Přehled matematických vět a definic.

June 8, 2019

Chapter 1

BI-LIN, Lineární algebra

1.1 Background

1.2 12 – Soustavy lineárních rovnic: Frobeniova věta a související pojmy, vlastnosti a popis množiny řešení, Gaussova eliminační metoda.

1.3 13 – Matice: součin matic, regulární matice, inverzní matice a její výpočet, vlastní čísla matice a jejich výpočet, diagonalizace matice.

Chapter 2

BI-MLO, Matematická logika

2.1 Background

2.2 14 – Výroková logika: syntax a sémantika výrokových formulí, pravdivostní ohodnocení, logický důsledek, ekvivalence a jejich zjišťování. Universální systém logických spojek, disjunktivní a konjunktivní normální tvary, úplné a minimální tvary.

2.3 15 – Predikátová logika: jazyk, interpretace, pravdivost formulí, logický důsledek a ekvivalence. Formalizace matematických tvrzení a jejich negace. Teorie a jejich modely (např. uspořádání).

Chapter 3

BI-PST, Pravděpodobnost a statistika

3.1 Background

3.2 25 – Pravidla pro výpočty pravděpodobností, Bayesův vzorec. Náhodné veličiny, příklady rozdělení, distribuční funkce, hustota, momenty. Nezávislost náhodných jevů a veličin. Centrální limitní věta, zákony velkých čísel.

3.3 26 – Základy statistické indukce, náhodný výběr, bodové odhady pro střední hodnotu a rozptyl, intervalové odhady pro střední hodnotu, testování statistických hypotéz o střední hodnotě.

Chapter 4

BI-ZDM, Základy diskrétní matematiky

4.1 Background

4.2 32 – Metody řešení rekurentních rovnic, sestavování a řešení rekurentních rovnic při analýze časové složitosti algoritmů.

4.3 33 – Modulární aritmetika, základy teorie čísel, Malá Fermatova věta, diofantické rovnice, lineární kongruence, Čínská věta o zbytcích.

Chapter 5

BI-ZMA, Základy matematické analýzy

5.1 Background

Věta 5.1.0.1 (Může se hodit)**:** Pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

Definice 5.1.0.1 (Posloupnost)**:** Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná posloupnost**. Zapisujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definice 5.1.0.2 (Limita posloupnosti)**:** Reálná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro každé okolí H_α bodu α lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než n_0 platí $a_n \in H_\alpha$. V symbolech

$$(\forall H_\alpha)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n \in H_\alpha).$$

Značí se $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ a bez pojmu okolí můžeme přepsat na

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

Definice 5.1.0.3 (Konvergence posloupnosti)**:** Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Pokud pro její limitu platí $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

5.2 34 – Limita a derivace funkce (definice a vlastnosti, geometrický význam), využití při vyšetřování průběhu funkce.

Definice 5.2.0.1 (Limita funkce)**:** Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť f je definovaná na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce f v bodě** a, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a \setminus \{a\}$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

V symboloch

$$(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in D_f)(x \in H_a \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in H_c).$$

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{x\to a} f(x) = c, \quad \lim_{a} f = c.$$

Definice 5.2.0.2 (Limita funkce zleva/zprava)**:** Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \mathbb{R}$. Nechť f je definovaná na levém, resp. pravém, okolí bodu a. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** a **zleva, resp. zprava**, právě když

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = c \Leftrightarrow (\forall H_c)(\exists H_a^-)(\forall x \in D_f)(x \in H_a^- \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in H_c),$$

respektíve

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = c \Leftrightarrow (\forall H_c)(\exists H_a^+)(\forall x \in D_f)(x \in H_a^+ \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in H_c).$$

5.2.1 Vlastnosti limit funkcí

Věta 5.2.1.1: Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c. $\Rightarrow$ Ak obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé, alebo alespoň jedna z jednostranných limit funcke f v bodě a neexistuje, potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Věta 5.2.1.2 (Heine)**:** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující

$$\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$$

platí $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$. $\Rightarrow$ Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti patřící do D_f, konvergující k a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud limity

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} f(z_n)$$

existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ neexistuje.

Věta 5.2.1.3: Nechť f a g jsou funcke a $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g,$$

$$\lim_a f \cdot g = \lim_a f \cdot \lim_a g,$$

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g},$$

platí v případě, že výrazy na pravé straně jsou definovány a v posledním případě za předpokladu, že $\frac{f}{g}$ je definována na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného.

Věta 5.2.1.4 (O limitě složené funkce)**:** Nechť f a g jsou funkce, $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ a platí tři podmínky

1. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$,
2. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$,
3. buď $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \setminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f \text{a} f(b) = c)$.

Potom platí $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = c$.

Věta 5.2.1.5 (Věta o limitě sevvřené funkce)**:** Nechť pro funkce f, g, h a body platí:

1. $(\exists H_a)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
2. existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = c$.

Potom existuje i $\lim_{x\to a} g(x)$ a je rovna c.

Věta 5.2.1.6 (l'Hospitalovo pravidlo)**:** Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim_a f = \lim_a g = 0$ nebo $\lim_a |g| = +\infty$,
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \setminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje $\lim_a \frac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim_a \frac{f}{g}$ a platí $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$.

