

Zweite Definition des Endlichen und Unendlichen.

Richard Dedekind

1889. 3. 9. [9th March 1889]

Zuerst veröffentlicht in der zweiten Auflage (1893) der Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ Seite XVII, in der Form:

Ein System S heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden lässt, dass kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Fall heißt S ein unendliches System.

Verfolgung dieser Definition eines endlichen Systems S ohne Benutzung der natürlichen Zahlen.

Es sei φ eine Abbildung von S in sich selbst, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird. Kleine lateinische Buchstaben $a, b \dots z$ bedeuten immer *Elemente* von S , große lateinische Buchstaben $A, B \dots Z$ bedeuten *Teile* von S ; die durch φ erzeugten Bilder von a, A werden resp. mit a', A' bezeichnet.

Dass A Teil von B ist, wird durch $A \text{ } 3 \text{ } B$ ausgedrückt. Das aus den Elementen a, b, c, \dots bestehende System wird mit $[a, b, c, \dots]$ bezeichnet.

Es ist also

$$(1) \quad S' \text{ } 3 \text{ } S$$

und

$$(2) \quad \text{aus } A' \text{ } 3 \text{ } A \text{ folgt } A = S.$$

1. Satz. $S' = S$.

▷ Jedes Element von S ist Bild von (mindestens) einem Element r von S . Denn aus (1) folgt $(S')' \text{ } 3 \text{ } S'$, also nach (2) unser Satz.

Jedes aus einem einzigen Element s bestehende System $[s]$ ist endlich, weil es keinen echten Teil besitzt und durch die identische Abbildung in sich selbst abgebildet wird. Dieser Fall wird im folgenden *ausgeschlossen*, S bedeutet ein endliches System, das *nicht* aus einem einzigen Element besteht.

2. Satz. Jedes Element s ist verschieden von seinem Bilde s' , in Zeichen: $s \neq s'$.

▷ Denn wäre $s = s'$, so wäre $[s]' = [s'] = [s] \text{ } 3 \text{ } [s]$, nach (2) auch $[s] = S$ im Widerspruch zu unserer Annahme über S .

First published in the second edition (1893) of the text “Was sind und was sollen die Zahlen?” page XVII, in the form:

A system S is called finite if it can be mapped into itself in such a way that no proper part of S is mapped into itself; in the opposite case, S is called an infinite system.

Pursuing this definition of a finite system S without using the natural numbers.

Let φ be a mapping of S into itself, which maps no proper part of S into itself. Small Latin letters $a, b \dots z$ always mean *elements* of S , capital Latin letters $A, B \dots Z$ mean *parts* of S . The images of a, A generated by φ are respectively denoted by a', A' .

That A is *part of* B is expressed by $A \in B$. The system consisting of the elements a, b, c, \dots is denoted by $[a, b, c, \dots]$.

This gives

$$(1) \quad S' \in S$$

and

$$(2) \quad \text{from } A' \in A \text{ it follows that } A = S.$$

1. Theorem. $S' = S$.

▷ Every element of S is an image of (at least) one element r of S . Because from (1) it follows $(S')' \in S'$, hence by (2), our proposition.

Every system $[s]$ consisting of a single element s is finite because it has no proper part and is mapped into itself by the identity function. This case is *excluded* in the following; S means a finite system that does *not* consist of a single element.

2. Theorem. Every element s is different from its image s' , in symbols: $s \neq s'$.

▷ Because if $s = s'$, then $[s]' = [s'] = [s] \in [s]$, so according to (2), also $[s] = S$ in contradiction to our assumption about S .

3. Definition. Ist s ein bestimmtes Element von S so soll mit H_s jeder solche Teil von S bezeichnet werden, der den beiden folgenden Bedingungen genügt:

I. s ist Element von H_s , also $[s] \in H_s$, also auch

$$[s] + H_s = H_s.$$

II. Ist h ein von s verschiedenes Element von H_s , so ist auch h' Element von H_s ; ist also $H \in H_s$, aber s nicht in H enthalten, so ist $H' \in H_s$.

4. Satz. S und $[s]$ sind spezielle Systeme H_s , und $[s]$ ist der Durchschnitt (die Gemeinheit) aller dem Elemente s entsprechenden Systeme H_s .

▷ Offenbar.

