

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Чижов Пётр Сергеевич

608 группа

10 вариант

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ  
МОНТЕ-КАРЛО**

Москва  
2022

# 1 Введение

В качестве модельной задачи предлагается задача вычисления многомерного интеграла методом Монте-Карло.

Программная реализация должна быть выполнена на языке C/C++ с использованием библиотеки параллельного программирования Message Processing Interface(MPI).

Требуется исследовать масштабируемость параллельной MPI-программы на параллельной вычислительной системе ВМК МГУ: IBM Polus.

## 2 Математическая постановка задачи

Функция  $f(x, y, z)$  — непрерывна в ограниченной замкнутой области  $G \subset \mathbb{R}^3$ . Требуется вычислить определённый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz ,$$

$$\text{где функция } f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3} ,$$

область  $G$  ограничена поверхностями  $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$  .

## 3 Численный метод решения задачи

Пусть область  $G$  ограничена параллелепипедом

$$\Pi : \begin{cases} a_1 \leq x \leq b_1, \\ a_2 \leq y \leq b_2, \\ a_3 \leq z \leq b_3 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) , & (x, y, z) \in G \\ 0 , & (x, y, z) \notin G \end{cases}$$

Преобразуем искомый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Pi} F(x, y, z) dx dy dz$$

Пусть  $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2), \dots$  — случайные точки, равномерно распределённые в  $\Pi$ . Возьмём  $n$  таких случайных точек. В качестве приближённого значения интеграла предлагается использовать выражение:

$$I \approx |\Pi| \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(p_i),$$

где  $|\Pi|$  - объём параллелепипеда  $\Pi$ .  $|\Pi| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$

## 4 Нахождение точного значения интеграла аналитически

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \left( \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = \left[ -\frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x) \right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{5}{16} \end{aligned}$$

## 5 Описание программной реализации

Параллельная MPI-программа принимает на вход требуемую точность и генерирует случайные точки до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута. Программа вычисляет точность как модуль разности между приближённым значением, полученным методом Монте-Карло, и точным значением, вычисленным аналитически.

Программа считывает в качестве аргумента командной строки требуемую точность  $\epsilon$  и выводит четыре числа:

- Посчитанное приближённое значение интеграла
- Ошибка посчитанного значения: модуль разности между приближённым и точным значениями интеграла
- Количество сгенерированных случайных точек
- Время работы программы в секундах

Время работы программы измеряется следующим образом. Каждый MPI-процесс измеряет своё время выполнения, затем среди полученных значений берётся максимум.

В моём варианте реализована парадигма «мастер–рабочие»: один из процессов («мастер») генерирует по очереди для каждого из остальных процессов («рабочих»)  $n / (\text{количество процессов} - 1)$  случайных точек и передаёт их. Все процессы–рабочие получают свой набор точек и вычисляют свою часть суммы. Затем «рабочие» отправляют полученные части суммы «мастеру», который, в свою очередь, вычисляет общую сумму. После чего вычисляется ошибка (разность между посчитанным значением и точным значением, вычисленным аналитически). В случае если ошибка выше требуемой точности, которую подали на вход программе, то генерируются дополнительные  $n / (\text{количество процессов} - 1)$  точек для каждого процесса-рабочего и расчёт продолжается.

## 6 Исследование масштабируемости программы на системе Polus

Таблица 1: Таблица с результатами расчётов для системы Polus

Точность $\epsilon$	Число MPI-процессов	Время работы программы (с)	Ускорение	Ошибка	Кол-во случайных точек
$3.0 \cdot 10^{-5}$	2	0.49	1	2.63e-5	3500000
	4	0.19	2	1.87e-6	1499994
	16	0.26	2	2.56e-5	1999980
	32	-	-	-	-
$5.0 \cdot 10^{-6}$	2	0.99	1	3.89e-06	7000000
	4	0.19	5	1.88e-06	1499994
	16	24	1/24	4.86e-06	181998180
	32	-	-	-	-
$1.5 \cdot 10^{-6}$	2	0.13	1	1.44e-07	800000
	4	0.11	1.1	5.89e-07	799968
	16	9.72	0.013	1.49e-06	70242975
	32	-	-	-	-