Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 265 · 2016

Monika Miśkiewicz-Nawrocka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
monika.miskiewicz@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE WYKŁADNIKA HURSTA DO WYZNACZANIA PORTFELI OPTYMALNYCH

Streszczenie: Publikacja H. Markowitza na temat wyznaczania optymalnego portfela inwestycyjnego spowodowała ogromny wzrost zainteresowania wielu badaczy analizą portfelową. Na przestrzeni ostatnich 60 lat pojawiły się liczne modyfikacje modelu Markowitza, a także powstało wiele nowych metod i modeli. Nowym podejściem, proponowanym w poniższym opracowaniu, jest zastosowanie wykładnika Hursta do wyznaczenia składu portfela optymalnego. Celem opracowania jest konstrukcja portfela optymalnego na podstawie wykładnika Hursta, miary TMAI oraz portfel Markowitza.

Słowa kluczowe: analiza portfelowa, wykładnik Hursta, taksonomiczna miara TMAI.

Wprowadzenie

Podstawowymi charakterystykami portfela akcji są oczekiwana stopa zwrotu oraz ryzyko tego portfela. W klasycznym podejściu, zaproponowanym przez H. Markowitza [1952] udziały akcji w portfelu wyznacza się rozwiązując zadanie minimalizacji ryzyka portfela, które mierzone jest za pomocą wariancji. Prowadzone od lat 50. ubiegłego wieku badania pokazują, że model Markowitza nie zawsze daje najlepsze rezultaty [np. Mastalerz-Kodzis i Pośpiech, 2011]. Ponieważ wykorzystanie wariancji do pomiaru ryzyka traktuje w sposób równoważny zyski i straty, zaczęto stosować inne miary ryzyka, tj. semi-wariancję [Markowitz, 1959; Trzpiot, 2006], momenty cząstkowe [Bawa, Lindenberg, 1977], skośność i kurtozę [Harvey i in., 2010], Value-at-Risk (VaR) i Conditional Value-at-Risk (CVaR) [Rockafellar, Uryasev, 2000], a także koherentne transformujące miary ryzyka (KTMR) [Trzpiot, 2014]. Od lat 90. XX w. w celu oszacowania składu portfela optymalnego pojawiają się modele wykorzystujące logikę rozmytą zwane modelami rozmytymi lub nieostrymi [Peng, Mok i Tse, 2005; Huang, 2006; Huang 2007; Huang 2008a; Huang, 2008b; Li, Qin i Kar, 2010; Rutkowska, 2013], gdzie znalezienie optymalnego portfela polega na maksymalizowaniu zysku z inwestycji przy jednoczesnej minimalizacji niepewności. Z kolei, inne metody uwzględniają sytuację ekonomiczno-finansową spółek (*TMAI*) [Tarczyński, 2002], a nawet największy wykładnik Lapunowa – miarę identyfikacji chaosu w szeregach czasowych [Miśkiewicz-Nawrocka i Zeug-Żebro, 2015]. W opracowaniu zastosowano nowe podejście oparte na wykładniku Hursta, który bada występowanie efektu długiej pamięci.

Celem opracowania jest próba dywersyfikacji ryzyka portfela inwestycyjnego opartego na zbudowanych portfelach optymalnych wyznaczonych na podstawie wartości wykładnika Hursta, taksonomicznej mierze atrakcyjności inwestycji *TMAI* oraz portfelu Markowitza. W badaniach pod uwagę wzięto ceny akcji wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie oraz wskaźniki opisujące sytuację ekonomiczno-finansową spółek w okresie od 1.01.2005-30.09.2014.

