# Zweite Definition des Endlichen und Unendlichen.

Richard Dedekind

1889. 3. 9. [ 9th March 1889 ]

Zuerst veröffentlicht in der zweiten Auflage (1893) der Schrift *„Was sind und was sollen die Zahlen?“* Seite XVII, in der Form:

> Ein System $S$ heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden lässt, dass kein echter Teil von $S$ in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Fall heißt $S$ ein unendliches System.

Verfolgung dieser Definition eines endlichen Systems $S$ *ohne Benutzung der natürlichen Zahlen.*

Es sei $\varphi$ eine Abbildung von $S$ in sich selbst, durch welche kein echter Teil von $S$ in sich selbst abgebildet wird. Kleine lateinische Buchstaben $a, b \ldots z$ bedeuten immer *Elemente* von $S$, große lateinische Buchstaben $A, B \ldots Z$ bedeuten *Teile* von $S$; die durch $\varphi$ erzeugten Bilder von $a, A$ werden resp. mit $a', A'$ bezeichnet.

Dass $A$ *Teil von* $B$ ist, wird durch $A \; 3 \; B$ ausgedrückt. Das aus den Elementen $a, b, c, \ldots$ bestehende System wird mit $[a, b, c \ldots]$ bezeichnet.

Es ist also

(1) $$S' \; 3 \; S$$

und

(2) $$\text{aus } A' \; 3 \; A \text{ folgt } A = S.$$

**1. Satz.** $S' = S$.

▷ Jedes Element von $S$ ist Bild von (mindestens) einem Element $r$ von $S$. Denn aus (1) folgt $(S')' \; 3 \; S'$, also nach (2) unser Satz.

Jedes aus einem einzigen Element $s$ bestehende System $[s]$ ist endlich, weil es keinen echten Teil besitzt und durch die identische Abbildung in sich selbst abgebildet wird. Dieser Fall wird im folgenden *ausgeschlossen*, $S$ bedeutet ein endliches System, das *nicht* aus einem einzigen Element besteht.

**2. Satz.** Jedes Element $s$ ist verschieden von seinem Bilde $s'$, in Zeichen: $s \neq s'$.

▷ Denn wäre $s = s'$, so wäre $[s]' = [s'] = [s] \; 3 \; [s]$, nach (2) auch $[s] = S$ im Widerspruch zu unserer Annahme über $S$.

First published in the second edition (1893) of the text *"Was sind und was sollen die Zahlen?"* page XVII, in the form:

> A system $S$ is called finite if it can be mapped into itself in such a way that no proper part of $S$ is mapped into itself; in the opposite case, $S$ is called an infinite system.

Pursuing this definition of a finite system $S$ *without using the natural numbers.*

Let $\varphi$ be a mapping of $S$ into itself, which maps no proper part of $S$ into itself. Small Latin letters $a, b \ldots z$ always mean *elements* of $S$, capital Latin letters $A, B \ldots Z$ mean *parts* of $S$. The images of $a, A$ generated by $\varphi$ are respectively denoted by $a', A'$.

That $A$ is *part of* $B$ is expressed by $A \in B$. The system consisting of the elements $a, b, c, \ldots$ is denoted by $[a, b, c, \ldots]$.

This gives

(1) $$S' \in S$$

and

(2) $$\text{from } A' \in A \text{ it follows that } A = S.$$

**1. Theorem.** $S' = S$.

▷ Every element of $S$ is an image of (at least) one element $r$ of $S$. Because from (1) it follows $(S')' \in S'$, hence by (2), our proposition.

Every system $[s]$ consisting of a single element $s$ is finite because it has no proper part and is mapped into itself by the identity function. This case is *excluded* in the following; $S$ means a finite system that does *not* consist of a single element.

**2. Theorem.** Every element $s$ is different from its image $s'$, in symbols: $s \neq s'$.

▷ Because if $s = s'$, then $[s]' = [s'] = [s] \in [s]$, so according to (2), also $[s] = S$ in contradiction to our assumption about $S$.

**3. Definition.** Ist $s$ ein bestimmtes Element von $S$ so soll mit $H_s$ jeder solche Teil von $S$ bezeichnet werden, der den beiden folgenden Bedingungen genügt:

I. $s$ ist Element von $H_s$, also $[s] \ni H_s$, also auch
$$[s] + H_s = H_s.$$

II. Ist $h$ ein von $s$ verschiedenes Element von $H_s$, so ist auch $h'$ Element von $H_s$; ist also $H \ni H_s$, aber $s$ nicht in $H$ enthalten, so ist $H' \ni H_s$.

