

Naproche 2 !

10.-12. September 2012

Im Zusammenhang mit dem Projekt, eine *Elementary Number Theory for Man and Machines* zu schreiben, wurden von Merlin Carl, Marcos Cramer, Peter Koepke und Torsten Nahm folgende Verbesserungswünsche für eine der nächsten Versionen des Naproche-Systems formuliert und diskutiert.

Verbesserungen des Reasoners:

Taschenrechner Hier ist an Rechnen mit kleinen ganzen Zahlen gedacht, wie es in der Zahlentheorie gelegentlich vorkommt (Dezimalschreibweise?).

Termrechner In der Zahlentheorie tauchen immer wieder Termgleichungen mit $+$, \cdot , $-$ der Art $(a - c) + (b - d) = (a + b) - (c + d)$ auf. Hier lassen sich Gleichheiten am einfachsten durch vollständiges Ausklammern und lexikografisches Umordnen nachweisen, während ATP-Beweise oft sehr schwierig mit vielen Zwischenschritten sind.

Brüche $\frac{a}{b}$ für die ganze Zahl t mit $t \cdot b = a$, falls diese existiert.

Ontologie

Ellipsen Zu $n \in \mathbb{N}$ existieren $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{N}$ so dass p_i für $i \in m$ prim ist und $n = \prod_{i=1}^m p_i \dots$

Sonstiges

Mehrteilige Theoreme und Beweise, bei denen eine Liste von Behauptungen auf gewisse Art abgearbeitet wird.

Induktionstypen (Induktion über Terme, starke Induktion)

Gleichungs/Ungleichungsketten $[a \leq b = c < d = f < e \rightarrow a < e$

Allgemeine Relationsketten $n|a = b$

Bedingte Quantifikationen Let $a > 1$ be a natural number.

Wlog we may assume. Hierzu ist es nötig, die gerade verfolgte Behauptung (*Thesis*) zu kennen, s.u.

There are *infinitely many*. Dies könnte in der Zahlentheorie durchweg als *konfinal viele* interpretiert werden.

... if it exists.

Derivations with Theses

Ein fundamentaler Unterschied zwischen Naproche und SAD ist folgender: In Naproche werden Beweise m.H. von Klammerstrukturen (Einführung und Zurücknahme von Annahmen) geführt (natural deduction). Bei gewöhnlichen Behauptungen, etwa von Typ

$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' (|x - x'| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

und Beweisen gibt es eine Klammerstruktur, die so offensichtlich ist, dass sie zwar strukturell notwendig aber inhaltlich redundant ist. Diese Redundanz kann durch das Arbeiten mit jeweil angezielten *Theses* vermieden werden. Das geschieht deutlich in SAD und sollte auch in Naproche eingeführt werden. Dies wäre ein entscheidender Schritt, die Eleganz einiger SAD-Beweise nach Naproche zu übertragen.

Weiteres Vorgehen

Die in „Pseudo-Naproche“ geschriebene Vorlage zur Zahlentheorie kann im Sinne von Naproche 2 weitergeführt und verbessert werden. Sollten oben genannte Eigenschaften nicht zur Verfügung stellen, so können betroffene Textteile recht schematisch in ein einfacheres Naproche umformuliert werden.