1. Wykładnik Hursta

Wykładnik Hursta H jest charakterystyką nieliniowych szeregów czasowych, która pozwala na rozróżnienie szeregów losowych (przypadkowych) od szeregów losowych z obciążonym błądzeniem przypadkowym. Wykładnik przyjmuje wartości z przedziału [0, 1]. Jeśli szereg ma charakter błądzenia przypadkowego, to $H = 0{,}5$. Jeżeli $0 \leq H < 0{,}5$, szereg jest antypersystentnym lub ergodycznym. W przypadku szeregu, dla którego $0{,}5 < H \leq 1$, szereg jest persystentnym, czyli wzmacniającym trend. Siła zachowań wzmacniających trend, jest tym większa im H jest bliższe jedności. Z kolei im H jest bliższe 0,5 tym wyższy poziom szumu w szeregu.

Dla szeregu czasowego złożonego z N obserwacji $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ wartość wykładnika Hursta szacuje się następująco [Chun, Kim i Kim, 2002; Miśkiewicz-Nawrocka, 2012]:

1. Powyższy szereg obserwacji zamieniamy w $M = N - 1$ logarytmicznych stóp zwrotu według wzoru:

$$y_k = \log\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right), \; k = 1, 2, ..., N. \tag{1}$$

2. Dzielimy szereg (1) na m części złożonych z n elementów,

$$m = [M/n],$$

gdzie: [ ] oznacza część całkowitą argumentu.
Jeśli iloraz M/n nie jest liczbą całkowitą, to $mn < M$. W tym przypadku, w dalszej części algorytmu użyjemy wartości y_k, dla $k = 1, 2, \ldots, mn$.

3. Definiujemy wartość:

$$z_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_i, \tag{2}$$

gdzie: y_{ij} oznacza j-tą wartość w i-tym przedziale,

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

4. Dla każdego i, ciąg sum częściowych z_{ij} wyraża się wzorem:

$$u_{ij} = \sum_{j=1}^{i} z_{ij}, \; i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

5. Zakres i-tego przedziału definiujemy jako:

$$R_i = \max_j(u_{ij}) - \min_j(u_{ij}). \tag{4}$$

6. Unormowana wartość zakresu dla i-tego przedziału i częściowego rozmiaru n jest dana wzorem:

$$\rho_{in} = R_i / S_i, \tag{5}$$

$$\text{gdzie } S_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Obliczając średnią ρ_{in} uzyskamy wynik analizy R/S:

$$\rho_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \rho_{in}. \tag{6}$$

7. Następnie powtarzamy obliczenia zwiększając długość przedziału o jedną jednostkę. Iterację kontynuujemy do momentu aż n osiągnie górną granicę:

$$n_{\max} = fl[(N-1)/2]. \tag{7}$$

8. Ustalając nachylenie wykresu logarytmów ρ_n do osi logarytmów n, otrzymamy wartość H.

2. *TMAI* – Taksonomiczna miara atrakcyjności inwestycji

Taksonomiczna miara atrakcyjności inwestycji *TMAI*, zaproponowana przez W. Tarczyńskiego [2002] pozwala na kompleksową ocenę spółek na podstawie najważniejszych wskaźników finansowych i rynkowych oraz przedstawienie jej w postaci syntetycznej miary.

Idea tej metody polega na wyznaczeniu obiektu wzorca y_{0j} danego wzorem [Hellwig, 1968, 1979; Tarczyński, 2002]:

$$y_{0j} = \max_i \{y_{ij}\}, \tag{8}$$

gdzie:
y_{ij} – znormalizowana obserwacja x_{ij},

$$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_j}, \tag{9}$$

x_{ij} – wartość *j*-tej zmiennej diagnostycznej dla *i*-tego obiektu (spółki),
$X = [x_{ij}], \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n$ – macierz obserwacji,
m – liczba obiektów,
n – liczba zmiennych diagnostycznych,
$\bar{x}_j$, S_j – średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe *j*-tej zmiennej.

