

Московский Государственный Университет имени  
М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчёт по теоретическому заданию в рамках курса  
«Суперкомпьютерное моделирование и технологии»  
Численное решение краевой задачи для уравнения  
Пуассона

Выполнил:  
Ларочкин Петр Викторович  
618/1 группа  
Вариант 6

Москва 2022

## Содержание

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | Математическая постановка задачи  | 2 |
| 2 | Численный метод решения задачи  | 3 |
| 3 | Краткое описание проделанной работы по созданию <i>MPI</i> программы и гибридной реализации <i>MPI/OpenMP</i> | 6 |
| 4 | Результаты расчетов для разных размеров задач и на разном числе процессов                                     | 6 |
| 5 | Рисунок точного решения и приближенного решения   | 7 |

# 1 Математическая постановка задачи

В прямоугольнике  $\Pi = (x, y) : A_1 \leq A_2, B_1 \leq B_2$ , граница  $\Gamma$  которого состоит из отрезков

$$\gamma_R = \{(A_2, y), B_1 \leq B_2\}, \gamma_L = \{(A_1, y), B_1 \leq B_2\}$$

$$\gamma_R = \{(x, B_2), A_1 \leq A_2\}, \gamma_L = \{(x, B_1), A_1 \leq A_2\}$$

рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона с потенциалом

$$-\Delta u + q(x, y)u = F(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$-\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}(k(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k(x, y)\frac{\partial u}{\partial y})$$

Для данной работы мне был предложен **вариант 6**, который соответствует следующим функциям: Аналитическое решение

$$u(x, y) = u_2(x, y) = \sqrt{(4 + xy)},$$

прямоугольник

$$\Pi = [0, 4] \times [0, 3],$$

функции

$$k(x, y) = k_1(x, y) = 1,$$

$$q(x, y) = q_2(x, y) = x + y.$$

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условиями. На каждом отрезке границы прямоугольника  $\Pi$  задается условие одним из трех способов. В **данном варианте** для всех границ прямоугольника применяется граничное условие третьего типа ( $n$  — нормаль):

$$(k \frac{\partial u}{\partial n})(x, y) + \alpha u(x, y) = \psi(x, y)$$

Функции  $F(x, y)$ ,  $\phi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$ , коэффициент  $k(x, y)$ , потенциал  $q(x, y)$  и параметр  $\alpha = 1$  (предложено такое значение) считаются известными, функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению и граничным условиям, определенным вариантом задания, требуется найти.

Подставим предложенные для этого варианта функции в уравнение Пуассона и граничные условия для нахождения функций  $\psi(x, y)$  и  $F(x, y)$ . Получим:

$$F(x, y) = \frac{1}{4(4 + xy)^{\frac{3}{2}}}(x^2 + y^2) + (x + y)\sqrt{(4 + xy)},$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{(4+4y)}} + 2\sqrt{1+y} & \text{if } x = 4, y \in (0, 3) \\ -\frac{y}{4} + 2 & \text{if } x = 0, y \in (0, 3) \\ \frac{x}{2\sqrt{(4+3x)}} + \sqrt{4+3x} & \text{if } y = 3, x \in (0, 4) \\ -\frac{x}{4} + 2 & \text{if } y = 0, x \in (0, 4). \end{cases}$$

## 2 Численный метод решения задачи

Краевые задачи для уравнения Пуассона с потенциалом предлагается численно решать методом конечных разностей. В расчетной области  $\Pi$  определяется равномерная прямоугольная сетка  $\omega_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = \overline{0, M}\},$$

$$\bar{\omega}_2 = \{y_i = B_1 + ih_2, i = \overline{0, N}\}.$$

Здесь  $h_1 = (A_2 - A_1)/M$ ,  $h_2 = (B_2 - B_1)/N$ . Через  $\omega_h$  обозначим множество внутренних узлов сетки  $\omega_h$ , т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащий на границе  $\Gamma$ . Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, зада

