Zweite Definition des Endlichen und Unendlichen.

Richard Dedekind

1889. 3. 9. [9th March 1889]

Zuerst veröffentlicht in der zweiten Auflage (1893) der Schrift *„Was sind und was sollen die Zahlen?“* Seite XVII, in der Form:

> Ein System S heißt endlich, wenn es sich so in sich selbst abbilden lässt, dass kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird; im entgegengesetzten Fall heißt S ein unendliches System.

Verfolgung dieser Definition eines endlichen Systems S *ohne Benutzung der natürlichen Zahlen.*

Es sei φ eine Abbildung von S in sich selbst, durch welche kein echter Teil von S in sich selbst abgebildet wird. Kleine lateinische Buchstaben $a, b \dots z$ bedeuten immer *Elemente* von S, große lateinische Buchstaben $A, B \dots Z$ bedeuten *Teile* von S; die durch φ erzeugten Bilder von a, A werden resp. mit a', A' bezeichnet.

Dass A *Teil von* B ist, wird durch $A \ 3\ B$ ausgedrückt. Das aus den Elementen $a, b, c, \dots$ bestehende System wird mit $[a, b, c \dots]$ bezeichnet.

Es ist also

(1) $$S' \ 3\ S$$

und

(2) $$\text{aus } A' \ 3\ A \text{ folgt } A = S.$$

1. Satz. $S' = S$.

▷ Jedes Element von S ist Bild von (mindestens) einem Element r von S. Denn aus (1) folgt $(S')' \ 3\ S'$, also nach (2) unser Satz.

Jedes aus einem einzigen Element s bestehende System $[s]$ ist endlich, weil es keinen echten Teil besitzt und durch die identische Abbildung in sich selbst abgebildet wird. Dieser Fall wird im folgenden *ausgeschlossen*, S bedeutet ein endliches System, das *nicht* aus einem einzigen Element besteht.

2. Satz. Jedes Element s ist verschieden von seinem Bilde s', in Zeichen: $s \neq s'$.

▷ Denn wäre $s = s'$, so wäre $[s]' = [s'] = [s] \ 3\ [s]$, nach (2) auch $[s] = S$ im Widerspruch zu unserer Annahme über S.

First published in the second edition (1893) of the text *“Was sind und was sollen die Zahlen?”* page XVII, in the form:

> A system S is called finite if it can be mapped into itself in such a way that no proper part of S is mapped into itself; in the opposite case, S is called an infinite system.

Pursuing this definition of a finite system S *without using the natural numbers.*

Let φ be a mapping of S into itself, which maps no proper part of S into itself. Small Latin letters $a, b \dots z$ always mean *elements* of S, capital Latin letters $A, B \dots Z$ mean *parts* of S. The images of a, A generated by φ are respectively denoted by a', A'.

That A is *part of* B is expressed by $A \subseteq B$. The system consisting of the elements $a, b, c, \dots$ is denoted by $[a, b, c, \dots]$.

This gives

(1) $$S' \subseteq S$$

and

(2) $$\text{from } A' \subseteq A \text{ it follows that } A = S.$$

1. Theorem. $S' = S$.

▷ Every element of S is an image of (at least) one element r of S. Because from (1) it follows $(S')' \subseteq S'$, hence by (2), our proposition.

Every system $[s]$ consisting of a single element s is finite because it has no proper part and is mapped into itself by the identity function. This case is *excluded* in the following; S means a finite system that does *not* consist of a single element.

2. Theorem. Every element s is different from its image s', in symbols: $s \neq s'$.

▷ Because if $s = s'$, then $[s]' = [s'] = [s] \subseteq [s]$, so according to (2), also $[s] = S$ in contradiction to our assumption about S.

3. Definition. Ist s ein bestimmtes Element von S so soll mit H_s jeder solche Teil von S bezeichnet werden, der den beiden folgenden Bedingungen genügt:

I. s ist Element von H_s, also $[s]$ 3 H_s, also auch

$$[s] + H_s = H_s.$$

II. Ist h ein von s verschiedenes Element von H_s, so ist auch h' Element von H_s; ist also H 3 H_s, aber s nicht in H enthalten, so ist H' 3 H_s.

4. Satz. S und $[s]$ sind spezielle Systeme H_s, und $[s]$ ist der Durchschnitt (die Gemeinheit) aller dem Elemente s entsprechenden Systeme H_s.

▷ Offenbar.

5. Satz. $H_s = S$ oder *echter* Teil von S, je nachdem s' in H_s liegt oder nicht.

▷ Denn wenn s' in H_s liegt, so folgt aus (3.II), dass H'_s 3 H_s, also nach (2), dass $H_s = S$ ist; und umgekehrt, wenn $H_s = S$, so liegt auch s' in H_s.

6. Satz. Ist H_s *echter* Teil von S, so ist s' das einzige Element von H'_s, das außerhalb H_s liegt.

▷ Denn jedes Element k von H'_s ist Bild h' von mindestens einem Element h in H_s; ist nun $k = h'$ verschieden von s', so ist auch h verschieden von s, und folglich (nach 3.II) liegt $k = h'$ in H_s, während das Element s' von H'_s nach 5 außerhalb H_s liegt.

7. Satz. Jedes System H'_s ist ein System $H_{s'}$, das heißt (Definition 3):

I'. s' ist Element von H'_s.

II'. Ist k ein von s' verschiedenes Element von H'_s, so liegt auch k' in H'_s.

▷ Das Erste folgt daraus, dass s in H_s liegt, das Zweite daraus, dass nach Satz 6 k in H_s liegt.

8. Satz. Sind A, B, C ... spezielle, demselben s entsprechende Systeme H_s, so ist auch ihr Durchschnitt H ein System H_s.

▷ Denn zufolge 3.I ist s gemeinsames Element von $A, B, C, \ldots$, also auch Element von H. Ist ferner h ein von s verschiedenes Element von H, so ist zufolge 3.II das Bild h' Element von A, von B, von C, ..., also auch von H. Mithin erfüllt H die beiden für jedes H_s charakteristischen Bedingungen I, II in 3.

9. Definition. Sind a, b bestimmte Elemente von S, so soll das Symbol ab den Durchschnitt aller derjenigen Systeme H_b bedeuten (*Strecke* ab), welche (wie z. B. S) das Element a enthalten.

3. Definition. If s is a certain element of S, then H_s shall denote any part of S that satisfies the following two conditions:

I. s is element of H_s, so $[s] \subseteq H_s$, also

$$[s] + H_s = H_s.$$

II. If h is an element of H_s different from s, then h' is also an element of H_s. So if $H \subseteq H_s$, but s is *not contained* in H, then $H' \subseteq H_s$.

4. Theorem. S and $[s]$ are special systems H_s, and $[s]$ is the *intersection* (the common) of all systems H_s corresponding to the element s.

▷ Obvious.

5. Theorem. $H_s = S$ or H_s is a *proper* part of S, depending on whether s' lies in H_s or not.

▷ For if s' lies in H_s, then it follows from (3.II) that $H'_s \subseteq H_s$, therefore by (2) that $H_s = S$. Conversely, if $H_s = S$, then s' also lies in H_s.

6. Theorem. If H_s is a *proper* part of S, then s' is the only element of H'_s that lies outside H_s.

▷ This is because every element k of H'_s is the image h' of at least one element h in H. If $k = h'$ is different from s', then h is also different from s, and consequently (by 3.II) $k = h'$ lies in H_s, while the element s' of H'_s by 5 lies outside H_s.

7. Theorem. Every system H'_s is a system $H_{s'}$, that is (by definition 3.):

I'. s' is element of H'_s

II'. If k is an element of H'_s that is different from s', then k' also lies in H'_s.

▷ The first follows from the fact that s lies in H_s, the second from the fact that k lies in H_s by 6.

8. Theorem. If A, B, C ... are special systems H_s corresponding to the same s, then their intersection H is also a system H_s.

▷ Because according to 3.I s is a common element of $A, B, C, \ldots$, thus also an element of H. If h is an element of H that is different from s, then by 3.II, the image h' is an element of A, of B, of C, ..., and therefore also of H. H thus fulfills the two conditions I and II in definition 3 that are characteristic of every H_s.

9. Definition. If a, b are certain elements of S, then the symbol ab (*section ab*) should mean the intersection of all those systems H_b which (such as S) contain the element a.

10. Satz. a ist Element von ab, d. h. $[a]$ 3 ab.

▷ Denn ab ist der Durchschnitt von lauter solchen Systemen H_b in denen a liegt. (a *Anfang* von ab.)

11. Satz. ab ist ein System H_b, d. h. $[b]$ 3 ab, und wenn s ein von b verschiedenes Element von ab ist, so ist $[s']$ 3 ab.

▷ Dies folgt aus 8.

Also b Element (*Ende*) von ab. Ist H 3 ab, aber b nicht in H enthalten, so ist H' 3 ab.

12. Satz. Aus $[a]$ 3 H_b folgt ab 3 H_b.

▷ Unmittelbare Folge von 9.

13. Satz. $aa = [a]$.

▷ Dies folgt aus 4, weil aa der Durchschnitt aller H_a ist, die ja alle das Element a enthalten nach 3.I

14. Satz. Ist b' Element von ab, so ist $ab = S$.

▷ Dies folgt aus 11 und 5.

15. Satz. $b'b = S$.

▷ Dies folgt aus 14 und 10.

16. Satz. Ist c Element von ab, so ist cb 3 ab.

▷ Dies folgt aus 12, denn ab ist ein H_b, (nach 11), welches das Element c enthält.

17. Satz. Bedeutet $A+B$ das aus A, B zusammengesetzte System, so ist

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Denn wenn s Element von $a'b$, so ist s' in $b'a$ oder $a'b$ enthalten, je nachdem $s = b$ oder verschieden von b (zufolge 10 oder 11 und 3.II), und ebenso, wenn s Element von $b'a$, so ist s' in $a'b$ oder $b'a$ enthalten; also ist $(a'b + b'a)'$ 3 $a'b + b'a$; hieraus folgt der Satz nach (2).

18. Satz. Ist a verschieden von b, so ist $ab = [a] + a'b$.

▷ Denn da a ein von b verschiedenes Element von ab ist, so ist a' Element von ab 10, 11, und folglich 16 ist $a'b$ 3 ab; da ferner 10 auch $[a]$ 3 ab, mithin

$$[a] + a'b \; 3 \; ab.$$

Ferner: jedes von b verschiedene Element s von $[a]+a'b$ ist entweder $= a$ oder ein von b verschiedenes Element von $a'b$, in beiden Fällen ist s' (nach 10, 11) Element von $a'b$, also auch von $[a] + a'b$, und da 11 auch $[b]$ 3 $[a] + a'b$, so ist $[a] + a'b$ ein System H_b; da endlich auch $[a]$ 3 $[a] + a'b$, so ist 12 auch

$$ab \; 3 \; [a] + a'b.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate folgt der Satz.

10. Theorem. a is an element of ab, i.e., $[a] \subseteq ab$.

▷ This is because ab is the intersection of all systems H_b in which a lies. (So a is the *start* of ab.)

11. Theorem. ab is a system H_b, i.e. $[b] \subseteq ab$, and if s is an element of ab different from b, then $[s'] \subseteq ab$.

▷ This follows from 8.

So b is an element (the *end*) of ab. If $H \subseteq ab$ but b is not contained in H, then $H' \subseteq ab$.

12. Theorem. From $[a] \subseteq H_b$, follows from $ab \subseteq H_b$.

▷ Immediate consequence of definition 9.

13. Theorem. $aa = [a]$.

▷ This follows from 4, because aa is the intersection of all H_a that contain the element a according to 3.I.

14. Theorem. If b' is an element of ab, then $ab = S$.

▷ This follows from 11 and 5.

15. Theorem. $b'b = S$.

▷ This follows from 14 and 10.

16. Theorem. If c is an element of ab, then $cb \subseteq ab$.

▷ This follows from 12, since ab is an H_b by 11, that contains the element c.

17. Theorem. If $A + B$ means the system composed of A, B, then one has

$$a'b + b'a = S.$$

▷ Because if s is an element of $a'b$, then s' is contained in $b'a$ or $a'b$, depending on $s = b$ or different from b (according to 10 or 11 and 3.II), and likewise if s is an element of $b'a$, then s' is contained in $a'b$ or $b'a$; therefore $(a'b + b'a)' \subseteq a'b + b'a$. This leads to the theorem according to (2).

18. Theorem. If a is different from b, then $ab = [a] + a'b$.

▷ For since a is an element of ab different from b, then a' is an element of ab (by 10, 11), and consequently (by 16) $a'b \subseteq ab$; since furthermore, by 10, we also have $[a] \subseteq ab$, therefore

$$[a] + a'b \subseteq ab.$$

Also, every element s of $[a] + a'b$ that is different from b is either $= a$ or an element of $a'b$ that is different from b. Thus in both cases s' is (by 10, 11) an element of $a'b$, therefore also of $[a] + a'b$, and since by 11) also $[b] \subseteq [a] + a'b$, it follows that $[a] + a'b$ is a system H_b. Finally, since $[a] \subseteq [a] + a'b$, by 12 also

$$ab \subseteq [a] + a'b.$$

The theorem follows from the comparison of both results.

19. Satz. Sind a, b verschiedene Elemente von S, so liegt a außerhalb $a'b$, und b liegt außerhalb $b'a$.

▷ Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein von b verschiedenes Element a, das in $a'b$ liegt, und bezeichnet mit A das System aller solcher Elemente a, so ergibt sich folgendes.

Setzt man $a' = s$, so liegt a in sb, und da a verschieden von b ist, also (nach 13) nicht in bb liegt, so ist s verschieden von b, und hieraus folgt (nach 18), dass $sb = [s] + s'b$ ist. Da ferner a (nach 2) verschieden von s ist und in sb liegt, so muss a in $s'b$ liegen, und hieraus folgt (wieder nach 1), dass auch s (als Bild a') in $s'b$ liegt.

Mithin ist das Bild a' eines jeden Elementes a von A ebenfalls in A enthalten, also A' 3 A. Da aber hieraus $a = S$ folgen würde, während doch A das Element b nicht enthält, so ist unsere Annahme unzulässig, also der Satz wahr, w.z.b.w.

Der zweite Teil folgt durch Vertauschung von a mit b.

20. Satz. Sind a, b verschieden, so haben die Strecken $a'b, b'a$ kein gemeinsames Element.

▷ Nimmt man nämlich das Gegenteil an, es gebe ein gemeinsames Element m von $a'b$, $b'a$, so folgt aus dem vorhergehenden Satz 19, dass m verschieden von b und von a ist; mithin muss 11 das Bild m' ebenfalls gemeinsames Element von $a'b$ und $b'a$ sein.

Bezeichnet man daher mit M das System aller solcher Elemente m, so ist M' 3 M, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil a, b Elemente von S, aber nicht Elemente von M sind. Also ist unser Satz wahr.

21. Satz. Sind a, b verschieden, so sind auch die Bilder a', b' verschieden.

▷ Denn sonst hätten die Strecken $a'b, b'a$ ein gemeinsames Element $a' = b'$, weil a' (nach 10) Element von $a'b$ und b' Element von $b'a$ ist.

22. Satz. Aus $cb = S$ folgt $c = b'$.

▷ Es gibt (nach 1 und 21) in S ein und nur ein Element a, welches der Bedingung $a' = c$ genügt, und es ist also $a'b = S$, mithin $[a]$ 3 $a'b$; es muss daher (19) $a = b$, also $c = b'$ sein, w.z.b.w.

23. Satz. Sind a, b verschieden, so ist jedes Element von S in einer und nur einer der Strecken $a'b, b'a$ enthalten.

▷ Dies folgt aus 17 und 20.

24. Satz. Sind a, b, c verschieden, so haben die Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ kein gemeinsames Element, und dasselbe gilt von den Strecken $a'c$, $b'a$, $c'b$.

▷ Denn die gegenteilige Annahme, es gebe ein den Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$ gemeinsames Element m, führt zu einem Widerspruch. Es sei M das System aller solcher Elemente. Da (nach 19) a nicht

19. Theorem. If a, b are different elements of S, then a lies outside $a'b$, and b lies outside $b'a$.

▷ If one assumes the opposite, that there is an element a that is different from b and lies in $a'b$, and that A denotes the system of all such elements a, the following holds.

If one puts $a' = s$, then a lies in sb, and since a is different from b, and therefore (according to 13) is not in bb, then s is different from b, and from this it follows (according to 18) that $sb = [s] + s'b$. Furthermore, since a (according to 2) is different from s and lies in sb, then a must lie in $s'b$, and from this it follows (again according to 1) that s (as the image a') also lies in $s'b$.Therefore, the image a' of every element a of A is also contained in A, i.e. $A' \subseteq A$. But since $A = S$ would follow from this, while A does not contain the element b, our assumption is inadmissible, so the theorem is true, qed. The second part follows by exchanging a with b.

20. Theorem. If a, b are different, then the segments $a'b$, $b'a$ have no common element.

▷ If one assumes the opposite, that there is a common element m of $a'b$, $b'a$, then it follows from the preceding Theorem 19 that m is different from b and from a; therefore (according to 11) the image m' must also be a common element of $a'b$ and $b'a$.

Therefore, if M denotes the system of all such elements m, then $M' \subseteq M$, thus $M = S$. But this is impossible because a, b are elements of S but not elements of M. So our theorem is true.

21. Theorem. If a, b are different, then the images a', b' are also different.

▷ Otherwise the segments $a'b$, $b'a$ would have a common element $a' = b'$, because (according to 10) a' is an element of $a'b$ and b' is an element of $b'a$.

22. Theorem. From $cb = S$ follows $c = b$.

▷ There is (according to 1 and 21) in S one and only one element a which satisfies the condition $a' = c$, and therefore $a'b = S$, therefore $[a] \subseteq a'b$; therefore (by 19) $a = b$, thus $c = b'$, qed.

23. Theorem. If a, b are different, then every element of S is contained in one and only one of the segments $a'b$, $b'a$.

▷ This follows from 17 and 20.

24. Theorem. If a, b, c are different, then the segments $b'c$, $c'a$, $a'b$ have no common element, and the same applies to the segments $a'c$, $b'a$, $c'b$.

▷ Because the opposite assumption, that there is an element m common to the segments $b'c$, $c'a$, $a'b$, leads to a contradiction. Let M be the system of all such elements. Since (according to 19) a is in $a'b$, b nicht in $b'c$, c nicht in $c'a$ liegt, so ist m verschieden von c, a, b, und folglich (11) ist m' ebenfalls gemeinsames Element von $b'c$, $c'a$, $a'b$, also Element von M.

Mithin ist M' 3 M, also $M = S$. Dies ist aber unmöglich, weil M keins der Elemente a, b, c enthält. Also ist unser Satz wahr.

Der zweite Teil ergibt sich aus dem ersten, wenn man a mit b vertauscht, wodurch die Annahme nicht geändert wird.

Zusatz. Setzt man (wie auch in dem folgenden 25):

$$A = c'b,\ B = a'c,\ C = b'a;\ A_1 = b'c,\ B_1 = c'a,\ C_1 = a'b,$$

so ist $A - B - C = 0$ (leer) (dabei bedeutet das Zeichen $-$ den Durchschnitt) und $A_1 - B_1 - C_1 = 0$ (leer) und (nach 17, 20) ist

$$S = A + A = B + B_1 = C + C_1;$$
$$0 = A - A_1 = B - B_1 = C - C_1.$$

Dies gilt auch dann (nach 20), wenn von den Elementen a, b, c wenigstens zwei verschieden sind.

25. Satz. Sind a, b, c verschieden, so tritt einer und nur einer der beiden folgenden Fälle ein: Entweder ist

$$b'c = b'a + a'c, \quad c'a = c'b + b'a, \quad a'b = a'c + c'b$$
$$c'b = c'a - a'b, \quad a'c = a'b - b'c, \quad b'a = b'c - c'a$$

und jedes Element von S liegt in einer, aber nur einer der Strecken $c'b$, $a'c$, $b'a$; oder es ist

$$c'b = c'a + a'b, \quad a'c = a'b + b'c, \quad b'a = b'c + c'a$$
$$b'c = b'a - a'c, \quad c'a = c'b - b'a, \quad a'b = a'c - c'b$$

und jedes Element von S liegt in einer, aber nur einer der Strecken $b'c$, $c'a$, $a'b$.

▷ Zufolge 23 liegt c entweder in $a'b$ oder in $b'a$. Wir betrachten nur den ersten Fall, weil aus ihm der zweite durch Vertauschung von a mit b hervorgeht. Da c in $a'b$ liegt und von b verschieden ist, so liegt (nach 11)) auch c' in $a'b$, und folglich (16) ist $c'b$ 3 $a'b$; hieraus folgt (nach 19), dass $c'b$ mit $b'a$ kein gemeinsames Element hat; nun ist (mit 17) $a'b + b'a = b'c + c'b$, mithin $b'a$ 3 $b'c$ und folglich (11) liegt a in $b'c$.

Aus der Annahme, dass c in $a'b$ liegt, hat sich also ergeben: $c'b$ 3 $a'b$, $b'a$ 3 $b'c$, a liegt in $b'c$. Auf dieselbe Weise ergeben sich aus dieser letzten Folgerung, wenn man c, a, b in der Annahme resp. durch a, b, c ersetzt, wieder die Folgerungen $a'c$ 3 $b'c$, $c'b$ 3 $c'a$, b liegt in $c'a$; und hieraus folgt abermals $b'a$ 3 $c'a$, $a'c$ 3 $a'b$ (und die erste Annahme: c liegt in $a'b$).

Es ist also: $c'b$ 3 $a'b$, $b'a$ 3 $b'c$, $a'c$ 3 $b'c$, $c'b$ 3 $c'a$, $b'a$ 3 $c'a$, $a'c$ 3 $a'b$, also auch $b'a + a'c$ 3 $b'c$, $c'b + b'a$ 3 $c'a$, $a'c + c'b$ 3 $a'b$.

not in $a'b$, b is not in $b'c$, c is not in $c'a$, then m is different from c, a, b, and consequently (by 11) m' is a common element of $b'c$, $c'a$, $a'b$, i.e. an element of M; therefore $M' \subseteq M$, hence $M = S$.

But this is impossible because M does not contain any of the elements a, b, c. So our theorem is true.

The second part results from the first if one swaps a with b, which does not change the assumption.

Corollary. If you put (as in the following 25):

$$A = c'b,\ B = a'c,\ C = b'a;\ A_1 = b'c,\ B_1 = c'a,\ C_1 = a'b,$$

then $A - B - C = 0$ (empty) (the symbol $-$ denotes intersection) and $A_1 - B_1 - C_1 = 0$ (empty) and (according to 17, 20) hence

$$S = A + A = B + B_1 = C + C_1;$$
$$0 = A - A_1 = B - B_1 = C - C_1.$$

This also applies (according to 20) if at least two of the elements a, b, c are different.

25. Theorem. If a, b, c are different, then one and only one of the following two cases occurs: Either

$$b'c = b'a + a'c, \quad c'a = c'b + b'a, \quad a'b = a'c + c'b$$
$$c'b = c'a - a'b, \quad a'c = a'b - b'c, \quad b'a = b'c - c'a$$

and each element of S lies in one, but only one, of the segments $c'b$, $a'c$, $b'a$; or

$$c'b = c'a + a'b, \quad a'c = a'b + b'c, \quad b'a = b'c + c'a$$
$$b'c = b'a - a'c, \quad c'a = c'b - b'a, \quad a'b = a'c - c'b$$

and each element of S lies in one, but only one, of the segments $b'c$, $c'a$, $a'b$.

▷ According to 23, c lies either in $a'b$ or in $b'a$. We only consider the first case because the second arises from it by exchanging a for b. Since c is in $a'b$ and is distinct from b, then (according to 11) c' also lies in $a'b$, and consequently (by 16) $c'b \subseteq a'b$; from this it follows (by 19) that $c'b$ has no element in common with $b'a$; now (by 17) is $a'b + b'a = b'c + c'b$, therefore $b'a \subseteq b'c$, and consequently (by 11) a is in $b'c$.

From the assumption that c lies in $a'b$, it follows: $c'b \subseteq a'b$, $b'a \subseteq b'c$, a lies in $b'c$. In the same way, this last conclusion follows if one assumes c, a, b replaced by a, b, c, respectively, again we have the consequences $a'c \subseteq bc$, $cb \subseteq c'a$, and that b lies in $c'a$; and from this it follows again $b'a \subseteq c'a$, $a'c \subseteq a'b$ (and the first assumption: c lies in $a'b$).

Therefore: $c'b \subseteq a'b$, $b'a \subseteq b'c$, $a'c \subseteq b'c$, $c'b \subseteq ca$, $b'a \subseteq c'a$, $a'c \subseteq a'b$, and also $b'a + a'c \subseteq b'c$, $c'b + b'a \subseteq c'a$, $a'c + c'b \subseteq a'b$.

Läge nun z. B. ein Element von $b'c$ weder in $b'a$, noch in $a'c$, so wäre es (nach 23) gemeinsames Element von $b'c$, $a'b$, $c'a$, was (nach 24) unmöglich ist; mithin ist $b'c \; 3 \; b'a + a'c$, also auch $b'c = b'a + a'c$, und ebenso folgt $c'a = c'b + b'a$, $a'b = a'c + c'b$.

Hätten nun z. B. $b'a$, $a'c$ ein gemeinsames Element, so wäre dasselbe auch gemeinsames Element von $b'c$, $c'a$, $a'b$, was (nach 24) nicht der Fall ist. Aus $S = b'c + c'b$ folgt endlich $S = b'a + a'c + c'b$, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Zusatz. Es kann nie gleichzeitig $[a] \; 3 \; cb$ und $[b] \; 3 \; ca$ sein; weil (nach 18) dann auch gleichzeitig $[a] \; 3 \; c'b$ und $[b] \; 3 \; c'a$ sein müsste, was unmöglich.

26. Satz. Aus $ab = cb$ folgt $a = c$, und wenn $ab = cd$ ein echter Teil von S ist, so ist $a = c$, $b = d$.

▷ Dies folgt schon aus früheren Sätzen. Da (nach 10) c in cb, also auch in ab liegt, so muss, falls $a = b$, also $ab = [a]$ ist, auch $c = a$ sein. Ist aber a verschieden von b, so ist (nach 18) $ab = [a] + a'b$, und (nach 19) $a'b$ ist echter Teil von ab; nimmt man an, es sei c verschieden von a, so muss c in $a'b$ liegen, also ist (nach 16) $cb \; 3 \; a'b$, also cb echter Teil von ab; da aber $cb = ab$ ist, so ist diese Annahme unzulässig, mithin immer $c = a$, w.z.b.w.

Ist ferner $ab = cd$ ein echter Teil von S, so muss $b = d$ sein; ist nämlich b verschieden von d, so muss (11) auch b' in cd, also auch in ab liegen; dann wäre aber (14) $ab = S$ gegen die Voraussetzung, also ist $b = d$, mithin $ab = cb$, also auch $a = c$, w.z.b.w.

27. Satz. Jedes (in 3 erklärte) System H_s, ist eine Strecke $a's$ mit dem Ende s und ihr Anfang a' ist völlig bestimmt.

▷ Ist $H_s = S$, so ist $H_s = s's$ (nach 15). Ist H_s aber echter Teil von S, so sei A das System aller außerhalb H_s liegenden Elemente von S, also $S = A + H_s$. Da A echter Teil von S ist, so kann nicht $A' \; 3 \; A$ sein, es gibt also gewiss ein Element a in A, dessen Bild a' außerhalb A, also in H_s liegt; da (nach 12) folglich $a's \; 3 \; H_s$ ist, so haben $a's$, A kein gemeinsames Element.

