

# Zweite Definition des Endlichen und Unendlichen.

Richard Dedekind

1889. 3. 9. / 9th March 1889

Zuerst veröffentlicht in der zweiten Auflage (1893) der Schrift “Was sind und was sollen die Zahlen?” Seite XVII, in der Form:

Ein System  $S$  heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden lässt, dass kein echter Teil von  $S$  in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Fall heißt  $S$  ein unendliches System.

Verfolgung dieser Definition eines endlichen Systems  $S$  ohne Benutzung der natürlichen Zahlen.

Es sei  $\varphi$  eine Abbildung von  $S$  in sich selbst, durch welche kein echter Teil von  $S$  in sich selbst abgebildet wird. Kleine lateinische Buchstaben  $a, b \dots z$  bedeuten immer *Elemente* von  $S$ , große lateinische Buchstaben  $A, B \dots Z$  bedeuten *Teile* von  $S$ ; die durch  $\varphi$  erzeugten Bilder von  $a, A$  werden resp. mit  $a', A'$  bezeichnet.

Dass  $A$  Teil von  $B$  ist, wird durch  $A \text{ } 3 \text{ } B$  ausgedrückt. Das aus den Elementen  $a, b, c, \dots$  bestehende System wird mit  $[a, b, c, \dots]$  bezeichnet.

Es ist also

$$(1) \quad S' \text{ } 3 \text{ } S$$

und

$$(2) \quad \text{aus } A' \text{ } 3 \text{ } A \text{ folgt } A = S.$$

**1. Satz.**  $S' = S$ .

▷ Jedes Element von  $S$  ist Bild von (mindestens) einem Element  $r$  von  $S$ . Denn aus (1) folgt  $(S')' \text{ } 3 \text{ } S'$ , also nach (2) unser Satz.

Jedes aus einem einzigen Element  $s$  bestehende System  $[s]$  ist endlich, weil es keinen echten Teil besitzt und durch die identische Abbildung in sich selbst abgebildet wird. Dieser Fall wird im folgenden *ausgeschlossen*,  $S$  bedeutet ein endliches System, das *nicht* aus einem einzigen Element besteht.

**2. Satz.** Jedes Element  $s$  ist verschieden von seinem Bilde  $s'$ , in Zeichen:  $s \neq s'$ .

▷ Denn wäre  $s = s'$ , so wäre  $[s]' = [s'] = [s] \text{ } 3 \text{ } [s]$ , nach (2) auch  $[s] = S$  im Widerspruch zu unserer Annahme über  $S$ .

First published in the second edition (1893) of the text “Was sind und was sollen die Zahlen?” page XVII, in the form:

A system  $S$  is called finite if it can be mapped into itself in such a way that no proper part of  $S$  is mapped into itself; in the opposite case,  $S$  is called an infinite system.

Pursuing this definition of a finite system  $S$  without using the natural numbers.

Let  $\varphi$  be a mapping of  $S$  into itself, which maps no proper part of  $S$  into itself. Small Latin letters  $a, b \dots z$  always mean *elements* of  $S$ , capital Latin letters  $A, B \dots Z$  mean *parts* of  $S$ . The images of  $a, A$  generated by  $\varphi$  are respectively denoted by  $a', A'$ .

That  $A$  is *part of*  $B$  is expressed by  $A \in B$ . The system consisting of the elements  $a, b, c, \dots$  is denoted by  $[a, b, c, \dots]$ .

This gives

$$(1) \quad S' \in S$$

and

$$(2) \quad \text{from } A' \in A \text{ it follows that } A = S.$$

**1. Theorem.**  $S' = S$ .

▷ Every element of  $S$  is an image of (at least) one element  $r$  of  $S$ . Because from (1) it follows  $(S')' \in S'$ , hence by (2), our proposition.

Every system  $[s]$  consisting of a single element  $s$  is finite because it has no proper part and is mapped into itself by the identity function. This case is *excluded* in the following;  $S$  means a finite system that does *not* consist of a single element.

**2. Theorem.** Every element  $s$  is different from its image  $s'$ , in symbols:  $s \neq s'$ .

▷ Because if  $s = s'$ , then  $[s]' = [s'] = [s] \in [s]$ , so according to (2), also  $[s] = S$  in contradiction to our assumption about  $S$ .