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_h$ . Обозначим через  $\omega_{ij}$  значение сеточной функции  $\omega \in H$  в узле сетки  $(x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h$ . Будем считать, что в пространстве  $H$  задано скалярное произведение и евклидова норма

$$[u, v] = \sum_{i=0}^M h_1 \sum_{j=0}^N h_2 \rho_{ij} u_{ij} v_{ij},$$

$$\|u\|_E = \sqrt{[u, v]}.$$

Весовая функция  $\rho_{ij} = \rho^{(1)}(x_i) \rho^{(2)}(y_j)$ , где

$$\rho^{(1)}(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq M-1 \\ \frac{1}{2}, & i = 0, i = M \end{cases}$$

$$\rho^{(2)}(y_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq N-1 \\ \frac{1}{2}, & j = 0, j = N \end{cases}$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$A\omega = B,$$

где  $A : H \rightarrow H$  — оператор, действующий в пространстве сеточных функций,  $B \in H$  — известная правая часть. Задача  $A\omega = B$  называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать (приближенно заменить) все уравнения краевой задачи их разностными аналогами — сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество — совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Уравнение Пуассона во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$\Delta_h \omega_{ij} + q_{ij} \omega_{ij} = F_{ij}, i = \overline{1, M-1}, j = \overline{1, N-1},$$

в котором  $F_{ij} = F(x_i, y_j)$ ,  $q_{ij} = q(x_i, y_j)$ , разностный оператор Лапласа, с учетом  $k(x, y) = 1$

$$\Delta_h \omega_{ij} = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\omega_{i+1j} - \omega_{ij}}{h_1} - \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1j}}{h_1} \right) + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\omega_{ij+1} - \omega_{ij}}{h_2} - \frac{\omega_{ij} - \omega_{ij-1}}{h_2} \right)$$

Аппроксимация граничных условий третьего типа на правой и левой сторонах прямоугольника имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_1} \left( \frac{\omega_{Mj} - \omega_{M-1j}}{h_1} \right) + \left( q_{Mj} + \frac{2}{h_1} \right) \omega_{Mj} - \frac{1}{h_2} \left( \frac{\omega_{Mj+1} - \omega_{Mj}}{h_2} - \frac{\omega_{Mj} - \omega_{Mj-1}}{h_2} \right) &= F_{Mj} + \frac{2}{h_1} \psi_{Mj} \\ - \frac{2}{h_1} \left( \frac{\omega_{1j} - \omega_{0j}}{h_1} \right) + \left( q_{0j} + \frac{2}{h_1} \right) \omega_{0j} - \frac{1}{h_2} \left( \frac{\omega_{0j+1} - \omega_{0j}}{h_2} - \frac{\omega_{0j} - \omega_{0j-1}}{h_2} \right) &= F_{0j} + \frac{2}{h_1} \psi_{0j} \\ j &= \overline{1, N-1} \end{aligned}$$

На верхней и нижней сторонах соответственно имеем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_2} \left( \frac{\omega_{iN} - \omega_{iN-1}}{h_2} \right) + \left( q_{iN} + \frac{2}{h_2} \right) \omega_{iN} - \frac{1}{h_1} \left( \frac{\omega_{i+1N} - \omega_{iN}}{h_1} - \frac{\omega_{iN} - \omega_{i-1N}}{h_1} \right) &= F_{iN} + \frac{2}{h_2} \psi_{iN} \\ - \frac{2}{h_2} \left( \frac{\omega_{i1} - \omega_{i0}}{h_2} \right) + \left( q_{i0} + \frac{2}{h_2} \right) \omega_{i0} - \frac{1}{h_1} \left( \frac{\omega_{i+10} - \omega_{i0}}{h_1} - \frac{\omega_{i0} - \omega_{i-10}}{h_1} \right) &= F_{i0} + \frac{2}{h_2} \psi_{i0} \\ i &= \overline{1, M-1} \end{aligned}$$