Miara *TMAI* szacowana jest według wzoru:

$$TMAI_i = 1 - \frac{d_i}{d_0}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{10}$$

gdzie:
$TMAI_i$ – taksonomiczna miara atrakcyjności *i*-tego obiektu,
d_i – odległość *i*-tego obiektu od obiektu wzorca,
d_0 – norma zapewniająca przyjmowanie przez $TMAI_i$ wartości z przedziału [0,1],

$$d_0 = \overline{d} + 2S_d, \tag{11}$$

$\overline{d}$ – średnia arytmetyczna odległości d_i,

S_d – odchylenie standardowe odległości d_i.

3. Optymalny portfel akcji

W klasycznym podejściu udziały akcji w portfelu wyznacza się na podstawie modelu H. Markowitza [1952], tak aby zminimalizować ryzyko tego portfela. Zadanie optymalizacyjne przyjmuje wówczas poniższą postać.

Zadanie 1

$$\min S_p^2, \tag{12}$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., m,$$

gdzie:

R_0 – oczekiwana stopa zwrotu dla spółek,

R_p – oczekiwana stopa zwrotu portfela *m* akcji,

$$R_p = \sum_{i=1}^{m} x_i R_i, \tag{13}$$

S_p – ryzyko portfela *m* akcji,

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 S_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} x_i x_j S_i S_j \rho_{ij}, \tag{14}$$

R_i – oczekiwana stopa zwrotu *i*-tej akcji,

S_i – odchylenie standardowe akcji *i*-tej spółki,

ρ_{ij} – współczynnik korelacji i-tej akcji z j-tą akcją,

x_i – udział i-tej akcji w portfelu,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m, \tag{15}$$

m – liczba akcji w portfelu.

W celu wyznaczenia optymalnego portfela akcji można rozwiązywać również zadania optymalizacyjne [Mastalerz-Kodzis, Pośpiech, 2011] w postaci przedstawionej w poniższym zadaniu.

Zadanie 2

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} TMAI_i x_i\right), \tag{16}$$

z warunkami ograniczającymi

$R_p \geq R_0$

$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \leq S_0$

$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

$x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., m,$

gdzie:

S_0 – średnie odchylenie standardowe spółek,

pozostałe oznaczenia jw.

Zadanie 3

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} TMAI_i x_i\right), \tag{17}$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \le S_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i \ge A_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

gdzie:

A_i – współczynnik asymetrii,

A_0 – uśredniony współczynnik asymetrii,

pozostałe oznaczenia jw.

Nowym podejściem jest wykorzystanie do budowy portfela optymalnego narzędzia wywodzącego się z teorii nieliniowych układów dynamicznych – wykładnika Hursta. W tym celu proponuje się rozwiązać następujące zadania maksymalizacji:

Zadanie 4

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} H_i x_i\right), \tag{18}$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \ge R_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \le S_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

gdzie:

H_i – wykładnik Hursta dla szeregu czasowego generowanego przez ciąg notowań akcji *i*-tej spółki,

pozostałe oznaczenia jw.

Zadanie 5

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} H_i x_i\right), \tag{19}$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \leq S_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i x_i \geq A_0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., m,$$

gdzie: oznaczenia jw.

4. Wyniki badań empirycznych

Badania empiryczne przeprowadzono na podstawie spółek notowanych na GPW w Warszawie: Grupa Apator SA (APT), Asseco Poland SA (ACP), Bank Handlowy w Warszawie SA (BHW), Bank Zachodni WBK SA (BZW), Firma Oponiarska Dębica SA (DBC), ING Bank Śląski SA (ING), KGHM Polska Miedź SA (KGH), LPP SA (LPP), mBank SA (MBK), Mostostal Zabrze SA (MSZ), Orange Polska SA (OPL), Bank Polska Kasa Opieki (PEO), Powszechna Kasa Oszczędności Bank Polski SA (PKO), Vistula Group SA(VST) oraz Grupa Żywiec SA (ZWC) w okresie 1.01.2005-30.09.2013.