**3. Definition.** Ist  $s$  ein bestimmtes Element von  $S$  so soll mit  $H_s$  jeder solche Teil von  $S$  bezeichnet werden, der den beiden folgenden Bedingungen genügt:

I.  $s$  ist Element von  $H_s$ , also  $[s] \in H_s$ , also auch

$$[s] + H_s = H_s.$$

II. Ist  $h$  ein von  $s$  verschiedenes Element von  $H_s$ , so ist auch  $h'$  Element von  $H_s$ ; ist also  $H \in H_s$ , aber  $s$  nicht in  $H$  enthalten, so ist  $H' \in H_s$ .

**4. Satz.**  $S$  und  $[s]$  sind spezielle Systeme  $H_s$ , und  $[s]$  ist der Durchschnitt (die Gemeinheit) aller dem Elemente  $s$  entsprechenden Systeme  $H_s$ .

▷ Offenbar.

**5. Satz.**  $H_s = S$  oder *echter* Teil von  $S$ , je nachdem  $s'$  in  $H_s$  liegt oder nicht.

▷ Denn wenn  $s'$  in  $H_s$  liegt, so folgt aus (3.II), dass  $H'_s \in H_s$ , also nach (2), dass  $H_s = S$  ist; und umgekehrt, wenn  $H_s = S$ , so liegt auch  $s'$  in  $H_s$ .

**6. Satz.** Ist  $H_s$  *echter* Teil von  $S$ , so ist  $s'$  das einzige Element von  $H'_s$ , das außerhalb  $H_s$  liegt.

▷ Denn jedes Element  $k$  von  $H'_s$  ist Bild  $h'$  von mindestens einem Element  $h$  in  $H_s$ ; ist nun  $k = h'$  verschieden von  $s'$ , so ist auch  $h$  verschieden von  $s$ , und folglich nach (3.II) liegt  $k = h'$  in  $H_s$ , während das Element  $s'$  von  $H'_s$  nach (5) außerhalb  $H_s$  liegt.

**7. Satz.** Jedes System  $H'_s$  ist ein System  $H_{s'}$ , das heißt (Definition (3)):

I'.  $s'$  ist Element von  $H'_s$ .

II'. Ist  $k$  ein von  $s'$  verschiedenes Element von  $H'_s$ , so liegt auch  $k'$  in  $H'_s$ .

▷ Das Erste folgt daraus, dass  $s$  in  $H_s$  liegt, das Zweite daraus, dass nach Satz (6)  $k$  in  $H_s$  liegt.

**8. Satz.** Sind  $A, B, C \dots$  spezielle, demselben  $s$  entsprechende Systeme  $H_s$ , so ist auch ihr Durchschnitt  $H$  ein System  $H_s$ .

▷ Denn zufolge (3.I) ist  $s$  gemeinsames Element von  $A, B, C, \dots$ , also auch Element von  $H$ . Ist ferner  $h$  ein von  $s$  verschiedenes Element von  $H$ , so ist zufolge (3.II) das Bild  $h'$  Element von  $A$ , von  $B$ , von  $C, \dots$ , also auch von  $H$ . Mithin erfüllt  $H$  die beiden für jedes  $H_s$  charakteristischen Bedingungen I, II in (3).

**9. Definition.** Sind  $a, b$  bestimmte Elemente von  $S$ , so soll das Symbol  $ab$  den Durchschnitt aller derjenigen Systeme  $H_b$  bedeuten (*Strecke ab*), welche (wie z. B.  $S$ ) das Element  $a$  enthalten.

**3. Definition.** If  $s$  is a certain element of  $S$ , then  $H_s$  shall denote any part of  $S$  that satisfies the following two conditions:

I.  $s$  is element of  $H_s$ , so  $[s] \in H_s$ , also

$$[s] + H_s = H_s.$$

II. If  $h$  is an element of  $H_s$  different from  $s$ , then  $h'$  is also an element of  $H_s$ . So if  $H \in H_s$ , but  $s$  is *not contained* in  $H$ , then  $H' \in H_s$ .

**4. Theorem.**  $S$  and  $[s]$  are special systems  $H_s$ , and  $[s]$  is the *intersection* (the common) of all systems  $H_s$  corresponding to the element  $s$ .

▷ Obvious.