Da a in A, s in H_s (sogar in $a's$) liegt, so sind a, s verschieden, also haben (nach 20) die Strecken $a's$, $s'a$ kein gemeinsames Element, und (nach 17) ist $a's + s'a = S = H_s + A$, mithin $A \; 3 \; s'a$. Nimmt man nun an, es sei $a's$ ein echter Teil von H_s, und bezeichnet mit H das System aller derjenigen Elemente von H_s, welche außerhalb $a's$, also in $s'a$, so ist $H_s = H + a's$, und $s'a = H + A$, also ist $H = H_s - s'a$ der Durchschnitt der Systeme H_s, $s'a$.

Da nun weder s noch a in H liegt, so folgt aus $H \; 3 \; H_s$, und $H \; 3 \; s'a$ (nach 3 und 11), dass auch $H' \; 3 \; H_s$ und $H' \; 3 \; s'a$, also auch $H' \; 3 \; H$, mithin $H = S$ ist. Dies ist aber unmöglich, weil s (und ebenso a) außerhalb H liegt. Mithin ist gewiss $H_s = a's$, und $A = s'a$, w.z.b.w.

If now an element of, say, $b'c$ is neither in $b'a$ nor in $a'c$, then (by 23) it would be a common element of $b'c$, $a'b$, $c'a$, which (by 24) is impossible; therefore $b'c \subseteq b'a + a'c$, therefore also $b'c = b'a + a'c$, and likewise follows $c'a = c'b + b'a$, $a'b = a'c + c'b$.

If, say, $b'a$, $a'c$ have a common element, then the same would also be a common element of $b'c$, $c'a$, $a'b$, which (according to 24) is not the case. From $S = b'c + c'b$ we finally get $S = b'a + a'c + c'b$, which means our theorem is completely proven.

Corollary. It can never be that $[a] \subseteq cb$ and $[b] \subseteq ca$ at the same time; because (according to 18) then $[a] \subseteq c'b$ and $[b] \subseteq c'a$ would have to be at the same time, which is impossible.

26. Theorem. From $ab = cb$ it follows that $a = c$, and if $ab = cd$ is a proper part of S, then $a = c$, $b = d$.

▷ This follows from earlier theorems. Since (by 10) c is in cb, and therefore also in ab, then if $a = b$, then $ab = [a]$, then must also $c = a$. But if a is different from b, then (by 18) $ab = [a] + a'b$, and (by 19) $a'b$ is a proper part of ab. If one assumes that c is different from a, then c must lie in $a'b$, so (by 16) $cb \subseteq a'b$, i.e. cb is a proper part of ab; But since $cb = ab$, this assumption is inadmissible, and therefore always $c = a$, qed.

Furthermore, if $ab = cd$ is a proper part of S, then $b = d$; If b is different from d, then (by 11) b' must also be in cd, and therefore also in ab; But then (by 14) would $ab = S$ violating the assumption, so $b = d$, therefore $ab = cb$, therefore also $a = c$, qed.

27. Theorem. Every system H_s (defined in 3) is a segment $a's$ with the end s and its beginning a' completely determined.

▷ If $H_s = S$, then $H_s = s's$ (according to 15). But if H_s is a proper part of S, then A is the system of all elements of S that lie outside H_s, so $S = A + H_s$. Since A is a proper part of S, then $A' \subseteq A$ cannot be, so there is certainly an element a in A, whose image a' lies outside A, hence in H_s. Since (according to 12) $a's \subseteq H_s$, then $a's$ and A have no common element.

Since a is in A, s is in H_s (even in $a's$), then a and s are different, so (by 20) the segments $a's$, $s'a$ have no common element, and (by 17) $a's + s'a = S = H_s + A$, therefore $A \subseteq s'a$. If one now assumes that $a's$ is a proper part of H_s, and H denotes the system of all those elements of H_s which are outside $a's$, i.e., in $s'a$, then $H_s = H + a's$, and $s'a = H + A$, so $H = H_s - s'a$ is the intersection of the systems H_s, $s'a$.

Since neither s nor a lies in H, it follows from $H \subseteq H_s$, and $H \subseteq s'a$ (according to 3 and 11) that $H' \subseteq H_s$ and $H' \subseteq s'a$, therefore also $H' \subseteq H$, hence $H = S$. But this is impossible because s (and also a) lies outside H. Therefore certainly $H_s = a's$, and $A = s'a$, qed.