Wykładnik Hursta dla analizowanych spółek oszacowano na podstawie algorytmu przedstawionego w punkcie 1 dla szeregów czasowych utworzonych z logarytmów dziennych stóp zwrotu cen zamknięcia ww. akcji notowanych w okresie 1.01.2005-30.09.2013[1]. Wartości wykładnika Hursta[2] przedstawiono w tabeli 1.

Do wyznaczenia wartości taksonomicznej miary *TMAI* wykorzystano dane zamieszczone w raportach finansowych spółek za trzeci kwartał 2013[3]. W zależno-

---

[1] Dane pochodzą ze strony stooq.com.
[2] Obliczenia wykonano za pomocą programu GRETL.
[3] Dane pochodzą z obliczeń własnych autora na podstawie raportów finansowych spółek.

ści od specyfiki działalności spółek (finansowe/niefinansowe), jako zmienne diagnostyczne przyjęto wskaźniki rynkowe lub wskaźniki ekonomiczno-finansowe [Nawrocki i Jabłoński, 2011; Tarczyński, 2013]. Dla spółek finansowych (BHW, BZW, ING, MBK, PEO, PKO) wzięto pod uwagę następujące wskaźniki:
– rentowności: rentowność aktywów (ROA), rentowność kapitału własnego (ROE),
– adekwatności kapitałowej (współczynnik wypłacalności).

Natomiast dla spółek niefinansowych (APT, ACP, DBC, KGH, LPP, MSZ, OPL, VST, ZWC) zastosowano:
– wskaźniki płynności: wskaźnik płynności bieżącej, wskaźnik płynności szybkiej,
– wskaźniki rentowności: rentowność aktywów (ROA), rentowność kapitału własnego (ROE), marża ze sprzedaży,
– wskaźniki zadłużenia: wskaźnik ogólnego zadłużenia,
– sprawność zarządzania: wskaźnik rotacji należności, wskaźnik rotacji zapasów.

Do analizy taksonomicznej wybrano te spółki, dla których wartości powyższych wskaźników były dodatnie. Wartości oszacowanej miary *TMAI* dla analizowanych spółek na dzień 30.09.2013 przedstawiono obok wykładnika Hursta w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości wykładnika Hursta oraz taksonomicznej miary *TMAI* dla analizowanych spółek na dzień 30.09.2013 r.

Spółka	Wykładnik Hursta	*TMAI*
ACP	0,53857	0,16549
APT	0,59404	0,22767
BHW	0,60035	0,83648
BZW	0,59480	0,50433
DBC	0,60139	0,14089
ING	0,63459	0,19580
KGH	0,60043	0,22874
LPP	0,60889	0,30137
MBK	0,60504	0,31354
MSZ	0,63006	–
OPL	0,51297	0,04530
PEO	0,53879	0,58580
PKO	0,53781	0,33451
VST	0,63422	0,12324
ZWC	0,52669	0,22708

W następnym etapie badania zbudowano 18 optymalnych portfeli inwestycyjnych, rozwiązując zadania optymalizacyjne postawione w punkcie 3. W skład utworzonych portfeli weszły spółki będące rozwiązaniem zadań 1-5, a także spółki będące rozwiązaniem zadań 1-5, dla których przyjęto dodatkowe założenia odnośnie wartości wykładnika Hursta $H_i \geq 0,6$ oraz $H_i < 0,6$. W celach porównawczych zbudowano również portfele o równych udziałach akcji. Szczegóły konstrukcji portfeli zawiera tabela 2.