Построенный уравнений недостаточно, так как неизвестных больше. Требуются уравнения для угловых узлов:

$$\begin{aligned} - \frac{2}{h_1} \left( \frac{\omega_{10} - \omega_{00}}{h_1} \right) - \frac{2}{h_2} \left( \frac{\omega_{01} - \omega_{00}}{h_2} \right) + \left( q_{00} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \omega_{00} &= F_{00} + \left( \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \psi_{00} \\ \frac{2}{h_1} \left( \frac{\omega_{M0} - \omega_{M-10}}{h_1} \right) - \frac{2}{h_2} \left( \frac{\omega_{M1} - \omega_{M0}}{h_2} \right) + \left( q_{M0} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \omega_{M0} &= F_{M0} + \left( \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \psi_{M0} \\ \frac{2}{h_1} \left( \frac{\omega_{MN} - \omega_{M-1N}}{h_1} \right) - \frac{2}{h_2} \left( \frac{\omega_{MN} - \omega_{MN-1}}{h_2} \right) + \left( q_{MN} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \omega_{MN} &= F_{MN} + \left( \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \psi_{MN} \\ \frac{2}{h_1} \left( \frac{\omega_{1N} - \omega_{0N}}{h_1} \right) - \frac{2}{h_2} \left( \frac{\omega_{0N} - \omega_{0N-1}}{h_2} \right) + \left( q_{0N} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \omega_{0N} &= F_{0N} + \left( \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \psi_{0N} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\psi_{00} &= \frac{h_1\psi(A_1 + 0, B_1) + h_2\psi(A_1, B_1 + 0)}{h_1 + h_2} \\ \psi_{M0} &= \frac{h_1\psi(A_2 - 0, B_1) + h_2\psi(A_2, B_1 + 0)}{h_1 + h_2} \\ \psi_{MN} &= \frac{h_1\psi(A_2 - 0, B_2) + h_2\psi(A_2, B_2 - 0)}{h_1 + h_2} \\ \psi_{0N} &= \frac{h_1\psi(A_1 + 0, B_2) + h_2\psi(A_1, B_2 - 0)}{h_1 + h_2},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\psi(x_0 \pm 0, y) &= \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} \psi(x, y) \\ \psi(x, y_0 \pm 0) &= \lim_{y \rightarrow y_0 \pm 0} \psi(x, y)\end{aligned}$$

Приближенное решение системы уравнений  $A\omega = B$ , для сформулированных выше краевых задач может быть получено итерационным методом наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций  $\omega^{(k)} \in H, k = 1, 2, \dots$ , сходящуюся по норме пространства  $H$  к решению разностной схемы, т.е.

$$\|\omega - \omega^{(k)}\|_E \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$$

Начальное приближение  $\omega^{(0)}$  можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Метод является одношаговым. Итерация  $\omega^{(k+1)}$  вычисляется по итерации  $\omega^{(k)}$  согласно равенствам:

$$\omega_{ij}^{(k+1)} = \omega_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^k,$$

где невязка  $r^{(k)} = A\omega^{(k)} - B$ , итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{[Ar^{(k)}, r^{(k)}]}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}$$

В качестве условия остановки итерационного процесса следует использовать неравенство

$$\|\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}\|_E < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - положительное число, определяющее точность итерационного метода. Константу  $\varepsilon$  для данной задачи предлагается взять равной  $10^{-6}$ .

### 3 Краткое описание проделанной работы по созданию *MPI* программы и гибридной реализации *MPI/OpenMP*

Построенная *MPI* программа на языке C решает поставленную задачу. При распараллеливании программы каждый процесс вычисляет свою область точки. Для того, чтобы грамотно распределить области между процессами применяются функции *MPI\_Cart\_create*, *MPI\_Cart\_coords*, *MPI\_Cart\_shift*, которые соответственно создают новый коммутатор, определяют координаты процесса в сетке процессов и определяют ранги «соседей». Особенностью данной задачи является то, что при обработке соответствующему каждому рангу области требуется информация о точках, принадлежащих соседнему рангу. Для этих целей в программу применяются *MPI\_Sendrecv* функции для получения и отправки информации об этих точках. Также в процессе обработки необходимо вычислять скалярное произведение по всей области для этой цели используется *MPI\_Allreduce*. Также данная функция используется для получения максимальной среди всех процессов ошибки для условия остановки.