**4. Satz.** $S$ und $[s]$ sind spezielle Systeme $H_s$, und $[s]$ ist der Durchschnitt (die Gemeinheit) aller dem Elemente $s$ entsprechenden Systeme $H_s$.

▷ Offenbar.

**5. Satz.** $H_s = S$ oder *echter* Teil von $S$, je nachdem $s'$ in $H_s$ liegt oder nicht.

▷ Denn wenn $s'$ in $H_s$ liegt, so folgt aus (3.II), dass $H'_s \ni H_s$, also nach (2), dass $H_s = S$ ist; und umgekehrt, wenn $H_s = S$, so liegt auch $s'$ in $H_s$.

**6. Satz.** Ist $H_s$ *echter* Teil von $S$, so ist $s'$ das einzige Element von $H'_s$, das außerhalb $H_s$ liegt.

▷ Denn jedes Element $k$ von $H'_s$ ist Bild $h'$ von mindestens einem Element $h$ in $H_s$; ist nun $k = h'$ verschieden von $s'$, so ist auch $h$ verschieden von $s$, und folglich nach (3.II) liegt $k = h'$ in $H_s$, während das Element $s'$ von $H'_s$ nach (5) außerhalb $H_s$ liegt.

**7. Satz.** Jedes System $H'_s$ ist ein System $H_{s'}$, das heißt (Definition (3)):

I'. $s'$ ist Element von $H'_s$.

II'. Ist $k$ ein von $s'$ verschiedenes Element von $H'_s$, so liegt auch $k'$ in $H'_s$.

▷ Das Erste folgt daraus, dass $s$ in $H_s$ liegt, das Zweite daraus, dass nach Satz (6) $k$ in $H_s$ liegt.

**8. Satz.** Sind $A$, $B$, $C$ ... spezielle, demselben $s$ entsprechende Systeme $H_s$, so ist auch ihr Durchschnitt $H$ ein System $H_s$.

▷ Denn zufolge (3.I) ist $s$ gemeinsames Element von $A, B, C, \ldots$, also auch Element von $H$. Ist ferner $h$ ein von $s$ verschiedenes Element von $H$, so ist zufolge (3.II) das Bild $h'$ Element von $A$, von $B$, von $C$, ..., also auch von $H$. Mithin erfüllt $H$ die beiden für jedes $H_s$ charakteristischen Bedingungen I, II in (3).

**9. Definition.** Sind $a$, $b$ bestimmte Elemente von $S$, so soll das Symbol $ab$ den Durchschnitt aller derjenigen Systeme $H_b$ bedeuten (*Strecke ab*), welche (wie z. B. $S$) das Element $a$ enthalten.

**3. Definition.** If $s$ is a certain element of $S$, then $H_s$ shall denote any part of $S$ that satisfies the following two conditions:

I. $s$ is element of $H_s$, so $[s] \in H_s$, also
$$[s] + H_s = H_s.$$

II. If $h$ is an element of $H_s$ different from $s$, then $h'$ is also an element of $H_s$. So if $H \in H_s$, but $s$ is *not contained* in H, then $H' \in H_s$.

**4. Theorem.** $S$ and $[s]$ are special systems $H_s$, and $[s]$ is the *intersection* (the common) of all systems $H_s$ corresponding to the element $s$.

▷ Obvious.

**5. Theorem.** $H_s = S$ or $H_s$ is a *proper* part of $S$, depending on whether $s'$ lies in $H_s$ or not.

▷ For if $s'$ lies in $H_s$, then it follows from (3.II) that $H'_s \in H_s$, therefore by (2) that $H_s = S$. Conversely, if $H_s = S$, then $s'$ also lies in $H_s$.

**6. Theorem.** If $H_s$ is a *proper* part of $S$, then $s'$ is the only element of $H'_s$ that lies outside $H_s$.

▷ This is because every element $k$ of $H'_s$ is the image $h'$ of at least one element $h$ in $H$. If $k = h'$ is different from $s'$, then $h$ is also different from $s$, and consequently by (3.II) $k = h'$ lies in $H_s$, while the element $s'$ of $H'_s$ by (5) lies outside $H_s$.

**7. Theorem.** Every system $H'_s$ is a system $H_{s'}$, that is (by definition 3.):

I'. $s'$ is element of $H'_s$

II'. If $k$ is an element of $H'_s$ that is different from $s'$, then $k'$ also lies in $H'_s$.

▷ The first follows from the fact that $s$ lies in $H_s$, the second from the fact that $k$ lies in $H_s$ by (6).