**5. Theorem.**  $H_s = S$  or  $H_s$  is a *proper* part of  $S$ , depending on whether  $s'$  lies in  $H_s$  or not.

▷ For if  $s'$  lies in  $H_s$ , then it follows from (3.II) that  $H'_s \in H_s$ , therefore by (2) that  $H_s = S$ . Conversely, if  $H_s = S$ , then  $s'$  also lies in  $H_s$ .

**6. Theorem.** If  $H_s$  is a *proper* part of  $S$ , then  $s'$  is the only element of  $H'_s$  that lies outside  $H_s$ .

▷ This is because every element  $k$  of  $H'_s$  is the image  $h'$  of at least one element  $h$  in  $H$ . If  $k = h'$  is different from  $s'$ , then  $h$  is also different from  $s$ , and consequently by (3.II)  $k = h'$  lies in  $H_s$ , while the element  $s'$  of  $H'_s$  by (5) lies outside  $H_s$ .

**7. Theorem.** Every system  $H'_s$  is a system  $H_{s'}$ , that is (by definition 3.):

I'.  $s'$  is element of  $H'_s$

II'. If  $k$  is an element of  $H'_s$  that is different from  $s'$ , then  $k'$  also lies in  $H'_s$ .

▷ The first follows from the fact that  $s$  lies in  $H_s$ , the second from the fact that  $k$  lies in  $H_s$  by (6).

**8. Theorem.** If  $A, B, C \dots$  are special systems  $H_s$  corresponding to the same  $s$ , then their intersection  $H$  is also a system  $H_s$ .

▷ Because according to (3.I)  $s$  is a common element of  $A, B, C, \dots$ , thus also an element of  $H$ . If  $h$  is an element of  $H$  that is different from  $s$ , then, by (3.II), the image  $h'$  is an element of  $A$ , of  $B$ , of  $C, \dots$ , and therefore also of  $H$ .  $H$  thus fulfills the two conditions I and II in definition (3) that are characteristic of every  $H_s$ .

**9. Definition.** If  $a, b$  are certain elements of  $S$ , then the symbol  $ab$  (*section ab*) should mean the intersection of all those systems  $H_b$  which (such as  $S$ ) contain the element  $a$ .

**10. Satz.**  $a$  ist Element von  $ab$ , d. h.  $[a] \ 3 \ ab$ .

▷ Denn  $ab$  ist der Durchschnitt von lauter solchen Systemen  $H_b$  in denen  $a$  liegt. (a *Anfang* von  $ab$ .)

**11. Satz.**  $ab$  ist ein System  $H_b$ , d. h.  $[b] \ 3 \ ab$ , und wenn  $s$  ein von  $b$  verschiedenes Element von  $ab$  ist, so ist  $[s'] \ 3 \ ab$ .

▷ Dies folgt aus (8).

Also  $b$  Element (*Ende*) von  $ab$ . Ist  $H \ 3 \ ab$ , aber  $b$  nicht in  $H$  enthalten, so ist  $H' \ 3 \ ab$ .

**12. Satz.** Aus  $[a] \ 3 \ H_b$  folgt  $ab \ 3 \ H_b$ .

▷ Unmittelbare Folge von (9).

**13. Satz.**  $aa = [a]$ .

▷ Dies folgt aus (4), weil  $aa$  der Durchschnitt aller  $H_a$  ist, die ja alle das Element  $a$  enthalten nach (3.I).

**14. Satz.** Ist  $b'$  Element von  $ab$ , so ist  $ab = S$ .

▷ Dies folgt aus (11) und (5).

**15. Satz.**  $b'b = S$ .

▷ Dies folgt aus (14) und (10).

**16. Satz.** Ist  $c$  Element von  $ab$ , so ist  $cb \ 3 \ ab$ .

▷ Dies folgt aus (12), denn  $ab$  ist ein  $H_b$ , (nach 11), welches das Element  $c$  enthält.

**17. Satz.** Bedeutet  $A+B$  das aus  $A, B$  zusammengesetzte System, so ist

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Denn wenn  $s$  Element von  $a'b$ , so ist  $s'$  in  $b'a$  oder  $a'b$  enthalten, je nachdem  $s = b$  oder verschieden von  $b$  (zufolge (10) oder (11) und (3.II)), und ebenso, wenn  $s$  Element von  $b'a$ , so ist  $s'$  in  $a'b$  oder  $b'a$  enthalten; also ist  $(a'b + b'a)' \ 3 \ a'b + b'a$ ; hieraus folgt der Satz nach (2).