5. Satz. $H_s = S$ oder *echter* Teil von S , je nachdem s' in H_s liegt oder nicht.

▷ Denn wenn s' in H_s liegt, so folgt aus (3.II), dass $H'_s \in H_s$, also nach (2), dass $H_s = S$ ist; und umgekehrt, wenn $H_s = S$, so liegt auch s' in H_s .

6. Satz. Ist H_s *echter* Teil von S , so ist s' das einzige Element von H'_s , das außerhalb H_s liegt.

▷ Denn jedes Element k von H'_s ist Bild h' von mindestens einem Element h in H_s ; ist nun $k = h'$ verschieden von s' , so ist auch h verschieden von s , und folglich nach (3.II) liegt $k = h'$ in H_s , während das Element s' von H'_s nach (5) außerhalb H_s liegt.

7. Satz. Jedes System H'_s ist ein System $H_{s'}$, das heißt (Definition (3)):

I'. s' ist Element von H'_s .

II'. Ist k ein von s' verschiedenes Element von H'_s , so liegt auch k' in H'_s .

▷ Das Erste folgt daraus, dass s in H_s liegt, das Zweite daraus, dass nach Satz (6) k in H_s liegt.

8. Satz. Sind $A, B, C \dots$ spezielle, demselben s entsprechende Systeme H_s , so ist auch ihr Durchschnitt H ein System H_s .

▷ Denn zufolge (3.I) ist s gemeinsames Element von A, B, C, \dots , also auch Element von H . Ist ferner h ein von s verschiedenes Element von H , so ist zufolge (3.II) das Bild h' Element von A , von B , von C, \dots , also auch von H . Mithin erfüllt H die beiden für jedes H_s charakteristischen Bedingungen I, II in (3).

9. Definition. Sind a, b bestimmte Elemente von S , so soll das Symbol ab den Durchschnitt aller derjenigen Systeme H_b bedeuten (*Strecke ab*), welche (wie z. B. S) das Element a enthalten.

3. Definition. If s is a certain element of S , then H_s shall denote any part of S that satisfies the following two conditions:

I. s is element of H_s , so $[s] \in H_s$, also

$$[s] + H_s = H_s.$$

II. If h is an element of H_s different from s , then h' is also an element of H_s . So if $H \in H_s$, but s is *not contained* in H , then $H' \in H_s$.

4. Theorem. S and $[s]$ are special systems H_s , and $[s]$ is the *intersection* (the common) of all systems H_s corresponding to the element s .

▷ Obvious.

5. Theorem. $H_s = S$ or H_s is a *proper* part of S , depending on whether s' lies in H_s or not.

▷ For if s' lies in H_s , then it follows from (3.II) that $H'_s \in H_s$, therefore by (2) that $H_s = S$. Conversely, if $H_s = S$, then s' also lies in H_s .

6. Theorem. If H_s is a *proper* part of S , then s' is the only element of H'_s that lies outside H_s .

▷ This is because every element k of H'_s is the image h' of at least one element h in H . If $k = h'$ is different from s' , then h is also different from s , and consequently by (3.II) $k = h'$ lies in H_s , while the element s' of H'_s by (5) lies outside H_s .

7. Theorem. Every system H'_s is a system $H_{s'}$, that is (by definition 3.):

I'. s' is element of H'_s

II'. If k is an element of H'_s that is different from s' , then k' also lies in H'_s .

▷ The first follows from the fact that s lies in H_s , the second from the fact that k lies in H_s by (6).

8. Theorem. If $A, B, C \dots$ are special systems H_s corresponding to the same s , then their intersection H is also a system H_s .

▷ Because according to (3.I) s is a common element of A, B, C, \dots , thus also an element of H . If h is an element of H that is different from s , then, by (3.II), the image h' is an element of A , of B , of C, \dots , and therefore also of H . H thus fulfills the two conditions I and II in definition (3) that are characteristic of every H_s .

9. Definition. If a, b are certain elements of S , then the symbol ab (*section ab*) should mean the intersection of all those systems H_b which (such as S) contain the element a .

10. Satz. a ist Element von ab , d. h. $[a] \ni ab$.

▷ Denn ab ist der Durchschnitt von lauter solchen Systemen H_b in denen a liegt. (a *Anfang* von ab .)

11. Satz. ab ist ein System H_b , d. h. $[b] \ni ab$, und wenn s ein von b verschiedenes Element von ab ist, so ist $[s'] \ni ab$.

▷ Dies folgt aus (8).

Also b Element (*Ende*) von ab . Ist $H \ni ab$, aber b nicht in H enthalten, so ist $H' \ni ab$.