**8. Theorem.** If $A$, $B$, $C$ ... are special systems $H_s$ corresponding to the same $s$, then their intersection $H$ is also a system $H_s$.

▷ Because according to (3.I) $s$ is a common element of $A, B, C, \ldots$, thus also an element of $H$. If $h$ is an element of $H$ that is different from $s$, then, by (3.II), the image $h'$ is an element of $A$, of $B$, of $C$, ..., and therefore also of $H$. $H$ thus fulfills the two conditions I and II in definition (3) that are characteristic of every $H_s$.

**9. Definition.** If $a$, $b$ are certain elements of $S$, then the symbol $ab$ (*section ab*) should mean the intersection of all those systems $H_b$ which (such as $S$) contain the element $a$.

**10. Satz.** $a$ ist Element von $ab$, d. h. $[a] \ni ab$.

▷ Denn $ab$ ist der Durchschnitt von lauter solchen Systemen $H_b$ in denen $a$ liegt. (a *Anfang* von $ab$.)

**11. Satz.** $ab$ ist ein System $H_b$, d. h. $[b] \ni ab$, und wenn $s$ ein von $b$ verschiedenes Element von $ab$ ist, so ist $[s'] \ni ab$.

▷ Dies folgt aus (8).

Also $b$ Element (*Ende*) von $ab$. Ist $H \ni ab$, aber $b$ nicht in $H$ enthalten, so ist $H' \ni ab$.

**12. Satz.** Aus $[a] \ni H_b$ folgt $ab \ni H_b$.

▷ Unmittelbare Folge von (9).

**13. Satz.** $aa = [a]$.

▷ Dies folgt aus (4), weil $aa$ der Durchschnitt aller $H_a$ ist, die ja alle das Element $a$ enthalten nach (3.I).

**14. Satz.** Ist $b'$ Element von $ab$, so ist $ab = S$.

▷ Dies folgt aus (11) und (5).

**15. Satz.** $b'b = S$.

▷ Dies folgt aus (14) und (10).

**16. Satz.** Ist $c$ Element von $ab$, so ist $cb \ni ab$.

▷ Dies folgt aus (12), denn $ab$ ist ein $H_b$, (nach (11)), welches das Element $c$ enthält.

**17. Satz.** Bedeutet $A+B$ das aus $A, B$ zusammengesetzte System, so ist

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Denn wenn $s$ Element von $a'b$, so ist $s'$ in $b'a$ oder $a'b$ enthalten, je nachdem $s = b$ oder verschieden von $b$ (zufolge (10) oder (11) und (3.II)), und ebenso, wenn $s$ Element von $b'a$, so ist $s'$ in $a'b$ oder $b'a$ enthalten; also ist $(a'b + b'a)' \ni a'b + b'a$; hieraus folgt der Satz nach (2).

**18. Satz.** Ist $a$ verschieden von $b$, so ist $ab = [a] + a'b$.

▷ Denn da $a$ ein von $b$ verschiedenes Element von $ab$ ist, so ist $a'$ Element von $ab$ (10, 11), und folglich (16) ist $a'b \ni ab$; da ferner (10) auch $[a] \ni ab$, mithin

$$[a] + a'b \ni ab.$$

Ferner: jedes von $b$ verschiedene Element $s$ von $[a]+a'b$ ist entweder $= a$ oder ein von $b$ verschiedenes Element von $a'b$, in beiden Fällen ist $s'$ (nach (10), (11)) Element von $a'b$, also auch von $[a] + a'b$, und da (11) auch $[b] \ni [a] + a'b$, so ist $[a] + a'b$ ein System $H_b$; da endlich auch $[a] \ni [a] + a'b$, so ist (12) auch

$$ab \ni [a] + a'b.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate folgt der Satz.

**10. Theorem.** $a$ is an element of $ab$, i.e., $[a] \in ab$.

▷ This is because $ab$ is the intersection of all systems $H_b$ in which $a$ lies. (So a is the *start* of ab.)

**11. Theorem.** $ab$ is a system $H_b$, i.e. $[b] \in ab$, and if $s$ is an element of $ab$ different from $b$, then $[s'] \in ab$.

▷ This follows from (8).

So $b$ is an element (the *end*) of $ab$. If $H \in ab$ but $b$ is not contained in $H$, then $H' \in ab$.

**12. Theorem.** From $[a] \in H_b$, follows from $ab \in H_b$.

▷ Immediate consequence of definition (9).