Tabela 2. Warunki doboru spółek do portfeli optymalnych

Portfel 1	**Portfel 2**	**Portfel 3**	**Portfel 4**	**Portfel 5**	**Portfel 6**
Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5	Równe udziały
Portfel 1'	**Portfel 2'**	**Portfel 3'**	**Portfel 4'**	**Portfel 5'**	**Portfel 6'**
Zadanie 1 $H_i \geq 0,6$	Zadanie 2 $H_i \geq 0,6$	Zadanie 3 $H_i \geq 0,6$	Zadanie 4 $H_i \geq 0,6$	Zadanie 5 $H_i \geq 0,6$	Równe udziały $H_i \geq 0,6$
Portfel 1"	**Portfel 2"**	**Portfel 3"**	**Portfel 4"**	**Portfel 5"**	**Portfel 6"**
Zadanie 1 $H_i < 0,6$	Zadanie 2 $H_i < 0,6$	Zadanie 3 $H_i < 0,6$	Zadanie 4 $H_i < 0,6$	Zadanie 5 $H_i < 0,6$	Równe udziały $H_i < 0,6$

Do obliczenia udziałów poszczególnych spółek w portfelu wykorzystano narzędzie *solver* będące dodatkiem do arkusza kalkulacyjnego *Excel*. W tabelach 3-5 przedstawiono udziały poszczególnych spółek oraz wartość oczekiwaną i ryzyko zbudowanych portfeli. Znak „–" postawiono przy spółkach, które nie weszły w skład portfela optymalnego oraz przy tych, które ze względu na ujemne wartości wskaźników ekonomiczno-finansowych, nie były brane pod uwagę przy szacowaniu *TMAI* (MSZ w portfelach 2, 2', 2", 3, 3' i 3").

Tabela 3. Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach

Spółka	Udziały akcji					
	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 4	Portfel 5	Portfel 6
ACP	0,01523	0,01525	0,01530	–	–	0,06667
APT	0,01454	0,01454	0,01455	–	–	0,06667
BHW	0,00478	0,00478	0,00478	–	–	0,06667
BZW	0,00970	0,00971	0,00971	–	–	0,06667
DBC	0,02666	0,02671	0,02668	–	–	0,06667
ING	–	0,05000	0,04939	0,82883	0,30704	0,06667
KGH	–	–	0,05000	–	–	0,06667
LPP	0,00736	0,00736	0,00737	–	–	0,06667
MBK	–	0,04809	0,04807	–	–	0,06667
MSZ	0,00624	–	–	–	–	0,06667
OPL	0,05966	0,06005	0,06087	–	–	0,06667
PEO	0,14613	0,14718	0,14667	–	–	0,06667
PKO	0,11561	0,11562	0,11310	–	–	0,06667
VST	0,16673	0,17705	0,18376	0,05110	0,45765	0,06667
ZWC	0,42735	0,32365	0,26975	0,12007	0,23531	0,06667
Oczekiwana stopa zwrotu portfela	0,002996	0,003300	0,003357	0,002996	0,006028	0,002996
Ryzyko portfela	0,000049	0,000050	0,000054	0,000341	0,000217	0,000113

Tabela 4. Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach z warunkiem $H_i \geq 0{,}6$

Spółka	Udziały akcji					
	Portfel 1'	Portfel 2'	Portfel 3'	Portfel 4'	Portfel 5'	Portfel 6'
BHW	0,00654	0,00369	0,00369	–	–	0,125
DBC	0,19604	0,10143	0,10143	–	0,28343	0,125
ING	0,12881	0,17992	0,17992	–	–	0,125
KGH	0,25136	0,35655	0,35655	–	–	0,125
LPP	0,01054	0,00893	0,00893	–	–	0,125
MBK	0,19103	0,10932	0,10932	0,88141	0,13879	0,125
MSZ	0,01299	–	–	–	–	0,125
VST	0,20269	0,24017	0,24017	0,11859	0,57778	0,125
Oczekiwana stopa zwrotu portfela	0,004060	0,004062	0,004062	0,003719	0,007729	0,003719
Ryzyko portfela	0,000189	0,000221	0,000221	0,000440	0,000326	0,000192

Tabela 5. Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach z warunkiem $H_i < 0{,}6$