Построение гибридной программы *MPI/openMP* строилось следующим образом: использовалась предыдущая *MPI* программа, которая была улучшена за счет распараллеливания используемых циклов. Для распараллеливания циклов *for* использовалась директива

```
#pragma omp parallel for default(shared) private(i, j) schedule(dynamic)
для циклов двойной вложенности,
#pragma omp parallel for default(shared) private(i или j) schedule(dynamic)
для обычных циклов,
#pragma omp parallel for default(shared) private(i, j)
reduction(+:local_sum) schedule(dynamic) для того, чтобы
собрать вместе в главном потоке результаты вычислений частичных сумм.
```

### 4 Результаты расчетов для разных размеров задач и на разном числе процессов

Выполнение последовательной программы решающей данное задание при  $M = 500$ ,  $N = 500$  заняло 316.84 секунды. А для  $M=500$ ,  $N=1000$  время и разница составили 1323.47 секунд. Максимум модуля разности между исходной функцией и численного решения на самой большой сетке  $M=500$ ,  $N = 1000$  составил 0.035. Значение  $\epsilon$  решено было взять равным  $10^{-6}$ . Ускорение считалось как отношение времени выполнения последовательной программы к времени выполнения параллельной программы на той же сетке  $Boost = \frac{time(sequential)}{time(parallel)}$ .

| Число<br>процессов <i>MPI</i> | Число точек сетки<br>$M \times N$ | Время<br>решения (с) | Ускорение |
|-------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------|
| 4                             | $500 \times 500$                  | 108.57               | 2.91      |
| 8                             | $500 \times 500$                  | 106.15               | 2.97      |
| 16                            | $500 \times 500$                  | 30.22                | 10.46     |
| 32                            | $500 \times 500$                  | 132.86               | 2.37      |
| 4                             | $500 \times 1000$                 | 1028.24              | 1.28      |
| 8                             | $500 \times 1000$                 | 554.36               | 2.39      |
| 16                            | $500 \times 1000$                 | 195.22               | 6.78      |
| 32                            | $500 \times 1000$                 | 92.67                | 14.27     |

Таблица 1: Таблица с результатами расчетов на ПВС IBM Polus (MPI код).

| Число<br>процессов <i>MPI</i> | Количество ОМР-<br>нитей в процессе | Число точек сетки<br>$M \times N$ | Время<br>решения (с) | Ускорение |
|-------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------|
| 1                             | 4                                   | $500 \times 500$                  | 260.78               | 1.21      |
| 2                             | 4                                   | $500 \times 500$                  | 125.25               | 2.52      |
| 4                             | 4                                   | $500 \times 500$                  | 70.31                | 4.49      |
| 8                             | 4                                   | $500 \times 500$                  | 49.01                | 6.44      |
| 1                             | 4                                   | $500 \times 1000$                 | 984.41               | 1.34      |
| 2                             | 4                                   | $500 \times 1000$                 | 490.62               | 2.70      |
| 4                             | 4                                   | $500 \times 1000$                 | 306.07               | 4.32      |
| 8                             | 4                                   | $500 \times 1000$                 | 166.96               | 7.92      |

Таблица 2: Таблица с результатами расчетов на ПВС IBM Polus (MPI+OpenMP код).

## 5 Рисунок точного решения и приближенного решения

Графики аналитической и построенный численной функций неотличимы начиная с сеток  $M=250$ ,  $N=250$ . Ниже приведены рисунки аналитического решения  $u(x_i, y_j)$  (Рисунок 1), численного решения (Рисунок 2)  $\omega(x_i, y_j)$  и рисунки их абсолютной разности  $|\omega(x_i, y_j) - u(x_i, y_j)|$  (Рисунок 3 и Рисунок 4).