5.2.2 Spojitost funkce

Věta 5.2.2.1 (Spojitost funkce)**:** Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastáva alespoň jedna z nasledujících možností

- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$,
- $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$ a $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$,
- $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$ a $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$. Funkce f je **spojitá v bodě** a **zleva**, pokud $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Věta 5.2.2.2: Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Keď to dáva zmysel, súčet, súčin, podiel a zlúčenie dvoch spojitých funkcií je opäť spojitá funkcia.

5.2.3 Derivace funkce

Definice 5.2.3.1 (Derivace funkcie)**:** Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad \text{ekvivalentne} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato limita konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná** v bodě a.

Definice 5.2.3.2: Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $a \in D_f$ takových, že existuje konečná derivace $f'(a)$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

Definice 5.2.3.3: Nechť existuje $f'(a)$. Tečnou funkce f v bodě a nazýváme

- přímku s rovnicí $x = a$ je-li funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$.
- přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$ (tj. je-li f je diferencovatelná v bodě a).

5.2.4 Vlastnosti derivace

Věta 5.2.4.1: Je li funkce f diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a.

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Věta 5.2.4.2 (Derivace součtu, součinu a podílu)**:** Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Věta 5.2.4.3 (Derivace složené funkce)**:** Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Videli ste niekedy deriváciu inverznej funkcie?

5.2.5 Extrémy funkce

Definice 5.2.5.1: Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

- **lokální minimum** $\Leftrightarrow \quad (\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$
- **lokální maximum** $\Leftrightarrow \quad (\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$
- **ostré lokální maximum** $\Leftrightarrow \quad (\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$
- **ostré lokální minimum** $\Leftrightarrow \quad (\exists H_a \subset D_f)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$

Věta 5.2.5.1 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**:** Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Věta 5.2.5.2 (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu)**:** Funkce f spojitá a definovaná právě na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém může být pouze v krajních bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

5.2.6 Vyšetřování průběhu funkce

Věta 5.2.6.1 (Rolleova)**:** Nechť funkce f splňuje podmínky

- f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
- f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
- $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta 5.2.6.2 (Lagrangeova)**:** Nechť funkce f splňuje podmínky

- f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
- f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Věta 5.2.6.3: Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě intervalu J° (buď J interval s krajnými body a a b, potom $J^\circ = (a, b)$).

- Funkce f je konvexní na intervalu J, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.
- Funkce f je konkávní na intervalu J, právě když $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in J^\circ$.
- Je-li $f''(x) < 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konkávní na J.

5.3 35 – Základy integrálního počtu (primitivní funkce, neurčitý integrál, Riemannův integrál (definice, vlastnosti a geometrický význam)).

Definice 5.3.0.1: Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b), kde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{prokad} x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b).

Věta 5.3.0.1: Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \text{prokad} x \in (a, b).$$

Definice 5.3.0.2: Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Věta 5.3.0.2 (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce)**:** Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Věta 5.3.0.3: Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Věta 5.3.0.4 (Per partes)**:** Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Věta 5.3.0.5 (Substituce I)**:** Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a, b),

2. φ je na intervalu (α, β) diferencovatelná,
3. $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$.

Pak funkce $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \mathrm{d}x = F(\varphi(x)).$$

Věta 5.3.0.6 (Substituce II)**:** Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

5.3.1 Riemannův integrál

Definica je dlhá, viď skripta. Vlastnosti sú také, ako očákavaš.

Věta 5.3.1.1 (Newtonova formule)**:** Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ s primitivní funkcí F. Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b$$

5.4 36 – Číselné řady (konvergence číselné řady, kritéria konvergence, odhadování rychlosti růstu řad pomocí určitého integrálu).

Definice 5.4.0.1 (Číselná řada)**:** Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \ldots,$$

kde $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je zadaná číselná posloupnost, nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost částečných součtů

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o divergentní číselné řadě. **Součtem** konvergentní řady $\sum_{k=0}^{n} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

5.4.1 Kritéria konvergence

Věta 5.4.1.1 (Nutná podmínka konvergence)**:** Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, potom pro limitu jejích sčítanců platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. $\quad \Rightarrow \quad$ Pokud limita posloupnosti $(a_k)_{k=0}$ je nenulová nebo neexistuje, potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ není konvergentní.

Věta 5.4.1.2 (Bolzano-Cauchy)**:** Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Definice 5.4.1.1 (Absolutní konvergentnost)**:** Číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud číselná řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta 5.4.1.3: Pokud řada absolutně konverguje, potom tato řada konverguje.

Věta 5.4.1.4 (Leibnizovo kritérium)**:** Buď $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ klesající posloupnost s nezápornými členy konvergujíci k nule. Potom je řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergentní. Toto kritérium platí i pokud je $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ rostoucí posloupnost záporných čísel konvergující k nule.

Věta 5.4.1.5 (Srovnávací kritérium)**:** Buďte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

1. Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.
2. Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverguje.

Věta 5.4.1.6 (d'Alembertovo kritérium)**:** Nechť $a_k > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Pokud

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k + 1}{a_k} > 1,$$

potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje. Pokud ovšem

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k + 1}{a_k} < 1,$$

potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje.