайн е дефинирана като сума с тегла от тези контролни точки, където теглата се определят от базисните функции на В-сплайн, означени с $B_{i,k}(t)$:

$$S(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,k}(t) \mathbf{P}_i \quad (1)$$

където k е степента на сплайна.

За квадратичен В-сплайн ($k = 2$), тези базисни функции гарантират, че резултатът ще се състои от квадратични функции, дефинирани по части.

3 Базови функции

Базисните функции на В-сплайн, $B_{i,k}(t)$, могат да бъдат дефинирани рекурсивно по следния начин:

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ако } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2)$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) \quad (3)$$

Обърнете внимание, че тези функции изискват последователност от възлови стойности, t_0, t_1, \dots, t_{n+k} . В този проект използваме равномерни В-сплайни, където векторът на възелите е последователност от цели числа.

4 Алгоритъм на де Кастелжо

Въпреки че алгоритъмът на де Бор често се използва за В-сплайнове, в този проект използваме алгоритъма на де Кастелжо поради неговата простота и по-добра числова стабилност.

Дадени са контролни точки $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, рекурсивната формула на алгоритъма на де Кастелжо е:

$$\mathbf{P}_{i,j}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}_i, & \text{ако } j = 0 \\ (1-t)\mathbf{P}_{i,j-1}(t) + t\mathbf{P}_{i+1,j-1}(t), & \text{ако } j > 0 \end{cases} \quad (4)$$

където $\mathbf{P}_{i,j}(t)$ представлява i^{th} контролната точка на j^{th} стадий от рекурсията.

В този код се имплементира този алгоритъм с двумерен масив.

5 SDL и имплементация на GUI

Графичният интерфейс, имплементиран чрез библиотеката SDL, е частта от приложението, осигуряваща потребителския интерфейс за добавяне на контролни точки и визуализацията на резултатния В-сплайн.

Потребителят взаимодейства с GUI чрез кликуване на екрана. Всеки клик добавя контролна точка на кликнатото място. Когато броят на контролните точки надвишава степента на сплайна, той се изчислява и показва в реално време. Предоставят се бутони за нулиране на контролните точки и за изход от приложението.

6 Заключение

Квадратичните В-сплайни, конструирани с контролни точки на де Бор, имат много приложения в графиките и моделирането, предоставяйки надежден инструмент за генериране на гладки криви от множество контролни

точки. Математиката и кодът, предоставени в този документ, предоставят подробно обяснение за стъпките, свързани с генерирането на тези сплайни и визуализирането им чрез GUI.