**13. Theorem.** $aa = [a]$.

▷ This follows from (4), because $aa$ is the intersection of all $H_a$ that contain the element $a$ according to (3.I).

**14. Theorem.** If $b'$ is an element of $ab$, then $ab = S$.

▷ This follows from (11) and (5).

**15. Theorem.** $b'b = S$.

▷ This follows from (14) and (10).

**16. Theorem.** If $c$ is an element of $ab$, then $cb \in ab$.

▷ This follows from (12), since $ab$ is an $H_b$ by (11), that contains the element $c$.

**17. Theorem.** If $A+B$ means the system composed of $A, B$, then

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Because if $s$ is an element of $a'b$, then $s'$ is contained in $b'a$ or $a'b$, depending on $s = b$ or different from $b$ (according to (10) or (11) and (3.II)), and likewise if $s$ is an element of $b'a$, then $s'$ is contained in $a'b$ or $b'a$; therefore $(a'b + b'a)' \in a'b + b'a$. This leads to the theorem according to (2).

**18. Theorem.** If $a$ is different from $b$, then $ab = [a] + a'b$.

▷ For since $a$ is an element of $ab$ different from $b$, then $a'$ is an element of $ab$ (by 10, 11), and consequently (by 16) $a'b \in ab$; since furthermore, by (10), we also have $[a] \in ab$, therefore

$$[a] + a'b \in ab.$$

Also, every element $s$ of $[a] + a'b$ that is different from $b$ is either $= a$ or an element of $a'b$ that is different from $b$. Thus in both cases $s'$ is (by (10), (11)) an element of $a'b$, therefore also of $[a] + a'b$, and since by (11) also $[b] \in [a] + a'b$, it follows that $[a] + a'b$ is a system $H_b$. Finally, since $[a] \in [a] + a'b$, by (12) also

$$ab \in [a] + a'b.$$

The theorem follows from the comparison of both results.

**19. Satz.** Sind $a, b$ verschiedene Elemente von $S$, so liegt $a$ außerhalb $a'b$, und $b$ liegt außerhalb $b'a$.

▷ Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein von $b$ verschiedenes Element $a$, das in $a'b$ liegt, und bezeichnet mit $A$ das System aller solcher Elemente $a$, so ergibt sich folgendes.

Setzt man $a' = s$, so liegt $a$ in $sb$, und da $a$ verschieden von $b$ ist, also (nach (13)) nicht in $bb$ liegt, so ist $s$ verschieden von $b$, und hieraus folgt (nach (18)), dass $sb = [s] + s'b$ ist. Da ferner $a$ (nach (2)) verschieden von $s$ ist und in $sb$ liegt, so muss $a$ in $s'b$ liegen, und hieraus folgt wieder (nach (1)), dass auch $s$ (als Bild $a'$) in $s'b$ liegt.

Mithin ist das Bild $a'$ eines jeden Elementes $a$ von $A$ ebenfalls in $A$ enthalten, also $A'$ 3 $A$. Da aber hieraus $a = S$ folgen würde, während doch $A$ das Element $b$ nicht enthält, so ist unsere Annahme unzulässig, also der Satz wahr, w.z.b.w.

Der zweite Teil folgt durch Vertauschung von $a$ mit $b$.

**20. Satz.** Sind $a, b$ verschieden, so haben die Strecken $a'b, b'a$ kein gemeinsames Element.

▷ Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein gemeinsames Element $m$ von $a'b$, $b'a$, so folgt aus dem vorhergehenden Satz (19), dass $m$ verschieden von $b$ und von $a$ ist; mithin muss (11) das Bild $m'$ ebenfalls gemeinsames Element von $a'b$ und $b'a$ sein.

Bezeichnet man daher mit $M$ das System aller solcher Elemente $m$, so ist $M'$ 3 $M$, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil $a, b$ Elemente von $S$, aber nicht Elemente von $M$ sind. Also ist unser Satz wahr.

**21. Satz.** Sind $a, b$ verschieden, so sind auch die Bilder $a', b'$ verschieden.

▷ Denn sonst hätten die Strecken $a'b, b'a$ ein gemeinsames Element $a' = b'$, weil $a'$ (nach (10)) Element von $a'b$ und $b'$ Element von $b'a$ ist.

**22. Satz.** Aus $cb = S$ folgt $c = b'$.

▷ Es gibt (nach (1) und (21)) in $S$ ein und nur ein Element $a$, welches der Bedingung $a' = c$ genügt, und es ist also $a'b = S$, mithin $[a]$ 3 $a'b$; es muss daher (19) $a = b$, also $c = b'$ sein, w.z.b.w.