12. Satz. Aus $[a] \ni H_b$ folgt $ab \ni H_b$.

▷ Unmittelbare Folge von (9).

13. Satz. $aa = [a]$.

▷ Dies folgt aus (4), weil aa der Durchschnitt aller H_a ist, die ja alle das Element a enthalten nach (3.I).

14. Satz. Ist b' Element von ab , so ist $ab = S$.

▷ Dies folgt aus (11) und (5).

15. Satz. $b'b = S$.

▷ Dies folgt aus (14) und (10).

16. Satz. Ist c Element von ab , so ist $cb \ni ab$.

▷ Dies folgt aus (12), denn ab ist ein H_b , (nach 11), welches das Element c enthält.

17. Satz. Bedeutet $A+B$ das aus A, B zusammengesetzte System, so ist

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Denn wenn s Element von $a'b$, so ist s' in $b'a$ oder $a'b$ enthalten, je nachdem $s = b$ oder verschieden von b (zufolge (10) oder (11) und (3.II)), und ebenso, wenn s Element von $b'a$, so ist s' in $a'b$ oder $b'a$ enthalten; also ist $(a'b + b'a)' \ni a'b + b'a$; hieraus folgt der Satz nach (2).

18. Satz. Ist a verschieden von b , so ist $ab = [a] + a'b$.

▷ Denn da a ein von b verschiedenes Element von ab ist, so ist a' Element von ab (10, 11), und folglich (16) ist $a'b \ni ab$; da ferner (10) auch $[a] \ni ab$, mithin

$$[a] + a'b \ni ab.$$

Ferner: jedes von b verschiedene Element s von $[a] + a'b$ ist entweder $= a$ oder ein von b verschiedenes Element von $a'b$, in beiden Fällen ist s' (nach (10), (11)) Element von $a'b$, also auch von $[a] + a'b$, und da (11) auch $[b] \ni [a] + a'b$, so ist $[a] + a'b$ ein System H_b ; da endlich auch $[a] \ni [a] + a'b$, so ist (12) auch

$$ab \ni [a] + a'b.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate folgt der Satz.

10. Theorem. a is an element of ab , i.e., $[a] \in ab$.

▷ This is because ab is the intersection of all systems H_b in which a lies. (So a is the *start* of ab .)

11. Theorem. ab is a system H_b , i.e. $[b] \in ab$, and if s is an element of ab different from b , then $[s'] \in ab$.

▷ This follows from (8).

So b is an element (the *end*) of ab . If $H \in ab$ but b is not contained in H , then $H' \in ab$.

12. Theorem. From $[a] \in H_b$, follows from $ab \in H_b$.

▷ Immediate consequence of definition (9).

13. Theorem. $aa = [a]$.

▷ This follows from (4), because aa is the intersection of all H_a that contain the element a according to (3.I).

14. Theorem. If b' is an element of ab , then $ab = S$.

▷ This follows from (11) and (5).

15. Theorem. $b'b = S$.

▷ This follows from (14) and (10).

16. Theorem. If c is an element of ab , then $cb \in ab$.

▷ This follows from (12), since ab is an H_b by (11), that contains the element c .

17. Theorem. If $A+B$ means the system composed of A, B , then

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Because if s is an element of $a'b$, then s' is contained in $b'a$ or $a'b$, depending on $s = b$ or different from b (according to (10) or (11) and (3.II)), and likewise if s is an element of $b'a$, then s' is contained in $a'b$ or $b'a$; therefore $(a'b + b'a)' \in a'b + b'a$. This leads to the theorem according to (2).

18. Theorem. If a is different from b , then $ab = [a] + a'b$.

▷ For since a is an element of ab different from b , then a' is an element of ab (by 10, 11), and consequently (by 16) $a'b \in ab$; since furthermore, by (10), we also have $[a] \in ab$, therefore

$$[a] + a'b \in ab.$$

Also, every element s of $[a] + a'b$ that is different from b is either $= a$ or an element of $a'b$ that is different from b . Thus in both cases s' is (by (10), (11)) an element of $a'b$, therefore also of $[a] + a'b$, and since by (11) also $[b] \in [a] + a'b$, it follows that $[a] + a'b$ is a system H_b . Finally, since $[a] \in [a] + a'b$, by (12) also

$$ab \in [a] + a'b.$$

The theorem follows from the comparison of both results.