Spółka	Udziały akcji					
	Portfel 1"	Portfel 2"	Portfel 3"	Portfel 4"	Portfel 5"	Portfel 6"
ACP	0,10870	0,00379	0,00379	–	–	0,14286
APT	0,32710	–	–	–	–	0,14286
BZW	0,12846	0,36759	0,36759	1	1	0,14286
OPL	0,15844	0,53640	0,53640	–	–	0,14286
PEO	0,07064	0,00922	0,00922	–	–	0,14286
PKO	0,05877	0,08300	0,08300	–	–	0,14286
ZWC	0,14789	–	–	–	–	0,14286
Oczekiwana stopa zwrotu portfela	0,002170	0,002259	0,002259	0,003842	0,003842	0,002170
Ryzyko portfela	0,000183	0,000323	0,000323	0,000480	0,000480	0,000198

Na podstawie danych przedstawionych w tabelach 3-5 można stwierdzić, że najwyższą oczekiwaną stopą zwrotu charakteryzuje się portfel 5' zbudowany ze spółek będących rozwiązaniem zadania optymalizacyjnego nr 5, które dodatkowo spełniały warunek $H_i \geq 0{,}6$. Ponadto w każdej z grup portfele zbudowane w oparciu o zadanie optymalizacyjne nr 5 osiągnęły najwyższe oczekiwane stopy zwrotu. Najniższy poziom ryzyka w każdej z grup odnotowano dla portfeli zbudowanych za pomocą modelu Markowitza (portfele 1, 1' i 1").

W tabeli 6 przedstawiono roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli uzyskane w okresie 30.09.2013-30.09.2014.

Tabela 6. Roczna stopa zwrotu dla wyznaczonych portfeli inwestycyjnych

	Portfel 1	**Portfel 2**	**Portfel 3**	**Portfel 4**	**Portfel 5**	**Portfel 6**
Stopa zysku portfela	0,0177	0,0480	0,0584	0,2183	0,0486	0,1498
	Portfel 1'	**Portfel 2'**	**Portfel 3'**	**Portfel 4'**	**Portfel 5'**	**Portfel 6'**
Stopa zysku portfela	0,1618	0,1600	0,1600	0,1306	0,1893	0,1587
	Portfel 1"	**Portfel 2"**	**Portfel 3"**	**Portfel 4"**	**Portfel 5"**	**Portfel 6"**
Stopa zysku portfela	0,0557	0,1742	0,1742	0,1672	0,1672	0,0663

Analizując roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli akcji (tabela 6) należy zauważyć, że największy zysk w okresie 30.09.2013-30.09.2014 można było uzyskać inwestując w portfel 4 będący rozwiązaniem zadania maksymalizacji wykładników Hursta. Najniższą stopę zwrotu uzyskano dla portfela 1 zbudowanego na podstawie klasycznego modelu Markowitza.

Podsumowanie

W opracowaniu podjęto próbę zbudowania optymalnego portfela akcji w oparciu o wartość wykładnika Hursta. Przeprowadzone badanie pokazało, że portfele będące rozwiązaniem zadania maksymalizacji średniej ważonej wykładników Hursta osiągnęły najwyższe oczekiwane stopy zwrotu. Podobne wyniki uzyskano dla rzeczywistych rocznych stóp zwrotu dla zbudowanych portfeli w okresie 30.09.2013-30.09.2014.

Literatura

Bawa V.S., Lindenberg E.B. (1977), *Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework*, "Journal of Financial Economics", Vol. 5(2), s. 189-200.

Chun S.H., Kim K.J., Kim S.H. (2002), *Chaotic Analysis of Predictability versus Knowledge Discovery Techniques: Case Study of the Polish Stock Market*, "Expert Systems", Vol. 19, No. 5, s. 264-272.

Harvey C.R., Liechty J., Liechty M., Muller P. (2010), *Portfolio Selection with Higher Moments*, "Quantitative Finance", Vol. 10(5), s. 469-485.