**18. Satz.** Ist  $a$  verschieden von  $b$ , so ist  $ab = [a] + a'b$ .

▷ Denn da  $a$  ein von  $b$  verschiedenes Element von  $ab$  ist, so ist  $a'$  Element von  $ab$  (10, 11), und folglich (16) ist  $a'b \ 3 \ ab$ ; da ferner (10) auch  $[a] \ 3 \ ab$ , mithin

$$[a] + a'b \ 3 \ ab.$$

Ferner: jedes von  $b$  verschiedene Element  $s$  von  $[a] + a'b$  ist entweder  $= a$  oder ein von  $b$  verschiedenes Element von  $a'b$ , in beiden Fällen ist  $s'$  (nach (10), (11)) Element von  $a'b$ , also auch von  $[a] + a'b$ , und da (11) auch  $[b] \ 3 \ [a] + a'b$ , so ist  $[a] + a'b$  ein System  $H_b$ ; da endlich auch  $[a] \ 3 \ [a] + a'b$ , so ist (12) auch

$$ab \ 3 \ [a] + a'b.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate folgt der Satz.

**10. Theorem.**  $a$  is an element of  $ab$ , i.e.,  $[a] \in ab$ .

▷ This is because  $ab$  is the intersection of all systems  $H_b$  in which  $a$  lies. (So  $a$  is the *start* of  $ab$ .)

**11. Theorem.**  $ab$  is a system  $H_b$ , i.e.  $[b] \in ab$ , and if  $s$  is an element of  $ab$  different from  $b$ , then  $[s'] \in ab$ .

▷ This follows from (8).

So  $b$  is an element (the *end*) of  $ab$ . If  $H \in ab$  but  $b$  is not contained in  $H$ , then  $H' \in ab$ .

**12. Theorem.** From  $[a] \in H_b$ , follows from  $ab \in H_b$ .

▷ Immediate consequence of definition (9).

**13. Theorem.**  $aa = [a]$ .

▷ This follows from (4), because  $aa$  is the intersection of all  $H_a$  that contain the element  $a$  according to (3.I).

**14. Theorem.** If  $b'$  is an element of  $ab$ , then  $ab = S$ .

▷ This follows from (11) and (5).

**15. Theorem.**  $b'b = S$ .

▷ This follows from (14) and (10).

**16. Theorem.** If  $c$  is an element of  $ab$ , then  $cb \in ab$ .

▷ This follows from (12), since  $ab$  is an  $H_b$  by (11), that contains the element  $c$ .

**17. Theorem.** If  $A+B$  means the system composed of  $A, B$ , then

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Because if  $s$  is an element of  $a'b$ , then  $s'$  is contained in  $b'a$  or  $a'b$ , depending on  $s = b$  or different from  $b$  (according to (10) or (11) and (3.II)), and likewise if  $s$  is an element of  $b'a$ , then  $s'$  is contained in  $a'b$  or  $b'a$ ; therefore  $(a'b + b'a)' \in a'b + b'a$ . This leads to the theorem according to (2).

**18. Theorem.** If  $a$  is different from  $b$ , then  $ab = [a] + a'b$ .

▷ For since  $a$  is an element of  $ab$  different from  $b$ , then  $a'$  is an element of  $ab$  (by 10, 11), and consequently (by 16)  $a'b \in ab$ ; since furthermore, by (10), we also have  $[a] \in ab$ , therefore

$$[a] + a'b \in ab.$$

Also, every element  $s$  of  $[a] + a'b$  that is different from  $b$  is either  $= a$  or an element of  $a'b$  that is different from  $b$ . Thus in both cases  $s'$  is (by (10), (11)) an element of  $a'b$ , therefore also of  $[a] + a'b$ , and since by (11) also  $[b] \in [a] + a'b$ , it follows that  $[a] + a'b$  is a system  $H_b$ . Finally, since  $[a] \in [a] + a'b$ , by (12) also

$$ab \in [a] + a'b.$$

The theorem follows from the comparison of both results.