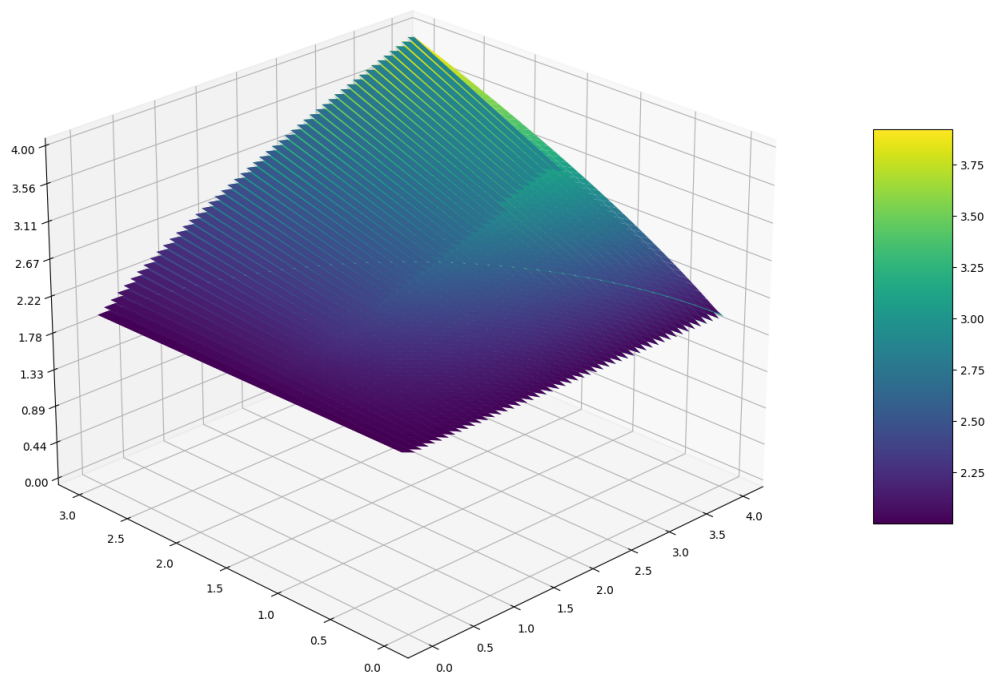


Рисунок 1. Аналитическое решение

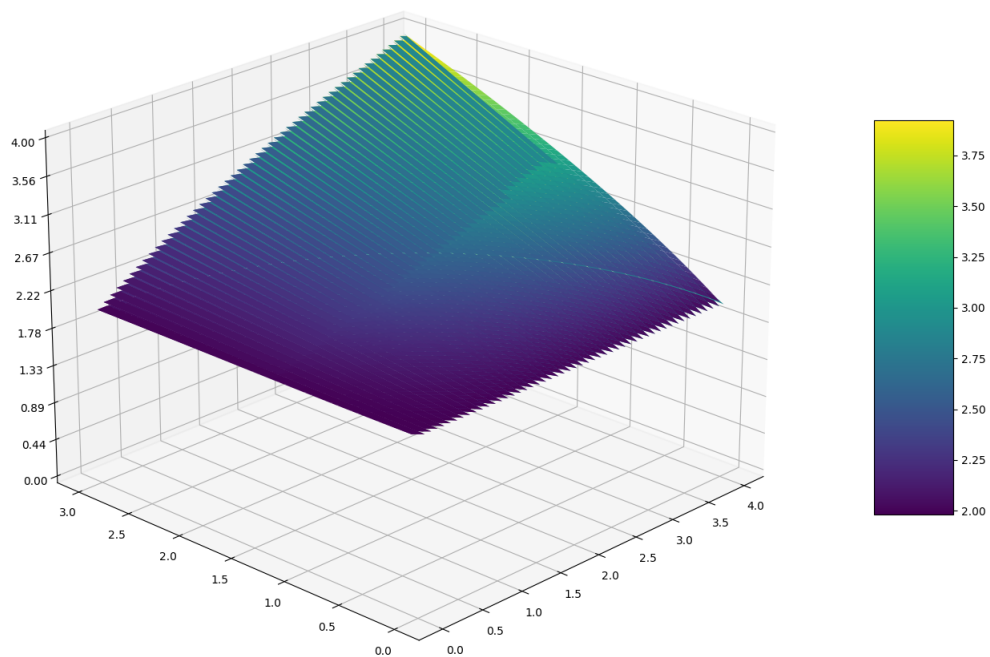


Рисунок 2. Численное решение

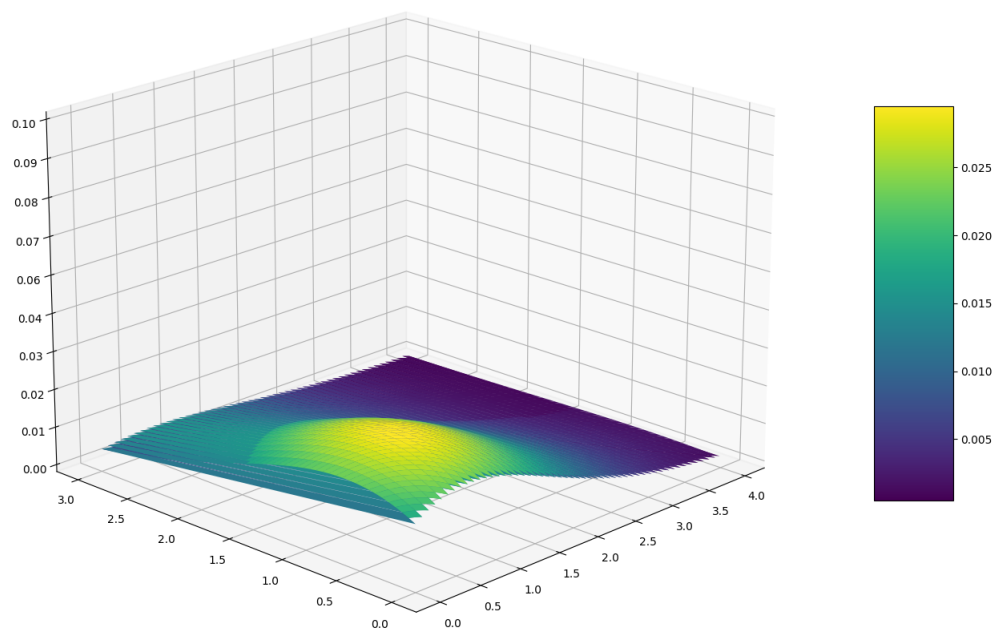