Hellwig Z. (1968), *Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr*, „Przegląd Statystyczny", nr 4.

Hellwig Z. (1979), *Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie do badania wielocechowych obiektów gospodarczych*, Referat na I Konferencję *Metody taksonomiczne i ich zastosowania w badaniach ekonomicznych*, Szklarska Poręba.

Huang X. (2006), *Fuzzy Chance-Constrained Portfolio Selection*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 177 (2), s. 500-507.

Huang X. (2007), *Portfolio Selection with Fuzzy Returns*, "Journal of Intelligent and Fuzzy Systems", Vol. 18(4), s. 383-390.

Huang X. (2008a), *Mean-Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection*, "IEEE Transaction on Fuzzy Systems", Vol. 16, s. 1096-1101.

Huang X. (2008b), *Mean-Semivariance Modles for Fuzzy Portfolio Selection*, "Journal of Computional and Applied Mathematics", Vol. 217(1), s. 1-8.

Li X, Qin Z., Kar S. (2010), *Mean-Variance-Skewness Model of Portfolio Selection with Fuzzy Returns*, "European Journal of Operational Research", Vol. 202(1), s. 239-247.

Markowitz H. (1952), *Portfolio Selection,* "Journal of Finance", s. 77-91.

Markowitz H. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Cowles Foundation, New Haven, CT.

Mastalerz-Kodzis A., Pośpiech E. (2011), *Fundamental and Behavioral Methods in Investment Decision Making* [w:] *Financial Management of Firms and Financial Institutions*, Wydawnictwo Technicznego Uniwersytetu w Ostrawie, Ostrawa, s. 250-257.

Miśkiewicz-Nawrocka M. (2012), *Zastosowanie wykładników Lapunowa do analizy ekonomicznych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.

Miśkiewicz-Nawrocka M., Zeug-Żebro K. (2015), *Zastosowanie wykładników Lapunowa do wyznaczania portfeli optymalnych*, Zeszyty Naukowe UE w Katowicach „Studia Ekonomiczne" nr 221, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice, s. 61-72.

Nawrocki T., Jabłoński B. (2011), *Inwestowanie na rynku akcji. Jak ocenić potencjał rozwojowy firm notowanych na GPW w Warszawie*, CeDeWu, Warszawa.

Peng J., Mok H.M.K., Tse W.M. (2005), *Credibility Programming Approach to Fuzzy Portfolio Selection Problems*, "Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learninig and Cybernetics", Vol. 4.

Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000), *Optimalization of Conditional Value-at-Risk*, "Journal of Risk", Vol. 2, s. 21-42.

Rutkowska A. (2013), *Zadanie maksymalizacji satysfakcji inwestora z portfela inwestycyjnego*, „Studia Oeconomica Posnaniensia", nr 1(9), s. 87-101.

Tarczyński W. (2002), *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*, PWE, Warszawa.

Tarczyński W. (2013), *Ocena efektywności metod analizy portfelowej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie za lata 2001-2013*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia" nr 761(60), s. 537-550.

Trzpiot G.(2006), *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

Trzpiot G. (2014), *Optymalizacja portfela z wykorzystaniem koherentnych transformujących miar ryzyka*, „Studia Ekonomiczne" nr 208, s. 74-85.

Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne*, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej, Katowice.

THE APPLICATION OF HURST EXPONENTS TO BUILDING OPTIMAL PORTFOLIOS

Summary: The publication of H. Markovitz on determining the optimal investment portfolio resulted in a huge increase of interest of many researchers of portfolio analysis. Over the past 60 years there have been numerous modifications of the Markowitz model, as well as many new methods and models. A new approach proposed in the following paper is the use of the Hurst exponent to determine the optimal portfolio composition. The paper aims to construct an optimal portfolio on the basis of the Hurst exponent, the TMAI measures and the portfolio of Markowitz.

Keywords: portfolio analysis, Hurst exponent, measure TMAI.