**23. Satz.** Sind $a, b$ verschieden, so ist jedes Element von $S$ in einer und nur einer der Strecken $a'b, b'a$ enthalten.

▷ Dies folgt aus (17) und (20).

**24. Satz.** Sind $a$, $b$, $c$ verschieden, so haben die Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ kein gemeinsames Element, und dasselbe gilt von den Strecken $a'c$, $b'a$, $c'b$.

**19. Theorem.** If $a, b$ are different elements of $S$, then $a$ lies outside $a'b$, and $b$ lies outside $b'a$.

▷ If one assumes the opposite, that there is an element $a$ that is different from $b$ and lies in $a'b$, and that $A$ denotes the system of all such elements $a$, the following holds.

If one puts $a' = s$, then $a$ lies in $sb$, and since $a$ is different from $b$, and therefore (according to (13)) is not in $bb$, then $s$ is different from $b$, and from this it follows (according to 18) that $sb = [s] + s'b$. Furthermore, since $a$ (according to (2)) is different from $s$ and lies in $sb$, then $a$ must lie in $s'b$, and from this it follows (again according to (1)) that $s$ (as the image $a'$) also lies in $s'b$.

Therefore, the image $a'$ of every element $a$ of $A$ is also contained in $A$, i.e. $A' \in A$. But since $A = S$ would follow from this, while $A$ does not contain the element $b$, our assumption is inadmissible, so the theorem is true, qed.

The second part follows by exchanging $a$ with $b$.

**20. Theorem.** If $a$, $b$ are different, then the segments $a'b$, $b'a$ have no common element.

▷ If one assumes the opposite, that there is a common element $m$ of $a'b$, $b'a$, then it follows from the preceding Theorem 19 that $m$ is different from $b$ and from $a$; therefore (according to 11) the image $m'$ must also be a common element of $a'b$ and $b'a$.

Therefore, if M denotes the system of all such elements $m$, then $M' \in M$, thus $M = S$. But this is impossible because $a$, $b$ are elements of $S$ but not elements of $M$. So our theorem is true.

**21. Theorem.** If $a$, $b$ are different, then the images $a'$, $b'$ are also different.

▷ Otherwise the segments $a'b$, $b'a$ would have a common element $a' = b'$, because (according to 10) $a'$ is an element of $a'b$ and $b'$ is an element of $b'a$.

**22. Theorem.** From $cb = S$ follows $c = b$.

▷ There is (according to 1 and 21) in $S$ one and only one element $a$ which satisfies the condition $a' = c$, and therefore $a'b = S$, therefore $[a] \in a'b$; therefore (by 19) $a = b$, thus $c = b'$, qed.

**23. Theorem.** If $a$, $b$ are different, then every element of $S$ is contained in one and only one of the segments $a'b$, $b'a$.

▷ This follows from (17) and (20).

**24. Theorem.** If $a$, $b$, $c$ are different, then the segments $b'c$, $c'a$, $a'b$ have no common element, and the same applies to the segments $a'c$, $b'a$, $c'b$.

▷ Denn die gegenteilige Annahme, es gebe ein den Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ gemeinsames Element $m$, führt zu einem Widerspruch. Es sei $M$ das System aller solcher Elemente. Da (nach (19)) $a$ nicht in $a'b$, $b$ nicht in $b'c$, $c$ nicht in $c'a$ liegt, so ist $m$ verschieden von $c, a, b$, und folglich (11) ist $m'$ ebenfalls gemeinsames Element von $b'c$, $c'a$, $a'b$, also Element von $M$.

Mithin ist $M' \ni M$, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil $M$ keins der Elemente $a$, $b$, $c$ enthält. Also ist unser Satz wahr.

Der zweite Teil ergibt sich aus dem ersten, wenn man $a$ mit $b$ vertauscht, wodurch die Annahme nicht geändert wird.

▷ Because the opposite assumption, that there is an element $m$ common to the segments $b'c$, $c'a$, $a'b$, leads to a contradiction. Let $M$ be the system of all such elements. Since (according to (19)) $a$ is not in $a'b$, $b$ is not in $b'c$, $c$ is not in $c'a$, then $m$ is different from $c$, $a$, $b$, and consequently (by 11) $m'$ is a common element of $b'c$, $c'a$, $a'b$, i.e. an element of $M$; therefore $M' \in M$, hence $M = S$.

But this is impossible because $M$ does not contain any of the elements $a$, $b$, $c$. So our theorem is true.

The second part results from the first if one swaps $a$ with $b$, which does not change the assumption.