Рисунок 3. Модуль разницы между аналитическим и численным решениями

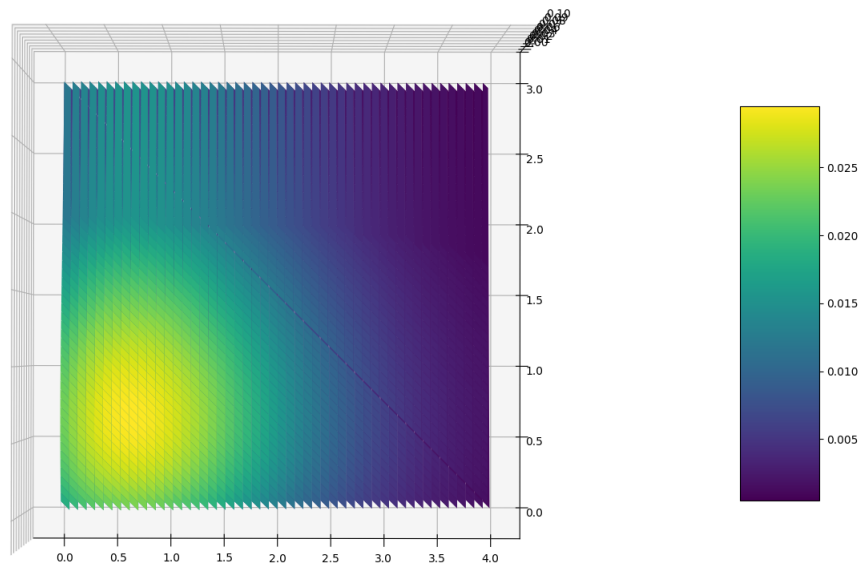


Рисунок 4. Модуль разницы между аналитическим и численным решениями (вид сверху)